УДК: 519.854.2

Д.И. Коган[1], Ю.С. Федосенко[2], Д.А. Хандурин[1]

ПОСТАНОВКА, АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА РЕШЕНИЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ О БИНАЗНАЧЕНИЯХ

Московский технологический университет[1], г. Москва;
Волжский государственный университет водного транспорта[2], г. Нижний Новгород

В дискретной идеализации формулируется математическая модель распределения между исполнителями формируемых пар невзаимнозаменяемых работ. Модель описывает, в частности, состояние воднотранспортной логистической системы на момент принятия решений при оперативном планировании использования группы неоднотипных речных грузовых судов для перевозки в заданные пункты нерудных строительных материалов, добываемых плавучим гидромеханизированными комплексами.

В рамках сформулированной модели вводится понятие «биназначение» и ставится обобщающая классическую оптимизационная задача о биназначениях с минимаксным критерием. Доказывается труднорешаемость поставленной задачи и её практически значимых конкретизаций, учитывающих производительности исполнителей, трудоемкости работ и директивные сроки их завершения. Конструируется реализующий концепцию динамического программирования решающий алгоритм, характеризующийся экспоненциальной вычислительной сложностью. В качестве альтернативного описывается алгоритм построения субоптимальных и оптимальных биназначений по схеме ветвей и границ.

Ключевые слова: задача о назначениях, биназначение, динамическое программирование, схема ветвей и границ, вычислительная сложность.

1. Исследуется возникающая в различных приложениях специфическая проблема использования дискретных ресурсов – оптимизации распределения между исполнителями формируемых пар невзаимнозаменяемых работ.

В качестве примера такого приложения укажем логистическую систему типа Камского грузового района [1], в которой выделенная группа неоднотипных грузовых судов (многосекционных судовых составов) [2] используется для перевозки в заданные пункты нерудных строительных материалов (НСМ) [3], загружаемых в едином технологическом цикле плавучими гидромеханизированными добывающими комплексами (ГДК) [4] на полигонах русловых месторождений.

По завершению сеанса разработки очередного оперативного плана функционирования логистической системы рассматриваемого типа диспетчерской службой должно быть однозначно определено: а) к какому ГДК из числа расположенных на полигоне русловых месторождений следует направить под погрузку НСМ каждое конкретное судно выделенной группы; б) какой пункт назначения для выгрузки следует назначить каждому конкретному судну после его загрузки НСМ.

Для формирования оперативных планов функционирования логистической системы, эффективных в условиях складывающейся эксплуатационной обстановки, актуальной является разработка и штатное использование специализированной цифровой системы поддержки управления, включающей в себя как процедуры математического моделирования воднотранспортной логистической системы, так и средства решения соответствующим образом поставленных экстремальных задач распределения судов между ГДК для погрузки НСМ и распределения судов по пунктам выгрузки НСМ.

Материал статьи сегментирован далее следующим образом.

В пункте 2 описывается математическая модель использования дискретных ресурсов рассматриваемого типа, вводится понятие «биназначение» и ставится общая задача о биназначениях с минимаксным критерием, обобщающая стандартную задачу о назначениях [5-9] с минимаксным критерием[10-12].

Пункт 3 посвящен конструированию и краткому обсуждению технологии реализации алгоритма дискретного динамического программирования [13, 14], решающего поставленную в пункте 2 общую задачу о биназначениях; здесь же приводится оценка вычислительной сложности [15] алгоритма.

В пункте 4 вводится несколько конкретизаций введенной общей задачи о биназначениях, в том числе с учетом трудоемкостей работ и производительностей исполнителей; устанавливается, что все эти задачи труднорешаемы [15], алгоритмы полиномиальной вычислительной сложности для них построить нельзя.

Пункт 5 посвящен описанию алгоритма построения субоптимальных и оптимальных биназначений в процессе итерационного синтеза решения задачи о биназначениях по схеме ветвей и границ [16, 17]. Пункт 6 – заключение по работе.

2. Общая задача о биназначениях формулируется следующим образом. Имеются множество исполнителей $\boldsymbol{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ и два множества работ $\boldsymbol{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $\boldsymbol{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Каждый исполнитель должен быть назначен на одну из работ множества $\boldsymbol{P}$ и на одну из работ множества $\boldsymbol{Q}$. Каждая из работ должна быть выполнена в полном объеме ровно одним исполнителем. Полагаются заданными $(n\times n)$-матрицы численных оценок $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ и $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$, где a_{ij} – оценка выполнения исполнителем i работы p_j, а b_{ij} – оценка выполнения тем же исполнителем работы q_j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Введем следующие обозначения:

π_1 – назначение исполнителей на работы из множества $\boldsymbol{P}$,

π_2 – назначение исполнителей на работы из множества $\boldsymbol{Q}$.

Каждое назначение представляет собой взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Если $\pi_1(i) = j$, то исполнителя i следует назначать на работу p_j. Аналогично равенство $\pi_2(i) = j$ означает, что исполнитель i должен также выполнить работу q_j.

Биназначениями именуем пары вида $< \pi_1(i), \pi_2(i) >$. Считается, что при реализации биназначения $<\pi_1(i), \pi_2(i)>$ каждый исполнитель i, начиная от момента времени 0, выполняет сначала работу с номером $\pi_1(i)$, после чего немедленно приступает к выполнению работы с номером $\pi_2(i)$.

В общем виде изучаемая общая задача о биназначениях с минимаксным критерием – задача 1 записывается следующим образом:

$$\min_{\pi_1, \pi_2} (\max_{\alpha}[a_{\alpha\pi_1(\alpha)} + b_{\alpha\pi_2(\alpha)}]). \qquad (1)$$

Если матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ установлены длительности выполнения работ исполнителями, то, решая (1), мы отыскиваем биназначение, обеспечивающее минимальность общей продолжительности выполнения всего комплекса работ $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$.

Как легко заметить, (1) представляет собой обобщение классической минимаксной задачи о назначениях.

3. Для конструирования решающего (1) алгоритма воспользуемся концепцией динамического программирования.

Пусть i – не превышающая n натуральная константа, а W_1, W_2 – произвольные i-элементные подмножества из$\{1, 2, \ldots, n\}$.

Через $Z(i, W_1, W_2)$ обозначим подзадачу задачи 1, в которой между исполнителями множества $\{1, 2, \ldots, i\}$ следует распределить работы с нижними индексами (номерами) из подмножеств W_1 и W_2; при этом каждый исполнитель должен получить ровно одну работу множества $\boldsymbol{P}$ (с номером, входящим в подмножество W_1,) и ровно одну работу множества $\boldsymbol{Q}$ (с номером, входящим в подмножество W_2,). Определяемый подмножествами W_1, W_2 комплекс работ следует выполнить за минимальное время.

Оптимальное значение критерия в задаче $Z(i, W_1, W_2)$ обозначим $B(i, W_1, W_2)$. Как очевидно, $B(i, W_1, W_2)$ – функция Беллмана для (1), причем

$$B(1, \{j\}, \{k\}) = a_{1j} + b_{1k}; \quad j, k\in\{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (2)$$

Согласно принципу Беллмана, имеем соотношение:

$$B(i,\, W_1,\, W_2) = \min(\max_{\alpha,\beta}[(a_{i\alpha} + b_{i\beta}),\, B(i\text{ -}1,\, \{W_1 \backslash \alpha\},\, W_2 \backslash \beta\})]), \qquad (3)$$

где (α, β) – произвольные пары индексов из множества $W_1 \times W_2$.

Формулы (2), (3) суть рекуррентные соотношения динамического программирования для решения задачи (1).

Выполнение реализующего по этим соотношениям вычислительного алгоритма начинается с определения величин $B(1, \{j\}, \{k\})$ для всех одноэлементных множеств W_1 и W_2.

Далее последовательно в порядке возрастания параметра i ($i = 2, 3, \ldots , n$) для всех возможных наборов W_1 и W_2 по формуле (3) определяются значения функции $B(i, W_1, W_2)$; при этом значение $B(n, \{1, 2, \ldots , n\}, \{1, 2, \ldots , n\})$ функции Беллмана при крайнем наборе значений аргументов представляет собой оптимальное значения критерия в задаче 1.

В процессе выполнения описанной вычислительной процедуры для каждой тройки (i, W_1, W_2) значений аргументов следует фиксировать пару (α, β), на которой реализуется минимум правой части соотношения (3). Это позволит после отыскания оптимального в задаче 1 значения критерия записать соответствующее ему биназначение.

Сложность сконструированного алгоритма решения (1) определяется числом вычисляемых значений функции Беллмана и, как очевидно, определяется величиной $O(4^n)$.

4. Введем в рассмотрение естественную для приложений конкретизацию (1) – задачу 2, в которой каждая из имеющихся $2n$ работ характеризуется своей трудоемкостью: работа p_j имеет трудоемкость $t(p_j)$, работа q_j, имеет трудоемкость $t(q_j)$). Считаем также, что каждый исполнитель i характеризуется своей производительностью w_i, а элементы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ вычисляются по соотношениям

$$a_{ij} = t(p_j) / w_i,\ b_{ij} = \{t(q_j) / w_i\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

По условиям задачи 1 и задачи 2 выделим соответствующие задачи распознавания – задачу 3 и задачу 4 соответственно.

В задаче 3 при исходных данных задачи 1 и дополнительно указанной константе T спрашивается: существует ли биназначение, при реализации которого вся совокупность имеющихся работ может быть выполнена не позднее наступления момента времени T (директивного срока завершения предписанного комплекса работ).

В задаче 4 идентичный вопрос ставится при исходных данных задачи 2 и дополнительно указанной константе T.

Очевидно, что вычислительная сложность задачи 1 не ниже вычислительной сложности задач 2 и 3, а вычислительная сложность как задачи, так и задачи 3 не ниже вычислительной сложности задачи 4.

Легко показывается, что задача 4 полиномиально эквивалентна NP-полной проблеме «Паросочетания с ограничениями по весу» [15, с. 284].

Таким образом устанавливается, что все изучаемые в статье задачи труднорешаемы и, согласно естественно-научной гипотезе «$P \neq NP$» [15], алгоритмы полиномиальной вычислительной сложности для них построить нельзя.

5. С учетом прикладной значимости рассматриваемой проблематики распределения дискретных ресурсов целесообразным является конструирование для общей задачи о биназначениях итерационного решающего алгоритма, реализующего концепцию метода ветвей и границ (ВиГ) [16, 17].

Принципиальной особенностью такого подхода является возможность решить задачу «до конца» (если продолжительность решения оказывается входящей в рамки регламентных ограничений), либо удовлетвориться заключительным при достижении предела времени счета рекордным значением критерия оптимальности в противном случае (гарантированная величина погрешности при этом будет известна).

Для реализации схемы ВиГ следует определить три основные её составляющие:

а) способ вычисления верхних оценок значения критерия в получаемых вершинах конструируемого фрагмента дерева вариантов (в задачах минимизации эта оценка обеспечивается допустимыми решениями);

б) способ вычисления нижних оценок значения критерия в получаемых вершинах конструируемого фрагмента дерева вариантов;

в) способ ветвления.

Для вычисления верхней оценки значения критерия оптимизации в корне дерева вариантов задачи 1 решается определяемая матрицей $\boldsymbol{A}$ классическая задача о назначениях с минимаксным критерием. Получаемое при этом назначение обозначаем π_1^*. Далее выполняется построение матрицы $\boldsymbol{B}^*$, каждый элемент которой b_{ij}^* находится по формуле $b_{ij}^* = b_{ij} + a_{i\pi^*(i)}$. Назначение π_2^* получается аналогично синтезу π_1^* – в результате решения определяемой матрицей $\boldsymbol{B}^*$ классической задачи о назначениях с минимаксным критерием.

Итоговое биназначение $\pi^{**} = <\pi_1^*(i), \pi_2^*(i)>$ обеспечивает верхнюю оценку в корне дерева вариантов решаемой задачи.

Легко видеть, что в качестве нижней оценки в корне дерева вариантов можно взять величину Θ, вычисляемую по соотношению

$$\Theta = \max_{\alpha}[\min_{\beta} a_{\alpha\beta} + \min_{\beta} b_{\alpha\beta}].$$

Изложенные способы получения верхней и нижней оценок значения оптимизируемого критерия в корне дерева вариантов очевидным образом индуцируют алгоритмы их отыскания в последующих промежуточных вершинах этого дерева.

При этом наименьшая из верхних оценок, получаемых в процессе описываемого построения достаточного для решения задачи фрагмента дерева вариантов, именуется текущим рекордом, и его значение в таком процессе уменьшается. Описанный алгоритм решения задачи завершает работу как только множество перспективных для дальнейшего ветвления открытых вершин [16, 17]) оказывается пустым.

Корень дерева вариантов считаем вершиной первого ранга; вершины k-го ранга порождают при ветвлении вершины ранга $k+1$.

Процедура ветвления в произвольной вершине k-го ранга заключается в построении из нее ветвей, каждая из которых соответствует закреплению за k-м исполнителем некоторой пары пока свободных работ из множества $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$; при этом ветви дерева вариантов надо строить только для тех пар (p_α, q_β) свободных работ, для которых сумма $a_{k\alpha}+b_{k\beta}$ меньше значения текущего рекорда. Вместе с тем, заметим, что число ветвей дерева вариантов, выходящих из произвольной вершины ранга k, может, вообще говоря, достигнуть значения $(n-k)\times(n-k)$.

Итоговая величина текущего рекорда – оптимальное значение критерия, и путь от корня к вершине дерева вариантов, в которой оно достигнуто, однозначно определяет решение задачи о биназначениях.

Дополнительно отметим, что наличие некоторого предварительно построенного даже небольшого начального фрагмента дерева вариантов может существенно сократить длительность решения задачи методом динамического программирования. В самом деле, пусть при построении такого фрагмента дерева вариантов итоговым (минимальным) значением текущего рекорда оказалось число U. Тогда на каждом этапе расчетов по формуле (3) достаточно рассматривать только такие пары индексов (α, β) из $W_1\times W_2$, для которых сумма $a_{k\alpha} + b_{k\beta}$ не превосходит U.

Отметим, что процедуры получения верхних и нижних оценок при решении задачи 1 по схеме ВиГ могут различным образом модифицироваться. Приведем простейший пример такой модификации.

Назначение π назовем диагональным, если либо каждому исполнителю i предписывается работа того же индекса, либо каждому исполнителю i предписывается работа индекса $n-i$. В задаче о назначениях имеется два диагональных решения, а в задаче о биназначениях таких решений четыре. Наилучшее по введенному критерию из четырех диагональных решений обеспечивает возможную верхнюю оценку.

Новые по сравнению с введенными способы вычисления верхних и нижних оценок могут быть использованы при решении задачи 2.

6. Нами рассмотрена проблема распределения между исполнителями формируемых пар невзаимнозаменяемых работ. В рамках построенной математической модели введено понятие «биназначение», сформулирована общая задача о биназначениях, обобщающая классическую задачу о назначениях с минимаксным критерием оптимизации. Доказана труднорешаемость поставленной общей задачи и её практически значимых конкретизаций, учитывающих производительности исполнителей, трудоемкости работ, а также директивные сроки их завершения.

Для решения общей задачи о биназначениях сконструирован алгоритм на основе формализма динамического программирования, приведена оценка его вычислительной сложности и описана схема конструирования решения на основе концепции ветвей и границ; при этом предложены конструктивные способы вычисления верхних и нижний оценок значений минимаксного критерия как в корне, так и в промежуточных вершинах дерева вариантов при реализации соответствующей итерационной процедуры. Такой подход позволяет для практически значимых размерностей математической модели синтезировать эффективные (субоптимальные) решения задачи о биназначениях в приемлемом времени.

Полученные результаты нашли свое отражение в пилотном проекте цифровой системы поддержки оперативного планирования распределением группы грузовых судов по пунктам погрузки и последующей выгрузки НСМ.

В качестве развития темы обобщения классической задачи о назначениях представляется целесообразным (в частности, для логистических приложений) рассмотреть задачу о 2-назначениях, в которой каждому из n исполнителей предписывается пара работ из неразбитой на части $2n$-элементной совокупности.

Другое практически значимое направление обобщения классической задачи о назначениях открывает модель с m-элементной ($m > 2$) совокупностью множеств работ $P_k = \{p^k_1, {}^k_2, \dots , p^k_n\}$, $k = \overline{1,m}$.

Каждый исполнитель совокупности $\boldsymbol{I}$ должен быть назначен на одну из работ каждого из множеств $P_1, P_2, \dots , P_m$; при этом каждая из работ должна получить для себя ровно одного исполнителя и полагаются заданными m квадратных $n\times n$-матриц $A^k = \{a^k_{ij}\}$ численных оценок выполнения исполнителем i работы j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$.

Постановка оптимизационных задач в рамках такой обобщенной модели управления дискретными ресурсами, а, при необходимости, с учетом дополнительных ограничений позволит, в частности, реализовать цифровую систему поддержки планирования распределения скоростных пассажирских судов по маршрутам для выполнения региональных, пригородных и внутригородских перевозок.

Понятно, что сложность таких задач кратно возрастает и соответственно для их решения в приемлемом времени необходимы алгоритмы, реализующие, в том числе метаэвристические концепции и ориентированные на суперкомпьютерные технологии организации вычислительных процессов.

Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-07-03141.

Библиографический список

1. Концепция развития внутреннего водного транспорта в Республике Татарстан / URL: http://pandia.ru/text/78/119/109171-2.php
2. Справочник по серийным транспортным судам. Т. 4. – М.: Транспорт, 1975. – 179 с.
3. **Козырев, В.К.** Грузоведение / В.К. Козырев. – М.: Транспорт, 1991. – 288 с.
4. **Бессонов, Е.А.** Энциклопедия гидромеханизированных работ / Е.А. Бессонов. – М.: 1989.ру, 2005. – 520 с.

5. **Votaw, Jr. D. F.** The personnel assignment problem / Jr. D. F. Votaw, A. Orden // Scientific Computation of Optimum Programs. Project SCOOP. Washington. D.C., 1952. – № 10. – P. 155–163.
6. **Kuhn, H.W.** The Hungarian Method for the assignment problem // Naval Research Logistics. Quarterly. – 1955. – № 2. – P. 83–97.
7. **Pentico, D.** Assignment problems: A golden anniversary survey // European Journal of Operational Research. – 2007. – № 176. – P. 774–793.
8. **Коган, Д.И.** Задачи о назначениях в приложении к проблемам доформирования грузовых составов / Д.И. Коган, Ю.С. Федосенко Д.А. Хандурин // 'Проблемы теоретической кибернетики': XVIII международная конференция, 19-23 июня 2017. – Пенза: МАКС Пресс, 2017. – С. 117–120.
9. **Fedosenko, Yu.S.** Non-standard types assignment problems: research and algorithms / Yu.S. Fedosenko, D.I. Kogan, D.K. Khandurin // 'Information Control and Technologies': VI International Scientific-Practical Conference, 20‒22 September, 2017. – Odessa: ONMU, 2017. – P. 300–302.
10. **Гейл, Д.** Теория линейных экономических моделей / Д. Гейл. – М.: ИЛ, 1963. – 418 с.
11. **Коган, Д.И.** Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. / Д.И. Коган. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2005. – 252 с.
12. **Коган, Д.И.** Постановки и алгоритмы решения задачи о назначениях в приложении к проблемам доформирования составов транспортных средств / Д.И. Коган, Ю.С. Федосенко, Д.А. Хандурин // Вестник ВГАВТ. – 2017. – №3. – С. 23–31.
13. **Беллман, Р.** Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 457 с.
14. **Корнеенко, В.П.** Методы оптимизации / В.П. Корнеенко. – М.: Высш. шк., 2007. – 664 с.
15. **Гэри,** Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / Д. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
16. **Корбут, А.А.** Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
17. **Сигал, И.Х.** Введение в прикладное дискретное программирование / И.Х. Сигал, А.П. Иванова. – М.: Наука, 2007. – 237 с.

Дата поступления
в редакцию 31.01.2018

D.I. Kogan[1], Yu.S. Fedosenko[2], D.A. Khandurin[1]

FORMULATION, ALGORITHMS FOR SOLUTION SYNTHESIS AND COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF MINIMAX BI-ASSIGNMENT PROBLEM

Moscow technological university[1];
Volga state university of water transport[2]

Purpose: The problem of increasing the efficiency of assignment of the pairs of non-interchangeable tasks between actors is considered.
Method: A discrete mathematical model of assignment is formulated, the notion "bi-assignment" is introduced, an optimization problem is set for bi-assignment task with a minimax criterion, and its intractability is proved.
Results: The algorithm for solving the problem of bi-assignment task with a minimax criterion, realizing the concept of dynamic programming, characterized by exponential computational complexity, is constructed. Another algorithm for generating suboptimal and optimal bi-assignments according to branch and bound scheme is described.
Application domain: The general model developed and algorithms for synthesizis optimal assignments between the actors and formed pairs of non-interchangeable works forms the core of model-algorithmic foundation for computer-aided systems for support of operational planning of vehicle use in transport logistics systems.

Key words: assignment problem, bi-assignment, dynamic programming, branch and bound scheme, computational complexity.