УДК 681.5

Р.А. Мусарский

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТАРШИМИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМИ ГУРВИЦА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Приведен результат разработки метода вероятностного исследования линейных динамических систем на основе выявленного соотношения между старшими определителями Гурвица характеристического полинома исследуемой динамической системы и полинома, представляющего произведение характеристического полинома динамической системы на полином, входящий в знаменатель спектральной плотности входного воздействия. Дан иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: линейная динамическая система, системы автоматического управления, вероятностный анализ, старший определитель Гурвица.

При разработке систем автоматического управления, динамических систем, подвергающихся влиянию случайных воздействий широко применяются как методы численного анализа, так и аналитические методы. Целью данной статьи является разработка аналитического метода исследования линейных динамических систем при случайном воздействии.

Как известно [1] , дисперсия выходной координаты $V(t)$) линейной динамической системы может быть вычислена с помощью интеграла

$$D_V = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 \, S_u(\omega) d\omega \,, \tag{1}$$

где $S_u(\omega)$ - спектральная плотность входной координаты $U(t)$;

$W(i\omega) = \dfrac{\Delta_V(i\omega)}{\Delta(i\omega)}$ -передаточная функция линейной системы.

Функция $S_u(\omega)$ может быть представлена в виде дробно-рациональной функции

$$S_u(\omega) = \frac{q(i\omega)q(-i\omega)}{r(i\omega)r(-i\omega)} \quad . \tag{2}$$

Интеграл (1) может быть приведён к форме

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(\omega)}{h_n(i\omega)h_n(-i\omega)} d\omega \,, \tag{3}$$

где

$$g_n(\omega) = b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \ldots + b_{n-1} \,, \tag{4}$$
$$h_n(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n \,.$$

Так как все корни характеристического уравнения $h_n(p) = 0$ лежат в левой полуплоскости комплексного аргумента p, то все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны при положительном a_0. При этом коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Вычисление интеграла (3) приводит к выражению [1]

$$J_n = \frac{\pi}{a_0}\frac{M_n}{D_n} \,, \tag{5}$$

где D_n - старший определитель Гурвица, составленный из коэффициентов полинома $h_n(p)$. Этот полином обычно представляет произведение характеристического полинома исследуемой динамической системы на полином, представляющий знаменатель спектральной плотности входного воздействия.

M_n - определитель, который получается из D_n заменой первого столбца на столбец с коэффициентами $b_0, -b_1, +b_3, ..., (-1)^{n-1} b_{n-1}$.

Например, для J_3

$$J_3 = \frac{\pi}{a_0}\frac{M_3}{D_3} = \frac{\pi}{a_0}\begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & a_1 \\ b_2 & 0 & a_3 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \pi \frac{a_2 a_3 b_0 + a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2}{a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}. \qquad (6)$$

Дальнейшее улучшение применения формулы (5) может быть сделано на основе следующей теоремы.

Теорема

Если характеристический полином системы может быть записан в форме

$$P_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = (p+\beta) Q_{n-1}(p), \qquad (7)$$

где $Q_{n-1}(p) = d_0 p^{n-1} + d_1 p^{n-2} + ... + d_{n-1}$,

то между старшими определителями Гурвица, составленными для полиномов $P_n(p)$ и $Q_{n-1}(p)$ имеет место соотношение

$$H_n^P = \beta Q_{n-1}(\beta) H_{n-1}^Q. \qquad (8)$$

Заметим, что запись полинома в виде (7) обычна в статистической динамике. Это следует из факта, что, как правило, $Q_{n-1}(p)$ представляет характеристический полином системы, а множитель $(p+\beta)$ появляется в выражении для спектральной плотности внешнего воздействия.

Если подставить (8) в знаменатель выражения (5) , то вычисление дисперсии выходной координаты динамической системы сводится к вычислению старшего определителя Гурвица её характеристического полинома и значению этого полинома при $p = \beta$.

Вывод формулы (8) в общем случае громоздкий, поэтому ограничимся примером этого вывода для полинома четвёртого порядка $H_4^P = \beta Q_3(\beta) H_3^Q$. В этом случае

$$\begin{aligned} P_4(p) &= a_0 p^4 + a_1 p^3 + ... + a_4 = (p+\beta)(d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3) = \\ &= (p+\beta) Q_3(p) = d_0 p^4 + (d_1 + d_0\beta) p^3 + (d_2 + d_1\beta) p^2 + (d_3 + d_2\beta) p + d_3\beta \end{aligned}.$$

Составим старший определитель Гурвица для этого полинома

$$H_4 = \begin{vmatrix} d_1 + d_0\beta & d_0 & 0 & 0 \\ d_3 + d_2\beta & d_2 + d_1\beta & d_1 + c_0\beta & d_0 \\ 0 & d_3\beta & d_3 + d_2\beta & d_2 + d_1\beta \\ 0 & 0 & 0 & d_3\beta \end{vmatrix} = d_3\beta \begin{vmatrix} d_1 + d_0\beta & d_0 & 0 \\ d_3 + d_2\beta & d_2 + d_1\beta & d_1 + d_0\beta \\ 0 & d_3\beta & d_3 + d_2\beta \end{vmatrix} =$$

Умножим первую строку на β^2, одновременно поделим третью строку на β^2 и прибавим вторую и третью строки к первой. В каждом элементе первой строки в качестве сомножителя выделяется полином $d_0\beta^3 + d_1\beta^2 + d_2\beta + d_3$

$$= \frac{d_3}{\beta}(d_0\beta^3 + d_1\beta^2 + d_2\beta + d_3) \begin{vmatrix} 1 & 1/\beta & 1/\beta^2 \\ d_3 + d_2\beta & d_2 + d_1\beta & d_1 + d_0\beta \\ 0 & d_3\beta & d_3 + d_2\beta \end{vmatrix} =$$

Вычтем из второго столбца первый, делённый на β и из третьего столбца второй, делённый на β, получим

$$\frac{d_3}{\beta}(d_0\beta^3+d_1\beta^2+d_2\beta+d_3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_3+d_2\beta & d_1\beta-{d_3}/{\beta} & d_0\beta-{d_2}/{\beta} \\ 0 & d_3\beta & d_2\beta \end{vmatrix}=\frac{d_3}{\beta}(d_0\beta^3+d_1\beta^2+d_2\beta+d_3)\begin{vmatrix} d_1\beta-{d_3}/{\beta} & d_0\beta-{d_2}/{\beta} \\ d_3\beta & d_2\beta \end{vmatrix}$$

Прибавим к первой строке вторую, делённую на β^2, получим

$$= d_3\beta(d_0\beta^3+d_1\beta^2+d_2\beta+d_3)\begin{vmatrix} d_1 & d_0 \\ d_3 & d_2 \end{vmatrix}=\beta Q_3(\beta)H_3^Q .$$

В случае, если спектральная плотность соответствует корреляционной функции экспоненциально – косинусного типа, характеристический полином системы умножается на два комплексно-сопряжённых сомножителя

$$\gamma=\alpha+i\beta \qquad \text{и} \quad \bar{\gamma}=\alpha-i\beta .$$

Следствие 1. Если характеристический полином (7) может быть записан в форме

$$P_n(p)=(p+\gamma)(p+\bar{\gamma})R_{n-2}(p)$$

где $R_{n-2}(p)=p^{n-2}+c_1p^{n-3}+...+c_{n-2}$,

то между старшими определителями Гурвица полиномов $P_n(p)$ и $R_{n-2}(p)$ имеет место соотношение

$$H_n^P=2\alpha\,|\gamma R_{n-2}(\gamma)|^2\,H_{n-2}^R .$$

Если известно два простых действительных корня β_1 и β_2 характеристического полинома, то из (1.8) имеет место следующее

Следствие 2. Если характеристический полином системы может быть записан в форме

$$P_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n=(p+\beta_1)(p+\beta_2)Q_{n-2}(p),$$

где $Q_{n-2}(p)=d_0p^{n-2}+d_1p^{n-3}+...+d_{n-2}$,

то между старшими определителями Гурвица, составленными для полиномов

$S_q(\omega)=\dfrac{2D_q\beta}{\omega^2+\beta^2}$ и $Q_{n-2}(p)$ имеет место соотношение

$$H_n^P=\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)Q_{n-2}(\beta_1)Q_{n-2}(\beta_2)H_{n-2}^Q .$$

Пример. Определим дисперсию ускорений $\ddot{x}_2$ массы m_2 последовательной цепочки двух механических осцилляторов (рис. 1), если основание подвергается стационарному случайному воздействию со спектральной плотностью $S_q(\omega)=\dfrac{2D_q\beta}{\omega^2+\beta^2}$.

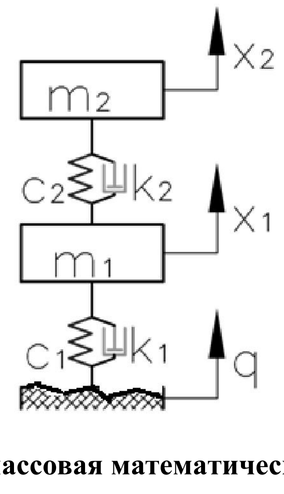

Рис. 1. Двухмассовая математическая модель

Уравнения колебаний этой системы:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= (k_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+c_2(x_2-x_1)+k_1\dot{q}+c_1q-k_1\dot{x}_1-c_1x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-c_2(x_2-x_1) \end{aligned} \tag{9}$$

Дисперсия ускорений D_a верхней массы вычисляется на основе выражения (3), где $h_5(i\omega)=P_5(p)=a_0p^5+a_1p^4+...+a_5=(p+\beta)Q_4(p)=(p+\beta)(d_0p^4+d_1p^3+d_2p^2+d_3p+d_4)$, где $(d_0p^4+d_1p^3+d_2p^2+d_3p+d_4)$ - характеристический полином динамической системы, β - параметр спектральной плотности внешнего воздействия, $g_n(\omega)=b_0\omega^8+b_1\omega^6+b_2\omega^4+b_3\omega^2+b_4$.

Коэффициенты в этих выражениях выражаются через параметры исследуемой системы:

$d_0=m_1m_2$, $d_1=m_1k_2+m_2(k_1+k_2)$, $d_2=m_1c_2+m_2(c_1+c_2)+k_1k_2$, $d_3=k_1c_2+k_2c_1$, $d_4=c_1c_2$.

$a_0=d_0$, $a_1=d_1+\beta d_0$, $a_2=d_2+\beta d_1$, $a_3=d_3+\beta d_2$, $a_4=d_4+\beta d_3$, $a_5=\beta d_4$

$b_0=k_1^2k_2^2$, $b_1=k_1^2c_2^2+k_2^2c_1^2$, $b_2=c_1^2c_2^2$, $b_3=b_4=0$.

Откуда на основе формулы (8) получаем выражение для вычисления дисперсии ускорений

$$D_a=\frac{M_5}{a_0D_5}=\frac{M_5}{d_0\beta Q_4(\beta)H_4^Q}=\frac{(a_0a_4a_5-a_1a_4^2-a_2^2a_5+a_2a_3a_4)b_0+(a_2a_5+a_3a_4)b_1+a_0(a_1a_4-a_0a_5)b_2}{d_0\beta(d_0\beta^4+d_1\beta^3+d_2\beta^2+d_3\beta+d_4)(d_1d_2d_3-d_0d_3^2-d_1^2d_4)}.$$

Заметим, что если параметр спектральной плотности внешнего воздействия β будет приближаться к корню характеристического полинома динамической системы, то дисперсия D_a будет стремиться к бесконечности, что вызывает «статистический резонанс».

На рис. 2 представлены графики зависимости дисперсии ускорений D_a массы m_2 от величины коэффициента демпфирования k_2 для трёх значений жёсткости упругого элемента c_2= 15 кН/м, c_2= 20 кН/м, c_2= 25 кН/м.

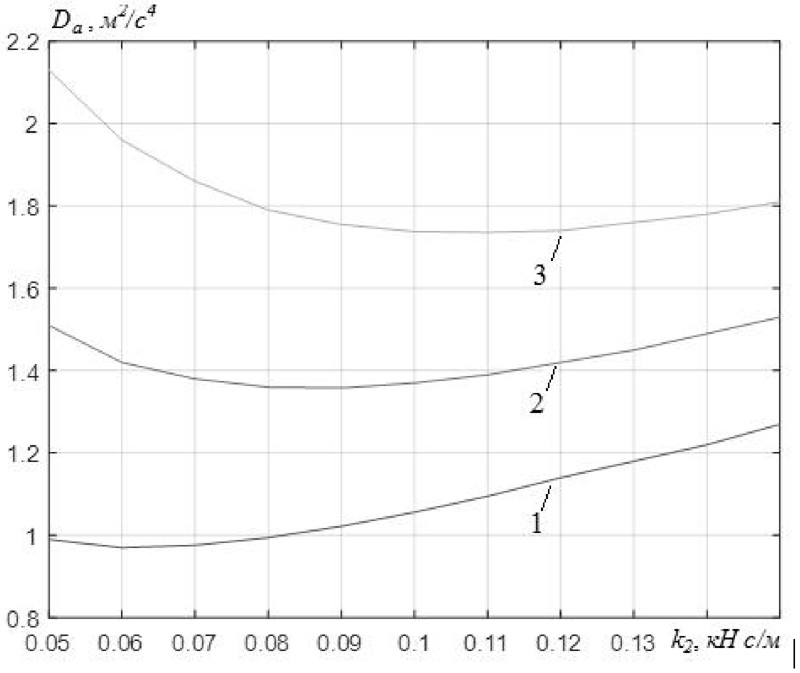

Рис. 2. Зависимость дисперсии ускорений D_a массы m_2 от коэффициента демпфирования k_2 для трёх значений жёсткости упругого элемента

1 – c_2= 15 кН/м; *2* - c_2= 20 кН/м; *3* – c_2= 25 кН/м

Из рис. 2 видно, что дисперсия ускорений D_a имеет минимальное значение в зависимости от величины коэффициента демпфирования k_2 и убывает с уменьшением жёсткости c_2.

Выводы

1. Разработан метод вероятностного исследования линейных динамических систем на основе выявленного соотношения между старшими определителями Гурвица характеристического полинома исследуемой динамической системы и полинома, представляющего произведение характеристического полинома динамической системы на полином, входящий в знаменатель спектральной плотности входного воздействия.
2. Дан пример, иллюстрирующий применение метода для вычисления дисперсии ускорения двухмассовой механической системы виброизоляции, находящейся под влиянием случайного воздействия.

Библиографический список

1. Laning, J.H. and Battin, R.H. Random Processes in Automatic Control. Laning, J.H. and Battin, R.H. Random New York-Toronto-London. Vc. Grawl – Hill, 1956.
2. **Лэнинг, Дж. Х.** Случайные процессы в задачах автоматического управления: [пер. с англ.] / Дж. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин [и др.]; под ред. В. С. Пугачева. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 387 с.
3. **Свешников, А.А.** Прикладные методы теории случайных функций / А.А. Свешников. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 464 с.

Дата поступления
в редакцию 19.03.2018

R.A. Musarsky

PROBABILISTIC INVESTIGATION OF DYNAMIC SYSTEMS ON THE BASIS OF THE RELATION BETWEEN LEADING HURVITZ DETERMINANTS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: The purpose of the study is to improve the analytical method of probabilistic research of linear dynamic systems.
Design/methodology/approach: The method is based on the found relationship between the leading Hurwitz determinants compiled for the characteristic polynomial of the system studied and for this polynomial multiplied by the polynomial that is included in the denominator of the spectral density of random excitation.
Findings: The analytically obtained an expression for the dispersion of output coordinates of a dynamic system that contains the denominator of the characteristic polynomial of the system calculated after the substitution of the parameter of the spectral density of the input.
Research Limitations/Implications: The method allows associating the dispersion of the output coordinates of a linear dynamic system with the characteristic polynomial of the system.
Originality/value: The article presents an original study that is of interest to researchers involved in probabilistic analysis of dynamic systems.

Key words: linear dynamical system, automatic control systems, probabilistic analysis, leading Hurwitz determinant.