УДК 510

В.М. Галкин

МАТЕМАТИК ИЗУЧАЕТ ФИЗИКУ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Настоящая статья носит дискуссионный характер и касается вопросов обучения и усвоения знаний, предлагаемых в вузах. Речь пойдет о трудностях, испытываемых некоторыми людьми при изучении курса физики.

Ключевые слова: энтропия, дифференциальная форма, полный дифференциал, идеальная жидкость, уравнение Эйлера.

Не секрет, что представители точных наук делятся на две категории, которые мы условно назовем «математиками» и «физиками». В вузах обе категории конституированы и формально по принадлежности сотрудника к той или иной кафедре. Впрочем, даже и здесь имеет место некоторая неопределенность, связанная с такими названиями, как «Прикладная математика» или «Математическая физика». Не является секретом и то, что представители разных категорий нередко дистанцируются друг от друга, не желая интересоваться чужими проблемами. Чувство собственного достоинства провоцирует появление некоторого высокомерия. В научном фольклоре сохраняется, например, приписываемое Д. Гильберту высказывание о том, что «физика слишком трудна для физиков». В долгу не остаются и физики. Так, один из крупных американских физиков считает, что «всякая математика есть тривиальность». Разумеется, что для профессионалов эти высказывания не более чем шутка и не сказываются на взаимном уважении друг к другу. Тем не менее, различия в мышлении у математиков и физиков есть. Коротко, пожалуй, их можно сформулировать следующим образом. Физик, как правило, пренебрегает «строгими» рассуждениями и доказательствами. Он вполне удовлетворен, если его результаты согласуются с «физической» интуицией и результатами эксперимента. Напротив, математик склонен уделять большое внимание формальным вычислениям, основанным на солидном теоретическом фундаменте. Поэтому он часто останавливается перед решением физических задач, где ему неясна математическая постановка проблемы.

Будучи представителем «математиков», хочу остановиться на некоторых вопросах, представлявших для меня трудности при усвоении в студенческие годы. Одной из причин этого желания является отсутствие удовлетворительных ответов на них в стандартной учебной литературе.

Первый круг вопросов относится к изучению термодинамики. При изложении основных понятий (энергия, работа, теплота) психологических трудностей при усвоении не появляется, так как эти понятия усвоены еще в школе. Не вызывает трудностей первое начало термодинамики, т.е. закон сохранения энергии, даже в его дифференциальной форме

$$dU = \delta A + \delta Q,$$

где U – внутренняя энергия, термосистемы; A – работа; Q – тепло. Символ δ означает, что дифференциальные формы δA и δQ не являются полными дифференциалами. Зато второе начало термодинамики ставит математика в тупик. В утешение можно сказать, что он не одинок и что обоснованием этого начала занимались многие ученые. Исторические сведения можно найти в [1].

Математическое следствие 2-го начала, конечно же, поразительно: форма δQ допускает интегрирующий множитель λ и $\lambda\delta Q = dS$ является полным дифференциалом некоторой функции состояния $S-$энтропии. Однако стандартное изложение, привлекающее в качестве инструмента идеальный газ, кроме недоумения, ничего не вызывает.

В самом деле, уравнение Клапейрона-Менделеева

$$pV = \mu RT \text{ и } dU = cdT,\ \delta A = -pdV$$

дает для интегрирующего множителя λ значение $\frac{1}{T}$, причем это далеко не единственное решение. Но более шокирующий аргумент «математик» может представить такой: идеальный газ – это термосистема с двумя степенями свободы (давление p и объем V), а значит, dQ есть дифференциальная форма вида $Pdx + Qdy$. Существование интегрирующего множителя здесь достаточно очевидно, так как для него получается уравнение в частных производных первого порядка $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial y}$.

Ситуация в случае большего числа степеней свободы в математическом отношении совершенно иная. Интегрирующего множителя может и не быть. Однако примеры термосистем с числом степеней свободы >2 в учебниках отсутствуют, и приходиться довольствоваться утверждением, что невозможность существования так называемого вечного двигателя 2-го рода все-таки обеспечивает существование интегрирующего множителя. Однако хочу представить пример, который, на наш взгляд, вносит путаницу в этот вопрос.

Пусть термосистема описывается тремя параметрами x, y, z.

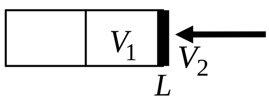
Положим $\delta A = z(c_1 dx + c_2 dy)$, $dU = k_1 d(xz) + k_2 d(yz)$, где $c_{1,2}$ и $k_{1,2}-$константы.

Тогда $\delta Q = dU - \delta A = Pdx + Qdy + Rdz$, где $P, Q, R-$задают векторное поле

$$B = \{P, Q, R\} = \{(k_1 - c_1)z,\ (k_2 - c_2)z, k_1 x + k_2 y\}.$$

$\lambda\delta Q$ полный дифференциал, если $\operatorname{rot} A\overline{B} = 0$. Последнее равенство можно переписать в виде $\lambda \operatorname{rot} \overline{B} + [\operatorname{grad} \lambda, \overline{B}] = 0,$ т.е. $\operatorname{rot} \lambda \overline{B} \perp \overline{B}$. Но $\operatorname{rot} \overline{B} = \{c_2, -c_1, 0\}$ и $(\overline{B}, \operatorname{rot} \overline{B}) = (c_2 k_1 - c_1 k_2) z \neq 0$ при подходящем выборе констант.

Могут сказать, что этот пример не физичен. Математика трудно в этом убедить после следующей интерпретации. Резервуар разделен подвижной перегородкой L на на две части, заполненные идеальными газами. Газы отличаются друг от друга, скажем, теплоемкостями.



Если обозначить $x = V_1,\ y = V_2,\ z = p$ (общее давление для обеих частей резервуара на перегородку), то $U = k_1 xz + k_2 yz$ есть внутренняя энергия термосистемы, если вспомнить уравнение Менделеева-Клапейрона.

Обратимся теперь к гидродинамике, ограничиваясь идеальной несжимаемой жидкостью. Основным уравнением, как известно, служит уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + (\overline{v}\nabla)\overline{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \bar{f}, \tag{1}$$

где $\overline{v} = \overline{v}(x, y, z, t)-$скорость течения в точке $M(x, y, z)$ в момент времени t; $\rho = \mathrm{const}-$плотность жидкости; $p-$давление и $\bar{f}-$объемная плотность внешних сил. Обычно $\bar{f}$ потенциально и без ограничения общности можно положить $\bar{f} \equiv 0$. К уравнению добавляется условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \overline{v} = 0. \tag{2}$$

Подлежат определению v и p.

Первое настораживающее обстоятельство: все разделяют мнение, по которому число уравнений, описывающих физический процесс, должно быть равно числу скалярных величин, подлежащих определению. Если уравнений много, то говорят, что система «переопределена» и имеет «слишком мало» решений. В противном случае решений «слишком много». Уравнение (1) распадается на три скалярных уравнения относительно четырех величин – давление и три компоненты скорости.

В книге Кочина, Киббеля и Розе ([2]) , по которой гидродинамике обучались поколения студентов, учитывается **четвертое** уравнение (2). Но имеется основание не принимать его поначалу во внимание. Дело в том, что нечто похожее имеет место для уравнений Максвелла. Для вакуума они записываются как

$$\operatorname{div}\overline{E}=0,\quad \operatorname{rot}\overline{E}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\overline{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\overline{H}=0,\quad \operatorname{rot}\overline{H}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}.$$

Оказывается, что первые два уравнения играют роль начальных условий и основными являются два последних эволюционных уравнения.

Однако вернемся к уравнению (1). В учебниках стороной обходится вопрос о том, что надо дополнительно задать для выделения единственного решения. Следующее соображение, по-видимому, заслуживает изложения в книгах. Эволюционный характер (1) позволяет по данным $\overline{v}$ и p в момент t найти их в момент $t+dt$, т.е. применить метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений. Взятие дивергенции от обеих частей (1) дает уравнение эллиптического типа для определения в момент $t+dt$ и давления. Теперь становится ясным, что надо задать граничные условия на границе течения, чтобы интуитивно стала понятна однозначность решения. Эта точка зрения проведена в нашей работе с Е.Н. Пелиновским [3].

Стационарное течение ставит новые вопросы. Уравнение (1) превращается в

$$(\overline{v}\nabla)\overline{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \qquad (3)$$

Как здесь выделять единственное решение? И вновь учебники об этом умалчивают. Можно привести такие соображения. Какая-то глобальная характеристика (помимо несжимаемости (2)) должна быть указана. В потенциальном течении ($\overline{v}=\operatorname{grad}\varphi$), которому книги уделяют особое внимание, в качестве таковой выступает условие $\operatorname{rot}\overline{v}=0$. Поэтому стоит задать, в общем случае, поле ротора $\overline{A}=\operatorname{rot}\overline{v}$.

Кочин, Киббель и Розе решают задачу восстановления поля по его ротору. В частности, они находят решение $\overline{v}_0$ уравнения $\operatorname{rot}\overline{v}_0=\overline{A}$ с дополнительным условием $\operatorname{div}\overline{v}_0=0$. Но тогда $\overline{v}=v_0+\operatorname{grag}\varphi$ при некотором скалярном поле φ. Условие $\operatorname{div}\overline{v}=0$ дает уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi=0, \qquad (4)$$

и граничное условие типа Неймана $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=(\overline{v}-\overline{v}_0)_n$ позволяет найти φ с точностью до несущественного постоянного слагаемого. Восстановление давление из (3) уже не составляет труда.

Однако подводный камень здесь все же есть. Левая часть в (3) должна быть градиентом, что вовсе не означает выполнение этого требования при заданном $\overline{A}=\operatorname{rot}\overline{v}$. Тождество, известное из векторного анализа $\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2=[\overline{v},\operatorname{rot}\overline{v}]+(\overline{v}\nabla,v)$ и (3), влекут градиентность поля $[\overline{v},\operatorname{rot}\overline{v}]$, т.е. обращение в нуль его ротора.

Пример, где $\overline{v}=\{z,x,y\}$, $\operatorname{rot}\overline{v}=\{1,1,1\}$ и $[\overline{v},\operatorname{rot}\overline{v}]=\{x-y,y-x,z-x\}$ дает $\operatorname{rot}[\overline{v},\operatorname{rot}\overline{v}]=\{1,1,1\}\neq 0$, т.е. течение с таким $\overline{v}$ невозможно.

Удовлетворительный ответ на вопрос, какие поля $\overline{A}$ в качестве $\mathrm{rot}\,\overline{v}$ допустимы, автору неизвестны.

В заключение отмечу несколько книг по рассмотренной тематике. Вопросы термодинамики излагаются в [4], [5], [6]. А.Земмерфельд в [4], естественно, излагает предмет как физик. Книга П.С. Эпштейна [5] производит приятное впечатление своей добротностью, свойственной многим старым учебникам. Введение понятия энтропии в [6] отличается вычурностью и может быть принято лишь как экзотическое явление.

По гидродинамике, кроме [2], пользуется известностью книга Ламба [7]. О слабых сторонах курса физики Ландау и Лифшица в свое время было сделано много замечаний. Книга по гидродинамике [8] полезна в качестве справочного материала, но вряд ли приемлема для первоначального ознакомления. Похожая ситуация имеет место со знаменитым курсом математики Н. Бурбаки, чьи книги не читают, а только обращаются к ним за справками.

Библиографический список

1. **Гольфер Я.М.** История и методология термодинамики и статистической физики / Я.М. Гольфер.– М.: Высш. шк., 1969. Т. 1.
2. **Кочин, Н.Е.** Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В.Розе. – М., 1963. Ч 1.
3. **Галкин, В.М.** Об эволюционных уравнениях в теории солитонов и распространении волн цунами / В.М. Галкин, Е.Н. Пелиновский // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2012. – № 1(94). – С. 329–334.
4. **Зоммерфельд, А.** Термодинамика и статистическая физика / А. Зоммерфельд. – М.: ИЛ, 1995.
5. **Эпштейн, П.С.** Курс термодинамики / П.С.Эпштейн. – М.: ОГИЗ, 1948.
6. **Румер, Ю.Б.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – М., 1972.
7. **Ламб, Г.** Гидродинамика / Г. Ламб. – М., 1947.
8. **Ландау, Л.Д.** Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. Т. 6.

Дата поступления
в редакцию 01.07.2016

V.M. Galkin

MATHEMATICIAN LEARNS PHYSICS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeyev

Purpose: The questions of teaching that represent some difficulties for the students with different types of thought are putting up.
Design: For illustration the examples from thermodynamics and hydrodynamics are chosen.
Findings: The standard exposition of second law of thermodynamics is critized. Also the vagueness in raising of the basic problems at the study of flow of ideal fluid are remarking.
Research: The article will be interesting to the teachers and the students of technical universities.
Originality: The article has discussing character.

Key words: entropy, differential form, exact form, ideal fluid, Euler equation.