УДК 513.015.2

В.М. Галкин[1], М.Е. Елисеев[1], М.Е. Сангалова[2]

К изоморфизму конечной плоскости Холла и плоскости Андре

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[1],
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[2]

Известно, что конечная проективная плоскость Холла является в то же время и плоскостью Андре. Однако в литературе доказательство этого факта дается неконструктивно. В данной статье изоморфизм плоскостей строится явным образом, то есть указывается конкретное отображение точек и прямых одной плоскости в точки и прямые другой.

Ключевые слова: конечная проективная плоскость, плоскость Холла, плоскость Андре, изоморфизм проективных плоскостей, квазиполе.

1. Плоскости Холла относятся к классу так называемых плоскостей трансляций. Это простейший класс плоскостей, дающий примеры недезарговых плоскостей. Простейший в том смысле, что соответствующие плоскости обладают достаточно большими группами коллинеаций. Более точно, группа коллинеаций действует транзитивно на множестве точек вне некоторой прямой – несобственной или «бесконечно удаленной».

Плоскость трансляций конструируется исходя из алгебраической системы $R(+,\cdot)$, называемой квазиполем (Холл в [1] использует термин – система Веблена-Веддербарна). Аксиомы квазиполя являются ослабленным вариантом аксиоматики поля. Именно в R требуется выполнение следующих аксиом ([1], [2]):

1) $R(+)$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;
2) $R\backslash\{0\}$ – лупа с единицей относительно операции $(\cdot)$;
3) в R выполняется односторонняя (для определенности левая) дистрибутивность $a\cdot(b+c)=ab+ac$;
4) уравнение $ax+by=c$ имеет единственное решение x при $a \neq b$.

Само построение плоскости производится тем же путем, что и построение дезарговой плоскости над полем. Аффинная часть плоскости состоит из точек (x,y) с координатами из R. Из них компонуются прямые $L_a=\{(a,y)\}$ и $L_{m,b}=\{(x,y)|y=m\cdot x+b\}$. Проективное пополнение аффинной плоскости вводит несобственную прямую L_∞, состоящую из точек (∞) и (m). Аффинная прямая дополняется точкой (∞), а $L_{m,b}$ - точкой (m). Аксиома 4 обеспечивает выполнение аксиом инцидентности в плоскости.

Холл [1], [3] предлагает пример квазиполя исходя из поля k и неприводимого над k многочлена $f(x)=x^2-rx-s$. Элементами R являются пары (x, y) с $x, y \in k$ с обычным сложением. Умножение же дается формулами

$$(a,b)\cdot(x,y)=\begin{cases}(ax,ay), \text{если } b=0,\\ (ax-b^{-1}yf(a), bx-ay+sy) \text{ при } b\neq 0.\end{cases}$$

Нетрудно согласиться с тем, что этот пример появляется как deus ex machina и что желательно иметь прозрачное объяснение происхождения этой конструкции.

Заслуживает рассмотрения еще одно обстоятельство, связанное с плоскостями Холла. Имеется класс плоскостей трансляций более общий, чем класс плоскостей Холла. Это так называемые плоскости Андре. В конце книги [1] доказывается, что плоскость Холла является в то же время плоскостью Андре. Доказательство использует довольно сложную процедуру, называемую деривацией (derivation) и неконструктивно. Желательно иметь прямое доказательство изоморфизма соответствующих плоскостей. Далее обсуждаются оба поставленных вопроса.

2. Успех в построении Холлом его плоскостей можно объяснить следующей причиной. В группе $GL_2(k)$ - группе обратимых преобразований двумерного векторного пространства V над полем k - имеются классы сопряженности, чьи элементы некоторым стандартным способом можно биективно отобразить на элементы из K/k, где K - квадратичное расширение поля k. Таковым классом является класс, характеристический многочлен которого неприводим над k. Отметим необходимые в дальнейшем свойства класса H с неприводимым характеристическим многочленом $f(x)=x^2-rx-s$.

Предложение 1

1. Если $T\in GL_2(k)$ имеет $f(x)$ характеристическим многочленом, то $T\in H$.

2. Для $T\in H$ и ненулевого вектора v векторы v и $T(v)$ линейно независимы.

3. $T\in H$ однозначно определяется значением $T(v)$ для $v\neq 0$.

Доказательство

1. Поскольку T не скаляр, то найдется $v\in V$ такой, что v и $T(v)$ линейно независимы. В базисе v, $T(v)$ матрица T имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & r \end{pmatrix}$, т.е. $T\in H$.

2. Линейная зависимость v и $T(v)$ влечет существование у T собственного значения из k, что невозможно.

3. Следует из 1, если взять базис v, $T(v)$ в V.

Квазиполе Холла теперь строится следующим образом. В качестве V берется квадратичное расширение K поля k. В $GL_2(k)$ выбирается класс сопряженных элементов в H. Квазиполе Холла совпадает как множество с K, и с тем же сложением, что и в K. Умножение определяется формулами

$$xy = \begin{cases} xy, \text{если } x\epsilon k, \\ T_x(y), \text{если } x\epsilon K\backslash k. \end{cases}$$

где $T_x\in H$ и индекс x определяются из равенства $T_x(1)=x$. Существование и единственность x обеспечивается свойством 3 из предложения 1. Выполнение аксиом 1 и 3 очевидно. Выполняется также левое деление, т.е. $ax=b$ однозначно разрешимо при $a\neq 0$.

Уравнение $xa=b$ при линейно зависимых a и b переходит в $xa=b$ и $x=b/a\in k$ единственно. При линейно независимых a и b существование и единственность x следует из п.3 предложения 1. Наконец, единицей по умножению в R является $1\in K$. Обратимся к аксиоме 4.

Здесь надо рассмотреть три случая: $a,b\epsilon k, b$ (или $a)\epsilon k$ и $a,b \notin k$. Уравнение $ax-bx=c$ перепишется как $ax-bx=c$, $(T_a-b)(x)=c$ или $(T_a-T_b)(x)=c$. Существование и единственность x очевидна в первом случае, следует из обратимости T_a-b (так как собственные значения T_a не лежат в k) во втором. Обратимость T_a-T_b в третьем случае следует так же из п.3 предложения 1.

3. Не давая общего определения плоскости Андре (см. [2],[3]), остановимся лишь на частном случае, когда квазиполе строится, как и раньше, по полю $K\backslash k$. Пусть $\theta=(x\to\bar{x})$ - нетождественный автоморфизм K над k. Умножение Андре определяется несколько иначе:

$$x*y=x\theta_x(y),$$

где $\theta_x=\theta$, если норма $Nm(x)=x\bar{x}=1$, и тождественен в противном случае.

Для установления изоморфизма между плоскостями обоих типов используем следующее представление преобразования T_a из предыдущего пункта.

Предложение 2. $T_a(x)=A_a x+B_a\bar{x}$, где $B_a=\frac{(a-\lambda)(a-\bar{\lambda})}{a-\bar{a}}, A_a=a-B_a$, λ и $\bar{\lambda}$ - корни $f(x)=x^2-rx-s$.

Доказательство. Надо проверить, что правая часть представления переводит 1 в a и удовлетворяет характеристическому уравнению ${T_a}^2 - rT_a - s = 0$. Первое условие дает $A_a + B_a = a$. Второе приводит к равенству

$$A_a(A_a x + B_a\bar{x}) + B_a\overline{(A_a x + B_a\bar{x})} = r(A_a x + B_a\bar{x}) + sx.$$

Оно заведомо выполняется, если совпадают коэффициенты при x и $\bar{x}$ в обеих частях. Это дает

$$ {A_a}^2 + B_a\overline{B_a} = rA_a + s\,, \tag{1}$$

$$A_a + \overline{A_a} = r. \tag{2}$$

Подставляя r из (2) в (1) и используя $B_a = a - A_a$, получаем

$$\bar{a}A_a + a\overline{A_a} = a\bar{a} - s. \tag{3}$$

Вместе с (2) это позволяет найти $A_a = \frac{a\bar{a} - ra - s}{\bar{a} - a}$ и $B_a = \frac{a^2 - ra - s}{a - \bar{a}}$. Выражение для B_a в формулировке предложения получается из разложения $f(x)$ на множители.

Перейдем теперь к основному результату этого пункта. Пусть P_H и P_A плоскости Холла и Андре, построенные по полю K/k.

Предложение 3

Плоскости P_H и P_A изоморфны. Изоморфизм задается сопряжением аффинных точек $(x, y) \in P_H \to (x', y') \in P_A$, где $x = x' - y', y = \lambda x' - \bar{\lambda} y$. Соответствие между точками несобственных прямых дается отображением

$$m \to m' = \begin{cases} \dfrac{m - \lambda}{m - \bar{\lambda}}, m \in k \\ -\dfrac{m - \lambda}{\bar{m} - \lambda}, m \in K \backslash k \end{cases}.$$

Точке $(\infty) \in P_H$ соответствует $(1) \in P_A$, а точке $(\infty') \in P_A$ соответствует точка $(\bar{\lambda}) \in P_H$.

Доказательство

Проверке подлежит соответствие прямых $y = mx + b \to y' = m' * x' + b'$. Отдельно выделяются случаи, когда одна из прямых имеет несобственной точкой ∞. С них и начнем проверку. Точкам прямой $x = a$ из P_H соответствуют точки (x', y'), для которых $a = x' - y'$, т.е. они лежат на прямой $y' = 1 * x' + b'(b' = -a)$ из P_A.

Точкам же прямой $x' = a$ из P_A соответствуют точки $(x, y) \in P_H$, для которых

$$x = a - y', y = \lambda a - \bar{\lambda} y', \text{т.е. } y = \bar{\lambda} x + b = T_{\bar{\lambda}}(x) + b, b = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)a.$$

Далее для $m \in k$ точки прямой $y = m \cdot x + b$ переходят в точки (x', y'), причем $m(x' - y') + b = \lambda x' - \bar{\lambda} y'$, т.е. лежащие на прямой $y' = \frac{m - \lambda}{m - \bar{\lambda}} x' + b', b' = \frac{b}{m - \bar{\lambda}}$, что можно переписать в виде $y' = m' * x' + b'$.

Несколько длинее производится проверка в случае $m \notin k, m \neq \bar{\lambda}$. Здесь $y = T_m(x) + b$ дает $\lambda x' - \bar{\lambda} y' = A_m x + B_m \bar{x} + b = A_m(x' - y') + B_m(\bar{x}' - \bar{y}') + b$, что можно переписать в виде $\left(A_m - \bar{\lambda}\right)y' - B_m\overline{x'} + B_m\overline{y'} - (A_m - \lambda)x' = b$.

Это равенство заведомо выполняется для точек прямой $y' = m' * x' + b'$, если положить $m' = \frac{B_m}{A_m - \bar{\lambda}}$. Наконец найдем b' из соотношения

$$\left(A_m - \bar{\lambda}\right)b' - B_m\overline{b'} = b. \tag{4}$$

Используя выражения для $A_m = m - B_m$ и B_m из предложения 2, нетрудно проверить, что $m' = -\frac{m - \lambda}{\bar{m} - \lambda}$. Остается выразить b' через b. Для этого надо подействовать в (4) автоморфизмом поля K/k и получить систему относительно b' и $\overline{b'}$

$$\begin{cases} (A_m - \overline{\lambda})b' - B_m\overline{b'} = b, \\ \overline{B_m}b + (A_m - \overline{\lambda})\overline{b'} = \overline{b}. \end{cases} \tag{5}$$

Подсчет ее определителя с учетом равенства $m' = \frac{B_m}{A_m - \overline{\lambda}}$ показывает, что он отличен от нуля, значит b' определяется однозначно.

Библиографический список

1. **Холл, М.** Теория групп / М. Холл. – М., 1962.
2. **Huges, D.** Projective planes / D. Huges, F. Piper // Springer. 1973.
3. **Weibel, Ch.** Survey of Non-Dezargian planes // Notices of the AMS. – 2007. – V. 54. – P. 1299–1303.

Дата поступления
в редакцию 01.06.2017

V.M. Galkin[1], M.E. Elyseev[1], M.E. Sangalova[2]

ON THE ISOMORPHISM OF FINITE HOLL PLANE WITH ANDRE PLANE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev[1],
Nizhny Novgorod state university n.a. N.I. Lobachevsky[2]

Purpose: In this paper explicitly gives the isomorphism of finite projective Holl plane with Andre plane.
Design/methodology/approach: The theory of non-associative structures and theory of finite projective planes is using.
Findings: The result is important in the theory of finite projective planes
Research limitations/implications: Methods of this paper may be used on the proof of the isomorphism other finite projective planes.
Originality/value: The result is new.

Key words: finite projective plane, Hall plane, Andre plane, isomorphism of projective planes, quasi field.