

УДК 537.311.3

С.В. Хорьков

## ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ЛИНЕЙНОГО ПРОТЕКАНИЯ ТОКА В УПОРЯДОЧЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Изучается влияние особых областей периодической двумерной среды на её нелинейную эффективную проводимость. Показано, что распределение локальных токов и полей существенно зависит от отношения линейных проводимостей её компонент. Такая зависимость приводит к расходимости коррелятора четвёртой степени от поля и, следовательно, к расходимости функций отклика связанной с данным коррелятором. Определено значение отношения линейных проводимостей компонент, при котором нелинейная эффективная проводимость изучаемой среды обнаруживает особенность в поведении.

*Ключевые слова:* неоднородные проводящие структуры, протекание, проводимость, нелинейная проводимость.

Проводящие среды интенсивно изучаются в связи с широким практическим применением. Ввиду особой роли дуальной симметрии [1] оказываются выделенными двумерные системы. Неоднократно отмечалась глубокая аналогия между двумерными случайными системами и периодическими решетками [1-4], позволяющие отнести их к одному классу универсальности в критической области, т.е. вблизи перехода металл-диэлектрик. Двумерные системы привлекательны и с точки зрения экспериментальной реализации, т.к. методы современной нанотехнологии позволяют создавать плёнки с заданной текстурой.

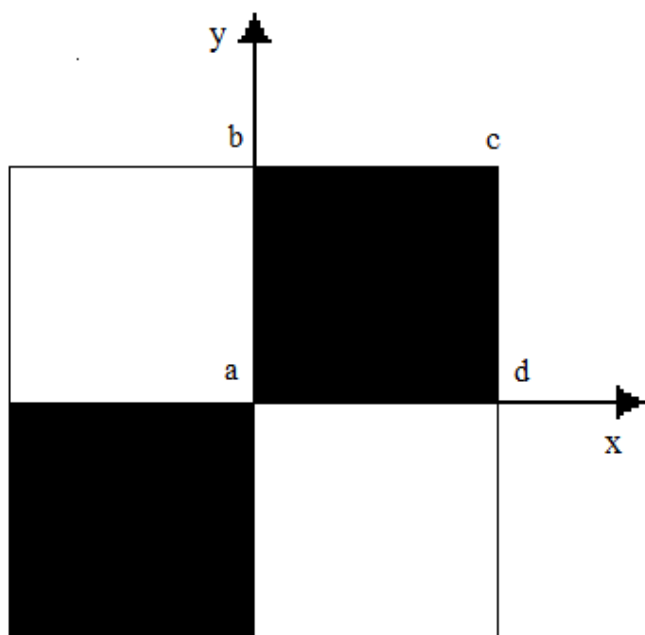


Рис. 1

В данной работе рассматривается плёнка с чередующимися в шахматном порядке ячейками. Пусть проводимости чёрной ячейки равна  $\sigma_1$ , а белой соответственно -  $\sigma_2$ . Фрагмент такой плёнки представлен на рис. 1. Данная среда находится на пороге протекания, поскольку концентрации компонент материалов равны. Как показано в работе [1], эффективная линейная проводимость рассматриваемой среды зависит от проводимостей ячеек по закону  $\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ . Отметим, что такое же выражение для проводимости справедливо и для двумерной среды со случайным, но одинаковым по концентрации разбросом компонент [1]. Аналогично ведут себя и квадратичные корреляторы полей  $\langle \bar{e}^2 \rangle$  и токов  $\langle \bar{j}^2 \rangle$ , где скобки  $\langle \dots \rangle$

обозначают усреднение по площади плёнки локального значения квадратов поля  $\bar{e}^2$  и тока  $\bar{j}^2$  соответственно. Это и позволяет отнести данные среды к одному классу универсальности.

В ряде экспериментальных работ [5-8] был обнаружен нелинейный отклик неупорядоченных плёнок, находящихся в критической области в зависимости от концентрации хо-

рошо проводящей компоненты. В работе [7] было показано, что нелинейная эффективная проводимость  $\chi_{\text{eff}}$  неоднородной среды определяется коррелятором  $\langle \bar{e}^4 \rangle$ :

$$\chi_{\text{eff}} = \langle \chi \bar{e}^4 \rangle / \langle \bar{e}^4 \rangle, \quad (1)$$

где  $\chi$  - локальная нелинейная проводимость компонент, а  $\bar{e}$  - локальное электрическое поле эквивалентной среды, полученное в линейном приближении. Выражение (1) справедливо только в случае слабой нелинейности, когда в локальном законе Ома добавляется следующее слагаемое в разложении тока  $\bar{j}$  по полю  $\bar{e}$ , т.е.

$$\bar{j} = \sigma \bar{e} + \chi \bar{e}^3. \quad (2)$$

Эффективная линейная и нелинейная проводимости многокомпонентной среды входят в выражение для усреднённого тока  $\bar{J}$ :

$$\bar{J} = \sigma_{\text{eff}} \bar{E} + \chi_{\text{eff}} \bar{E}^3, \quad (3)$$

где  $\bar{J} = \langle \bar{j} \rangle$ ,  $\bar{E} = \langle \bar{e} \rangle$ . Нелинейные отклик среды будет существенным, если в выражении (3) слагаемые станут одного порядка. Определим критическое поле нелинейности выражением

$$E_c = \sqrt{\sigma_{\text{eff}} / \chi_{\text{eff}}}, \quad (4)$$

а критический ток

$$J_c = \sigma_{\text{eff}} E_c. \quad (5)$$

Задачей данной работы является определение нелинейной эффективной проводимости  $\chi_{\text{eff}}$  среды по выражению (1), фрагмент которой, представлен на рис.1. Как отмечалось выше для этого необходимо вычислить распределение электрического поля  $\bar{e}$  в среде в линейном приближении. Такая задача была решена в работе [3]. Точное решение было получено с привлечением методов теории краевых задач аналитических функций. В силу двумерности среды удобно воспользоваться комплексным представлением векторов поля  $e(z) = e_x - ie_y$  и тока  $j(z) = j_x - ij_y$  (здесь  $z = x + iy$ ), которые являются аналитическими функциями внутри квадратов (исключая границы). Для комплексных векторов закон Ома сохраняет прежний вид:  $j(z) = \sigma(z)e(z)$ . Приведем выражение для электрического поля в ячейках с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно

$$e_1(z) = C(\cos \theta + \sin \theta) \exp[i\pi/2(1/2 - \gamma)] X(z) + C(\cos \theta - \sin \theta) \exp[i\pi/2(\gamma - 1/2)] X^{-1}(z), \quad (6)$$

$$e_2(z) = \frac{C}{\sqrt{h}} (\cos \theta + \sin \theta) \exp[i\pi/2(1/2 + \gamma)] X(z) + \frac{C}{\sqrt{h}} (\cos \theta - \sin \theta) \exp[i\pi/2(-\gamma - 1/2)] X^{-1}(z), \quad (7)$$

где

$$X(z) = \left[ \frac{\text{cn}(Kz/L, k)}{\text{sn}(Kz/L, k) \text{dn}(Kz/L, k)} \right]^{2\gamma}, \quad (8)$$

$\text{sn}(\cdot), \text{cn}(\cdot), \text{dn}(\cdot)$  - эллиптические функции Якоби;  $K$  - полный эллиптический интеграл с модулем  $k$  (для квадрата  $k = 1/\sqrt{2}$ ,  $K \approx 1.8541$ ),  $L$  - длина стороны квадратной ячейки;  $\theta$  - угол

между средним полем  $\vec{E}$  и осью "ox";  $C = |\vec{E}|\sqrt{1+h}/2I$ ;  $I = \frac{\pi^{3/2}}{2K \cos(\pi\gamma)} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}$ ;

$\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция. Параметр  $\gamma$  связан с отношением проводимостей ячеек  $h = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  уравнением

$$\text{tg}(\pi\gamma) = \frac{1-h}{2\sqrt{h}}, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Проанализируем распределение локального электрического поля в среде. Первое и второе слагаемые в (6) и (7) представляют собой частные решения, которые соответствуют направлениям внешнего поля по диагонали "ac" и "bd" соответственно (см. рис. 1). Функция  $X(z)$  вблизи вершин "a" и "c" имеет интегрируемые особенности

$$X(z) \propto \frac{1}{z^{2\gamma}}, \tag{10}$$

а в смежных углах "b" и "d":

$$X(z) \propto z^{2\gamma}. \tag{11}$$

Понятно, что для функции  $X^{-1}(z)$ , соответствующей направлению внешнего поля по диагонали "bd", особыми являются углы "d" и "b". Таким образом, при произвольном направлении внешнего поля общее решение имеет особенности во всех углах структуры. На рис. 2 и рис. 3 иллюстрируется распределение локального электрического поля в смежных ячейках при направлении внешнего тока вдоль оси "ox". Особенности типа (10) в окрестности особого угла будут играть важную роль в формировании нелинейного режима протекания тока.

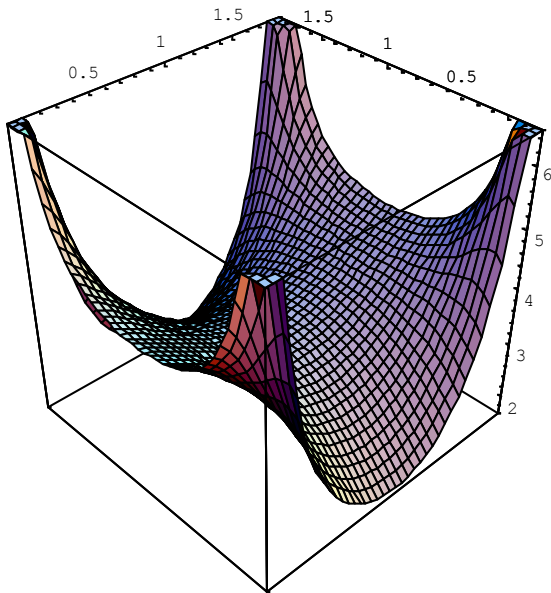


Рис. 2

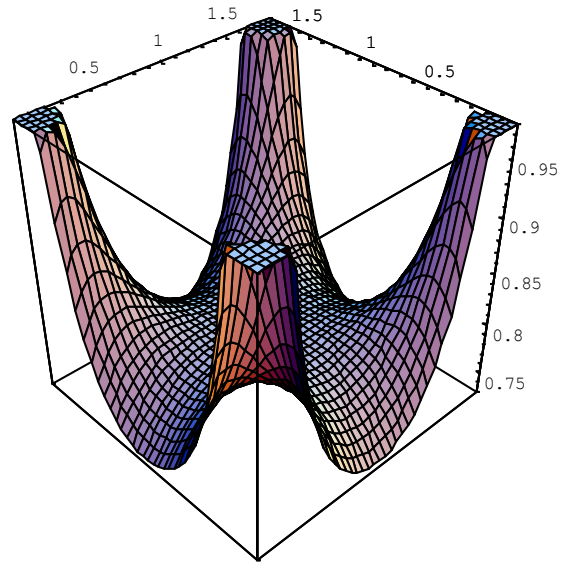


Рис. 3

Качественное объяснение асимптотик, состоит в следующем. На расстояниях вблизи угла, много меньших чем размер ячейки, в рассматриваемой системе отсутствуют характерные пространственные масштабы. Поэтому решение уравнения Лапласа в этой области масштабов имеет степенной вид (10). Показатель степени зависит от распределения зарядов на границах областей с разной проводимостью и, тем самым, от параметра  $h$ .

Приступим к непосредственному вычислению нелинейной эффективной проводимости рассматриваемой среды. Для простоты будем полагать, что средний ток  $\vec{J}$  направлен по

диагонали «ас» квадратных ячеек (см. рис. 1). Как показано в работе [3], в этом случае локальные комплексные поля в соседних ячейках связаны соотношением

$$e_2(z) = \frac{i}{\sqrt{h}} \overline{e_1(\bar{z})}, \quad (12)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Запишем абсолютную величину электрического поля в квадрате с проводимостью  $\sigma_1$  в виде

$$|e_1(z)| = \frac{1}{I} \sqrt{\frac{(1+h)}{2}} |X(z)| |\bar{E}|, \quad (13)$$

где

$$I(\gamma) = \frac{\pi^{3/2}}{2K \cos(\pi\gamma)} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}, \quad (14)$$

$\Gamma(x)$  - гамма-функция. Используя (12), (14) и (1) получим выражение для нелинейной проводимости, удобное для анализа:

$$\chi_{eff} = \frac{(h^2 \chi_1 + \chi_2)(h+1)^2}{8I^4 h^2} \langle |X(z)|^4 \rangle. \quad (15)$$

Как уже отмечалось, функция  $X(z)$  имеет особенность и при некоторых значениях параметра  $\gamma$  интеграл по  $z$  в  $\langle |X(z)|^4 \rangle$  может расходиться. Можно показать, что величина нелинейной проводимости увеличивается с уменьшением  $h$ , и при стремлении  $h$  к некоторому пороговому значению  $h_c$  ведет себя как

$$\chi_{eff} = \frac{C}{h - h_c}, \quad (16)$$

где

$$C = \frac{\pi^2 (h_c^2 \chi_1 + \chi_2)(h_c + 1)}{4I_c^4 K^2 \sqrt{h_c}}, \quad I_c = I(\gamma_c). \quad (17)$$

Из выражения (9) нетрудно получить  $h_c = (\sqrt{2} - 1)^2$ . При значениях  $h \leq h_c$  интеграл для  $\chi_{eff}$  расходится. Поясним природу расходимости. Из общего выражения для  $\chi_{eff}$  нетрудно заметить, что аномальный рост нелинейной проводимости связан с ростом корреляторов  $\langle |e(z)|^4 \rangle_{1,2}$ , так как все остальные сомножители в формуле конечны. Основной вклад в интеграл  $\langle |e(z)|^4 \rangle_{1,2}$  для  $\chi_{eff}$  дают области вблизи особых углов с асимптотическим поведением решения пропорционального  $z^{-2\gamma}$ . Поэтому для оценки коррелятора при  $h \rightarrow h_c$  достаточно рассмотреть малые окрестности этих точек, а точнее окрестность одного особого угла в элементарной ячейке. При любом направлении внешнего поля решение в этой области имеет вид (10). На основе этих рассуждений получим

$$\langle |e(z)|^4 \rangle_{1,2} \propto \iint |z|^{-8\gamma} dx dy \propto \int r^{-8\gamma+1} dr. \quad (18)$$

Интеграл (18) расходится при  $\gamma \geq 1/4$ . Из соотношения (9) нетрудно получить соответствующий интервал по  $h$ :  $h \leq h_c$ . Для определения степени расходимости по  $(h - h_c)$ , разложим величину  $\gamma$  в показателе подынтегральной функции (18) в ряд по малому параметру  $(h - h_c)$  и получим

$$\langle |e(z)|^4 \rangle_{1,2} \propto \int r^{-1+\text{const}(h-h_c)} dr \propto \frac{1}{h-h_c}.$$

При стремлении  $h \rightarrow h_c$  расходится лишь нелинейная проводимость, поэтому из формул (4), (5) для  $E_c$  и  $J_c$  видно, что зависимость критического поля и критического тока нелинейности вблизи  $h_c$  будет полностью определяться поведением  $\chi^{\text{eff}}$ , то есть

$$E_c, J_c \propto (h-h_c)^{1/2}. \quad (19)$$

### Выводы

Хорошо известно, что в однородных проводящих средах электрический ток пропорционален приложенному напряжению. Такая зависимость имеет место в слабых электрических полях. В сильных полях зависимость тока от напряжения может стать нелинейной. Сильным полем называется такое, в результате которого за время свободного пробега (время релаксации) носители тока приобретают скорость по порядку величины сравнимую со скоростью хаотического движения. Создание сильных полей в однородных проводниках практически невозможно из-за большого тепловыделения и вследствие этого их плавления.

В неоднородных проводящих средах нелинейные эффекты наблюдаются в сравнительно слабых полях [5]. Одно из возможных объяснений состоит в том, что в среде имеются области, в которых локальное электрическое поле может сильно превысить среднее поле в данном образце. Вследствие этого электронный газ сильно разогревается. Это приводит к зависимости локальной проводимости от температуры.

В данной работе изучается нелинейный отклик неоднородной двумерной среды со структурой шахматной доски. Получено выражение для эффективной нелинейной проводимости среды. Было показано, что ввиду особенностей локального тока и поля вблизи углов структуры линейная зависимость между средним током и средним полем невозможна при конечном значении отношения линейных проводимостей компонент ячеек. Найдены зависимости критического поля и тока нелинейности от параметра  $h$ . Отметим, что в работе [10] изучалась нелинейная эффективная проводимость бинарной среды со случайным, но равным по концентрации распределением её компонент. Результаты, полученные там, существенно отличаются от результатов данной работы.

### Библиографический список

1. Дыхне, А.М. Проводимость двумерной двухфазной системы // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 59. – С. 110–115.
2. Балагуров, Б.Я. О проводимости двумерных систем с макроскопическими неоднородностями // ЖЭТФ. – 1980. – Т. 79. – С. 1561–1572.
3. Емец, Ю.П. Преобразование симметрии двумерной двухкомпонентной электропроводной системы // ЖЭТФ. – 1989. – Т. 96. – С. 701–711.
4. Емец, Ю.П. Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой / Ю.П. Емец. – Киев: Наукова думка, 1986.
5. Gefen, Y. Nonlinear behavior near the percolation metal-insulator transition / Y. Gefen, W.H. Shih, R.B. Laibowitz, J.M. Viggiano // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 3097–3100.
6. Chakrabarty, R.K. Nonlinear  $I-V$  characteristics near the percolation threshold / R.K.Chakrabarty, K.K. Bardhan, A. Basu // Phys. Rev. – 1991. – V. B44. – P. 6773–6779.
7. Stroud, D. Nonlinear susceptibilities of granular matter / D. Stroud, P.M. Hui // Phys.Rev.- 1988. – V. B37. – P. 8719–8724.
8. Aharony, A. Crossover from linear to nonlinear resistance near percolation // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 2726–2727.

9. Жигальский, Г.П. Шум вида  $1/f$  и нелинейные эффекты в тонких металлических пленках // УФН. – 1997. – Т. 167. №.6. – С. 623–648.
10. Сатанин, А.М. Нелинейная проводимость неупорядоченной среды на пороге протекания // Письма в ЖЭТФ. – 1995. – Т. 62. – С. 301–304.

*Дата поступления  
в редакцию 23.04.2016*

**S.V. Khorkov**

## **THE DEVIATION FROM THE LINEAR CURRENT FLOW IN AN ORDERED TWO-DIMENSIONAL ENVIRONMENT**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeyev

We investigate the impact of specific areas of periodic two-dimensional environment on its nonlinear effective conductivity. It is shown that the distribution of local currents and fields substantially depends on the ratio of the linear conductivities of the components. This dependence leads to the divergence of the correlator to the fourth power of the field and, hence, to divergence of the response function associated with the correlator. Defined value of the ratio of the linear conductivities of the component at which the effective nonlinear conductivity of the studied environment detects a peculiarity in the behavior.

*Key words:* inhomogeneous conducting structures, percolation, conductivity, nonlinear conductivity.