УДК 517.9

Е.Н. Пелиновский[1-4], Е.Г. Диденкулова (Шургалина)[1,2], Т.Г. Талипова[1,2], Е. Тобиш[5], Ю.Ф. Орлов[2], А.В. Зенькович[2]

СЕМЕЙСТВО УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород[1],
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[2],
Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики, Москва[3],
Специальное конструкторское бюро средств автоматизации морских исследований
ДВО РАН, Южно-Сахалинск[4],
Университет Кеплера, Линц, Австрия [5]

Классические уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ) и модифицированное КдВ уравнение играют заметную роль в физике нелинейных волн в виду их интегрируемости. Менее известны другие уравнения из этого же семейства, выводимые в разных физических и технических приложениях. Это модулярное КдВ уравнение, логнормальное КдВ уравнение, уравнение Гарднера, уравнение Шамеля, уравнения Бенджамина-Оно и Кавахары, а также фракционные уравнения. Эти уравнения различаются степенью нелинейности в адвективном члене и порядком линейной дисперсии (в том числе и дробной). Целью статьи является обсуждение практических приложений семейства КдВ уравнений и общих свойств их решений. Методология исследований основана на теории слабонелинейных волн в слабодисперсионных средах различной физической природы. Показано, что многие уравнения КдВ иерархии имеют общие свойства решений и не обладают взрывной неустойчивостью. Для этого степень нелинейности не должна быть очень большой.

Ключевые слова: уравнения типа Кортевега-де Вриза, бегущие волны, солитоны.

Введение

Уравнение Кортевега-де Вриза в канонических переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{1}$$

выведенное Кортевегом и де Вризом в 1895 году для гравитационно-капиллярных волн на поверхности тонкого слоя воды, стало эталонным уравнением теории нелинейных волн и математической физики после открытия способа точного его решения с помощью метода обратной задачи теории рассеяния, которое теперь воспроизводится во всех учебниках по теории нелинейных волн. Решения этого уравнения обладают удивительными свойствами: уединенные волны (солитоны) взаимодействуют между собой упруго, имеет место периодическая реккуренция основного состояния и т.д. Практически еще в 1970-е гг. прошлого столетия было показано, что это уравнение описывает широкий класс волновых процессов в механике, плазме, астрофизике, океане и электродинамике. По существу, оно получается в любых физических системах, в которых возможны слабо нелинейные и слабо дисперсионные волны, и его вывод делается в рамках первого приближения асимптотических разложений. Если квадратичная нелинейность, тем не менее, отсутствует, то аналогично (1) может быть выведено модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{2}$$

которое также полностью интегрируемое. Основываясь на методе обратной задачи теории рассеяния в 1970-1990-е гг., было выведено много уравнений КдВ типа (содержащих в правой части слагаемые, ответственные за нелинейность и дисперсию высших порядков, нелинейную дисперсию и т.п.), которые также были интегрируемы. Между тем многие из них не были связаны с какими-то физическими приложениями и имеют решениями непригодные с точки зрения здравого смысла. Так, например, учет дисперсии высшего порядка ведет к тому, что групповая скорость мелкомасштабных возмущений становится больше фазовой, в то время как в исходных уравнениях групповая скорость всегда меньше фазовой. Кроме того, такие уравнения часто имеют дополнительные решения, которые не соответствуют известным данным о волнах в рамках полных по нелинейности уравнений. Именно поэтому с физической точки зрения разумно сводить расширенные версии уравнений КдВ типа к классическому КдВ уравнению с помощью асимптотических замен, используя малость нелинейности и дисперсии.

В настоящей работе дается сводка семейства уравнений КдВ типа, которые действительно получаются в различных физических системах.

Семейство уравнений КдВ типа с произвольной нелинейностью

Прежде всего, необходимо отметить, что модифицированное КдВ уравнение (2) имеет широкую область применения в электродинамике, динамике размерно-квантованных пленок, в астрофизической плазме, в твердом теле, в динамике волн в стратифицированной жидкости при определенных условиях на стратификацию плотности. В частности, если имеется двухслойная жидкость, то коэффициент при кубическом нелинейном члене отрицателен, а если жидкость трехслойна, то возможны оба знака нелинейности [1]. Особый интерес вызывает уравнение (2) в случае положительного знака кубической нелинейности. Волновые пакеты при этом модуляционно неустойчивы, что приводит к появлению волн-убийц [2]. Более того, даже в солитонном газе возможно возникновение волн-убийц, но только в том случае, если солитонный газ содержит солитоны обеих полярностей [3-5].

Стратифицированная жидкость дает примеры нескольких уравнений КдВ типа, кроме указанных выше уравнений (1) и (2). Наиболее известный пример – это уравнение Гарднера, которое содержит квадратичную и кубическую нелинейности в одном порядке теории возмущений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u(1\pm u)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\,, \qquad (3)$$

и это уравнение сейчас стало расчетным для описания внутренних волн в океане [6]. В научно-исследовательской лаборатории моделирования природных и техногенных катастроф Нижегородского государственного технического университета разработан специальный вычислительный комплекс IWResearch, решающий уравнение (3) с переменными коэффициентами и рядом дополнительных слагаемых, важных для динамики внутренних волн [7]. В трехслойной жидкости при определенных условиях на толщины слоев динамика внутренних волн описывается так называемым 2+4 уравнением Кортевега-де Вриза [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u^2(1-u^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (4)$$

Уравнение (4) уже не интегрируемо в общем случае, хотя структуру бегущих волн легко исследовать на фазовой плоскости. Солитоны в такой системе взаимодействуют неупруго, и за ними появляются осциллирующие хвосты. В случае многослойной стратификации водного потока возможно появление членов более высокого порядка по нелинейности [9], что приводит к существованию решений в виде «многомасштабных» солитонов. Следует, правда, отметить, что более высокие степени нелинейности в уравнении типа Кортевега-де Вриза могут приводить к неустойчивости решений взрывного характера, так что наличие даже малых слагаемых по дисперсии и диссипации является принципиальным с физической точки зрения для подавления взрывной неустойчивости. Для волн в упругих средах, свойства которых разные по отношению к растяжению или сжатию, недавно выведено «модулярное» КдВ уравнение [10, 11]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial |u|}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{5}$$

которое также неинтегрируемо. Для однополярных импульсов оно становится линейным, так что сразу ясно, что оно не допускает существование однополярных солитонов. Однако такие солитоны могут существовать на пьедестале. Периодические волны в такой системе не являются гладкими.

Ионно-звуковые волны в плазме также описываются различными уравнениями КдВ типа. Так, если в плазме есть отрицательные ионы, то в зависимости от концентрации можно получить уравнение (3) [12, 13]. Если же есть в плазме резонансные частицы, то динамика волн описывается уравнением Шамеля [14]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{5}{2}\frac{\partial |u|^{3/2}}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{6}$$

Оно нелинейно даже в случае однополярных импульсов и допускает существование солитонов на нулевом пьедестале.

В кристаллических решетках при определенных условиях длинные волны описываются лог-КдВ уравнением [15-17]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u\ln|u|)}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{7}$$

В рамках этого уравнения солитон описывается гауссовой функцией.

Приведенные примеры показывают широкое разнообразие уравнений КдВ типа с высшими нелинейностями, описывающих реальные физические процессы. Важно, что все они сохраняют главное свойство исходных систем в линейном приближении: неизменность знака отношения групповой скорости к фазовой, так что возможные излучения волн (дисперсионных хвостов) происходят только в одном направлении.

Фракционные уравнения КдВ типа

В ряде случаев возникают уравнения Кортевега-де Вриза, в которых линейная дисперсия третьего порядка исчезает. Такая ситуация возникла еще при выводе классического уравнения Кортевега-де Вриза в их оригинальной статье для гравитационно-капиллярных волн на поверхности тонкого слоя воды в случае компенсации эффектов гравитации капиллярными эффектами. В этом случае уравнение (1) заменяется на

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}=0\,. \tag{8}$$

Это уравнение, получившее название уравнения Кавахары, встречается в динамике плазмы, когда волна распространяется под определенным углом к магнитному полю [18], в нелинейных электрических цепях [19] и для внутренних волн в двухслойной жидкости с учетом поверхностного натяжения между слоями в стратифицированной жидкости [20]. В рамках этого уравнения солитоны имеют осциллирующие хвосты и могут притягиваться друг к другу. Уравнение (8) не является интегрируемым с точки зрения математической физики.

В случае, когда закон дисперсии описывается не аналитическими функциями, уравнение типа Кортевега-де Вриза становится интегро-дифференциальным. Такая ситуация реализуется для внутренних волн в двухслойном океане, когда один слой тонкий, а другой толстый (по сравнению с длиной волны). Дисперсионное соотношение для волн в таком океане в пределе длинных волн имеет вид (без коэффициентов): $\omega = k(1-|k|)$, а соответствующее эволюционное уравнение, называемое уравнением Бенджамина-Оно, имеет вид [21]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{y-x}=0\,. \tag{9}$$

Уединенные волны в уравнении Бенджамина-Оно описываются алгебраическими функциями с медленно спадающими хвостами. Это уравнение оказалось интегрируемым методами обратной задачи. Есть и другие примеры интегральной дисперсии, например, уравнение Уизема, где дисперсионное соотношение для волн на воде учитывается в самом общем виде [21]. Удалось показать, что волновые пакеты в рамках уравнения Уизема модуляционно неустойчивы, а, следовательно, возможно появление волн-убийц [22].

В самом общем виде, приведенные выше уравнения являются частными случаями фракционного уравнения КдВ типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[L(u)\right]=0\,, \tag{10}$$

где в Фурье пространстве оператор L является степенной функцией волнового числа

$$L(k)u(k)=-|k|^{\alpha}\,u(k)\,. \tag{11}$$

При $\alpha = 1$ уравнение (10) сводится к уравнению Кортевега-де Вриза, при $\alpha = 2$ – к уравнению Бенджамина-Оно, а при $\alpha = 4$ – к уравнению Кавахара. В приложениях число α может быть и дробным (но положительным).

Фракционные уравнения КдВ типа, когда они не сводятся к дифференциальным уравнениям, трудно исследовать аналитически. Численно же они легко решаются с использованием псевдо-спектрального метода, на чем мы здесь останавливаться не будем. Структура бегущих волн (как периодических, так и уединенных) находится численно с помощью метода Петвиашвили [23, 24].

Бегущие волны в системах, описываемых уравнениями КдВ типа с дисперсией третьего порядка

Для последующего анализа удобно записать уравнения КдВ типа с дисперсией третьего порядка в обобщенном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}f(u)+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\,. \tag{12}$$

Бегущие волны (как периодические, так и уединенные) описываются простым уравнением второго порядка, вытекающим из (12)

$$\frac{d^2u}{dx^2}+f(u)-cu+B=0\,, \tag{13}$$

где c – скорость движения волны, B – произвольная константа интегрирования. При исследовании солитонов с физической точки зрения можно считать пьедестал нулевым, иначе вывод уравнения типа КдВ необходимо проводить относительно другого невозмущенного уровня. Тогда $B = -f(0)$. Во всех рассматриваемых выше случаях $f(0) = 0$, так что $B = 0$. Интегрируя еще раз уравнение (13), получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+F(u)-\frac{c}{2}u^2=0\,, \tag{14}$$

где $F(u)=\int\limits_0^u f(v)dv$ и константа интегрирования выбрана равной нулю из условия нулевого пьедестала. В максимуме солитона $du/dx = 0$, поэтому из (14) легко находится связь скорости солитона с его амплитудой

$$c=\frac{2F(A)}{A^2}\,. \tag{15}$$

Форма солитона легко находится из (14) в интегральной форме

$$\pm x = \int \frac{du}{\sqrt{cu^2 - 2F(u)}} . \tag{16}$$

В случае $f(u)=|u|^m$, где m – любое число, не обязательно целое ($m > 1$), солитон описывается явной формулой

$$u(x,t) = A\mathrm{sech}^{\frac{2}{m-1}}\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{A^{m-1}}{m+1}}(x-ct)\right], \qquad c = \frac{2}{m+1}A^{m-1}, \tag{17}$$

за исключением случая $m = 1$ (модулярное КдВ уравнение), для которого не существует солитонов на нулевом пьедестале, о чем уже говорилось выше. Отметим важные свойства солитона, в частности, подсчитаем его массу

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx \sim A^{\frac{3-m}{2}} , \tag{18}$$

и энергию

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)dx \sim A^{\frac{5-m}{2}} . \tag{19}$$

Обратим внимание, что уже для модифицированного КдВ уравнения ($m = 3$) масса солитона не зависит от амплитуды. Это значит, что в задаче об эволюции начального возмущения можно сразу найти число генерируемых солитонов, подсчитав массу начального возмущения. С увеличением m масса солитона начинает падать с ростом его амплитуды, и это уже означает необычность поведения солитона во внешних полях. С точки зрения энергии переходный режим осуществляется при $m = 5$, и с физической точки зрения солитон уже должен разрушаться, например, при введении сколько угодно малой диссипации, когда энергия должна только уменьшаться.

Эти простые соображения подкрепляются анализом устойчивости солитонов, а также прямого численного решения уравнения КдВ типа с $m \geq 5$, когда решения становятся неустойчивыми и взрываются на конечных временах [25]. Отметим, правда, что если знак нелинейности отрицательный при $m = 5$, как в уравнении (4), то решение этого уравнения устойчиво, хотя оно не допускает солитонов на нулевом пьедестале. Таким образом, физически разумные уравнения КдВ типа не обладают неустойчивыми свойствами. Это означает, что солитонный газ в такого рода уравнениях будет обладать в какой-то степени тривиальной динамикой, солитоны будут сохраняться (в интегрируемых системах) или жить конечное время (в неинтегрируемых системах). Тем не менее, в процессе их взаимодействия могут появляться очень большие волны, называемые волнами-убийцами, и этот процесс уже исследован нами для модифицированного КдВ уравнения (2) и уравнения Гарднера (3), см., например, [3].

Аналогичные результаты получаются и для периодических, так называемых кноидальных волн, эти результаты суммированы в [26].

Заключение

Приведенные уравнения семейства КдВ типа описывают разнообразные волновые процессы в океане, электродинамике, теории упругости и астрофизической плазме. Некоторые из них достаточно нетривиальны и содержат модули от волновых полей или интегральную дисперсию, что должно приводить к трудностям их аналитического анализа. В настоящее время в основном исследованы волновые процессы в средах с полиномиальной нелинейностью $f(u)=u^m$, а «модульные» и «фракционные» уравнения еще предстоит изучить. Отметим, что ранее обращалось внимание на интегрируемость уравнений КдВ типа и устойчивости солитона. Сейчас же пик исследований переносится здесь на волновые пакеты и солитонную турбулентность, а также на возможность образования волн-убийц. Точные результаты здесь пока получены для частных случаев.

Представленные результаты получены в рамках выполнения гос. задания в сфере научной деятельности (Задание № 5.5176.2017/8.9), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ НШ-2685.2018.5, грантов РФФИ (17-05-00067, 16-02-00167, 16-05-00049, 16-32-60012), а также при поддержке Австрийского научного фонда (FWF), проекты P24671 и P30887.

Библиографический список

1. **Grimshaw, R.** The modified Korteweg – de Vries equation in the theory of large-amplitude internal waves / R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova // Nonl. Processes in Geoph. – 1997. – Vol. 4. – P. 237-350.
2. **Grimshaw, R.** Short-lived large-amplitude pulses in the nonlinear long-wave model described by the modified Korteweg–de Vries equation / R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, M. Ruderman, R. Erdelyi // Studied Applied Mathematics. – 2005. – Vol. 114. – P. 189-210.
3. **Пелиновский, Е.Н.** Солитонный газ; взаимодействия, турбулентность и волны-убийцы / Е.Н. Пелиновский, Е.Г. Шургалина, А.В. Слюняев // Нелинейные волны-2016. – Нижний Новгород: ИПФ, 2017. – С. 279-293.
4. **Shurgalina, E.G.** Nonlinear dynamics of a soliton gas: Modified Korteweg-de Vries equation framework / E.G. Shurgalina, E.N. Pelinovsky // Physics Letters A. – 2016. – Vol. 380 (24). – P. 2049-2053.
5. **Пелиновский, Е.Н.** Формирование волн-убийц в солитонном газе, описываемом модифицированным уравнением Кортевега - де Вриза / Е.Н. Пелиновский, Е.Г. Шургалина // Доклады Академии Наук. – 2016. – Т. 470. – №1. – С. 26-29.
6. **Holloway, P.** A Generalized Korteweg - de Vries Model of internal tide transformation in the coastal zone / P. Holloway, E. Pelinovsky, T. Talipova // J. Geophys. Res. – 1999. – Vol. 104. – No. C8. – P. 18333-18350.
7. **Тюгин, Д.Ю.** Проблемно-ориентированный программный комплекс для моделирования динамики внутренних волн в стратифицированном океане / Д.Ю. Тюгин, А.А. Куркин, О.Е. Куркина // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2018. – № 2. – С. 52-59.
8. **Куркина, О.Е.** Динамика солитонов неинтегрируемой версии модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза / О.Е. Куркина, А.А. Куркин, Е.А. Рувинская, Е.Н. Пелиновский, Т. Соомере // Письма в ЖЭТФ. – 2012. – Т. 95. – С. 98-103.
9. **Derzho, O.G.** Brief communication: Multiscaled solitary waves / O.G. Derzho // Nonlinear Processes Geophysics. – 2017. – Vol. 24. – P. 695-700.
10. **Руденко, О.В.** Модельные солитоны / О.В. Руденко // ДАН. – 2016. – Т. 471. – С. 651-654.
11. **Nazarov, V.E.** Stationary waves in a bimodular rod of finite radius / V.E. Nazarov, S.B. Kiyashko, A.V. Radostin // Wave Motion. – 2017. –Vol. 75. – P. 72-76.
12. **Ruderman, M.S.** Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wave packets in plasmas with negative ions / M.S. Ruderman, T. Talipova, E. Pelinovsky // J. Plasma Physics. – 2008. – Vol. 74. – P. 639-656.
13. **El-Tantawy, S.A.** Rogue waves in electronegative space plasmas: The link between the family of the KdV equations and the NLS equation / S.A. El-Tantawy // Astrophys Space Sci. – 2016. – Vol. 361. – ID 164 (9 pages).
14. **Schamel, H.** A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons / H. Schamel // J. Plasma Phys. – 1973. – Vol. 9. – P. 377–387.
15. **Пелиновский, Д.Е.** Аналитические приближения уединенных волн в зернистых кристаллах / Д.Е. Пелиновский, А.Р. Гиниятуллин, Ю.А. Панфилова, Е.Г. Шургалина, А.А. Родин // Труды НГТУ. – 2013. – № 3 (100). – С. 55-69.
16. **Dumas, E.** Justification of the log-KdV equation in granular chains: the case of precompression / E. Dumas, D.E. Pelinovsky // SIAM J. Math. Anal. – 2014. – Vol. 46. – 4075-4103.
17. **Pelinovsky, D.E.** On the linearized log-KdV equation // Commun. Math. Sci. – 2017. – Vol. 15. – P. 863–880.

18. **Obregon, M.A.** Oblique magneto-acoustic solitons in rotating plasma / M.A. Obregon, Yu.A. Stepanyants // Phys. Lett. A. – 1998. – Vol. 249. – P. 315-323.
19. **Nagashima, H.** Experiment on solitary waves in the non-linear transmission-line described by the equation *du*/*dt* + *udu*/*dz* – *d* 5*u*/*dz* 5 = 0 / H. Nagashima // J. Phys. Soc. Japan. – 1979. – Vol. 47. – P. 1387-1388
20. **Гиниятуллин, А.Р.** Обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза для внутренних волн в двухслойной жидкости / А.Р. Гиниятуллин, А.А. Куркин, О.Е. Куркина, Ю.А Степанянц // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2014. – Т. 7. – № 4. – С. 16-28.
21. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Морис, Р. Додд. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
22. **Hur, V.** Modulational instability in the Whitham equation for water waves / V. Hur, M.A. Johnson // Stud. Appl. Math. – 2014. – Vol. 134. – P. 120-143.
23. **Duran, A.** An efficient method to compute solitary wave solutions of fractional Korteweg - de Vries equations / A. Duran // Int. J. Comp. Math. – 2018. – Vol. 95. – P. 1362-1374.
24. **Le, U.** Convergence of Petviashvilli's method near periodic waves in the fractional Korteweg-de Vries equation / U. Le, D. Pelinovsky // ArXiv:1809.02725v1 [math.AP], 8 Sept 2018.
25. **Klein, C.** Numerical study of blow-up and dispersive shocks in solutions to generalized Korteweg-de Vries equations / C. Klein, R. Peter // Physica D. – 2015. – Vol. 304-305. – P. 52-78.
26. **Tobisch, E.** Conditions for modulation instability in higher order Korteweg–de Vries Equations / E. Tobisch, E. Pelinovsky // Applied Mathematics Letters. – 2018. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.08.001 (дата обращения 03.08.2018).

Дата поступления
в редакцию: 25.09.2018

E.N. Pelinovsky [1-4], E.G. Didenkulova (Shurgalina) [1,2], T.G. Talipova[1,2],
E. Tobish [5], Yu.F. Orlov [2], A.V. Zen'kovich [2]

KORTEWEG-DE VRIES TYPE EQUATIONS IN APPLICATIONS

Institute of applied physics RAS, Nizhny Novgorod[1],
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev[2],
National research university - Higher school of economics, Moscow[3],
Special research bureau for automation of marine researches, far eastern branch of Russian Academy of Sciences, Yuzhno-Sakhalinsk[4],
Kepler university, Linz, Austria [5]

Purpose: Discussed some practical applications of the KdV-type equations and the general properties of their solutions.
Design/methodology/approach: A theoretical framework based on weakly nonlinear theory. A set of models based on classical KdV equation are considered.
Findings: A set of integrable and non-integrable equations of Korteweg-de Vries type describing different wave processes in the ocean, electrodynamics, elasticity theory and astrophysical plasma are collected and discussed.
Research limitations/implications: Collected and considered here equations expand the class of known Korteweg–de Vries and modified Korteweg-de Vries equations to non-integrable models used in different physical and technical applications.

Key words: Korteweg-de Vries type equations, *travelling waves, solitons.*