УДК 621.396

А.С. Раевский, С.Б. Раевский, Т.С. Рыжакова

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ИСТОЧНИКУ

[1]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассмотрен общий подход к постановке самосогласованных волноводных задач, отмечена общность присоединенных решений краевых задач на уравнении Гельмгольца, описывающих колебания и волны, присоединенные к источнику. Показано, что по своей математической природе комплексный резонанс подобен присоединенным волнам, описываемым решениями несамосопряженных самосогласованных краевых задач. Отмечено, что как решения этих задач и присоединенные волны, и КР существуют только при наличии источников. Присоединенные волны в этом случае выступают как явление, описываемое неоднородной краевой задачей со специфической правой частью в уравнении Гельмгольца. Комплексный резонанс рассматривается как взаимодействие двух комплексно-сопряженных волн, потоки мощности которых замыкаются через источник.

Ключевые слова: круглый двухслойный экранированный волновод, краевая задача, комплексный резонанс, комплексные волны.

На примере круглого двухслойного экранированного волновода рассматриваются колебания и волны в неоднородных электродинамических структурах, описываемые решениями самосогласованных краевых задач, в которых обязательным является присутствие источника, имеющего обратную связь с полем.

Неоднородные электродинамические структуры в общем случае описываются несамосопряженными краевыми задачами [1-4]. Для экранированных структур эти задачи, будучи однородными, являются задачами на собственные функции и собственные значения, описывающими собственные волны. Для открытых структур несамосопряженные краевые задачи, являясь полуоднородными (однородное уравнение и неоднородные, в общем случае, граничные условия), наряду с собственными волнами могут описывать несобственные волны дискретного спектра [5]. Собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае являются [1-5, 6-8] комплексными величинами и соответствуют различным видам комплексных волн (КВ), которые, в зависимости от признаков несамосопряженности краевой задачи [1-4, 9-11], могут иметь различную природу и свойства.

Как показано в [2, 12, 13], теоретически и экспериментально, собственные КВ слоистых экранированных волноводов источниками, описываемыми действительными функциями пространственных координат, возбуждаются комплексно-сопряженными парами, приводя к возникновению явления комплексного резонанса (КР), описанного в [2, 12-14]. Феномен КР впервые был обозначен в [15].

КР и присоединенные волны в двухслойном круглом экранированном волноводе

КР, отличающийся от обычного резонанса своим существованием не в точке, а во всем диапазоне существования КВ, имеет место [12-14] только при наличии источника, через который замыкаются прямой и обратный потоки мощности [16]. Таким образом, две взаимодействующие между собой КВ оказываются «привязанными» к источнику, а поле КР – является «присоединенным» к источнику электромагнитным колебанием. Задача о возбуждении КР является самосогласованной – источник создает пару КВ, образующих замкнутые через источник потоки мощности.

Как показано в [2, 15], собственные КВ двухслойного круглого экранированного волновода индивидуально возбуждаются распределенным источником бегущей волны. Следовательно, находясь в синхронизме с этой волной, комплексная волна, «привязанная» к источнику такого типа, удовлетворяет уравнению Гельмгольца с правой частью, соответствующей функции, описывающей бегущую волну. Такое уравнение можно назвать присоединенным к обычному уравнению Гельмгольца. Поля двух КВ с комплексно сопряженными амплитудами образуют «присоединенное» к источнику колебание, которое в силу обязательного требования присутствия источника не следует называть собственным. КР, соответствующий этому колебанию, образуется полем, локализованным вблизи источника. Если источник расположен при z=0, правая часть присоединенного уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$R(\alpha_{1,2}r)\cos n\varphi\cdot\cos\beta_1 z\cdot e^{-\beta_2 z},$$

где $R(\alpha_{1,2}r)$– функция, описывающая радиальную зависимость поля в 1-й и 2-й областях направляющей структуры.

Это может быть двухслойный экранированный волновод или круглый открытый диэлектрический волновод (ДВ). Комплексные волны таких волноводов достаточно подробно исследованы [2-4]. Их дискретные спектры в экранированных структурах состоят из собственных КВ, в открытых – включают в себя как собственные, так и несобственные волны.

Обобщая материалы работ [17-19], в которых рассматривались вопросы теории присоединенных волн в двухслойных изотропных направляющих структурах, сформулируем присоединенную краевую задачу для круглого двухслойного экранированного волновода. Она состоит из уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Pi_z^{e,m}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z^{e,m}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi_z^{e,m}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Pi_z^{e,m}}{\partial z^2}+\varepsilon\mu\omega^2\Pi_z^{e,m}= \\ =A^{e,m}R_n^{e,m}(\alpha r)\cos n\varphi e^{-i\beta z}\end{gathered}, \qquad (1)$$

которое будем называть присоединенным уравнением Гельмгольца, и граничных условий:

$$\Pi_z^e(r=b)=0;\ \Pi_z^e(r=b)=0; \qquad (2а)$$

$$\vec{E}_{1\tau}(r=a)=\vec{E}_{2\tau}(r=a);\ \vec{H}_{1\tau}(r=a)=\vec{H}_{2\tau}(r=a) \qquad (2б)$$

где $\Pi_z^{e,m}$ – продольные компоненты электрического и магнитного векторов Герца; a и b – радиусы внутреннего слоя и экрана.

Функции в правой части уравнения (1) имеют [19] вид:

$$R_n^{e,m}(\alpha_1 r)=J_n(\alpha_1 r)\ \text{при}\ r\in[0\div a];$$

$$R_n^e(\alpha_2 r)=\frac{J_n(\alpha_2 r)Y_n(\alpha_2 b)-J_n(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a)Y_n(\alpha_2 b)-J_n(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 a)};$$

$$R_n^m(\alpha_2 r)=\frac{J_n(\alpha_2 r)Y_n'(\alpha_2 b)-J_n'(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a)Y_n'(\alpha_2 b)-J_n'(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 a)},\ \text{при}\ r\in[a\div b]$$

где $J_n(\alpha_{1.2}r)$, $Y_n(\alpha_2 r)$ – цилиндрические функции первого и второго рода.

Функцию в правой части уравнения (1) можно рассматривать как функцию распределенного источника бегущей волны, а присоединенную краевую задачу (1), (2а,б) – как задачу о возбуждении волн «присоединенных» к указанному источнику.

Записываем решение сформулированной краевой задачи в виде:

$$\Pi_{z_{1,2}}^{e,m}=\left[C_{n_{1,2}}^{e,m}R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)+D_{n_{1,2}}^{e,m}\left(-\frac{iz}{2\beta}\right)R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)+\rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r)\right]\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}e^{-i\beta z}, \qquad (3)$$

где функции $\rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\rho''(\alpha_{1,2}r)+\frac{1}{r}\rho'(\alpha_{1,2}r)+\left(\alpha_{1,2}^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\rho(\alpha_{1,2}r)=\overline{D}_{n_{1,2}}^{e,m}R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r), \qquad (4)$$

которые можно рассматривать как присоединенные уравнения Бесселя.

Подставляя решения в (3) в уравнения (1), получаем:

$$C_{n_{1,2}}^{e,m}\left[R_n^{e,m''}(\alpha_{1,2}r)+\frac{1}{r}R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)+\left(\alpha_{1,2}^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)\right]+$$
$$+D_{n_{1,2}}^{e,m}\left[R_n^{e,m''}(\alpha_{1,2}r)+\frac{1}{r}R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)+\left(\alpha_{1,2}^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)\right]+$$
$$+\left[\rho^{e,m''}(\alpha_{1,2}r)+\frac{1}{r}\rho^{e,m'}(\alpha_{1,2}r)+\left(\alpha_{1,2}^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r)\right]-$$
$$-D_{n_{1,2}}^{e,m}R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r)=A^{e,m}R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r). \qquad (5)$$

Два вида присоединенных волн

Из (5) видно, что решения (3) удовлетворяют с учетом уравнения (4) присоединенным уравнениям Гельмгольца (1) при условии:

$$\overline{D}_{n_{1,2}}^{e,m}-D_{n_{1,2}}^{e,m}=A^{e,m}. \qquad (6)$$

В том случае, когда

$$\overline{D}_{n_{1,2}}^{e,m}=D_{n_{1,2}}^{e,m}, \qquad (7)$$

решения (3) удовлетворяют обычному (однородному) уравнению Гельмгольца.

Из граничных условий (2б) получаем систему функциональных уравнений, зависящих от продольной координаты. Приравнивая в них члены, имеющие линейную зависимость от координаты z, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $D_{n_{1,2}}^{e,m}$. Условие нетривиальности решений этой системы дает уравнение, совпадающее с дисперсионным уравнением обычных волн круглого двухслойного экранированного волновода.

Члены в указанных функциональных уравнениях, не имеющие зависимости от координатых, при условии (4) дают систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов: $C_{n_{1,2}}^{e,m}$. Главные определители двух систем (однородной и неоднородной) совпадают. Будучи приравненными нулю, они дают дисперсионные уравнения нормальных волн.

Нетривиальные решения системы линейных однородных алгебраических уравнений (коэффициенты $D_{n_{1,2}}^{e,m}$) подставляются в систему неоднородных уравнений, которая решается относительно коэффициентов $C_{n_{1,2}}^{e,m}$.

Поскольку для волн, описываемых решениями (3) должны выполняться граничные условия (2б), необходимо, чтобы системы однородных и неоднородных линейных алгебраических уравнений имели совместные решения. Система однородных уравнений имеет нетривиальные решения только при равенстве нулю её определителя. Поскольку главный определитель системы неоднородных уравнений совпадает с определителем системы однородных уравнений, система неоднородных уравнений может иметь решения только при равенстве нулю её дополнительных определителей.

Таким образом, собственные значения краевой задачи, определяющие волновые числа волн, описываемых этой задачей, находятся как совместные решения трех трансцендентных уравнений

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

совпадающего с дисперсионным уравнением нормальных волн, и двух дополнительных:

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Каждое из этих уравнений решается совместно с уравнениями:

$$\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}\omega^2 = \alpha_{1,2}^2 + \beta^2. \qquad (10)$$

Волнам, описываемым рассматриваемой краевой задачей, соответствуют решения, удовлетворяющие одновременно всем трем уравнениям (8), (9) совместно с уравнениями (10), связывающими волновые числа. Численный анализ указанных уравнений [17, 18] показало существование их совместных решений, соответствующих волнам, которые можно назвать присоединенными к источнику, поскольку они описываются уравнением (1), в правой части которого стоит функция (описывающая источник), являющаяся решением краевой задачи на однородном уравнении Гельмгольца.

Таким образом, мы наблюдаем единство математической и физической идеологий: с одной стороны решаем краевую задачу на присоединенном уравнении, с другой – получаем волны, существующие только при наличии источника, то есть присоединенные (привязанные) к нему. Пару КВ, образующих КР, можно рассматривать как волны, присоединенные к источнику, описываемые однородным уравнением Гельмгольца. Условия (6), (7) определяют два вида присоединенных волн.

Выводы

Для колебательных и направляющих электродинамических структур могут быть сформулированы краевые задачи, которые описывают колебания и волны, присоединенные к источнику, существующие только при его наличии. Такие задачи следует называть самосогласованными, поскольку в них учитывается обратное влияние поля на источник, поскольку волновые числа и в функциях поля, и в функциях источника одни и те же. Присоединенные волны подразделяются на два вида: описываемые однородным уравнением Гельмгольца и уравнением, в правой части которого стоит функция, являющаяся решением однородной краевой задачи.

Библиографический список

1. **Веселов, Г.И.** Комплексные волны в поперечно-неоднородных направляющих структурах./ Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Радиотехника. – 1987. – Т. 42. – №8. – С. 64-67.
2. **Веселов Г.И**. Слоистые металло-диэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М. Радио и связь, 1988. – 248 с.
3. **Раевский, А.С.** Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М. Радиотехника, 2004. – 110 с.
4. **Раевский, А.С.** Комплексные волны / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М. Радиотехника, 2010. – 223 с.
5. **Шевченко, В.В.** Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами / В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника, 1969. – Т. 12. – № 10. – С. 1768-1773.
6. **Наймарк, М.А.** Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М. Наука. – 1969. – 526 с.
7. **Раевский, С.Б.** Комплексные волны в двухслойном круглом экранированном // Изв. вузов СССР. Радиофизика. – 1972. – Т. 15. – № 1. – С. 112-116.
8. **Раевский, С.Б.** О существовании комплексных волн в некоторых двухслойных изотропных структурах // Изв. вузов СССР. Радиофизика. – 1972. – Т. 15. – № 12. – С. 1926-1931.
9. **Эллис, В.** Волны в анизотропной плазме / В. Эллис, С. Буксбаум, А. Берс. – М. Атомиздат, 1969. – 311 с.

10. **Раевский, А.С.** О комплексных волнах круглого диэлектрического волновода в поглощающей среде / А.С. Раевский, С.Б. Раевский // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 12. – С. 1409-1412.
11. **Виприцкий, Д.Д.** О комплексных волнах в невзаимных направляющих структурах / Д.Д. Виприцкий, А.В. Назаров, С.Б. Раевский // Письма в ЖТФ. – 2007. – Т. 33. – Вып. 5. – С. 1-11.
12. **Веселов, Г.И.** Полосовой фильтр на двухслойном круглом экранированном волноводе в режиме комплексных волн. / Г.И. Веселов, В.А. Калмык, С.Б. Раевский // Изв. вузов СССР. – Радиофизика. – 1983. – Т. 26. – № 8. – С. 900-903.
13. **Иванов, А.Е.** Комплексный резонанс в структуре на основе круглого двухслойного экранированного волновода / А.Е. Иванов, С.Б. Раевский // Радиотехника и электроника. – 1991. – Т. 36. – № 8. – С. 1463-1468.
14. **Раевский, А.С.** Комплексный резонанс в круглом двухслойном экранированном волноводе / А.С. Раевский, С.Б. Раевский, О.Т. Цинин // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2002. – Т. 5. – № 2. – С. 40-45.
15. **Веселов, Г.И.** Исследование комплексных волн двухслойного экранированного волновода / Г.И. Веселов, В.А. Калмык, С.Б. Раевский // Радиотехника. – 1980. – Т. 35. – № 9. – С. 59-61.
16. **Веселов, Г.И.** О встречных потоках мощности в некоторых двухслойных изотропных структурах / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Изв. вузов СССР. – Радиофизика. – 1983. – Т. 26. – № 9. – С. 1041-1044.
17. **Малахов, В.А.** Присоединенные волны в круглом двухслойном экранированном волноводе / В.А. Малахов, А.С. Раевский, С.Б. Раевский // Письма в ЖТФ. – 2011. – Т. 37. – Вып. 2. – С. 71-79.
18. **Malakhov, V.A.** Added Solutions of boundary Value Problems for Double-Layer Guiding Structures / V.A. Malakhov, A.S. Raevskii, S.B. Raevskii // International Journal of Electromagnetics and Applications. – 2012. – V.2. – № 5. – P. 114-119.
19. **Раевский, А.С.** Присоединенные волны как волны, создаваемые источником типа антенны бегущей волны / А.С. Раевский, С.Б. Раевский // Письма в журнал технической физики. – 2013. – №23. – С. 13-17.

Дата поступления
в редакцию 28.06.2017

A.S. Raevskii, S. B. Raevskii, T.S. Ryzhakova

OSCILLATIONS AND WAVES OF INHOMOGENEOUS ELECTRODYNAMIC STRUCTURES CONNECTED TO SOURCE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: consider the oscillations and waves in inhomogeneous electrodynamic structures, described by solutions of self-consistent boundary value problems, in which the presence of a source having an inverse relationship with the field is obligatory, considering the example of a circular two-layer shielded waveguide.
Design/methodology/approach: A general approach to the formulation of self-consistent waveguide problems is considered. The generality of the adjoint solutions of boundary value problems on the Helmholtz equation describing the oscillations and waves connected to the source is noted.
Findings: It is shown that, in its mathematical nature, the complex resonance is similar to the attached waves, described by solutions of non-self-adjoint self-consistent boundary value problems. It is noted that, as solutions to these problems, the associated waves and CD exist only in the presence of sources. The attached waves in this case act as a phenomenon described by an inhomogeneous boundary-value problem with a specific right-hand side in the Helmholtz equation. A complex resonance is regarded as the interaction of two complex conjugate waves whose power fluxes are closed through a source.
Originality/value: For vibrational and directing electrodynamic structures, boundary value problems can be formulated that describe oscillations and waves attached to a source that exist only if it exists. Such problems should be called self-consistent, since they take into account the inverse effect of the field on the source, since the wave numbers in both the field functions and the source functions are the same. Attached waves are divided into two types: described by a homogeneous Helmholtz equation and an equation on the right side of which is a function that is a solution of a homogeneous boundary value problem.

Key words: round two-layer shielded waveguide, boundary-value problem, complex resonance, complex waves.