УДК 512

Н.В. Юрова

О КЛАССАХ СОПРЯЖЕННОСТИ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЕ SP$_4$(q)

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Данная статья продолжает ряд работ по проверке гипотезы о том, что в конечной простой группе неединичный класс сопряженности содержит коммутирующие элементы. Ранее это утверждение было проверено для спорадических, проективных $L_n(q)$, знакопеременных групп A_n, групп Ри ${}^2G_2(q)$ и Сузуки ${}^2B_2(q)$. Ряд серий простых конечных групп остается непроверенным, среди них имеются ортогональные $O_{2n+1}(q)$, $O_{2n}(q)^{\pm}$, унитарные $U_n(q)$ и симлектические $Sp_{2n}(q)$ группы. В данной работе начата проверка упомянутого выше предложения для серии симплектических групп.

Ключевые слова: симплектическая группа, класс сопряженности, конечная простая группа, коммутирующие элементы, цетрализатор.

В предлагаемой статье производится проверка группы $SP_4(q)$ в качестве подготовительного этапа в исследовании группы $SP_{2n}(q)$. Сведения о симплектических группах можно найти в [1-3]. Следующее утверждение оказывается полезным при исследовании как $SP_4(q)$, так и других групп Шевалле [1].

Предложение 1. [4, с. 442]. *Пусть* V *конечномерное векторное пространство над конечным полем* F_q *и* x *линейное преобразование с характеристическим многочленом* $f(x)$. *Если* $f(x)=f_1^{n_1}(x)f_2^{n_2}(x)...$ *разложен на неприводимые множители, то* V *разлагается в прямую сумму* x *инвариантных подпространств*

$$V=V_1\oplus V_2\oplus ...\oplus V_k=\sum_{i=1}^{k}V_i,$$

где подпространство V_i *аннулируется многочленом* $f_i^{n_i}(x)$, то есть $f_i^{n_i}(x)(u)=0$ *при любых* u *из пространства* V, $i=\overline{1,k}$.

В симплектическом случае предложение 1 можно уточнить: при $x\to x^{-1}$ корни характеристического уравнения $f(x)=0$ переходят в себя.

Это следует из

$$(xu,v)=\left(u,\frac{1}{x}v\right),$$

где (u,v) – симплектическая метрика.

Обратимся теперь к исследованию группы $SP_4(q)$. Сначала разберем случай четного q.

Можно считать, что $q>2$, так как группа $SP_4(2)$ изоморфна симметрической группе Σ_6, а она разобрана в [5].

Информация о классах сопряженности в группе $SP_4(q)$ содержится в статье Еномото [6]. Еномото рассматривает $SP_4(q)$ как группу Шевалле [1], построенную по диаграмме Дынкина [7, с. 312].

Система корней исследуемой группы выглядит следующим образом.

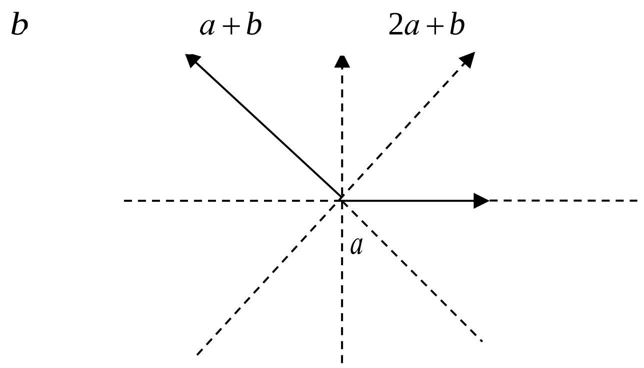

Рис. 1

Представители классов изображаются верхними треугольными 4×4 матрицами вида

$$x = hx_a(u_1)x_b(u_2)x_{a+b}(u_3)x_{2a+b}(u_4),$$

где

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & h_1^{-1} & \\ & & & h_2^{-1} \end{pmatrix}$$

картановский элемент, а $x_a, x_b, x_{a+b}, x_{2a+b}$ – корневые подгруппы. Аргументы y, h, x берутся в алгебраическом замыкании поля F_q и $h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1}$ являются корнями характеристического многочлена x.

В приводимой таблице $IV - I$ [6] легко обнаруживается, что класс полупростого элемента и смешанного однозначно определяются своими характеристическими многочленами. Поскольку такой многочлен инвариантен при замене $h_1 \to h_1^{-1},$ то указанные элементы сопряжены со своими обратными.

Осталось разобрать унипотентные классы. Таковые представляются элементами

$$x_{2a+b}(1),\ x_{a+b}(1),\ x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1),\ x_a(1)x_b(1),\ x_a(1)x_b(1)x_{2a+b}(\xi),$$

где $\xi \in F_q$ таково, что многочлен $x^2 + x + \xi$ неприводим над F_q. Формула [1]

$$h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta\left(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u\right)$$

при подходящих t и α дает коммутирующий с $x_\beta(u)$ и сопряженный с ним элемент $x_\beta\left(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u\right)$. Тем самым вопрос положительно решается для первых из трех классов унипотентов.

Далее,

$$[x_a(1)x_b(1)]^{-1} = x_b(-1)x_a(-1) = x_b(1)x_a(1) = x_b(1)x_a(1)x_b(1)x_b(1)^{-1},$$

то есть $x_a(1)x_b(1)$ сопряжен с обратным. Оба элементы различны, так как x_a и x_b не коммутируют. Наконец, обратный элемент к $x_a(1)x_b(1)x_{2a+b}(\xi)$, не будучи инволюцией, не может лежать в рассмотренных унипотентных классах, а, значит, сопряжен с $x_a(1)x_b(1)x_{2a+b}(\xi)$. Случай $q > 2$ рассмотрен.

Пусть теперь q нечетно. Здесь нужную информацию можно извлечь из работы Шринивасана [8]. Он работает с группой $\hat{SP}_4(q)$, накрывающей группы $SP_4(q)$, и, поэтому надо соблюдать некоторую осторожность с перенесением выводов на $SP_4(q)$. Представители классов представлены 4×4 матрицами с элементами из алгебраического замыкания поля F_q, а потому характеристический многочлен класса легко определяется. Просмотр соответствующей таблицы приводит к заключению, что, как и при четном q, полупростой класс (уже в $SP_4(q)$, а не в $\hat{SP}_4(q)$ однозначно определяется своим характеристическим многочленом. Вывод $x \sim x^{-1}$ следует из соответствующей инвариантности многочлена. Конечно, случаи $x = \pm x^{-1}$ ничего нового не дают. Их мы разберем позднее.

Смешанные элементы определяются своими характеристическими многочленами, если они имеют вид $P^2(x)$, где $P(x)$ – самосопряженный многочлен с корнями, отличными от ± 1. Поэтому дальнейшему исследованию подлежат, кроме ранее упомянутого случая $x \sim \pm x^{-1}$, характеристические многочлены $P(x)(x\pm 1)(x^2-1)^2$ и унипотенты.

Случай, когда $x = \pm x^{-1}$, то есть инволюция в $SP_4(q)$, можно исключить в силу приведенного в [5] утверждения, по которому в любой простой конечной группе класс инволюций содержит коммутирующие элементы.

Обратимся к исследованию унипотентов. Имеются два класса с представителями типа

$$x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе $e_1, e_2;\ e_3, e_4$ (то есть подпространства $\langle e_1, e_2\rangle$ и $\langle e_3, e_4\rangle$ ортогональны и симплектические произведения $(e_1, e_2), (e_3, e_4)$ равны единице) и 4 класса с представителями типа

$$x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае легко проверить, что x, x^{-1}, x^2 различные, а поэтому два элемента из трех должны оказаться в одном классе. Но тогда $x \sim x^{-1}, x^2$ или x^{-2}, то есть класс элемента x содержит коммутирующие элементы. Во втором случае базис можно также выбрать стандартным. Базис остается стандартным, если их заменить на

$$e_1' = \lambda e_1,\ e_2' = \lambda^{-1} e_2,\ e_3' = \mu e_3,\ e_4' = \mu^{-1} e_4.$$

При этом a и b в выражении для матрицы x приобретают множители, являющиеся квадратами в F_q^*. При $q > 3$ можно тогда считать a и b различными.

Симплектическое преобразование

$$s = (e_1 \leftrightarrow e_3,\ e_2 \leftrightarrow e_4)$$

дает

$$y = sxs^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть класс X содержит коммутирующие элементы x и y. Это рассуждение не проходит при $q=3$, так как 1 единственный квадрат в F_q^*.

В этом случае надо рассмотреть лишь

$$x=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Здесь мы полагаем

$$s=\left(e_1\to e_1+e_3,\ e_2\to e_2+e_4,\ e_3\to -e_1+e_4,\ e_4\to -e_2+e_4\right)$$

и

$$y=\left(e_1\to e_3,\ e_2\to e_3+e_4,\ e_3\to e_1,\ e_4\to e_1+e_2\right).$$

Проверяется, что s и y симплектичны и $sy=ys,$ то есть $y\sim x.$ Наконец, $xy=-yx,$ т.е. x и y коммутируют в группе $SP_4(q)$.

Для смешанных элементов с характеристическим многочленом $P(x)(x\pm 1)^2,\ P(\pm 1)\neq 0$ имеем представление

$$x=\begin{pmatrix}X&0\\0&\pm E\end{pmatrix},$$

где $X,\ E,\ 0-2\times 2$ матрицы и проходит прежнее рассуждение:

$$x\sim y=\begin{pmatrix}\pm E&0\\0&X\end{pmatrix}$$

и $xy=-yx.$

В оставшемся случае, когда характеристический многочлен равен

$$\left(x^2-1\right)^2=(x-1)^2(x+1)^2$$

матрица x выглядит как

$$\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&-b\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вновь при $q>3$ a и b можно считать различными.
И опять

$$x\sim y=\begin{pmatrix}-1&-b&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

и x,y коммутируют.
При $q=3$ остается случай $a=b=1.$ В том же базисе выберем

$$x=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\1&2&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad s=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1/2&0&1/2\\1&0&-1&0\\0&1/2&0&-1/2\end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что все элементы симплектичны и $sx = ys$.

Библиографический список

1. **Кострикин, А.И.** Введение в алгебру / А. Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
2. **Галкин, В.М.** Коммутирующие элементы в классе сопряженности / В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 8. – С. 12-20.
3. **Enomoto, H.** The characters of the finite symplectic group Sp(4,q), $q = 2^f$ / H. Enomoto // Osaka J. Math. – № 9. – 1972. – С. 75-94.
4. **Серр, Ж.-П.** Алгебры Ли и группы Ли / Ж.-П. Серр. – М.: Мир, 1969. – 375 с.
5. **Стейнберг, Р.** Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 263 с.
6. **Горенстейн, Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
7. **Дьедонне, Ж.** Геометрия классических групп. – М.: Мир, 1974.
8. **Srinivasan, B.** The characters of the finite symplectic group Sp (4,q) / B. Srinivasan // The research was supported by a National Research Council (Canada) Postdoctoral Fellowship at the University of British Columbia. – September 16. – 1966.
9. **Ерофеева, Л.Н.** О простой группе Ри ${}^2G_2(q)$ / Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева, Н.В. Мохнина, Н.В. Юрова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2017. – № 3 (118). – С. 24-27.
10. **Галкин, В.М.** Коммутирующие элементы в классах сопряженности в группе Сузуки ${}^2B_2(q)$ / В.М. Галкин, Н. В. Мохнина, Н. В. Юрова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2017. – № 4. – С. 45-49.

Дата поступления
в редакцию: 16.10.2018

N.V. Yurova

ON CONJUGACY CLASSES IN THE SYMPLECTIC GROUP $SP_4(q)$

Nizhny Novgorod state technical university n. a. R.E. Alekseev

Purpose: There is the conjecture that every conjugacy class of finite simply group contains the commuting elements. The conjecture for the group $SP_4(q)$ is verified.

Design/methodology/approach: Information on the conjugacy classes of $SP_4(q)$ and $\hat{S}P_4(q)$ is using.

Findings: This result is an stage of the testing of the general conjecture.
Research limitations/implications: Methods of this paper may be used for the investigation the other groups.
Originality/value: The result is new.

Keywords: symlectic group, conjugacy class, finite simple group, commuting elements, centralizer.