

УДК 656.1

М.М. Жилейкин, А.Ю. Захаров, М.В. Паньшин

## ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ И ТОЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛАСТИЧНОГО КОЛЕСА С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ОПОРНЫМ ОСНОВАНИЕМ

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

К настоящему времени известно большое число математических моделей движения колеса по деформируемому опорному основанию, основанных на разных подходах к математическому описанию как оболочки шины, так и самого грунта. При разработке любой математической модели всегда возникают вопросы, связанные с ее адекватностью и точностью, что можно проверить только в случае сравнения вычисляемых в модели параметров с их значениями, полученными в ходе проведения измерений на реальных объектах, то есть экспериментальными методами. Целью работы является проверка точности и адекватности математической модели взаимодействия эластичного колеса с деформируемым опорным основанием, разработанной авторами, экспериментальными методами. Установлено, что относительная ошибка при определении различных параметров взаимодействия шины с деформируемым опорным основанием не превышает 7,4%.

Ключевые слова: деформируемое опорное основание, математическая модель колеса, адекватность и точность математической модели.

### Введение

При разработке новых вездеходных автомобилей спрогнозировать их проходимость в многообразных дорожно-грунтовых условиях можно только с помощью методов математического моделирования. Широкое практическое использование этих методов затрудняется малой изученностью процессов взаимодействия эластичного колеса с деформируемым опорным основанием, недостаточным объемом материалов по характеристикам грунтов [1].

К настоящему времени известно большое число математических моделей движения колеса по деформируемому опорному основанию, основанных на разных подходах к математическому описанию как оболочки шины, так и самого грунта [2-8].

При разработке любой математической модели всегда возникают вопросы, связанные с ее адекватностью и точностью, что можно проверить только в случае сравнения вычисляемых в модели параметров с их значениями, полученными в ходе проведения измерений на реальных объектах, то есть экспериментальными методами.

Целью работы является проверка точности и адекватности математической модели взаимодействия эластичного колеса с деформируемым опорным основанием, разработанной авторами [9], экспериментальными методами.

### Экспериментальное определение параметров взаимодействия колеса с деформируемым опорным основанием

Целью экспериментального исследования является определение параметров взаимодействия одиночного колёсного движителя с деформируемой опорной поверхностью (форма пятна контакта, глубина колеи, «зарывание» колеса в грунт, деформирование опорной поверхности).

В качестве объекта исследования использовался многоцелевой автомобиль МЗКТ-6001 (рис. 1), технические характеристики которого представлены в табл. 1.



Рис. 1. Используемый тягач

Таблица 1

## Технические характеристики МЗКТ-6001

Колесная формула	6x6
Снаряженная масса ТС, кг	12800
Полная масса ТС, кг	24000
Допустимые осевые массы, кг	3x8000
Максимальная скорость, км/ч	90
Запас хода по контрольному расходу топлива, км	1000
Емкость топливных баков, л	250+250
Высота ТС, мм	3195
Колея ТС, мм	2550
Двигатель – ЯМЗ-7513:	
Максимальная мощность при $n_0=1900$ об/мин, л.с. (кВт)	420 (309)
Максимальный крутящий момент при $n_0=1100-1300$ об/мин, кгс·м (Н·м)	185 (1813)
Статический радиус, м (шина – 16.00R20)	0,67

Для определения нагрузочной характеристики шины экспериментальное исследование проводилось на твердой ровной опорной поверхности – асфальтобетонном дорожном покрытии в сухую погоду на полигоне в Дмитровском филиале МГТУ им. Н.Э. Баумана. При проведении эксперимента регистрировались нагрузка на колесо, свободный радиус шины на твердой ровной опорной поверхности, количество грунтозацепов, их высота, глубина колеи, образовавшаяся в области взаимодействия колёсного движителя с грунтом, расстояние от центра вращения колеса до сформированного грунта, а также параметры, характеризующие длину поверхности контакта. Было произведено пятнадцать замеров с дальнейшей обработкой полученных результатов измерений с использованием известных статистических методов.

Замеры проводились на твердой ровной опорной поверхности для левого колеса передней оси автомобиля МЗКТ-6001.

Регистрировались следующие параметры, определяющую нагрузочную характеристику шины (рис. 2):

- 1) нагрузка на колесо  $G_k$ , Н;
- 2) свободный радиус шины  $r_{св}$ , мм;
- 3) расстояние от центра вращения колеса до опорной поверхности  $z_{кп}$ , мм;
- 4) количество грунтозацепов  $n_{г}$ ;
- 5) высота грунтозацепов  $h_{z_{г}}$ , мм.

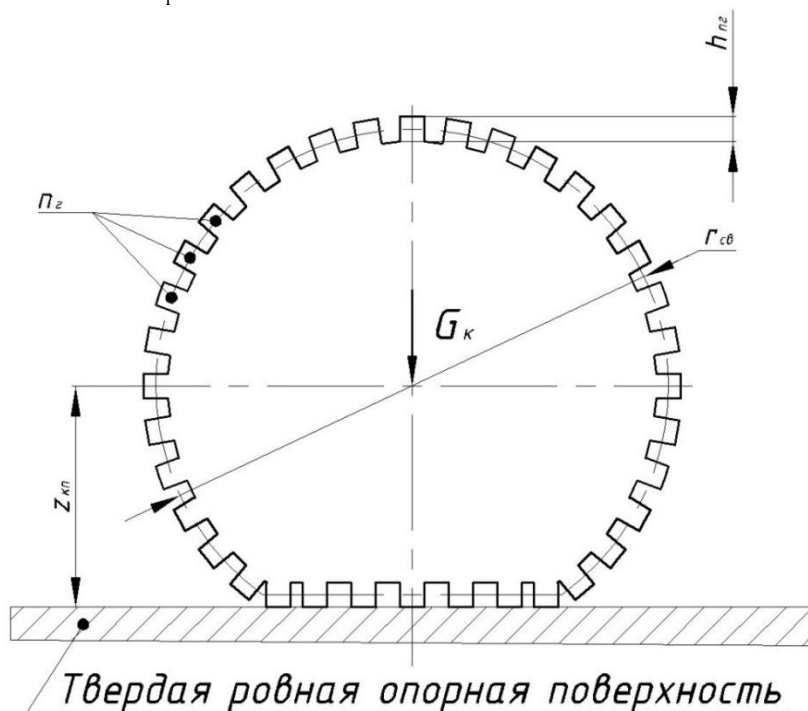


Рис. 2. Измеряемые параметры шины на ровном твердом опорном основании

Замеры нагрузки на колесо были проведены при помощи весоизмерительного устройства – подкладных весов «Исток» 7,5-2.

Результатом измерения являются следующие значения искомых параметров:

- 1)  $G_k = 45472,21$  Н;
- 2)  $r_{св} = 671,5$  мм;
- 3)  $z_{кп} = 615$  мм;
- 4)  $n_{г} = 128$ ;
- 5)  $h_{z_{г}} = 25$  мм.

В процессе измерений производился выезд автомобиля на деформируемую опорную поверхность, где осуществлялось наблюдение за взаимодействием одиночного колесного движителя (левое колесо передней оси автомобиля МЗКТ-6001) с деформируемой опорной поверхностью (рис. 3).



Рис. 3. Взаимодействие колесного движителя с грунтом

При этом необходимо было определить следующие параметры взаимодействия колёсного движителя с деформируемым опорным основанием (рис. 4):

- 1) длина передней части пятна контакта  $L_1$ , мм;
- 2) расстояние по горизонтали от центра колеи до точки контакта профиля колеса с недеформированным грунтом  $X_r$ , мм;
- 3) длина задней части пятна контакта  $L_2$ , мм;
- 4) глубина колеи  $h_r$ , мм;
- 5) расстояние от центра вращения колеса до уплотненного грунта  $z_k$ , мм.

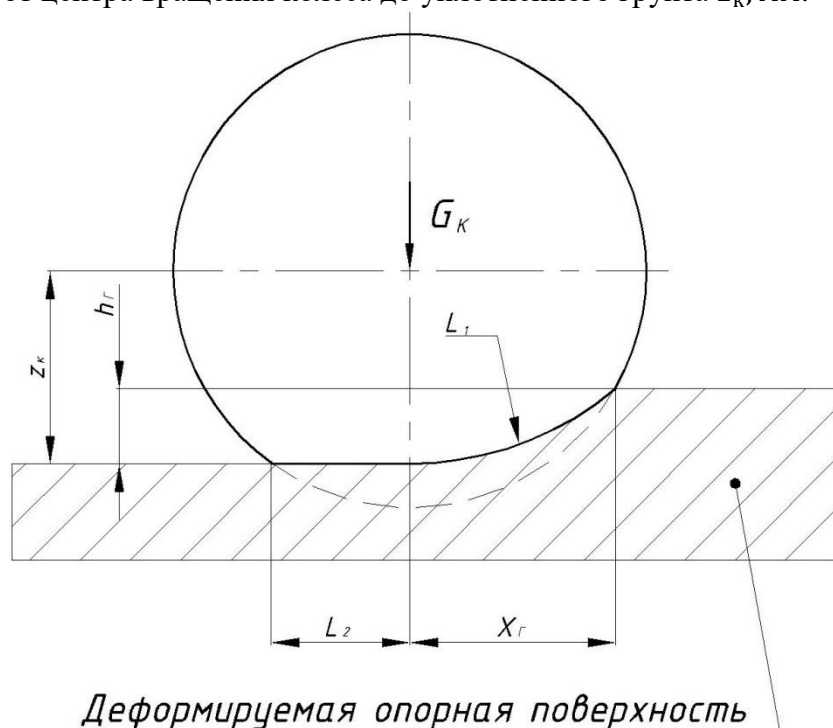


Рис. 4. Схема взаимодействия колесного движителя с грунтом

Чтобы определить искомые параметры, производилась расчистка области пятна контакта и их регистрация с помощью измерительных инструментов: линейки измерительной металлической и рулетки измерительной (рис. 5).



**Рис. 5. Измерение параметров взаимодействия колесного движителя с грунтом**

Результаты измерения сведены в табл. 2.

**Таблица 2**

**Параметры взаимодействия колеса с грунтом**

№ п/п	$L_1$ , мм	$X_{Г}$ , мм	$L_2$ , мм	$h_{Г}$ , мм	$Z_{К}$ , мм
1	183	180	148	10	603
2	180	170	145	12	606
3	183	181	150	20	610
4	180	178	148	10	605
5	178	173	157	8	605
6	185	183	145	15	605
7	188	184	155	13	603
8	182	175	155	13	605
9	176	170	180	15	608
10	196	190	125	13	607
11	188	180	145	18	609
12	186	180	148	15	605
13	190	180	145	10	610
14	200	190	130	15	610
15	188	180	145	15	608

### **Обработка результатов экспериментальных исследований**

Оценка математического ожидания и дисперсии исследуемых параметров представлена в табл. 3.

Таблица 3

**Оценка математического ожидания и дисперсии  
исследуемых параметров колеса на грунте**

Параметр	$L_1$ , мм	$X_r$ , мм	$L_2$ , мм	$h_r$ , мм	$z_k$ , мм
Оценка мат. ожидания, $\bar{m}$	185.5	179.6	148.8	13.47	606.6
Оценка дисперсии, $S^2$	39.45	33.44	18.31	9.58	5.57

Вычисление статистики [10] и проверка первого и максимального членов вариационного ряда, сравнение полученных значений с табличным критическим значением  $U_\alpha$  (для уровня значимости  $q = 0,05$  и объема выборки  $n = 15$ ) по каждому из исследуемых параметров показало, что вся совокупность результатов испытаний по всем исследуемым параметрам, кроме совокупности результатов по параметру длины задней части пятна контакта  $L_2$ , принимается в рассмотрение. Для  $L_2$  было исключено несколько выбросов из рассмотрения, а оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения были скорректированы для 12 замеров без учета исключённых значений.

Проверка соответствия эмпирической функции распределения теоретическому закону распределения с использованием критерия  $\chi^2$  – Пирсона для группированных наблюдений показала, что измеренные результаты по каждому из исследуемых параметров колеса на грунте подчиняются нормальному закону.

Было установлено, что результаты наблюдений подчиняются нормальному закону, поэтому в качестве наилучшей оценки измеряемых величин принимается оценка математического ожидания выборки [10].

Значения математического ожидания выборки и доверительных интервалов измеряемых параметров представлены в табл. 4.

Таблица 4

**Математические ожидания и доверительные интервалы  
исследуемых параметров колеса на грунте**

Параметр	$L_1$ , мм	$X_r$ , мм	$L_2$ , мм	$h_r$ , мм	$z_k$ , мм
Оценка мат. ожидания, $\bar{m}$	185.5	179.6	148.8	13.47	606.6
Минимальное значение доверительного интервала, $X_{pH}$	181.93	176.29	145.995	11.7	605.25
Максимальное значение доверительного интервала, $X_{pB}$	189.13	182.91	151.67	15.24	607.95

**Проверка адекватности математической модели взаимодействия  
эластичного колеса с деформируемым опорным основанием**

Проверка проводилась путем сравнения численных значений параметров взаимодействия колеса с опорным основанием, полученных как экспериментальными методами, так и методами имитационного моделирования движения многоцелевого автомобиля МЗКТ-6001 (рис. 6), по деформируемому грунту, характеристики которого получены в ходе проведенных

ранее замеров. Математическая модель взаимодействия колеса с деформируемым опорным основанием представлена в работе [9], модель движения колесной машины – в работе [11].

В качестве модели деформируемого опорного основания принята модель Бернштейна-Летошнева [1]:

$$p_{0z} = c_{гр} h_r^\mu, \text{ МПа},$$

где  $c_{гр}$ , МПа – коэффициент деформации грунта;  $\mu$  – показатель плотности грунта.

Ранее экспериментальными методами были получены следующие значения  $c_{гр}$  и  $\mu$  для исследуемого опорного основания:  $\mu = 0.61211$ ;  $c_{гр} = 0.19343$  МПа

В процессе проведения описанных выше испытаний были получены следующие параметры взаимодействия для переднего левого колеса:

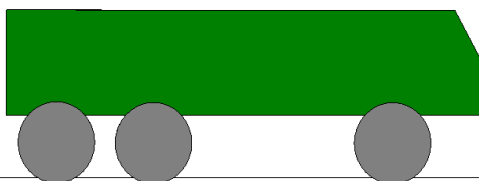
- общая длина пятна контакта  $L_1 + L_2 = 334,36$  мм;
- расстояние от центра вращения колеса до уплотненного грунта  $z_k = 615$  мм;
- глубина колеи  $h_r = 13,47$  мм.

Эти же параметры, полученные при моделировании движения МЗКТ-6001 по ровному деформируемому опорному основанию (рис. 6), представлены на рис. 7а, б, в.

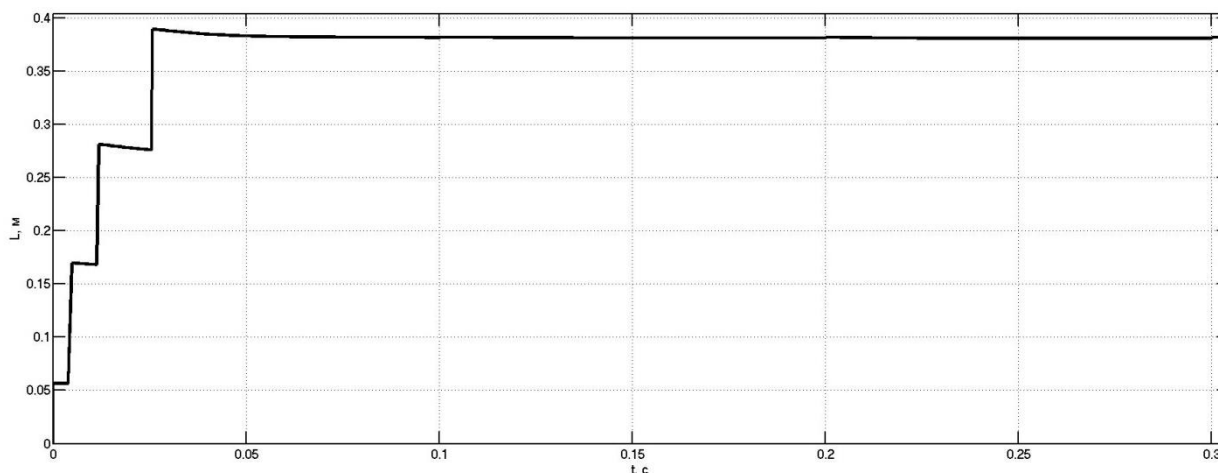
Установившиеся значения параметров взаимодействия с грунтом переднего левого колеса, полученные при моделировании:

- общая длина пятна контакта  $L_1 + L_2 = 357$  мм;
- расстояние от центра вращения колеса до уплотненного грунта  $z_k = 613$  мм;
- глубина колеи  $h_r = 14,40$  мм.

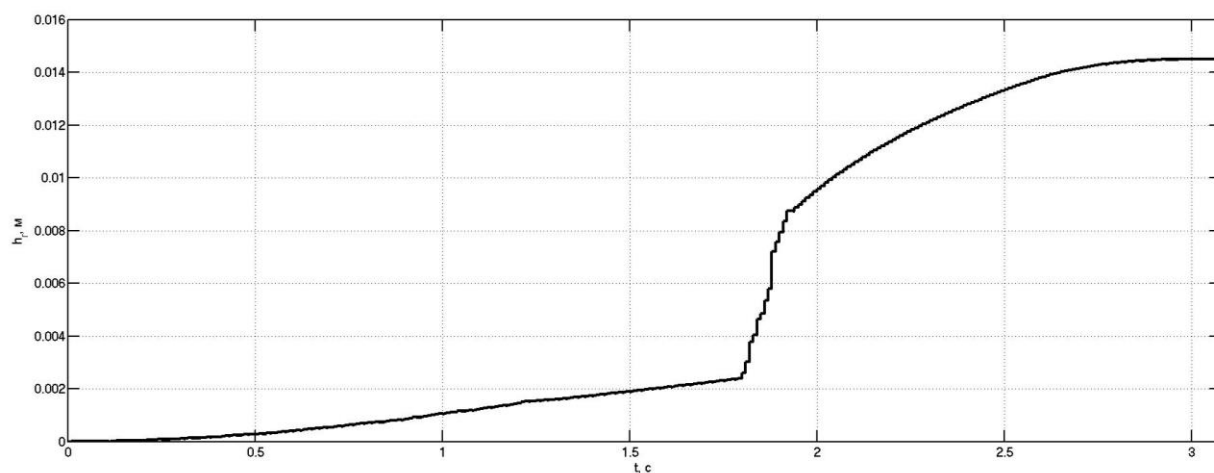
Относительная ошибка при определении общей длины пятна контакта составила 6,8%, при определении расстояние от центра вращения колеса до уплотненного грунта – 0,3%, при определении глубины колеи – 7,4%.



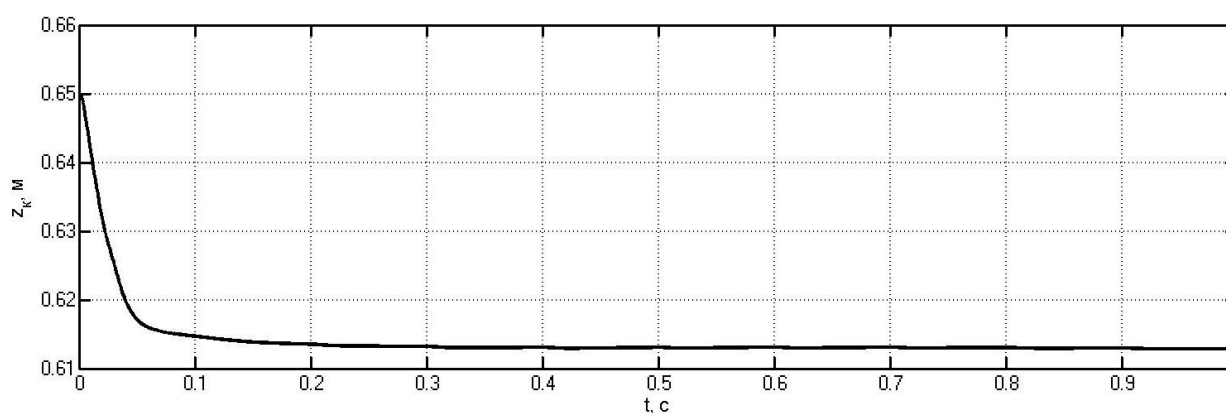
**Рис. 6. Моделирование движения МЗКТ-6001 по ровному деформируемому опорному основанию**



a)



б)



в)

**Рис. 7. Зависимости от времени параметров взаимодействия левого переднего колеса МЗКТ-6001 с ровным деформируемым опорным основанием:**  
а – общая длина пятна контакта; б – глубина колеи;  
в – расстояние от центра вращения колеса до уплотненного грунта

### Заключение

Проведена проверка адекватности математической модели взаимодействия эластичного колеса с деформируемым опорным основанием путем сравнения численных значений параметров взаимодействия колеса с опорным основанием, полученных как экспериментальными методами, так и методами имитационного моделирования движения многоцелевого автомобиля МЗКТ-6001. Установлено, что относительная ошибка при определении различных параметров взаимодействия шины с деформируемым опорным основанием не превышает 7,4%.

### Библиографический список

1. **Вольская, Н.С.** Оценка проходимости колесных машин при движении по неровной грунтовой поверхности / Н.С. Вольская. – М.: МГИУ, 2007. – 215 с.
2. **Агейкин, Я.С.** Проходимость автомобилей / Я.С. Агейкин, Н.С. Вольская, И.В. Чичекин. – М.: МГИУ, 2010. – 275 с.
3. **Бабийчук, А.Э.** Методика определения потерь мощности на качение колесного движителя с учетом типа трансмиссии и давления воздуха в шинах машины / А.Э. Бабийчук, А.С. Агейкин, Н.С. Вольская // Журнал автомобильных инженеров. – 2013. – № 3. – С. 24-27.



4. **Лепешкин, А.В.** Математическая модель взаимодействия эластичного колеса с деформируемой опорной поверхностью при установившемся прямолинейном качении / А.В. Лепешкин, С.Е. Петров // Материалы 77-й Международной научно-технической конференции ААИ «Автомобиле- и тракторостроение в России: приоритеты развития и подготовка кадров». – М.: МГТУ «МАМИ», 2012. – С. 141-149.
5. **Shoop, S.** Finite element modeling of tires on snow / S. Shoop, K. Kestler, R. Haehnel // Tire Science and Technology. – 2006. – Vol. 34, № 1. – P. 2-37.
6. **Botero, J.** A new mathematical model of the traction force in pneumatic tire snow chain systems / J. Botero, M. Gobbi, G. Mastinu // Associazione Italiana Per L'Analisi Delle Sollecitazioni / Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano. 2005. 10 p. – URL: [www.aiasonline.org/AIAS2005/Articoli/art084.pdf](http://www.aiasonline.org/AIAS2005/Articoli/art084.pdf). (дата обращения 09.09.2018).
7. **Белкин, А.Е.** Конечно-элементный анализ контакта автомобильной шины с опорной поверхностью на основе оболочечной модели / А.Е. Белкин, Н.Л. Нарская // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. – 2004. – № 3. – С. 14–28.
8. **Одинцов, О.А.** Разработка метода решения нелинейных контактных задач стационарного качения автомобильной шины: дисс. ... канд. техн. наук / О.А. Одинцова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
9. **Вольская, Н.С.** Математическая модель прямолинейного качения эластичного колеса по неровному деформируемому опорному основанию / Н.С. Вольская, М.М. Жилейкин, А.Ю. Захаров // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 2017. – № 10. – С. 25-33.
10. **Орлов, А.И.** Прикладная статистика / А.И. Орлов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006. – 672 с.
11. **Жилейкин, М.М.** Теоретические основы повышения показателей устойчивости и управляемости колесных машин на базе методов нечеткой логики / М.М. Жилейкин. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 238 с.

*Дата поступления  
в редакцию: 09.10.2018*

**M.M. Zhileykin, A.J. Zakharov, M.V. Panshin**

**VERIFICATION OF THE ADEQUACY AND ACCURACY  
OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERACTION  
OF THE ELASTIC WHEEL WITH A DEFORMABLE SUPPORT BASE**

Moscow state university. N.E. Bauman

**Purpose:** verification of the accuracy and adequacy of the mathematical model of the elastic wheel interaction with the deformable support base, developed by the authors, by experimental methods.

**Design/methodology/approach:** verification of the mathematical model was carried out by methods of experimental studies of the real object on the ground.

**Findings:** it was found that the relative error in determining the various parameters of the interaction of the tire with the deformable support base does not exceed 7.4%.

**Research limitations/implications:** the carried out researches allow to apply the developed mathematical model of rolling of an elastic wheel on roughnesses of the deformable basic basis for forecasting of basic passability of wheel cars.

**Originality/value:** for the first time, detailed experimental studies of the interaction of an elastic wheel with a deformable support base were carried out.

*Key words:* a deformable support base, a mathematical model of the wheel, the adequacy and accuracy of the mathematical model.