УДК 004.023

А.С. Захаров

АЛГОРИТМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассматриваются вопросы реализации алгоритмов оптимального управления многосвязными объектами с запаздываниями, которые широко распространены в различных отраслях промышленности. К таким объектам относятся различные теплообменные и массообменные установки, процессы с рециклами и другие.

Большой класс объектов в технике, экономике, живой природе характеризуется тем, что их прошлое состояние оказывает непосредственное влияние на то, что с ними произойдет в будущем. Для подобных классов объектов необходимо вводить дополнительный параметр – время запаздывания передачи сигнала по различным каналам. Существует несколько различных классов объектов, классифицируемых по типу запаздывания. Наиболее общий класс образуют объекты с запаздыванием по состоянию и по управлению. Именно объекты этого вида и рассматриваются в данной работе.

Ключевые слова: дискретизация, стационарные и нестационарные системы, сплайн- интерполяция.

Введение

Любая система развивается в соответствии с целью ее функционирования. При этом управление той или иной системой направлено на достижение (или, по крайней мере, на максимальной приближение) нужной цели. Требования эффективного экономического развития требуют создания интегрированных систем управления производством, включающим системы автоматизированного проектирования (САПР), автоматизированные системы управления технологическими процессами, автоматизированные системы управления производством, а также автоматизированные системы управления качеством выпускаемой продукции. Все эти системы находятся во взаимодействии друг с другом и тем самым образуют сложную иерархическую систему.

Аналитическая часть

При компьютерном моделировании динамических систем можно выделить три подхода – *численный*, *структурный* и *символьный*. В численном методе все данные, которые передаются на вход, представляются в виде массива чисел или в виде числовых матриц. Данные передаются на вход специализированных программ. Численный подход является основным для таких математических пакетов, как MATHCAD и MATLAB [7]. Для структурного подхода характерно представление исходной математической модели в виде структурной схемы из сумматоров, интеграторов и других вычислительных блоков. Данная схема собирается при помощи специального редактора, представленного на дисплее вычислительного комплекса. По окончании сборки схемы моделирование выполняется автоматически. Такой подход (иногда его называют визуальным программированием) используется в пакетах VISSIM, SIMULINK, LABVIEW. В третьем случае исходная математическая модель задается математическими формулами, записанными относительно символьных переменных. Результат получается в виде математических соотношений между этими переменными. Символьный подход реализован в пакетах DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA [8].

У каждого из подходов есть свои достоинства и недостатки. Для расширения возможностей одних (SIMULINK) необходимо писать компоненты на старых языках программирования, таких как Fortran (1957 г.) и Ada (1979 г.). Другие (MATHCAD и MATLAB) не подходят для применения на производстве и используются только в образовательных целях.

В данной статье рассматривается и исследуется численный метод построения дис-

© Захаров А.С., 2018.

кретных математических моделей объектов управления с запаздыванием.

Теоретическая часть

Пусть движение некоторой динамической системы описывается стационарной моделью в виде дифференциального уравнений состояния и статического уравнения измерения. Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{\alpha} A_{Hi}\, x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^{\beta} B_{Hi}\, u(t - \theta_i) + \omega_H, \\ y(t) = \sum_{i=0}^{\gamma} C_{Hi}\, x(t - \eta_i) + \sum_{i=0}^{\delta} D_{Hi}\, u(t - \zeta_i) + v_H. \end{cases} \tag{1}$$

В системе уравнений (1) введены следующие обозначения:

- $x(t) \in R^n$ – вектор состояния,
- $u(t) \in R^m$ – вектор управления,
- $y(t) \in R^l$ – вектор измерений ОУ,
- $\alpha \geq 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ – количества запаздываний непрерывной модели по состоянию и управлению,
- $A_{Hi} \in R^{n\times n}\ \forall i = \overline{1,\ \alpha},\ B_{Hi} \in R^{n\times m}\ \forall i = \overline{1,\ \beta},\ C_{Hi} \in R^{l\times n}\ \forall i = \overline{1,\ \gamma},\ D_{Hi} \in R^{l\times m}$ $\forall i = \overline{1,\ \delta},$ – переходные матрицы непрерывной модели,
- ω_H, v_H – векторы постоянных внешних воздействий НМ,
- $\tau_i, \theta_i, \eta_i, \zeta_i$ – абсолютные запаздывания НМ (транспортные задержки).

Как уже было доказано в [1], задача дискретизации сводится к поиску двух функций: $x(t),\ u(t)$. Значения этих векторов записываются в дискретные моменты времени и обозначаются только номером шага. Для простоты построения модели будем считать, что управление происходит в дискретные моменты времени, равные узловым моментам ($t = kT$). При этом управление происходит мгновенно, а задержки на все вычисления учитываются в абсолютных запаздываниях. При таких допущениях функция $u(t)$ является кусочно-постоянной с разрывами в узловых точках и в интерполяции не нуждается. Решение задачи дискретизации будет найдено сплайн- интерполированием функции $x(t)$.

Полиномиальным векторным интерполяционном сплайном (ВИС) называется такая функция $x(t) \in R^n$, которая соответствует условиям непрерывности всех производных порядка $p - 1$, где р – степень сплайна.

При этом такая функция (ВИС) является кусочно- постоянной и записывается (2):

$$x(t) = x(t_i) + \big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)\frac{t - t_i}{h_i}, \tag{2}$$

где $x(t_i)$ – узловые векторы непрерывной производной сплайна.

В данной статье рассматривается интерполяция кубическим сплайном (сплайн третьей степени). Это обусловлено наличием у всех типов сплайнов третьего порядка требований непрерывности, проходимости через все заданные точки. Кроме того, легко задаются дополнительные требования, такие как линейность функции на интервале между двумя точками, непрерывность производных выше второго порядка.

Состояние технического устройства в теории можно описать с помощью следующих физических параметров: входные, внутренние, выходные. Причем чаще всего для описания подобных параметров используются реальные физические величины: координаты, скорость, ускорение и т.д.

На практике обычно применяются два вида описаний: входно- выходные соотношения и соотношения типа вход- состояние- выход [2]. В данной работе будет рассматриваться первый подход. Модель «вход- выход» устанавливает и описывает связь между входными и выходными сигналами динамических систем. В данном случае под сигналами понимаются физические переменные, которые описывают данный процесс. В общем случае модель «вход- выход» можно понимать, как некий «черный ящик». В литературе такая модель называется «динамический черный ящик» [3]. На входе и выходе такого ящика имеются параметры X и Y. При этом выходные параметры находятся в зависимости от входных.

Перед проведением синтеза, поставим задачу построения модели «вход- выход». Для системы без запаздываний в пространстве состояний получим уравнение МВВ [4]:

$$y(k+1) = \sum_{v=0}^{a_y} A_{yv} y(k-v) + \sum_{v=0}^{a_y} B_{yv} u(k-v). \tag{3}$$

Таким образом, для построения модели необходимо вычислить ряд неизвестных параметров уравнения МВВ:

- a_y – глубина запаздывания МВВ;
- A_{yv}, B_{yv} – переходные матрицы МВВ.

Для вычисления описанных параметров необходимо проделать предварительные вычисления [5]. Вычислим структурные индексы наблюдаемости (инварианты Кронекера). Для этого составим матрицу, состоящую из матрицы A, умноженной на каждый из столбцов матрицы B. При этом элементы матрицы будут являться n-мерными векторами. Размерность матрицы $(n \times l)$:

$$\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_l \\ Ab_1 & \cdots & Ab_l \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{n-1}b_1 & \cdots & A^{n-1}b_l \end{pmatrix} \tag{4}$$

Будем двигаться по матрице (4) по строкам и запишем элементы матрицы в порядке их следования:

$$b_1, \cdots, b_l, Ab_1, \cdots, Ab_l, A^{n-1}b_1, \cdots, A^{n-1}b_l\,. \tag{5}$$

После чего будем заменять вектора матрицы (4) по следующему правилу: вектор заменяется на 1, если он линейно независим от всех предыдущих векторов в цепочке (5), в противном случае вектор заменяется на 0.

Приведем пример линейной независимости для вектора b_k. Для этого возьмем $k-1$ предыдущих векторов из цепочки (5). Вектора называются линейно независимыми, если не существует комбинации коэффициентов, из которых хотя бы 1 не равен нулю, при условии, что выполняется:

$$x_1 b_1 + \cdots + x_k b_k = 0. \tag{6}$$

На практике данная операция выполняется с использованием известного алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений – метода Гаусса. Метод Гаусса широко применяется для решения подобного рода систем. Он не требует больших вычислительных ресурсов и оптимален по скорости, за исключением случаев, где размерность матрицы слишком велика. Чаще всего применяют модификацию алгоритма Гаусса, предложенную немецким ученым Штрассеном [21]. При реализации его алгоритма время, необходимое для перемножения двух матриц, не превышает $O(n^3)$.

Выполнив все вычисления для всех имеющихся векторов, получим матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} 1\ 1\ 1 \cdots 1 \\ 1\ 0\ 1 \cdots 0 \\ 1\ 0\ 1 \cdots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 1 \cdots 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В получившейся матрице количество единиц равно n. Кроме того, если в столбце есть 0, то в этом столбце все оставшиеся элементы также равны 0. Далее, получаем столбцы, у которых под элементами, равными 1, находятся элементы, равные 0. Обозначим высоту столбцов, состоящих из 1, через p_i. Эти значения и будут являться индексами Кронекера.

Для получения эквивалентной по входу- выходу канонической модели необходимо выполнить преобразование вида:

$$x^*(k) = Xx(k), \quad (8)$$

где X – матрица перехода; $x(k) \in R^n$ – вектор состояния.

Обычно в качестве матрицы перехода используется матрица размерности $(n \times n)$. При этом для такой матрицы должно выполняться условие: определитель матрицы не должен быть равен 0 [6]. При таком преобразовании говорят, что вектор будет представлен в новом базисе, а вид уравнений системы при этом не изменится.

В самом простом случае таковой матрицей является единичная матрица, которую можно легко создать программными средствами, и ее определитель будет равен 1. Таким образом, этот факт удовлетворяет условию неравенства нулю определителя и такую матрицу можно использовать для преобразования в эквивалентную по входу выходу каноническую форму.

Методическая часть

На основе предложенных моделей, сформулированных теоретических положений, получим алгоритм для дискретизации стационарных и нестационарных моделей. Данный алгоритм описан в работе [4]. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 1.

Рис. 1. Блок- схема алгоритма дискретизации стационарных и нестационарных моделей

На практике выполнения вычислений внутри каждого из этапов являются независимыми, следовательно, могут выполняться параллельно, тем самым, ускоряя вычисления и уменьшая временные задержки. Блок-схема остается одинаковой и для стационарной и для нестационарной модели. Изменяются лишь формулы вычисления для каждого из этапов.

Все вычисления удобнее всего проводить в матричном виде, что позволяет потенциально еще больше распараллелить вычисления для каждой матрицы. Это становится особо актуально при размерности матриц более чем 1000x1000 элементов.

Экспериментальная часть

Для подтверждения теоретических и методических аспектов работы была проведена серия экспериментов с описанным алгоритмом дискретизации стационарных и нестационарных моделей. В частности, полученные результаты были использованы при решении задачи управления скоростью подачи сырьевых компонент, участвующих в химической реакции.

Пусть имеется некоторый процесс смешивания двух химических компонент (начального сырья) [7]. Целевой продукт (G – goal) получается в результате некоторой переработки этого сырья. При этом для обеспечения максимального использования сырья (минимизации сырьевых отходов) используется контур рециркуляции, в котором не переработанное до нужной кондиции сырье снова поступает на вход системы.

В данном случае не важно то, какие процессы происходят с сырьем внутри химического реактора. Задача сводится лишь к определению скорости подачи сырья из двух труб в химический реактор. Наличие контура рециркуляции заметно усложняет задачу. В процессе анализа учитывается время запаздывания, которое обусловливается обратным контуром.

Динамика процессов, происходящих в химическом реакторе, описывается нелинейной системой управления. Решить задачу управления для нелинейных систем достаточно трудно. Первым шагом в исследовании таких систем является процесс линеаризации, т. е. переход от нелинейной к линейной системе, которая приближенно описывает все процессы, протекающие в системе. Такой переход может не существовать. Тогда необходимо либо решать задачу с нелинейной системой, либо менять уравнения в системе [8].

Для представленной задачи линеаризированная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -4.93x_1(t) + 1.92x_1(t-1) - 1.01x_2(t) + \\ \qquad + \dfrac{\delta u_{10}(t)}{6V_R} \\ \dot{x_2}(t) = -3.2x_1(t) + 1.92x_2(t-1) - 5.3x_2(t) - 12.8x_c(t) + \\ \qquad + \dfrac{\delta u_{20}(t)}{6V_R} \\ \dot{x_c}(t) = 6.4x_1(t) + 1.87x_c(t-1) + 0.347x_2(t) - 32.5x_c(t) \\ \qquad -1.04x_g(t) \\ \dot{x_p}(t) = 0.833x_2(t) + 11x_c(t) - 3.96x_g(t) + 0.724x_g(t-1). \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) является тестовой системой с набором параметров, где x_1 и x_2 определяют отклонение веса каждого из компонентов на входе реактора, полуфабриката на входе контура рециркуляции (x_c) и целевого продукта x_g. Отклонение значений будем считать от стартовых или номинальных (для входных продуктов) значений. Общий вес компонент, который способен вместить в себя химический реактор, обозначен V_R.

Значения, стоящие перед переменными отклонения весов сырьевых продуктов, представляют собой матрицу A. Значения, стоящие перед переменными, отвечающими за отклонение весов на предыдущем шаге, обозначаются - A1. Значения скоростей поступления сырья составляют в совокупности матрицу B. В результате получаем систему уравнений в матричном виде со следующими матрицами:

$$\begin{cases} A_0 = \begin{pmatrix} -4.93 & -1.01 & 0 & 0 \\ -3.20 & -5.30 & -12.8 & 0 \\ 6.40 & 0.347 & -32.5 & -1.04 \\ 0 & 0.833 & 11.0 & -3.96 \end{pmatrix}, \\ A_1 = \begin{pmatrix} 1.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.724 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

Для анализа системы управления подачей сырья в химический реактор воспользуемся разработанным в данной работе модулем. После окончания анализа проверим полученные итоговые данные с теми данными, которые приведены в источниках [1, 9, 10, 11].

Из входных параметров определяется, является ли система стационарной или нет, и в зависимости от этого выбирается нужный алгоритм дискретизации.

По окончании дискретизации выходные данные представляются в виде матричных уравнений. В дальнейшем по этим данным производится анализ управляемости и наблюдаемости системы.

Выполнив дискретизацию системы управления подачей сырья в химический реактор, получим дискретное уравнение системы:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-1) + A_4 x(k-4) + A_5 x(k-5) + B_0 u(k) + \\ + B_3 x(k-3) + W. \quad (11)$$

Сравнивая дискретное уравнение, полученное в результате анализа системы с использованием модуля, описанного в данной работе, с уравнением в источниках [1, 9, 10, 11], приходим к выводу, что вычисления выполнены верно и уравнения полностью совпадают.

Следующим элементом проверки правильности работы модуля является проверка получившихся дискретных матриц. Все дискретные матрицы оказались верными в пределах погрешности вычислений.

Выводы

Целью синтеза любой системы управления является построение математической модели, которая удовлетворяет следующим основным требованиям: устойчивости, корректности описания реальной системы, инвариантности к возмущениям.

Выполненный эксперимент доказывает правильность теоретических и методических аспектов, описанных в данной статье. Все тесты пройдены успешно и показали хорошие результаты, с точки зрения скорости выполнения вычисления.

Основными достоинствами сплайн-интерполяции являются её устойчивость и малая трудоемкость. Решаемые системы линейных уравнений для построения сплайнов, позволяют получать коэффициенты полиномов с высокой точностью. Кроме того, алгоритмы расчета параметров интерполяционных сплайнов легко программируются.

Библиографический список

1. **Никулин, Е.А.** Дискретизация систем с запаздываниями методом сплайн-интерполяции: учеб. пособие / Е.А. Никулин; ГПИ им. А.А. Жданова. – Горький, 1984. – 19 с.
2. **Воронов, А. А.** Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем / А. А. Воронов. – 2-е изд., перераб. – М.: Изд-во Энергия, 1980. – 303 с.

3. **Борзенко, М. И.** Адаптация, прогнозирование и выбор решений в алгоритмах управления технологическими объектами / М. И. Борзенко. – М.: Энергоатомиздат, 1984. –144 с.
4. **Кондратьев, В.В.** Оптимальное дискретное управление объектами с запаздываниями: учеб. пособие / В. В. Кондратьев; ГПИ. – Горький, 1984 . – 71 с.
5. **Аграчев, Ю. Л.** Геометрическая теория управления / Ю.Л. Аграчев, А. А. Сачков. – М.: Физматлит, 2012. – 144 с.
6. **Бесекерский, В. А.** Теория систем автоматическоо регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во Наука, 1975. – 768 с.
7. **Козлов, В. Н.** Управление энергетическими системами / В. Н. Козлов, В. Е. Куприянов, В. Н. Шашин. – СПб: Изд-во политехнического ун-та, 2008. – 258 с.
8. **Мироновский, Л. А.** Моделирование линейных систем: учеб. пособие / Л.А. Мироновский. – СПб.: ГУАП, 2009. – 54 с.
9. **Громов, Ю.Ю.** Системы автоматического управления с запаздыванием: учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин. – Тамбов: Издательство ТГТУ, 2007. – 409 с.
10. **Заболотнов, Ю. М.** Оптимальное управление непрерывными динамическими системами: учеб. пособие / Ю.М. Заболотнов. – Самара: Самар. гос. аэрокосмический ун-т, 2005. – 129 с.
11. **Никулин, Е.А.** Синтез цифровых моделей объектов управления с произвольными запаздываниями // Автоматические системы оптимального управления технологическими процессами: сб. научн. тр.; Тула. – 1985. – С. 26–34.
12. **Кондратьев, В.В.** Элементы теории дискретных систем с запаздыванием:учеб. пособие / В. В. Кондратьев; ГПИ им. А.А.Жданова. – Горький, 1982. – 79 с.

Дата поступления
в редакцию 31.01.2018

A.S. Zakharov

STATIONARY AND NONSTATIONARY SYSTEMS DISCRETIZATION ALGORITHM WITH DELAYS ON SPLINE INTERPOLATION BASIS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: The goal of synthesis of any control system is the construction of a mathematical model that satisfies the following basic requirements: stability, correctness of the description of the real system, invariance etc.
Design/methodology/approach: Stationary and nonstationary systems discretization algorithm
Findings: A method of spline interpolation of stationary and nonstationary systems developed. The method based on spline interpolation.
Research limitations/implications: The solution can be applied to control the feed rate of the raw materials in the chemical reactor

Key words: discretization, stationary and non-stationary systems, spline interpolation.