УДК 629.113

С.Е. Манянин[3], П.Е. Дмитриев[3], Ю.И. Палутин[2], А.С. Слюсарев[1], А.А. Аникин[3]

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ НА «БЫСТРЫЕ» И «МЕДЛЕННЫЕ» ПРИ ПОСТРОЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Волжский государственный университет водного транспорта[1],
Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия[2],
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[3]

Приводятся примеры уравнений движения и идеи, лежащие в основании разделения фазовых переменных на «быстрые» и «медленные». Указываются критерии, по которым осуществляется разделение переменных на «быстрые» и «медленные». Концепция разделения движений на «быстрые» и «медленные» представляет собой идеализированное представление реальных процессов, происходящих в объекте исследования. К типичным допущениям, которые принимаются при построении динамических моделей транспортных средств (ТС), относятся дискретное распределение инерционных параметров, выбор постоянных параметров, принятие квазистатических характеристик отдельных элементов. На первый взгляд, эти идеализации не имеют между собой ничего общего и принимаются из совершенно различных физических соображений. Метод разделения движений (МРД) на «быстрые» и «медленные» позволяет с единых позиций рассмотреть широкий круг допущений, принимаемых при построении динамических моделей ТС, в том числе и указанных выше.

Ключевые слова: динамическая модель, метод разделения движения, транспортное средство, концепция, дифференциальные уравнения.

Суть МРД применительно к задачам динамики ТС заключается в следующем. В зависимости от целей и постановки задач исследования в большинстве случаев удается выделить в реальном объекте ряд процессов (переменных или движений), которые существенно (на порядок) различаются между собой по скорости протекания. Условно такие переменные называют «медленные», «средние», «быстрые». Если их больше трех, вводят дополнительные названия и понятия, такие, как «очень медленные», «очень быстрые», «спектр характеристических времен» и т.д.

Такое разделение переменных позволяет сократить число дифференциальных уравнений описывающих состояние динамической модели ТС из следующих соображений. «Медленные» переменные не успевают сколько-нибудь существенно измениться за определенный отрезок времени, и их можно считать на этом временном интервале постоянными параметрами. «Быстрые» переменные на том же отрезке успевают достичь своих стационарных значений практически мгновенно по сравнению с «медленными».

В результате дифференциальные уравнения, описывающие «медленные» переменные, исключаются из полной системы уравнений, а в правых частях оставшихся уравнений записывается вместо исключенной «медленной» переменной ее усредненное постоянное значение (параметр); дифференциальные уравнения для «быстрых» переменных преобразуются в алгебраические уравнения для их стационарных значений.

Рассмотрим пример с «медленными», «средними» и «быстрыми» движениями на простейшем примере трехмассовой цепной крутильной динамической модели трансмиссии ТС (рис. 1).

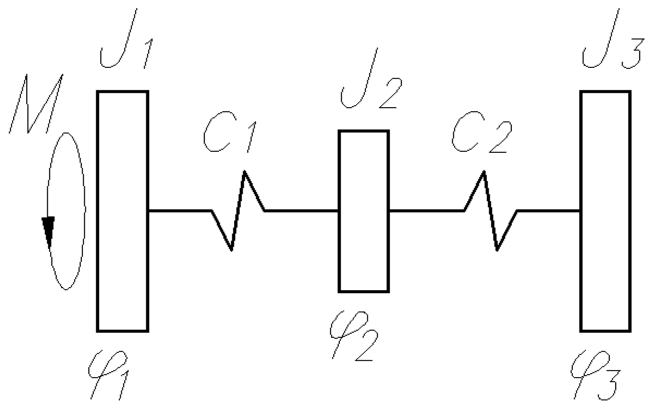

Рис. 1. Трехмассовая модель трансмиссии:

J_1, J_2, J_3 – моменты инерции маховых масс; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – угловые координаты маховых масс; c_1, c_2 – угловые жесткости валов; M – крутящий момент, приложенный к первой маховой массе

Уравнения движения представленной на рис. 1 простейшей динамической модели записываются в виде системы трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = M; \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 - c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Примем в системе уравнений (1) синусоидальный закон изменения крутящего момента ($M = m \cdot \sin(\omega \cdot t)$) и запишем ее относительно первых производных для большей наглядности дальнейших рассуждений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_4; \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \varphi_5; \\ \dfrac{d\varphi_3}{dt} = \varphi_6; \\ \dfrac{d\varphi_4}{dt} = \dfrac{c_1}{J_1}\left(M - (\varphi_1 - \varphi_2)\right); \\ \dfrac{d\varphi_5}{dt} = \dfrac{c_2}{J_2}\left(\dfrac{c_1}{c_2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_2 - \varphi_3)\right); \\ \dfrac{d\varphi_6}{dt} = \dfrac{c_2}{J_3} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3); \\ \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{m \cdot \omega}{c_1} \cdot \cos(\omega \cdot \tau); \\ \dfrac{d\tau}{dt} = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Разделим далее переменные, входящие в систему уравнений (2), в зависимости от того, как скорость их изменения относится к единице:

1. τ и $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6 \left(\dfrac{c_1}{J_1} \cong \dfrac{c_2}{J_3} \cong 1\right)$ – «средние» переменные;

2. $M\left(\dfrac{m\cdot\omega}{c_1}<<1\right)$ – «медленная» переменная;

3. φ_2,φ_5 ($J_2<<1$ и $\dfrac{c_2}{J_2}>>1$) – «быстрые» переменные.

В соответствии с выделенной иерархией переменных заменим «медленную» переменную M на ее среднее значение $\tilde{M}$ за временной интервал τ, а пятое уравнение системы уравнений (2) для «быстрой» переменной φ_5 заменим алгебраическим уравнением для ее стационарного значения $\left(\dfrac{d\varphi_5}{dt}=0\right)$: $\dfrac{c_2}{J_2}\left(\dfrac{c_1}{c_2}\cdot(\varphi_1-\varphi_2)-(\varphi_2-\varphi_3)\right)=0$. Упрощенная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi_1}{dt}=\varphi_4;\\ \dfrac{d\varphi_3}{dt}=\varphi_6;\\ \dfrac{d\varphi_4}{dt}=\dfrac{c_1}{J_1}\left(\tilde{M}-(\varphi_1-\varphi_2)\right);\\ \dfrac{c_2}{J_2}\left(\dfrac{c_1}{c_2}\cdot(\varphi_1-\varphi_2)-(\varphi_2-\varphi_3)\right)=0;\\ \dfrac{d\varphi_6}{dt}=\dfrac{c_2}{J_3}\cdot(\varphi_2-\varphi_3);\\ \dfrac{d\tau}{dt}=1.\end{cases} \qquad (3)$$

Перейдем обратно от системы дифференциальных уравнений первого порядка (3) к системе уравнений второго порядка. После выполнения преобразований окончательно получим:

$$\begin{cases}J_1\cdot\ddot{\varphi}_1+c_\Sigma\cdot(\varphi_1-\varphi_3)=\tilde{M};\\ J_3\cdot\ddot{\varphi}_3-c_\Sigma\cdot(\varphi_1-\varphi_3)=0,\end{cases} \qquad (4)$$

где $c_\Sigma=\dfrac{c_1\cdot c_2}{c_1+c_2}$ – суммарная жесткость валов рис.1. Из системы уравнений (4) следует, что она описывает двухмассовую крутильную модель.

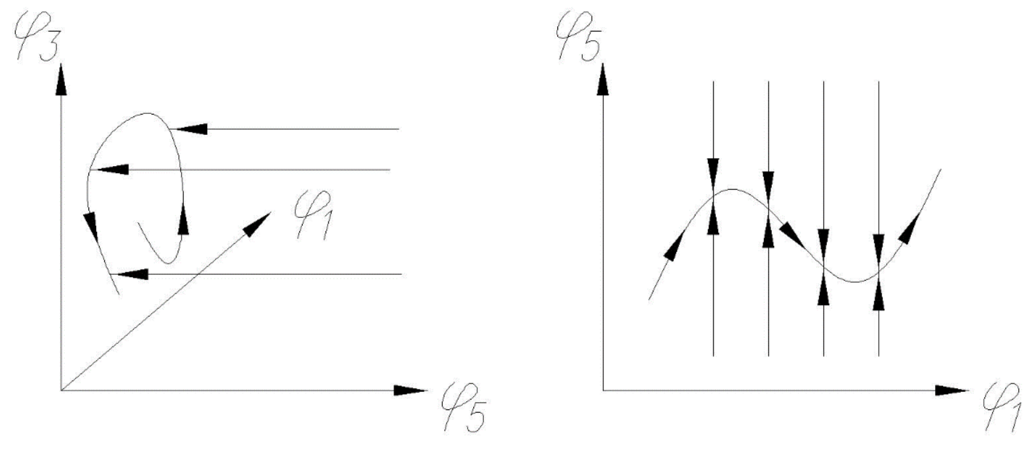

Рис. 2. Качественный вид сечений фазового пространства системы (3)

Таким образом, на стадии разработки динамических моделей ТС, когда принимаются решения о количестве рассматриваемых сосредоточенных масс, а также решения о том, отнести данную величину к переменной задачи или к постоянному параметру, неявно осуществляется разделение переменных на «медленные», «средние», «быстрые» и т.д. Степень допустимости принятия таких идеализаций становится более «прозрачной» и оценивается в зависимости от соотношений скоростей изменения переменных.

В заключение рассмотрим допущение о квазистатических характеристиках элементов в свете принятой концепции «быстрых» и «медленных» движений на примере источника ограниченной мощности, взаимодействующего с элементарной колебательной системой (рис. 3).

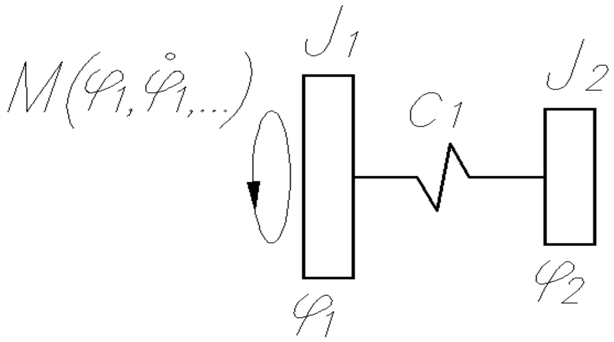

Рис. 3. Колебательная система, взаимодействующая с источником ограниченной мощности:

J_1, J_2 – моменты инерции маховых масс; φ_1, φ_2 – угловые координаты маховых масс; $\dot{\varphi}_1$ – угловая скорость; c_1 – угловая жесткость вала; M – крутящий момент, двигателя как источника ограниченной мощности

Из выполненных работ [2] известно, что моделирование воздействия двигателя как заданной функции времени (источником неограниченной мощности) является недопустимой идеализацией для большинства задач, поскольку в этом случае не учитывается взаимодействие двигателя с колебательной системой и не достигается требуемой адекватности динамической модели реальному объекту исследования. С другой стороны, учет ограниченной мощности двигателя ТС требует более детального описания самого двигателя (как динамической системы) и ведет к существенному усложнению задач. На этом пути (в первом приближении) принимают внешнюю скоростную характеристику двигателя, которая, как известно, является квазистационарной характеристикой. Чтобы оценить степень допустимости использования квазистационарной характеристики двигателя (внешней скоростной или частичной), рассмотрим это допущение с точки зрения МРД.

Уравнения движения динамической модели представленной на рис. 3 имеют вид:

$$\begin{cases} J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...); \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...)$ – характеристика двигателя с учетом нестационарного нагружения.

Будем считать уточненную характеристику двигателя $M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...)$ известной и разложим ее в ряд Тейлора в некоторой рабочей точке:

$$M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...) = M_0 + \frac{\partial M}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}_1} d\dot{\varphi}_1 + \frac{\partial M}{\partial \ddot{\varphi}_1} d\ddot{\varphi}_1 + ..., \tag{6}$$

где члены дальнейшего разложения упущены.

Первые два члена разложения производной $M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...)$ имеют вид:

$$\frac{dM}{dt} = d\left[\frac{\partial M}{\partial \varphi_1}\right]\frac{d\varphi_1}{dt} + d\left[\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}_1}\right]\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + ... \text{или} \tag{7}$$

$$\frac{dM}{dt} = A\frac{d\varphi_1}{dt} + B\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + ... = A\cdot\omega + B\cdot\varepsilon + ...,$$

где $\omega = \dfrac{d\varphi_1}{dt}$; $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2}$.

Запишем систему уравнений (5) как систему уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \omega; \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \varphi_3; \\ \dfrac{d\varphi_3}{dt} = \dfrac{c_1}{J_2}\cdot(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{J_1}\left(M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...) - c_1\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)\right); \\ \dfrac{dM}{dt} = A\cdot\omega. \end{cases} \tag{8}$$

Разделим далее переменные, входящие в систему уравнений (8). Предположим, что $A\cdot\omega << 1$Тогда переменныеM, ω будут «медленными», переменные φ_2, φ_3 – «средними», а остальные «быстрыми». Примем некоторое среднее значение для $\dfrac{dM}{dt} = A\cdot\omega$: $\overline{A\cdot\omega} = \tilde{\omega}$ и подставим его в качестве параметра в уравнение $M(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, ...)$, считая остальные аргументы равными нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \omega; \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \varphi_3; \\ \dfrac{d\varphi_3}{dt} = \dfrac{c_1}{J_2}\cdot(\varphi_1 - \varphi_2); \\ 0 = \dfrac{1}{J_1}\left(M(0, \tilde{\omega}, 0, ...) - c_1\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \end{cases} \tag{9}$$

откуда $M(0, \tilde{\omega}, 0, ...) = c_1\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)$; $J_2\dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} = c_1\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) = M(0, \tilde{\omega}, 0, ...)$.

Нагрузочную характеристику M, принято аппроксимировать квадратичным уравнением в виде [3]:

$$M(\omega) = a\cdot\omega^2 + b\cdot\omega + c,$$

где a, b, c – коэффициенты, учитывающие специфические особенности двигателя.

Окончательно система уравнений выродится в следующее уравнение:

$$J_2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = a\cdot\omega^2 + b\cdot\omega + c \tag{10}$$

При этом отметим, что $\tilde{\omega}$ не является истинно стационарным значением. «Медленная» переменная ω будет продолжать изменяться и «увлекать» за собой более «быстрые» переменные φ_2, φ_3. В этом смысле «медленная» переменная является ведущей, или «параметром порядка».

Критерии разделения фазовых переменных на «быстрые», «медленные» в общем случае не выработаны. Поэтому разделение движений основывается на физических соображениях, присущих конкретной задаче и составляет отдельный этап исследования. В любом случае, «малость» параметров определяется по отношению к интервалу времени T, на котором рассматривается движение системы. Характерные значения фазовых переменных допускают оценку максимальными значениями из абсолютных величин на рассматриваемом интервале времени T:$\varphi_i^* = {}^{max}_{T}|\varphi_i|$.

Выводы:

1) показана взаимная связь принимаемых допущений при построении динамических моделей транспортных средств с точки зрения метода разделения движений на «быстрые» и «медленные»;

2) приведены примеры задач по разделению движений на «быстрые» и «медленные», которые широко используются в исследовании динамики транспортных средств.

Библиографический список

1. **Андронов, А.А.** Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматлит, 1959. – 915 с.
2. **Новожилов, И.В.** Методы разделения движений / И.В. Новожилов. – М.: МЭИ, 1981. –126 с.
3. **Кононенко, В.О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В.О. Кононенко. – М.: Наука, 1964. – 256 с.
4. **Литвинов, А.С.** Автомобиль: Теория эксплуатационных свойств: Учебник для вузов по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство» / А.С. Литвинов, Я.Е. Фаробин. – М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.

Дата поступления
в редакцию: 09.10.2018

S.E. Manyanin[3], P.E. Dmitriev[3], Yu.I. Palutin[2], A.S. Slusarev[1], A.A. Anikin[3]

SEPARATION OF MOVEMENTS INTO «FAST» AND «SLOW» WHEN BUILDING DYNAMIC VEHICLE MODELS

Volga state University of water transport[1],
Nizhny Novgorod state agricultural academy [2],
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev [3]

Purpose: The article presents examples of equations of motion and ideas underlying the separation of phase variables into «fast» and «slow»; Criteria are indicated by which the variables are divided into «fast» and «slow».

Design/methodology/approach: The concept of separation of movements into «fast» and «slow» represents an idealized representation of real processes taking place in the object of investigation. Typical assumptions that are accepted when constructing dynamic models of vehicles (TS) include the discrete distribution of inertia parameters, the choice of constant parameters, the adoption of quasistatic characteristics of individual elements.

Findings: From the work performed [2], it is known that modeling the impact of the engine, as a given function of time (the source of unlimited power), is an unacceptable idealization for most tasks. Since in this case, the interaction of the engine with the oscillatory system is not taken into account and the required adequacy of the dynamic model to the real object of study is not achieved.

Research limitations/implications: Depending on the goals and the formulation of research tasks, in most cases it is possible to isolate in a real object a number of processes (variables or movements) that differ significantly (by an order of magnitude) in their flow rate. Conventionally, these variables are called «slow», «medium», «fast».

Originality/value: Thus, at the stage of developing dynamic models of TS, when decisions are made on the number of concentrated masses considered, as well as decisions on whether to carry this value to a task variable or to a constant parameter, the variables are implicitly divided into «slow», «medium», «fast», etc.

Keywords: dynamic model, motion separation method, vehicle, concept, differential equations.