УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Беларусь

Рассматривается задача приближенного решения в гильбертовом пространстве линейного некорректного уравнения. Задача решается методом итераций неявного типа. Исследована сходимость метода с априорным выбором числа итераций в энергетической норме гильбертова пространства и изучен случай неединственного решения.

Ключевые слова: неявный итерационный метод, регуляризация, некорректная задача, гильбертово пространство, операторное уравнение первого рода, самосопряженный оператор, энергетическая норма.

Настоящая работа посвящена итерационному методу решения операторных линейных уравнений в гильбертовом пространстве с ограниченным, положительно определённым, самосопряжённым оператором в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Такими операторными уравнениями задаются некорректные задачи, которые были сформулированы в начале прошлого столетия [1-2] и долгое время не изучались, поскольку считалось, что они не могут отвечать никакой физической реальности и поэтому их решение не имеет смысла.

Однако потребности практики привели к необходимости решать некорректные задачи. Для их решения предложены и широко применяются метод регуляризации А. Н. Тихонова [3], метод квазирешений В. К. Иванова [4], метод невязки Д. Л. Филлипса [5] и В. К. Иванова и их модификации. Систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах XX века, но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М. М. Лаврентьева [6], А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина [7], В. К. Иванова, В. В. Васина и В. П. Тананы [8], О. А. Лисковца [9], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [10].

Наибольшее распространение получили итерационные методы решения некорректных задач [12–22]. Их частое использование связано с тем, что эти методы сравнительно легко программируются на ПЭВМ.

В статье предлагается регуляризующий алгоритм для некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде неявного итерационного метода, обладающим более высокими скоростными качествами, чем ранее известные методы.

В [23] для предлагаемого метода при решении уравнения с приближенной правой частью исследована сходимость в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова, обоснована возможность применения к методу правила останова по поправкам.

В данной статье продолжено изучение предложенного метода. Исследована его сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорный момент останова и условия, когда из сходимости итераций в энергетической норме гильбертова пространства следует их сходимость в исходной норме, доказана сходимость метода в случае неединственного решения.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций [6, 10–16] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right), \quad x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод [6, 10–16] предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе [6, 10–16] на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0<\alpha\le\frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемом неявном методе ограничений сверху на $\alpha>0$ нет. Это позволяет считать $\alpha>0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$), в связи с чем оптимальную оценку для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье итерационный метод может быть использован для решения прикладных некорректных задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, автоматической обработке результатов физического эксперимента, сейсмике, спектроскопии и медицине (томографии).

Работа выполнена в рамках темы «Итерационные процедуры решения операторных уравнений первого рода» (зарегистрирована в Белорусском институте системного анализа от 20.09.2011 № 20113449)

Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H рассматривается уравнение первого рода

$$Ax=y, \tag{1}$$

где A – положительно определенный, ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y\in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения предлагается итерационная процедура неявного типа

$$\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^k\right)^2x_n+2\alpha A^{k-1}y,\quad x_0=0,\quad k\in N. \tag{2}$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y-y_\delta\|\le\delta\right)$ соответствующие методу (2) итерации примут вид

$$\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_{n+1,\delta}=\left(E-\alpha A^k\right)^2x_{n,\delta}+2\alpha A^{k-1}y_\delta,\quad x_{0,\delta}=0,\quad k\in N. \tag{3}$$

Далее, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е. если $\lim\limits_{\delta\to0}\left(\inf\limits_n\|x-x_{n,\delta}\|\right)=0$.

Сходимость метода в энергетической норме. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, ранее [23] для метода (3) получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$, где $x\in H$ ([21-22]). Докажем сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства и получим для него в энергетической норме априорные оценки погрешности.

Рассмотрим разность

$$x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta}). \tag{4}$$

Запишем первое слагаемое в виде:

$$x-x_n=A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}y=\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}x.$$

Как было показано в [23], $x-x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n} x, \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n} x \right) =$$

$$= \int_0^M \lambda\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{4n}\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^{-2n} d\left(E_\lambda x, x\right).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{4n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^{2n}}$ при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s = 1$ функций, оцененных в [23]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ $\max_{\lambda \in [0,M]} |f(\lambda)| \le (4kn\alpha e)^{-1/k}$. Следовательно, справедлива оценка $\|x - x_n\|_A^2 \le (4kn\alpha e)^{-1/k}\|x\|^2$. Отсюда $\|x - x_n\|_A \le (4kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/2$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Нетрудно показать, что

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n}\right](y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta\right)$. Обозначим через $g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]$, тогда $g(\lambda) = g_1(\lambda)\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [23]: при условии $\alpha > 0$ $g_1(\lambda) \le 2k(n\alpha)^{1/k}$. При этом же условии имеем $\frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^2}{1 + \alpha^2\lambda^{2k}} \le 1,\ \forall\lambda \in [0, M]$, поэтому $1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n} \le 1$, откуда $g(\lambda) \le 2k(n\alpha)^{1/k}$. Таким образом, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \le 2k(n\alpha)^{1/k}\delta^2$, отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2^{1/2}k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta$, $n \ge 1$. Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + 2^{1/2}k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta$$

и $\|x - x_n\|_A \to 0$, $n \to \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n \to \infty$, достаточно, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 1. *При условии* $\alpha > 0$ *итерационный метод* (3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + 2^{1/2}k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta, \quad n \ge 1. \tag{5}$$

Оптимизируем оценку (5) по *n*. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-(k+2)/2}k^{-(k+1)/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-k}\|x\|^k. \tag{6}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(5k-2)/(4k)}k^{(k-1)/(4k)}e^{-1/(4k)}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}. \tag{7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *при условии* $\alpha > 0$ *в энергетической норме имеет вид* (7) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (6).

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-k})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (3).

Замечание 1. *Из неравенства* (7) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* α *и, поскольку на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha > 0)$, *то за счет выбора* α *можно получить* $n_{опт} = 1$, *т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первых шагах итераций. Для этого достаточно взять* $\alpha_{опт} = 2^{-(k+2)/2}k^{-(k+1)/2}e^{-1/2}\delta^{-k}\|x\|^k$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Эти условия дает

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, $\varepsilon -$ *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к решению x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства*.

Доказательство. **Так как по условию теоремы** $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ **и** $E_\varepsilon x = 0$, **то** $E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x) = 0$ **и** $(E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x),\ x_{n,\delta} - x) = 0$, **т. е.** $\int_0^\varepsilon d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$. **Следовательно, справедливо записать** $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0$. **Тогда получим, что**

$$\|x_{n,\delta} - x\|^2 = \int_0^M \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) + \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda}\ d(E_{\lambda}\ (x_{n,\delta}-x),\, A(x_{n,\delta}-x)) \le \frac{1}{\varepsilon}\left\|x_{n,\delta}-x\right\|_A^2 .$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\right]y_{\delta}$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_{\varepsilon}x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_{\varepsilon}y_{\delta}=0$. *Таким образом, если* $E_{\varepsilon}x=0$ *и* $E_{\varepsilon}y_{\delta}=0$, *то из сходимости метода итераций в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H. *Следовательно, для получения оценки погрешности не потребуется предположения истокопредставимости точного решения.*

Сходимость метода в случае неединственного решения. Покажем, что метод пригоден и в случае, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)).

Обозначим через $N(A)=\{x\in H \mid Ax=0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x\in H$ на $N(A)$, и $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $y\in H$, $\alpha>0$, *тогда для итерационного метода* (2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) *итерационный метод* (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Доказательство. Применим оператор A к формуле (2), получим

$$A\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_n = A\left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k y,$$

где $y = P(A)y + \Pi(A)y$.

Так как $AP(A)y=0$, то получим $A\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_n = A\left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k\Pi(A)y$, отсюда $\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)\left(Ax_n - \Pi(A)y\right) = \left(E-\alpha A^k\right)^2\left(Ax_n-\Pi(A)y\right)$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = \upsilon_n$, $\upsilon_n \in M(A)$, тогда $\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)\upsilon_n = \left(E-\alpha A^k\right)^2\upsilon_{n-1}$. Отсюда $\upsilon_n = \left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)^2\upsilon_{n-1}$, следовательно, $\upsilon_n = \left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\upsilon_0$. Имеем $A\ge 0$ и $A-$положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax,x)>0\ \ \forall x\in M(A)$. Так как $\alpha>0$, то $\left\|\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)^2\right\| \le 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|\upsilon_n\| = \left\|\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\upsilon_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_{\lambda}\upsilon_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_{\lambda}\upsilon_0\right\| + \left\|\int_{\varepsilon}^{\|A\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_{\lambda}\upsilon_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda}\upsilon_0\right\| + q^n(\varepsilon)\left\|\int_{\varepsilon}^{\|A\|} dE_{\lambda}\upsilon_0\right\| \le \|E_{\varepsilon}\upsilon_0\| + q^n(\varepsilon)\|\upsilon_0\| \to 0,$$

при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Здесь $\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^2} \le q(\varepsilon) < 1$ при $\lambda \in \left[\varepsilon, \|A\|\right]$. Следовательно, $\upsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ [11] . Итак, утверждение *а* доказано.

Докажем *б*. Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из *а* следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^*– минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_n = \left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^{k-1}\Pi(A)y =$$
$$= \left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_{n-1} -$$
$$-2\alpha A^k x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(x^*-x_{n-1}\right)$. Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}A^kP(A)\left(x^*-x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^*-x_{n-1}\right)=0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}A^k\Pi(A)\left(x^*-x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}A^k\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим через $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}A^k\left(x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right)$ получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}A^k\omega_{n-1} =$$
$$= \left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)^2\omega_{n-1} = \left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\omega_0.$$

Тогда

$$\|\omega_n\| = \left\|\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\omega_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\omega_0\right\| \le$$
$$\le \left\|\int_0^{\mu}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\omega_0\right\| + \left\|\int_\mu^{\|A\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\omega_0\right\| \le$$
$$\le \left\|\int_0^{\mu}dE_\lambda\omega_0\right\| + l^n(\mu)\left\|\int_\mu^{\|A\|}dE_\lambda\omega_0\right\| \le \|E_\mu\omega_0\| + l^n(\mu)\|\omega_0\| \to 0$$

при $n \to \infty$, $\mu \to 0$. Здесь $\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^2} \le l(\mu) < 1$ при $\lambda \in \left[\mu, \|A\|\right]$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$.
Отсюда $x_n \to P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 4 доказана.

Замечание 3. *Так как у нас* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т.е. итерационный метод* (2) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

В работе изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорная оценка погрешности и априорный момент останова, изучена сходимость метода в случае неединственного решения.

Библиографический список

1. **Hadamard, J.** Sur les problemes aux derivees partielies et leur sig-nification physique / J. Hadamard // Bull. Univ. Princeton. 1902. Vol. 13. P. 49–52.
2. **Hadamard, J.** Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris: Hermann et cie, 1932. – 542 p.
3. **Тихонов, А. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. – 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
4. **Иванов, В. К.** О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В. К. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1966. Т. 6. № 6. С. 1089–1094.
5. **Phillips, D. L.** A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. 1962. Vol. 9. № 1. P. 84–97.
6. **Лаврентьев, М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.
7. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
8. **Иванов, В. К.** Теория линейных некорректных задач и её приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
9. **Лисковец, О. А.** Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск: Наука и техника, 1981. – 342 с.
10. **Вайникко, Г.М.** Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М.: Наука. – 1986. – 178 с.
11. **Bialy, H.** Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1959. Vol. 4. N. 2. P. 166–176.
12. **Константинова, Я. В.** Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестник Белорус. ун-та. Серия 1. – 1973. № 1. С. 9–15.
13. **Samarsky, A. A.** Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics / A. A. Samarsky, P. N. Vabishchevitch. – Berlin : De Gruyter, 2007. – 480 p.
14. **Денисов, А. М.** Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 207 с.
15. **Vogel, C. R.** Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
16. **Gilyazov, S. F.** Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S. F. Gilyazov, N. L. Gol'dman. – Dordrecht ets.: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.
17. **Kilmer, M. E.** Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems / M. E. Kilmer, D. P. O'Leary // SIAM J. Matrix Anal. & Appl. 2001. Vol. 22. N. 4. P. 1204–1221.
18. **Vasin, V. V.** Ill-posed problems with a priori information / V. V. Vasin, A. L. Ageev. – Utrecht : VSP, 1995. – 239 p.
19. **Kabanikhin, S. I.** Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications / S. I. Kabanikhin. – Berlin: De Gruyter, 2011. – 459 p.
20. **Bakushinsky, A. B.** Iterative methods for ill-posed problems / A. B. Bakushinsky, V. Yu. Kokurin, A. B. Smirnova. – Berlin : De Gruyter, 2011. – 136 p.

21. **Matysik, O. V.** ***M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator*** / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). 2015. Vol. 15. N. 3. P. 373–389.
22. **Матысик, О. В.** Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
23. **Матысик, О. В.** Итерационная регуляризация некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. – 2015. № 4 (111). С. 52–61.

Дата поступления
в редакцию 01.04.2016

O.V. Matysik

THE ITERATION METHOD OF IMPLICIT TYPE FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS IN HILBERT SPACE

Brest State University n. a. A. S. Pushkin, Belarus

Purpose: Suggest regularizing algorithm for ill-posed problems, study its properties and to compare it with the previously known methods.
Design/methodology/approach: To construct the iteration method used is the most common of the currently known approaches to solving ill-posed problems - an approach based on the entered academician A.N. Tikhonov regularizer concept, as well as the general theory of ill-posed problems, the theory of functional analysis and computational mathematics.
Findings: Designed and studied effective implicit iteration method for ill-posed problems described by operator equations of the first kind.
Research limitation/implication: There are some unresolved questions - the study of convergence of the method in the case is not exactly given operator.
Originality/value: The research results can be applied for solving applied incorrect problems encountered in economics, spectroscopy and tomography, geophysical, engineering and management.

Key words: Implicit iteration method, regularization, ill-posed problem, Hilbert space, operator equation of the first kind, self-adjoint operator, the energy norm.