УДК 621.396

А.С. Раевский, С.Б. Раевский, Т.С. Рыжакова

КРАЕВАЯ ПРИСОЕДИНЕННАЯ ЗАДАЧА КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Комплексный резонанс и индивидуальное возбуждение комплексных волн рассматриваются с позиции присоединенной краевой задачи, формулируемой на уравнении Гельмгольца, в правой части которого стоит функция, являющаяся решением однородной краевой задачи.

Ключевые слова: комплексный резонанс, комплексные волны, круглый двухслойный экранированный волновод.

Введение

Исследование распределения электромагнитного поля в круглом двухслойном экранированном волноводе (КДЭВ) позволило обнаружить эффект резкого возрастания амплитуды поля при переходе из частотной области, соответствующей распространяющимся волнам, в область существования комплексных волн [1-3]. В [4] это явление названо комплексным резонансом (КР). Он отличается от обычного резонанса тем, что проявляется в широком диапазоне частот, соответствующем диапазону существования комплексных волн (КВ). Эта особенность обусловливает невозможность измерения добротности КР обычными резонансными методами [5-7]. Добротность структуры, в которой возникает КР, удобнее оценивать путем сравнения её с добротностью эталонного резонатора, работающего в том же диапазоне частот и дающего то же увеличение амплитуды поля при прохождении сигнала в схеме «на проход». Широкополосность КР позволяет использовать его в датчиках, реагирующих на изменение поля в полосе частот, и поэтому не требующих их постоянной частотной подстройки. Пространственно-временные датчики на КР в силу их широкополосности могут реагировать на любую форму отраженного сигнала.

Возбуждение в КЭДВ комплексных волн как волн, присоединенных к источнику

Поскольку КР образуется в результате интерференции двух комплексных волн с комплексно сопряженными амплитудами и волновыми числами, совместно возбуждаемых источником, описываемым действительной функцией координат [1-3], его следует рассматривать как колебание, присоединенное к источнику. Поскольку колебание, соответствующее КР, реализуется только при наличии источника, через который замыкаются локальные потоки мощности КВ, его не следует классифицировать как собственное. Оно описывается присоединенным уравнением Гельмгольца, в правой части которого стоит функция, являющаяся решением однородной краевой задачи для круглого двухслойного экранированного волновода. Представляет интерес рассмотреть вопрос возбуждения КВ, образующих колебание, соответствующее КР, и КВ как волны, описываемой решением самосогласованной краевой задачи.

Так как комплексные волны описываются собственными функциями однородной несамосопряженной [1-3] краевой задачи, «порождаемой» системой однородных уравнений Максвелла, их поля должны удовлетворять условию:

$$\int_{S_i} \left\{ \left[\vec{E}_n \vec{H}_k\right] - \left[\vec{E}_k \vec{H}_n\right] \right\} d\vec{S} = \mathrm{const}\,,$$

где S_i – произвольное сечение исследуемого волновода, *n* и *k* номера собственных волн.

Это условие может выполняться только либо при отсутствии у подынтегрального выражения зависимости от продольной координаты, либо при тождественном равенстве интеграла нулю. Объединяя эти два варианта, записываем:

$$\int_{S_i}\left\{\left[\vec{E}_n\vec{H}_k\right]-\left[\vec{E}_k\vec{H}_n\right]\right\}d\vec{S}=\begin{cases}N & k=-n,\\ 0 & k\neq -n.\end{cases} \quad (1)$$

Равенство (1) является [8] записью условия ортогональности собственных волн экранированного волновода в энергетическом смысле. С использованием его амплитуды прямой комплексной волны – I, распространяющейся справа от источника, записываем в виде:

$$A=\frac{1}{N}\int_V\left(\vec{j}^{\,e}\vec{E}^{(-)}-\vec{j}^{\,m}\vec{H}^{(-)}\right)dV, \quad (2а)$$

амплитуду обратной комплексной волны – II, также распространяющейся справа от источника, представляем как

$$\overline{A}=\frac{1}{N}\int_V\left(\vec{j}^{\,e}\overline{\vec{E}}^{(-)}-\vec{j}^{\,m}\overline{\vec{H}}^{(-)}\right)dV. \quad (2б)$$

В (2а,б) $\vec{E}^{(-)}$ и $\vec{H}^{(-)}$ – поля комплексной волны с продольным волновым числом $\beta^{(-)}=-\beta$, где β – продольное волновое число прямой волны – I. $\overline{\vec{E}}^{(-)}$ и $\overline{\vec{H}}^{(-)}$ – поля комплексной волны с продольным волновым числом $\overline{\beta}^{(-)}=-\overline{\beta}$, где $\overline{\beta}$ – продольное волновое число обратной комплексной волны II.

Вводя обозначения:

$$\frac{\omega\mu}{r}\frac{\partial\psi^h}{\partial\varphi}+\beta\frac{\partial\psi^e}{\partial r}=E_{r_0};\ \omega\mu\frac{\partial\psi^h}{\partial r}-\frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi^e}{\partial\varphi}=E_{\varphi_0};$$

$$-\beta\frac{\partial\psi^h}{\partial r}+\frac{\varepsilon\omega}{r}\frac{\partial\psi^e}{\partial\varphi}=H_{r_0};\ \frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi^h}{\partial\varphi}+\omega\varepsilon\frac{\partial\psi^e}{\partial r}=H_{\varphi_0}$$

и учитывая связи между амплитудными коэффициентами потенциальных функций $\psi_{1,2}^{e,h}$ во внутреннем и внешнем слоях волновода:

$$A_2=\frac{\alpha_1^2A_1}{\alpha_2^2\chi_{11}(\alpha_2r_1)};$$

$$B_1=\frac{\dfrac{\tilde{\beta}}{r_1}\left(1-\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)A_1}{\mu_1\dfrac{J_1'(\alpha_1r_1)}{J_1(\alpha_1r_1)}-\mu_2\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\dfrac{\chi_{21}'(\alpha_2r_1)}{\chi_{21}(\alpha_2r_1)}}; \quad (3)$$

$$B_2=\frac{\alpha_1^2\dfrac{\tilde{\beta}}{r_1}\left(1-\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)A_1}{\alpha_2^2\chi_{21}(\alpha_2r_1)\left[\mu_1\dfrac{J_1'(\alpha_1r_1)}{J_1(\alpha_1r_1)}-\mu_2\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\dfrac{\chi_{21}'(\alpha_2r_1)}{\chi_{21}(\alpha_2r_1)}\right]},$$

записываем:

$$E_r=-iE_{r_0}e^{-i\beta z};\ E_r^{(-)}=iE_{r_0}e^{i\beta z};$$

$$\overline{E}_r=iE_{r_0}^*e^{i\beta^*z};\ \overline{E}_r^{(-)}=-iE_{r_0}^*e^{-i\beta^*z};$$

$$
\begin{aligned}
&E_\varphi=-iE_{\varphi_0}e^{-i\beta z};\ E_\varphi^{(-)}=-iE_{\varphi_0}e^{i\beta z};\\
&\overline{E}_\varphi=iE^*_{\varphi_0}e^{i\beta^* z};\ \overline{E}_\varphi^{(-)}=iE^*_{\varphi_0}e^{-i\beta^* z};\\
&E_z=\alpha^2\psi^e e^{-i\beta z};\ E_z^{(-)}=\alpha^2\psi^e e^{i\beta z};\\
&\overline{E}_z=\alpha^{*2}\psi^{e^*}e^{i\beta^* z};\ \overline{E}_z^{(-)}=\alpha^{*2}\psi^{e^*}e^{-i\beta^* z};\\
&H_r=iH_{r_0}e^{-i\beta z};\ H_r^{(-)}=iH_{r_0}e^{i\beta z};\\
&\overline{H}_r=iH^*_{r_0}e^{i\beta^* z};\ \overline{H}_r^{(-)}=iH^*_{r_0}e^{-i\beta^* z};\\
&H_\varphi=-iH_{\varphi_0}e^{-i\beta z};\ H_\varphi^{(-)}=-iH_{\varphi_0}e^{i\beta z};\\
&\overline{H}_\varphi=-iH^*_{\varphi_0}e^{i\beta^* z};\ \overline{H}_\varphi^{(-)}=-iH^*_{\varphi_0}e^{-i\beta^* z};\\
&H_z=\alpha^2\psi^h e^{-i\beta z};\ H_z^{(-)}=-\alpha^2\psi^h e^{i\beta z};\\
&\overline{H}_z=-\alpha^{*2}\psi^{h^*}e^{i\beta^* z};\ \overline{H}_z^{(-)}=\alpha^{*2}\psi^{h^*}e^{-i\beta^* z}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Как видим из (4), поля прямой и обратной комплексных волн связаны равенствами:

$$\overline{\vec{E}}=\vec{E}^*;\ \overline{\vec{H}}=-\vec{H}^*. \tag{5}$$

Полагая, что поля в волноводе возбуждаются токами: $\vec{I}^{\,e}=\vec{j}^{\,e}$ и $I^m=i\vec{j}^{\,m}$, являющимися действительными функциями координат, исходя из выражений (2а,б), с учетом (4) и (5) получаем:

$$
\begin{aligned}
A=&\frac{1}{N}\int_V\left(-j_r^eE_{r_0}+j_\varphi^eE_{\varphi_0}-\alpha^2j_z^m\psi^h\right)\sin\beta z dV+\\
&+\frac{1}{N}\int_V\left(\alpha^2j_z^e\psi^e+j_r^mH_{r_0}-j_\varphi^mH_{\varphi_0}\right)\cos\beta z dV+\\
&+i\frac{1}{N}\int_V\left(j_r^eE_{r_0}-j_\varphi^eE_{\varphi_0}+\alpha^2j_z^m\psi^h\right)\cos\beta z dV+\\
&+i\frac{1}{N}\int_V\left(\alpha^2j_z^e\psi^e+j_r^mH_{r_0}-j_\varphi^mH_{\varphi_0}\right)\sin\beta z dV;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{A}=&\frac{1}{N}\int_V\left(-j_r^eE^*_{r_0}+j_\varphi^eE^*_{\varphi_0}-\alpha^{*2}j_z^m\psi^{h^*}\right)\sin\beta^* z dV+\\
&+\frac{1}{N}\int_V\left(\alpha^{*2}j_z^e\psi^{e^*}+j_r^mH^*_{r_0}-j_\varphi^mH^*_{\varphi_0}\right)\cos\beta^* z dV-\\
&-i\frac{1}{N}\int_V\left(j_r^eE^*_{r_0}-j_\varphi^eE^*_{\varphi_0}+\alpha^{*2}j_z^m\psi^{h^*}\right)\cos\beta^* z dV-\\
&-i\frac{1}{N}\int_V\left(\alpha^{*2}j_z^e\psi^{e^*}+j_я^mH^*_{r_0}-j_\varphi^mH^*_{\varphi_0}\right)\sin\beta^* z dV.
\end{aligned}
$$

Видим, что при выбранных источниках амплитуды прямой и обратной комплексных волн, распространяющихся справа от источника, связаны равенством: $\vec{A}=A^*$, из которого следует, что обе указанные волны возбуждаются совместно и с одинаковыми по модулю амплитудами.

Совместное существование двух волн приводит к образованию поля стоячей волны, локализованного вблизи источника, рис. 1.

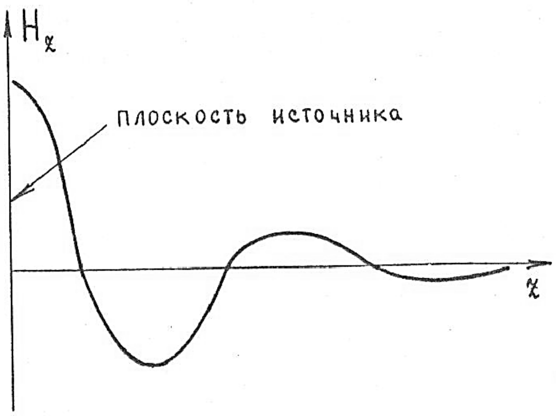

Рис. 1. Суммарное поле двух КВ

При возбуждении поля стоячей волны, затухающего при удалении от источника, рис. 1, можно говорить о возникновении в двухслойном волноводе, в области существования комплексных волн, резонанса, который называется [4] комплексным.

Посмотрим, нельзя ли создать условия для преимущественного возбуждения одной из комплексных волн.

Возьмем функции распределения токов следующего вида:

$$j^e = j_r^e = j_0^e e^{-i\beta z}; \; j^m = j_m = ij_0^m e^{-i\beta z}, \tag{6}$$

где β совпадает с продольным волновым числом комплексной волны I; j_0^e и j_0^m – действительные величины.

Подставив (6) в (2 а, б) и выполнив интегрирование по продольной координате, с учетом выражений (4) получаем:

$$A = \int_S \left(j_0^m H_{r_0} + ij_0^e E_{r_0} \right) dS \left(z_2 - z_1 \right), \tag{7}$$

$$\overline{A} = \frac{1}{2\beta_1} \int_S \left(j_0^e E_{r_0}^* + ij_0^m H_{r_0}^* \right) dS \left[\cos 2\beta_1 z_2 - \cos 2\beta_1 z_1 - i \left(\sin 2\beta_1 z_2 - \sin 2\beta_1 z_1 \right) \right], \tag{8}$$

где S – поперечное сечение волновода; $\left[z_1 \div z_2 \right]$ – интервал, в котором заключены источники.

Из (8) видим, что если:

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{2} n \lambda_в, \tag{9}$$

амплитуда обратной комплексной волны II равна нулю, в то время как, в соответствии с (7), амплитуда прямой волны I отлична от нуля. В (9) $\lambda_в = \dfrac{2\pi}{\beta_1}$; n=1,2,3…

Таким образом, взяв источники поля типа антенны бегущей волны (6), подбором интервалов по продольной оси волновода, в которых заключены эти источники, можно добиться возбуждения только одной комплексной волны. Это свидетельствует о том, что рассматриваемые комплексные волны могут существовать независимо. При независимом существовании волн с комплексными волновыми числами в системе без диссипации энергии их природа может быть объяснена только при отсутствии переноса этими волнами через поперечное сечение направляющей системы реальной мощности [1-3].

Задача о возбуждении одной КВ источником типа антенны бегущей волны является самосогласованной, а КВ в этом случае следует называть волной, присоединенной к источнику.

Особенностью рассматриваемой задачи о возбуждении является запись правой части уравнения Гельмгольца. Она представляется решением однородной краевой задачи о собственных волнах КДЭВ. Её самосогласованность связана с тем, что волновые числа в правой части уравнения Гельмгольца, которое в данном случае называем присоединенным, совпадают с волновыми числами волн, описываемых присоединенной краевой задачей. Классификация «несамосопряженная краевая задача» относится к однородной задаче, для которой не выполняется второй признак самосопряженности [1-3] – эквивалентность граничных условий прямой и сопряженной краевых задач, определенных на нескольких согласуемых интервалах.

Источники, описываемые действительными функциями координат, возбуждают в круглом двухслойном экранированном волноводе по обе стороны от себя по две комплексные волны с противоположно направленными фазовыми скоростями. Это приводит к возникновению стоячей волны, поле которой локализовано вблизи источника. При этом отрезок волновода, включаемый «на проход» или «на отражение» (в первом случае в плоскости симметрии, перпендикулярной оси волновода, располагаются возбуждающий и воспринимающий электроды, во втором – лишь один возбуждающий электрод), во всем диапазоне комплексных волн ведет себя как резонатор и имеет при этом фильтрующие свойства. Поскольку в отличие от обычного резонанса отмеченное явление, возникающее в двухслойном экранированном волноводе, обнаруживает резонансные свойства (возрастание выходного сигнала в схеме «на проход» и резкое падение коэффициентов стоячей волны $K_{\text{ст}U}$ в схеме «на отражение») во всем частотном диапазоне комплексных волн, оно классифицировано [4] как «комплексный резонанс».

Резонансным признаком рассматриваемого явления служит факт увеличения запасенной энергии в указанной ранее полосе частот, что позволяет ввести понятие добротности (в энергетической формулировке), вычислить ее и измерить косвенным методом. Экспериментальные исследования комплексного резонанса привели [9, 10] к созданию полосовых СВЧ–фильтров простой конструкции с теоретически рассчитываемой полосой пропускания.

Заключение

Задача о возбуждении комплексных волн, формулируемая на присоединенном уравнении Гельмгольца, в котором в правой части стоит решение однородной краевой задачи, является самосогласованной. Её решение, когда правая часть указанного уравнения соответствует бегущей волне, описывает бегущую комплексную волну, присоединенную к источнику. Когда в правой части присоединенного уравнения Гельмгольца стоит функция, соответствующая стоячей волне, краевая задача описывает комплексный резонанс. И в том, и в другом случаях в качестве правой части присоединенного уравнения Гельмгольца берется решение соответствующей однородной краевой задачи.

Библиографический список

1. **Веселов, Г.И.** Слоистые металло-диэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988. – 247 с.
2. **Раевский, А.С.** Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2004. – 110 с.
3. **Раевский, А.С.** Комплексные волны / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2010. – 223 с.
4. **Веселов, Г.И.** Исследование комплексных волн двухслойного экранированного волновода / Г.И. Веселов, В.А. Калмык, С.Б. Раевский // Радиотехника. – 1980. – Т. 35. – № 9. – С. 59–61.
5. **Будурис, М.** Цепи сверхвысоких частот / М. Будурис, П. Шелевье. – М.: Советское радио, 1979. – 286 с.
6. **Сазонов, Д.М.** Устройства СВЧ / Д.М. Сазонов, А.Н. Гридин, Б.А. Мишустин. – М.: Высш. шк., 1981. – 295 с.

7. **Альтман, Дж.** Устройства СВЧ / Дж. Альтман. – М.: Мир, 1968. – 487 с.
8. **Вайнштейн, Л.А.** Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
9. А.с. 934561 СССР. Полосовой фильтр / Калмык В.А., Раевский С.Б., Веселов Г.И.
10. А.с. 1091262 СССР Полосовой фильтр / Калмык В.А., Раевский С.Б., Веселов Г.И.

Дата поступления
в редакцию 10.07.2017

A.S. Raevskii, S. B. Raevskii, T.S. Ryzhakova

THE REGIONAL AFFILIATE TASK AS A SPECIAL CASE THE PROBLEM OF EXCITATION

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: to consider the complex resonance and individual excitation of complex waves from the position of the adjoint boundary value problem formulated on the Helmholtz equation, on the right-hand side of which there is a function that is a solution of a homogeneous boundary-value problem.
Design/methodology/approach: Investigation of the distribution of the electromagnetic field in a circular two-layer shielded waveguide made it possible to observe the effect of a sharp increase in the field amplitude upon transition from the frequency domain corresponding to propagating waves to the region of existence of complex waves.
Findings: The problem of the excitation of complex waves, formulated on the adjoint Helmholtz equation, in which the solution of the homogeneous boundary-value problem on the right-hand side is self-consistent. Its solution, when the right-hand side of the equation corresponds to a traveling wave, describes a traveling complex wave connected to the source. When the right-hand side of the adjoint Helmholtz equation has a function corresponding to a standing wave, the boundary value problem describes a complex resonance. In both cases, the solution of the corresponding homogeneous boundary value problem is taken as the right-hand side of the adjoint Helmholtz equation.
Originality/value: A feature of the problem of excitation under consideration is the writing of the right-hand side of the Helmholtz equation. It is represented by the solution of a homogeneous boundary-value problem about the eigenwaves of a circular two-layer shielded waveguide. Its self-consistency is related to the fact that the wave numbers on the right-hand side of the Helmholtz equation, which in this case is called the adjoint, coincide with the wave numbers of the waves described by the adjoint boundary value problem.

Key words: complex resonance, complex waves, round two-layer shielded waveguide.