

УДК 681.3.513

Е. А. Никулин

ИССЛЕДОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОЛИЛИНИЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Тема работы: Исследование статистических свойств и фрактальной размерности случайных полилиний.**Цель работы:** Установление статистических и фрактальных закономерностей случайных полилиний.**Метод решения:** Случайное ортогональное смещение средних точек отрезков полилинии.**Оригинальность:** Предложен метод оценки размерности неоднородных фракталов.**Выводы:** Получены статистические свойства и фрактальная размерность случайных полилиний.*Ключевые слова:* фрактальная полилиния, срединное смещение, фрактальная размерность.

Многие объекты окружающего мира обладают свойством самоподобия, или *масштабной инвариантности* – точного или приближённого сходства объектов с их отдельными фрагментами и больших фрагментов с меньшими. Математическое описание бесконечно дробимых объектов уравнениями линий или поверхностей [1] чрезвычайно громоздко из-за необъятного количества мельчайших фрагментов. Для преодоления этой трудности математиком Исследовательского центра IBM Бенуа Мандельбротом в 1975 г. был введён термин «*фрактал*» (от лат. *fractus* – дробный), а в 1978 г. опубликован основополагающий труд [2], где описаны свойства фрактальных множеств, методы их получения и применения в моделировании природных явлений.

В компьютерной графике фрактальная тема получила наибольшее распространение для формирования объектов природного ландшафта – линий горизонта, неровных поверхностей, холмов, гор, каньонов и прочих самоподобных, но нерегулярных образований. Нерегулярность самоподобия означает, что фрагменты объекта не точно повторяют его форму в уменьшенном масштабе, а имеют некоторые отклонения от регулярности, носящие случайный (стохастический) характер. Случайность доставляет фрактальному объекту неповторимость, живость и близость к реальным природным образованиям, каждый из которых уникален.

Метод срединного смещения

Всё многообразие методов рандомизации фрактальных множеств объять невозможно, поэтому сосредоточим дальнейшее внимание лишь на одном из них – **методе срединного смещения** [2, 3], основанном на рекурсивном разбиении объекта средними точками и их смещении на случайные расстояния в детерминированном либо случайном направлении. Управление возмущениями заключается в осознанном выборе параметров генераторов случайных чисел (ГСЧ) и уменьшении смещения средних точек по мере уменьшения размеров элементов фрактала.

Используем для моделирования случайных процессов функции генераторов, определённые в [4]:

- $rf(\lambda)$ – генератор центрированных (с нулевым средним) случайных чисел z , распределённых по некоторому закону с параметром разброса λ . Нецентрированные случайные числа со средним значением μ генерируются по формуле $\mu + rf(\lambda)$;
- равномерный ГСЧ $urf(s) = rnd(2s) - s$ с постоянной плотностью вероятности $p(z) = 1/2s$ в ограниченном в интервале $z \in [-s, s]$ и нулевой плотностью вне этого интервала;
- нормальный ГСЧ $nrf(\sigma)$ с гауссовой плотностью вероятности $p(z) = e^{-z^2/2\sigma^2} / \sigma\sqrt{2\pi}$, нулевым средним и среднеквадратичным отклонением (СКО) σ .

Алгоритм построения ФПЛ

Рассмотрим формирование стохастических фракталов на примере построения **фрактальной полилинии** (ФПЛ) на некотором **базовом отрезке** ab . В практических применениях она может изображать след молнии, траекторию случайного блуждания некоторой частицы (наподобие броуновского движения) или линию горизонта холмистой местности. Эта хорошо заметная линия разделяет светлую область неба, где рисуются фрактальные облака, и тёмную область земли с фрактальными деревьями, кустарниками и травой.

На рис. 1, *a* показаны первые три шага дробления отрезка ab с управляемыми случайными **ортогональными смещениями** средних точек разбиваемых отрезков. Величина смещения средней точки $c=(a+b)/2$ является случайным числом $|rf(\lambda)| \cdot |b-a|$, где λ — параметр **нормированного разброса** смещения средней точки, приходящегося на единицу длины отрезка. Знак смещения в ортогональном к отрезку направлении $Lrot(b-a)$, где $Lrot(V)=[-V_y, V_x]$ — функция вращения вектора $V=[V_x, V_y]$ влево на 90° , равновероятно принимает значения «+» либо «-». Например, равномерный ГСЧ $urf(s) \cdot |b-a|$ даёт равновероятное в интервале $[-s, s]$ число длин отрезка ab .

Рекурсивная функция $FPLrec(L, b, \lambda, \delta, r)$ построения **фрактальной полилинии** с аргументами L (списком вершин построенной части линии, последняя вершина которой a является началом следующего отрезка ab), точкой b , параметром разброса λ , минимальной длиной разбиваемого отрезка δ и глубиной рекурсии r работает следующим образом.

```

FPLrec(L, b, λ, δ, r)
{
  a = L_size(L), V = b - a;           // начало отрезка и его направление
  если {r=0} ∨ {|V| < δ}, то        // условия останова разбиения отрезка
    b → L;                             // добавление в список новой точки
    line(a, b);                          // вывод отрезка ab
    возврат L;                           // выход из рекурсии
  c = a + 0.5V, d = c + rf(λ) · Lrot(V); // средняя точка и её смещение
  L = FPLrec(L, d, λ, δ, -r);           // разбиение отрезка ad
  возврат FPLrec(L, b, λ, δ, r);        // разбиение отрезка db
}

```

Построение ФПЛ на отрезке ab осуществляется однократным вычислением списка её вершин $L = FPLrec(a, b, \lambda, \delta, r)$. Для создания фрактала на базовой полилинии $p_1 p_2 \dots p_n$ инициализируется начальный список из её первой вершины $L = \{p_1\}$, после чего в цикле

$$L = FPLrec(L, p_i, \lambda, \delta, r) \quad \forall i = \overline{2, n}$$

к нему подстраиваются ФПЛ на отрезках $p_{i-1} p_i$. Фактически это означает построение **фрактальной интерполяционной линии** на узловых точках $p_1 \div p_n$.

На рис. 1, *b* показаны три реализации алгоритма $FPLrec$ на базовом единичном отрезке с применением **равномерного** ГСЧ $urf(s)$ и параметрами $s \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$, $\delta = 0$ и $r = 8$. Моделирование с разными значениями s установило следующие **закономерности формы генерируемых линий**:

- при $s < 0.1$ они монотонно направлены от начала к концу базового отрезка, немного отклонены от него и подходят для моделирования молний;
- при $0.2 \leq s < 0.3$ на линиях появляются участки с попятным направлением движения,

они перестают быть монотонными вдоль базового отрезка и подходят для моделирования линий горизонта горных рельефов;

- при $s \geq 0.3$ на ФПЛ появляются петли, что затрудняет их использование как линий горизонта, но делает похожими на природное броуновское движение.

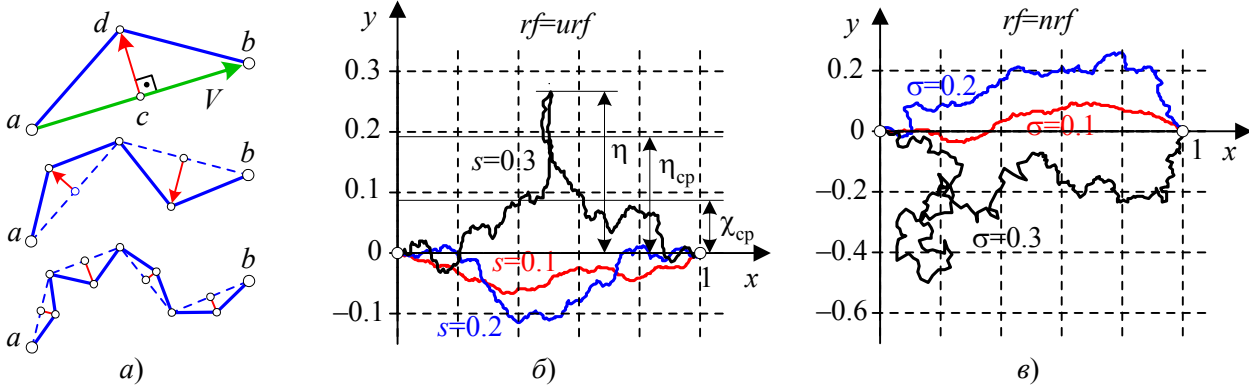


Рис. 1. Фрактальные полилинии

Таким образом, для исключения самопересечений ФПЛ алгоритм рекомендуется использовать при значениях параметра разброса ГСЧ $s < 0.2$, опасно при $0.2 \leq s < 0.3$ и противопоказано при $s \geq 0.3$.

В отличие от равномерного ГСЧ *нормальный генератор* $nrf(\sigma)$ создаёт большую часть случайных чисел с малыми отклонениями от нуля, а меньшую – с большими, при этом максимум отклонений теоретически неограничен. Три реализации алгоритма *FPLrec* с параметрами $\sigma \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$, $\delta=0$ и $r=8$ построены на рис. 1, в. Сравнение большого числа реализаций равномерно и нормально распределённых ФПЛ позволяет сделать вывод, что **максимальные отклонения этих двух типов полилиний в среднем одинаковы при соотношении между параметрами разброса $s \approx 2\sigma$** .

Статистические свойства ФПЛ

Для выработки дальнейших практических рекомендаций по использованию алгоритма *FPLrec* с равномерным ГСЧ $urf(s)$ предпримем небольшое статистическое исследование. Каждая фрактальная полилиния $p_1 p_2 \dots p_n$, построенная за r рекурсий разбиения отрезков средними точками, имеет $n=2^r+1$ вершин $p_i = [x_i \ y_i]$, где $i = \overline{1, n}$, и следующие **максимальное** и **среднее отклонения** от базового горизонтального отрезка единичной длины:

$$\eta = \max_{i \in [1, n]} |y_i|, \quad \chi = \text{mean}(|y_i|). \tag{1a}$$

Важной статистической характеристикой полилинии, отражающей её непрямолинейность, является **коэффициент удлинения** — отношение полной длины линии к расстоянию между её концами:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} |p_i - p_{i+1}| / |p_1 - p_n|. \tag{1б}$$

Зададим набор параметров разброса $s_j = 0.01j \ \forall j = \overline{0, 50}$ и для каждого s_j сгенерируем ансамбль из $K=100$ фрактальных полилиний с вычисленными по (1) отклонениями η_k, χ_k и коэффициентами удлинения $\gamma_k \ \forall k = \overline{1, K}$. Рассчитаем средние параметры ансамбля:

$$\eta_{cp} = \text{mean}(\eta_k), \quad \chi_{cp} = \text{mean}(\chi_k), \quad \gamma_{cp} = \text{mean}(\gamma_k). \tag{2}$$

Соответствующие графики для $r=8$ рекурсий приведены на рис. 2, а. Первые две зави-

симости в (2) хорошо аппроксимируются изображёнными пунктирно линейными функциями, а третья — показательно-степенной:

$$\eta_{\text{cp}}(s) \approx 0.65s, \quad \chi_{\text{cp}}(s) \approx 0.29s, \quad \gamma_{\text{cp}}(s) \approx 2^{5.7s^{1.8}}.$$

Вскоре нам потребуется связь коэффициента γ_{cp} не только с параметром разброса s при $r=8$, но и с *переменным числом рекурсий* r . Моделирование усреднённой длины ФПЛ при $r=1, 15$ показало степенную зависимость её двоичного логарифма от s (рис. 2, б) и линейную зависимость от r (рис. 2, в). В результате наилучшее двухпараметрическое приближение коэффициента удлинения обрело следующий вид:

$$\gamma_{\text{cp}}(s, r) \approx 2^{\alpha s^{\beta} r}, \quad \alpha \approx 0.71, \quad \beta \approx 1.82. \quad (3)$$

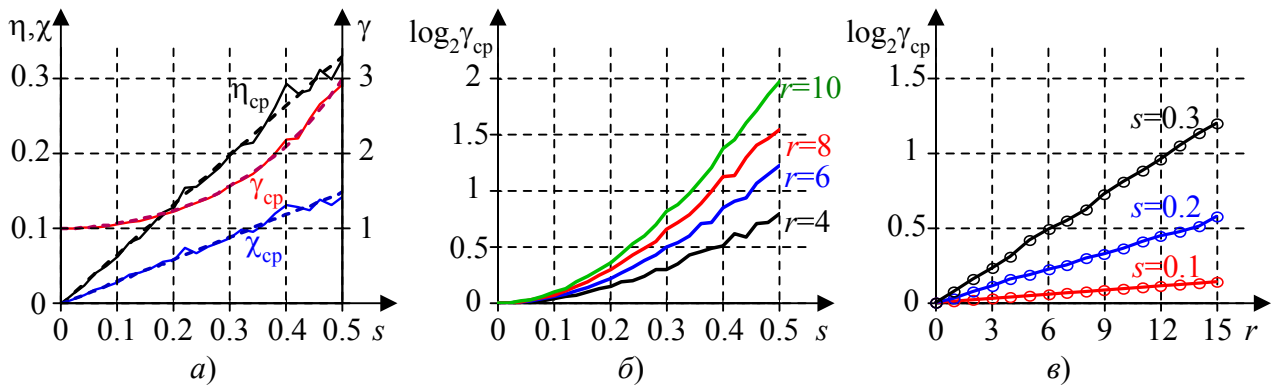


Рис. 2. Свойства усреднённых ФПЛ

А вот каковы статистические оценки ФПЛ с *нормальным* ГСЧ $nrf(\sigma)$:

$$\eta_{\text{cp}}(\sigma) \approx 1.23\sigma, \quad \chi_{\text{cp}}(\sigma) \approx 0.5\sigma, \quad \gamma_{\text{cp}}(\sigma, r) \approx 2^{10.2\sigma^{1.52}r}.$$

Фрактальная размерность

Почему мы так уверенно говорим, что обычная линия одномерна, полигон двумерен, а полиэдр трёхмерен, т. е. описываем число их степеней свободы *топологической размерностью* D_T ? Ведь ясно, что показателем размерности объекта служит не *евклидова размерность* $D_E \geq D_T$, определяемая числом координат пространства, а нечто другое. Линия с $D_T=1$ может быть и на плоскости ($D_E=2$), и в объёме ($D_E=3$), но всё равно она одномерна по числу возможностей движения точки по ней в одну либо обратную стороны. То же касается и поверхности – двумерного объекта ($D_T=2$), который может существовать и в пространстве с евклидовой размерностью $D_E=3$.

Независимо от метода построения все фракталы имеют одно важное общее свойство, характеризующее степень их раздробленности и предельные свойства. Это некоторое число D , называемое *фрактальной размерностью* Хаусдорфа [2, 3]. Следуя Мандельброту и методу Монте-Карло вычисления площадей фигур, её можно определить подсчётом числа N элементов, принадлежащих фрактальному множеству, при различных разрешениях δ – минимальных *линейных размерах элементов*. При достаточно малом δ выполняется условие $N\delta^D \approx \text{const}$. Задав значения δ_1, δ_2 и подсчитав соответствующие числа N_1 и N_2 , из условия $N_1\delta_1^D \approx N_2\delta_2^D$ получим *оценку* размерности объекта

$$D \approx \frac{\log(N_2/N_1)}{\log(\delta_1/\delta_2)}.$$

Здесь и далее оба логарифма могут быть по произвольному, но одинаковому основанию.

Это соотношение приближённое потому, что при определении принадлежности элементов объекту по принципу «да/нет» значение N собрано из округлённых единиц. Иначе пришлось бы учитывать дробные части элементов, что требует разрешения, меньшего δ . Поэтому правильнее будет определить формулу **предельной размерности**:

$$D = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(N_i/N_{i-1})}{\log(\delta_{i-1}/\delta_i)} \quad \text{при } \delta_i < \delta_{i-1}. \quad (4a)$$

Вычислим по ней размерность плоской замкнутой фигуры с **постоянной границей**. Зададим начальное разрешение пространства плоскости $\delta_0=1$, построим растр с этим разрешением и подсчитаем число «узлов» растра, которые закрываются фигурой. Оно, как видно на рис. 3, а, равно $N_0=9$. Первое дробление разрешения до $\delta_1=0.5$ даёт число новых «пикселей» $N_1=43$ (рис. 3, б) и оценку размерности

$$D_1 = \log_2(43/9) \approx 2.2563.$$

Продолжая двукратное уменьшение δ (рис. 3, в), получаем последовательность размерностей

$$D_2 = \log_2(167/43) \approx 1.9574, \quad D_3 = \log_2(683/167) \approx 2.032,$$

$$D_4 = \log_2(2733/683) \approx 2.0005, \quad D_5 = \log_2(10903/2733) \approx 1.9962,$$

быстро сходящуюся к значению $D=2$, равному топологической размерности **площадного нефрактального объекта**.

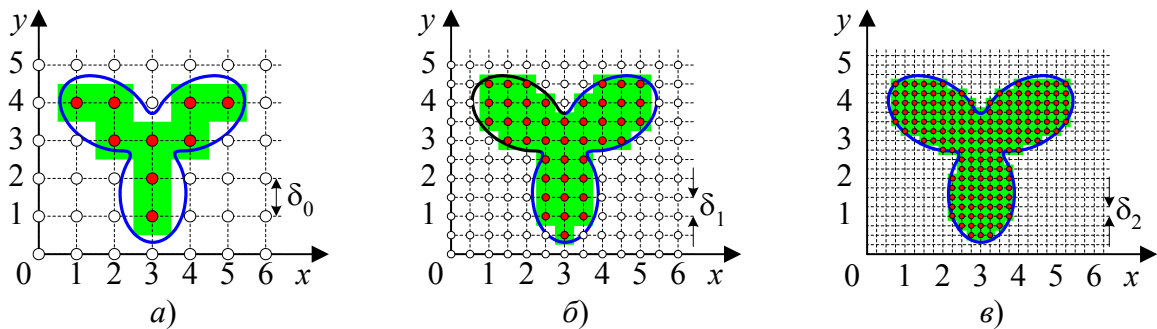


Рис. 3. Вычисление размерности нефрактального объекта

Аналогично вычисляется размерность $D=3$ объёмных тел, ограниченных фиксированными поверхностями. Таким образом, **размерность объектов с постоянными границами равна их топологической размерности D_T** .

При выборе разрешений δ_i совсем не принципиально условие их кратности. Но если при уменьшении разрешения в целое число раз $k_\delta = \delta_{i-1}/\delta_i$ предельный коэффициент увеличения числа элементов $k_N = \lim_{i \rightarrow \infty} (N_i/N_{i-1})$ постоянен, то получим более простую, чем (4а), формулу расчёта размерности фрактального объекта, созданного в **режиме замены** [3]:

$$D = \frac{\log k_N}{\log k_\delta} = \log_{k_\delta} k_N. \quad (4б)$$

В отличие от привычных геометрических объектов фрактальное множество не имеет постоянной границы. Она изменяется с каждым уменьшением разрешения. У аддитивных фракталов происходит приращение «вещества», у субтрактивных — его сокращение. В результате **размерность фрактала может быть дробной!** Так, если **однородный** терагон строится по шаблону, заменяющему единичный отрезок основы на $n \geq 1$ отрезков одинаковой длины $r < 1$, то подставляя в (4б) значения $k_\delta = 1/r$ и $k_N = n$, получим его фрактальную размерность

$$D = -\frac{\log(n)}{\log(r)} = -\log_r(n) = \log_{1/r}(n). \quad (4в)$$

Например, на каждой итерации построения знаменитой *снежинки Коха* [2–4] длины элементов уменьшаются втрое, а их число учетверяется. Фрактальная размерность подобных объектов оценивается по (4в) числом $D = \log_3 4 \approx 1.262$.

Дробные размерности фрактальных множеств — их самая удивительная особенность. Однако не этот признак отличает фрактальные объекты от обычных геометрических фигур. Вычисленное по (4в) значение D вполне может оказаться и целым числом k при $n=r^{-k}$. Особенно интересны фракталы с размерностью $D=D_T+1$, например, непрерывные *линии Пеано* [2–4] с размерностью $D=2$, свойственной поверхностям. И действительно, аттракторы этих линий плотно (без просветов и наложений) заполняют определённые участки плоскости. Из линий Пеано можно сделать и фрактальные поверхности ($D_T=2$) размерности $D=3$, плотно заполняющие 3d-объёмы.

Универсальный способ вычисления размерности фрактала связан с анализом поитерационного изменения числа N_i и количества фрактального «вещества» — *массы фрактала* $M_i = N_i \delta_i^{D_T}$. Масса линейного фрактала с топологической размерностью $D_T=1$ равна суммарной *длине* всех отрезков, площадного с $D_T=2$ — сумме *площадей*, а объёмного с $D_T=3$ — сумме *объёмов* всех N_i элементов, сгенерированных на i -й итерации с линейным разрешением δ_i [2].

Из сравнения $N_{i-1} \delta_{i-1}^D \approx N_i \delta_i^D$, точного в пределе $i \rightarrow \infty$, получим отношение масс фрактала на соседних итерациях при $N_i/N_{i-1} = (\delta_{i-1}/\delta_i)^D$:

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} = \frac{N_i}{N_{i-1}} \cdot \left(\frac{\delta_{i-1}}{\delta_i} \right)^{-D_T} = \left(\frac{N_i}{N_{i-1}} \right)^{1-D_T/D} = \left(\frac{\delta_{i-1}}{\delta_i} \right)^{D-D_T}.$$

Теперь расчёт размерности фрактала можно произвести в дополнение к (4а) ещё в двух предельных формах:

$$D = \lim_{i \rightarrow \infty} D_T \left(1 - \frac{\log(M_i/M_{i-1})}{\log(N_i/N_{i-1})} \right)^{-1} = D_T + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(M_i/M_{i-1})}{\log(\delta_{i-1}/\delta_i)}. \quad (4г)$$

Из этих универсальных формул следует:

- при **ненулевой** и **конечной предельной массе** фигуры M_∞ её фрактальная размерность D совпадает с топологической D_T . Поэтому **не все фрактальные множества имеют дробные или отличные от топологической размерности**;

- если предельная масса **аддитивного фрактала** с возрастающей итерационной массой $M_i > M_{i-1}$ неограниченно растёт, т. е. $M_\infty \rightarrow \infty$, то его размерность $D > D_T$ и может стать дробной;

- если предельная масса **субтрактивного фрактала** с убывающей итерационной массой $M_i < M_{i-1}$ сходится к $M_\infty \rightarrow 0$, то его размерность $D < D_T$ и также может быть дробной;

- для однородного фрактала, созданного поэлементной заменой основы с массой $M_0 = N_0 \delta_0^{D_T}$ шаблоном из $n \geq 1$ элементов с **линейным размером** $r < 1$, на i -й итерации имеем

$\delta_i = r^i$, $N_i = N_0 n^i$ и $M_i = M_0 (nr^{D_T})^i$. Отсюда следует $\delta_{i-1}/\delta_i = 1/r$, $N_i/N_{i-1} = n$, $M_i/M_{i-1} = nr^{D_T}$ и совпадающая с (4в) размерность

$$D = D_{\tau} + \frac{\log(nr^{D_{\tau}})}{\log(r^{-1})} = -\frac{\log(n)}{\log(r)}.$$

Формулы (4) полагают, что фрактал состоит из однородных элементов, как, например, линия Коха или треугольник Серпинского. Однако таковы не все фрактальные множества, например, изучаемые здесь фрактальные полилинии (см. рис. 1) и все линии и поверхности, созданные методом срединного смещения, сложены из элементов *разных* размеров, т. е. являются *неоднородными* [2].

Обозначив длины n элементов шаблона как $r_1 \div r_n$, оценим суммарную относительную массу элементов в D_{τ} -пространстве $m = r_1^{D_{\tau}} + r_2^{D_{\tau}} + \dots + r_n^{D_{\tau}}$ с точностью до множителя, связывающего их линейные и площадные или объёмные размеры. Мандельброт в [2] определил *размерность подобия* неоднородного фрактала как корень степенного уравнения

$$D: r_1^D + r_2^D + \dots + r_n^D = 1.$$

В случае *однородного шаблона* с единым значением $r_k = r < 1 \quad \forall k = \overline{1, n}$ корень уравнения $nr^D = 1$ совпадает с (4в).

Во избежание решения нелинейного уравнения найдём на i -й итерации число элементов фрактала $N_i = N_0 n^i$ и его массу $M_i = M_0 m^i$. Тогда простая беспредельная формула *массовой фрактальной размерности* принимает вид

$$D = D_{\tau} \left(1 - \frac{\log(m)}{\log(n)} \right)^{-1} = \frac{D_{\tau}}{1 - \log_n(m)} = \frac{\log(n)}{\log(n) - \log(m)} D_{\tau}. \quad (5)$$

Она применима при естественных требованиях $r_k < 1 \quad \forall k = \overline{1, n} \Rightarrow m < n$, означающих, что в шаблоне нет ни одного отрезка с длиной $r_k \geq 1$, приводящей к неограниченному росту массы фрактала и отсутствию у него аттрактора. При $n=1$ и $m < 1$ размерность фрактала, вырождающегося в точку, становится нулевой.

В случае *однородного шаблона* со всеми значениями $r_k = r < 1 \quad \forall k = \overline{1, n}$ и массой $m = nr^{D_{\tau}}$ размерность (5) также становится равной (4в).

У аддитивного фрактала, созданного путём *добавления* $n \geq 1$ элементов *неоднородного шаблона* к каждому элементу предыдущей итерации, число элементов и масса на i -й итерации представляют собой суммы геометрических прогрессий

$$N_i^{\Sigma} = \sum_{k=0}^i N_k = \frac{n^{i+1} - 1}{n - 1} N_0, \quad M_i^{\Sigma} = \sum_{k=0}^i M_k = \frac{m^{i+1} - 1}{m - 1} M_0.$$

При $m < 1$ масса аттрактора конечна и сходится к $M_{\infty}^{\Sigma} = M_0 / (1 - m)$, иначе она бесконечна из-за расходимости геометрической прогрессии. Предельная масса фрактала с однородным шаблоном массой $m = nr^{D_{\tau}}$ конечна при $nr^{D_{\tau}} < 1$, т. е. при линейном размере $r < n^{-1/D_{\tau}}$.

Размерность *неоднородного аддитивного фрактала* находится по первой формуле (4г), в которой N_i и M_i заменены на N_i^{Σ} и M_i^{Σ} . Вычислив пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_i^{\Sigma}}{N_{i-1}^{\Sigma}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n^{i+1} - 1}{n^i - 1} = n, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{M_i^{\Sigma}}{M_{i-1}^{\Sigma}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{m^{i+1} - 1}{m^i - 1} = \max\{m, 1\},$$

получим беспредельные формулы расчёта размерностей аддитивных фракталов:

- если суммарная масса элементов шаблона $m < 1$ и, как говорилось ранее, масса аттрактора конечна, то его размерность равна топологической:

$$D = \frac{D_T}{1 - \log(1)/\log(n)} = D_T;$$

- при $m \geq 1$ фрактальная размерность аддитивного фрактала вычисляется по (5) и составит значение $D \geq D_T$.

Экспериментальная оценка размерности ФПЛ

Фрактальная полилиния является стохастическим линейным фракталом с неоднородными элементами. Оценим размерность ФПЛ, генерируемых функцией $FPLrec(a, b, s, 0, r)$ (см. рис. 1, б), с учётом зависимости (3) коэффициента удлинения $\gamma_{cp}(s, r)$ от параметра разброса s равномерного ГСЧ $urf(s)$ и числа рекурсий r . Так как на каждой рекурсии число отрезков удваивается ($N_r = 2^r$) и общая длина ФПЛ оценивается по (3) значением $M_r(s) \approx 2^{\alpha s \beta r} > M_{r-1}(s)$ при $\alpha \approx 0.71$ и $\beta \approx 1.82$, то по (4г) получим быструю оценку фрактальной размерности ФПЛ

$$D_r(s) = \frac{1}{1 - \log_2(M_r(s)/M_{r-1}(s))} = \frac{1}{1 - \alpha s \beta} = \text{const } \forall r. \quad (6)$$

Например, $D_r(0.1) \approx 1.011$, $D_r(0.2) \approx 1.04$ и $D_r(0.3) \approx 1.086$.

На рис. 4, а построены зависимости коэффициентов удлинения ФПЛ $\gamma_{cp}(s, r)$, усреднённые по 100 реализациям функции $FPLrec(a, b, s, 0, r)$ для каждого числа рекурсий $r = \overline{0, 15}$ и значения параметра разброса $s \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$. Пунктиром показаны графики $M_r(s)$, достаточно близко, гладко и быстро аппроксимирующие долго вычисляемые зависимости $\gamma_{cp}(s, r)$.

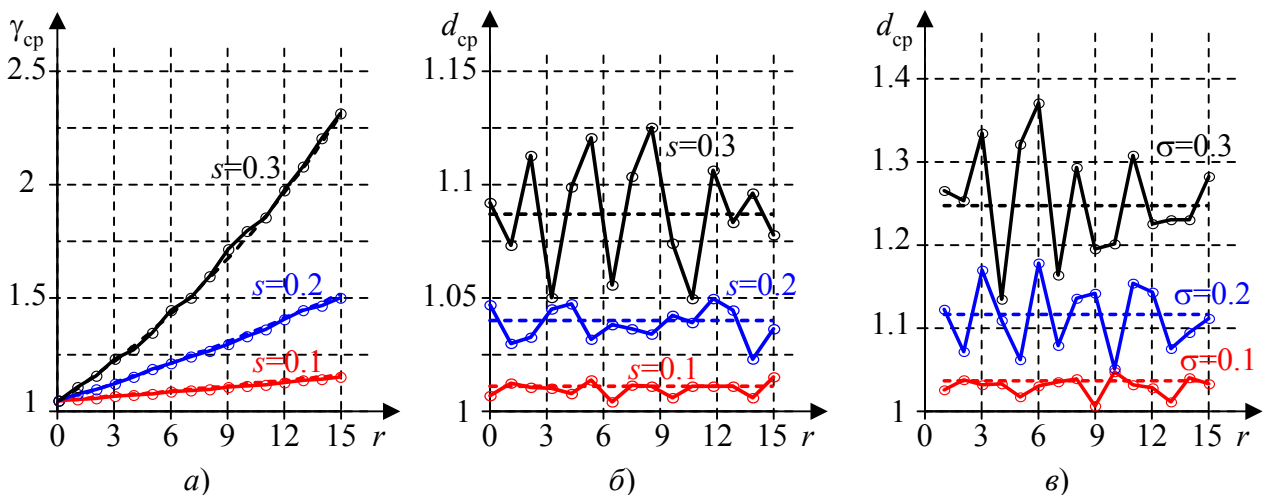


Рис. 4. Усреднённые длина и размерность ФПЛ

На рис. 4, б построены также долго вычисляемые негладкие усреднённые зависимости фрактальной размерности $d_{cp}(s, r)$ и их быстро вычисляемые по (6) аппроксимирующие оценки $D_r(s) = (1 - 0.71s^{1.82})^{-1}$, независимые от числа рекурсий r . Для сравнения на рис. 4, в приведены графики усреднённых размерностей $d_{cp}(\sigma, r)$ ФПЛ с нормальным ГСЧ $nrf(\sigma)$ для значений СКО $\sigma \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ при оценке массы фрактала (длины ФПЛ) $M_r(\sigma) \approx 2^{1.34\sigma^{1.58}r}$. Пунктиром построены графики $D_r(\sigma) = (1 - 1.34\sigma^{1.58})^{-1}$, проходящие на уровнях $D_r(0.1) \approx 1.036$, $D_r(0.2) \approx 1.117$ и $D_r(0.3) \approx 1.248$, независимых от числа рекурсий.

Заключение

Итак, мы получили усреднённые характеристики ФПЛ, создаваемых с помощью генераторов равномерно и нормально распределённых случайных чисел. Теперь стало возможно как оценить область расположения полилинии вокруг базового отрезка при заданных значениях s , σ и r , так и задать эти параметры сообразно её желаемому поведению.

Библиографический список

1. **Никулин, Е. А.** Компьютерная графика. Модели и алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Е. А. Никулин. – СПб.: Лань, 2017. – 708 с.
2. **Мандельброт, Б.** Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
3. **Кроновер, Р. М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
4. **Никулин, Е. А.** Компьютерная графика. Фракталы : учеб. пособие для вузов / Е. А. Никулин. – СПб.: Лань, 2018. – 100 с.

*Дата поступления
в редакцию 01.06.2018*

Е.А. Nikulin

INVESTIGATION OF FRACTAL POLYLINES

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: The establishment of statistical and fractal regularities of random polylines.

Methodology: Random orthogonal displacement of midpoints of polyline segments.

Experiments: A statistical experiment was performed to evaluate the length and dimension of a fractal polyline.

Results: Statistical properties and fractal dimension of random polylines are obtained.

Findings: A method for estimating the dimension of inhomogeneous fractals is proposed.

Research implications: Computer synthesis of random fractal objects with desired properties.

Key words: fractal polyline, mean displacement, fractal dimension.