

УДК 621.382.2/3

А. Е. Китаев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ПОДБОРА ПАРАМЕТРОВ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИОДА

АО «ННПО имени М.В. Фрунзе»

В данной работе метод наименьших квадратов применен для подбора параметров нелинейной модели полупроводникового диода: тока насыщения, температурного потенциала и внутреннего сопротивления диода (омического сопротивления области с меньшей концентрацией примесей). Последний параметр применяется в уравнении, уточняющем экспоненциальную формулу Шокли в области больших прямых токов, но рассмотренный метод применим и в случае равенства этого параметра нулю (когда уточненное выражение переходит в формулу Шокли).

Ключевые слова: метод наименьших квадратов.

Введение

Целью данной работы является разработка методики подбора параметров для нелинейной модели полупроводникового диода, уточняющей формулу Шокли. Именно формула Шокли обычно применяется для описания вольт-амперной характеристики p - n перехода, но при больших прямых токах в реальных полупроводниковых диодах наблюдаются отклонения от этой формулы. Известно, что ток диода можно неявным образом выразить через напряжение с помощью следующего более точного выражения [1]:

$$I = I_s \left(e^{\frac{U - IR}{\varphi}} - 1 \right). \quad (1)$$

Здесь I_s – это ток насыщения, φ – температурный потенциал, R – омическое сопротивление области диода с меньшей концентрацией примесей (фактически этот параметр является внутренним сопротивлением диода). Формула (1) отличается от формулы Шокли именно учетом этого внутреннего сопротивления R . Явное выражение для тока [2], учитывающее ненулевое значение параметра R , записывается через специальную функцию Ламберта $W(x)$ [3]:

$$I = -I_s + \frac{\varphi}{R} W \left(e^{\frac{U}{\varphi}} I_s \frac{R}{\varphi} e^{I_s \frac{R}{\varphi}} \right). \quad (2)$$

График, соответствующий этой кривой, обозначен на рис. 1 сплошной линией (пунктирная линия соответствует формуле Шокли). Из графика видно, что экспоненциальная кривая Шокли имеет более резкий рост. Кривая (2), соответствующая учету ненулевого внутреннего сопротивления R , при больших значениях прямого напряжения асимптотически приближается к прямой линии:

$$I \approx \frac{U}{R} + \frac{\varphi}{R} \ln \left(I_s \frac{R}{\varphi} \right).$$

Явная формула для напряжения, следующая из (1), записывается с использованием логарифмической функции:

$$U = \varphi \ln \left(\frac{I}{I_s} + 1 \right) + IR. \quad (3)$$

Именно эту формулу из-за ее простоты целесообразно положить в основу дальнейших расчетов. Для подбора параметров I_s , φ и R будет использован метод наименьших квадратов, адаптированный к данному нелинейному случаю.

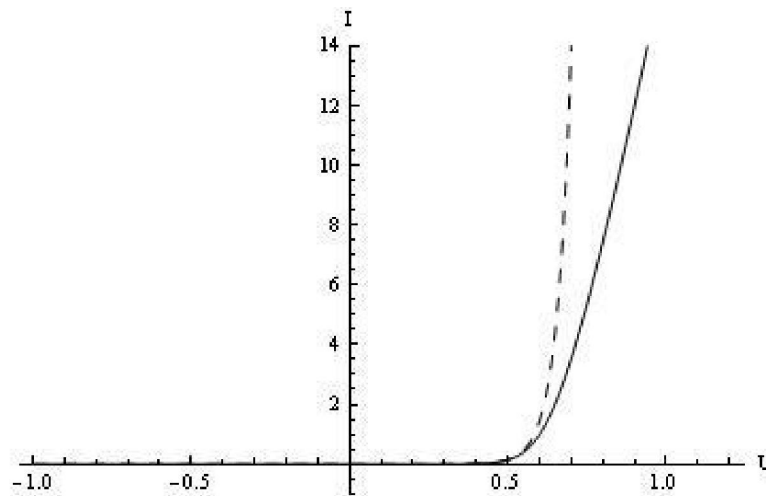


Рис. 1. Графики вольт-амперных характеристик диода (сплошная линия – с учетом ненулевого внутреннего сопротивления R , пунктир – без учета R , в соответствии с формулой Шокли)

Методика

Если напрямую применить метод наименьших квадратов к соотношению (3), мы получим достаточно сложную систему из трех уравнений относительно трех неизвестных величин (I_s , φ , R). Можно упростить задачу, если использовать тот факт, что при больших прямых токах вольт-амперная характеристика, описываемая формулой (3), почти линейна. Ее наклон определяется параметром R . Это позволяет произвести оценку данного параметра, взяв несколько экспериментальных значений тока и напряжения, находящихся на квазилинейном участке характеристики, и применив обычный метод наименьших квадратов [4], предназначенный для поиска параметров R и b кривой $y=xR+b$. Значение R определяется следующей формулой:

$$R = \frac{L \sum_{i=1}^L x_i y_i - \sum_{i=1}^L y_i \sum_{i=1}^L x_i}{L \sum_{i=1}^L (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^L x_i)^2}.$$

Здесь x_i – это набор из L экспериментальных значений тока (приходящихся на квазилинейный участок), а y_i – набор из L соответствующих им экспериментальных значений напряжения ($L < N$, где N – полное число экспериментальных отсчетов, приходящихся не только на квазилинейный, но и на нелинейный участок).

После этого получим формулу для параметров I_s и φ , считая, что третий параметр R нам уже известен. Для этого построим выражение для суммы квадратов разностей экспериментальных значений y и вычисленных по формуле (3).

$$S = \sum_{i=1}^N \left(\varphi \ln \left(\frac{x_i}{I_s} + 1 \right) + x_i R - y_i \right)^2. \quad (4)$$

Здесь берется уже полное число отсчетов тока и напряжения (N).

Найдем частные производные величины S по φ и по I_s .

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 2 \sum_{i=1}^N (\varphi \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i) \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1),$$

$$\frac{\partial S}{\partial I_s} = -2 \sum_{i=1}^N (\varphi \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i) \frac{\varphi x_i}{I_s (x_i + I_s)}.$$

Приравнявая эти частные производные нулю, мы получим систему двух уравнений для φ и I_s :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = - \frac{\sum_{i=1}^N (x_i R - y_i) \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1)}{\sum_{k=1}^N (\ln(\frac{x_k}{I_s} + 1))^2}, \\ \sum_{i=1}^N (\varphi \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i) \frac{x_i}{x_i + I_s} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Если φ из первого уравнения (5) подставить во второе (переименовав для удобства индексы суммирования), мы получим уравнение, куда входит лишь I_s :

$$\sum_{i=1}^N \left(\left[- \frac{\sum_{m=1}^N (x_m R - y_m) \ln(\frac{x_m}{I_s} + 1)}{\sum_{k=1}^N (\ln(\frac{x_k}{I_s} + 1))^2} \right] \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i \right) \frac{x_i}{x_i + I_s} = 0.$$

Это уравнение можно решить численно (например, средствами пакета «Wolfram Mathematica») и найти значение I_s . После этого из первого уравнения системы (5) можно найти значение φ . Параметр R здесь считается уже известным но его, возможно, придется изменить, чтоб добиться лучшего совпадения данных, вычисленных по формуле (3), с экспериментальными значениями. Например, можно провести расчет для нескольких значений R , построить график, отображающий зависимость квадратичного отклонения S в зависимости от R , и после этого подобрать значение R , при котором отклонение S минимально.

Отметим также, что система (5) пригодна и для случая формулы Шокли (когда в соотношениях (1) и (3) $R=0$).

В заключение статьи приведем график, где точками показаны экспериментальные данные, а сплошной линией – значения, вычисленные по формуле (3).

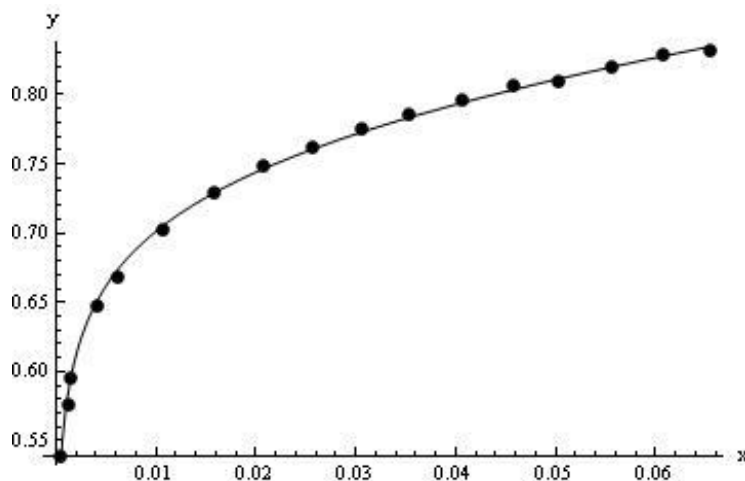


Рис. 2. Координата x – это ток (А), y – напряжение (В). $R=0.63$ Ом

Если принять $R=0$, кривая, полученная таким способом, дает худшую аппроксимацию.

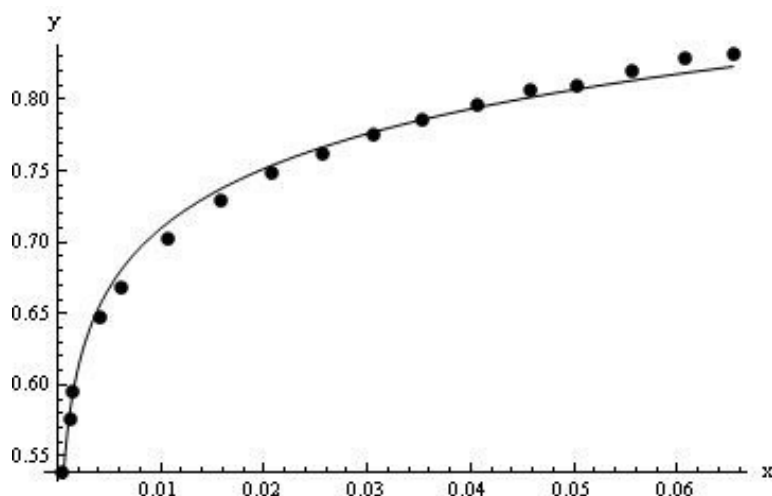


Рис. 3. График при $R=0$

Выводы

Фактически для подбора параметров уточненной вольт-амперной характеристики диода используется следующий алгоритм:

1. Отбираются несколько точек, лежащих на квазилинейном участке характеристики, после чего делается оценка внутреннего сопротивления диода R (с помощью метода наименьших квадратов, примененного к поиску параметров прямой линии).

2. Далее метод наименьших квадратов адаптируется для поиска параметров обобщенной кривой, описывающей вольт-амперную характеристику. После этого ищутся оставшиеся два параметра ϕ и I_s (в предположении, что внутреннее сопротивление R задано).

3. Возможно варьирование значения R и повторение действий пункта 2 для лучшей аппроксимации экспериментальных данных теоретической кривой.

Полученная кривая довольно точно приближает массив экспериментальных данных. Приравнивание внутреннего сопротивления диода R нулю приводит к ухудшению соответствия.

Библиографический список

1. Степаненко, И.П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем / И.П. Степаненко. – М.: Энергия, 1977.
2. Китаев А.Е. / Материалы международной научно-технической конференции «Интерматик-2016», Часть 3. – М.: Галлея-Принт, 2016.
3. Дубинов, А. Е. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики / А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.
4. Зельдович, Я.Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972.
5. Китаев, А.Е. Аналитическое представление характеристик биполярных транзисторов // Радиотехника 2017 N10 С.189-194.
6. Труды XX Научной конференции по радиофизике. – Н.Новгород: ННГУ, 2016.

Дата поступления
в редакцию 23.03.2018

A. E. Kitaev

USING OF THE LEAST-SQUARES METHOD FOR DIODE PARAMETERS FITTING

NNPO named after M.V. Frunze

Purpose: The purpose of this work is the algorithm design of parameter fitting for the nonlinear characteristics of semiconductor diode.

Methodology: In this paper the least-squares method is applied to the parameters fitting for the volt-ampere characteristic of semiconductor diode. These parameters are I_s , φ and R . I_s is saturation current, φ is temperature voltage and R is the pure resistance of diode area with little impurity density. The third parameter is used in improved formula of characteristic that is more exact than the exponential Shockley formula. If this parameter is equal to zero this method can be applied to the original Shockley formula.

Findings: The least-squares method is adapted for application to this task. The calculations show that the accounting of third parameter R makes the approximation more exact.

Key words: least squares method, volt-ampere characteristic.