УДК 681.5.015

А.А. Кочешков

ОЦЕНИВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Анализируется задача моделирования стохастических процессов внешних коррелированных возмущений в дискретных системах управления с учетом эффективности алгоритмов. Предлагается подход, основанный на методах теории дискретного управления и теории корреляции случайных процессов. В отличие от метода расширения пространства состояний, реализованы отдельные алгоритмы фильтра состояний и фильтра возмущений. Рассмотрены случаи многомерных систем с постоянными и переменными параметрами. Представлены алгоритмы синтеза оптимального и субоптимального фильтров при различных допущениях.

Ключевые слова: стохастическая система, модель пространства состояний, коррелированные возмущения, оценивание, нестационарные модели.

Введение

При решении задач фильтрации и управления в динамических системах не всегда допустимо предположение о некоррелированности во времени внешних случайных возмущений. Если интервал корреляции возмущения превышает период съема измерений, то учет корреляционных свойств внешних процессов в алгоритмах фильтрации может дать определенный выигрыш в точности. В данном случае требуется формировать оценки мгновенных значений, не измеряемых возмущающих процессов и шумов, которые участвуют в алгоритмах оценивания состояния системы и выработки управлений.

Рассмотрим наблюдаемую по Калману [1] линейную дискретную систему:

$$x_{k+1} = A_k x_k + C_k \xi_k, \tag{1}$$

$$y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + \eta_{k+1}, \tag{2}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n,\ y_k \in \mathbb{R}^l,\ \xi_k \in \mathbb{R}^p,\ \eta_k \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, измерения, возмущения и шума измерения соответственно; A_k, C_k, H_k – матрицы состояния, возмущения и измерения соответствующих размерностей.

Пусть гауссовский вектор начального состояния системы x_0 и гауссовский случайный процесс η_k имеют нулевые математические ожидания $E\{x_0\} = E\{\eta_k\} = 0$ и не коррелированы между собой. Их стохастические свойства заданы в виде ковариационных матриц:

$$E\{x_0 x_0^T\} = P_0,\ E\{\eta_{k+1}\eta_{j+1}^T\} = R_{k+1}\delta_{k,j}\text{ , где }\delta_{k,j}\text{ – символ Кронекера.}$$

В отличие от шума в измерителе, для которого принимается модель дискретного белого шума, возмущение в объекте рассматривается как коррелированный во времени гауссовский случайный процесс, заданный априорно известной дискретной матричной ковариационной функцией на интервале корреляции в τ шагов:

$$E\{\xi_k \xi_{k-i}^T\} = Q_k(i),\ k = \overline{0,N},\ i = \overline{0,\tau}\ .$$

Назовем последовательность матриц $Q_k(i)$, $i = \overline{0,\tau}$, заданную при каждом $k = \overline{0,N}$, непараметрической ковариационной функцией (КФ) нестационарного дискретного процесса ξ_k, а число τ – ее длиной.

Построение модели возмущения

Для исследования систем с коррелированными воздействиями и шумами в литературе обычно предлагается использовать метод расширения пространства состояний [2]. Этот метод подразумевает построение параметрической модели динамики внешнего процесса в виде формирующего фильтра и объединения ее с моделью объекта. Удобство единообразия данного подхода оправдано в простых случаях, когда возмущение является стационарным скалярным процессом, который легко сформировать из белого шума формирующим фильтром в виде авторегрессии невысокого порядка.

В более сложных случаях векторных воздействий с возможной нестационарностью корреляционных свойств общий метод расширения пространства состояний приводит к ряду сложностей в практической реализации. Построение векторного формирующего фильтра может стать самостоятельной сложной задачей, а объединение его с моделью объекта приводит к неоправданно высокой размерности результирующей системы уравнений. Кроме того, объединение в одну модель независимых процессов с существенно отличающейся динамикой может добавить свойство так называемой «жесткости» системы.

В отличие от метода расширения пространства состояний в [3] предложен подход, заключающийся в раздельном построении алгоритмов фильтрации и оценивания состояний системы и внешних возмущений, что позволяет использовать различные комбинации оптимальных и субоптимальных оценок. В частности, структура фильтра для получения оценки возмущения $\hat{\xi}_k$ по накопленным измерениям $y^k = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ в виде условного математического ожидания $\hat{\xi}_k = E\{\xi_k \,/\, y^k\}$ задается уравнениями:

$$\hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_{k+1/k} + F_{k+1}\left[y_{k+1} - H_{k+1}\left(A_k\hat{x}_k + C_k\hat{\xi}_k\right)\right], \qquad (3)$$

$$F_{k+1} = cov(\xi_{k+1}, y_{k+1} \,/\, y^k)(H_{k+1}cov(x_{k+1}, x_{k+1} \,/\, y^k){H^T}_{k+1} + R_{k+1})^{-1}, \qquad (4)$$

где $\hat{\xi}_{k+1/k}$ – оценка предсказания на один шаг, F_{k+1} – матричный коэффициент фильтра, $cov(a, b \,/\, y^k)$ – условная взаимная ковариационная матрица векторов a и b.

В зависимости от метода формирования предсказания $\hat{\xi}_{k+1/k}$ и от метода оценивания состояния $\hat{x}_k$ могут быть получены различные по точности и вычислительным затратам алгоритмы оценивания возмущения $\hat{\xi}_k$.

В рамках корреляционной теории по собранной статистике случайных процессов могут быть построены модели временных рядов авторегрессии и скользящего среднего. Удобной формой для предсказания является авторегрессионная модель, которую для общего случая представим векторным ковариационно нестационарным случайным процессом, представленным уравнением:

$$\xi_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} B_{k,j}\,\xi_{k-j} + \omega_k, \qquad (5)$$

где гауссовский дискретный белый шум ω_k задан ковариационной матрицей $E\{w_k w_k^T\} = Q_{wk}$, матричные коэффициенты $B_{k,j}, j = \overline{0, m},\ k = \overline{0, N}$ должны быть определены по заданной непараметрической КФ длиной τ: $Q_k(i),\ i = \overline{0, \tau}$. Согласно терминологии теории динамических систем, данное уравнение описывает линейную стохастическую систему с запаздыванием, вектор состояния которой является дискретным марковским процессом порядка $m + 1$.

Для удобства алгоритмической и программной обработки представим последовательности матриц коэффициентов $B_{k,j}$ и ковариационных матриц $Q_k(i)$ на каждом шаге k в блочно-матричном виде:

$$B_k(m) = \left[B_{k,0}, B_{k,1}, \cdots, B_{k,m}\right]$$

$$M_k(1, m+1) = [Q_k(1), Q_k(2), \cdots, Q_k(m+1)]$$

Согласно работе [3], достаточной статистикой гауссовского центрированного марковского процесса порядка $m + 1$ является матричная КФ $Q_k(i), i = \overline{0, m+1},\ k = \overline{0, N}$, порождающая положительно определенную блочную матрицу Теплица:

$$M_k(m,m)=\begin{bmatrix} Q_k(0)\,Q_k(1) & \cdots & Q_k(m) \\ {Q_k}^T(1)\,Q_k(0) & \cdots & Q_k(m-1) \\ & \vdots & \\ {Q_k}^T(m)\,{Q_k}^T(m-1) & \cdots & Q_k(0) \end{bmatrix}$$

Тогда искомые параметры модели могут быть найдены как решение линейной матричной системы уравнений, обобщающей на нестационарный случай известные уравнения Юла-Уокера [4]:

$$B_k(m)=M_k(1,m+1)M_k(m,m)^{-1}. \tag{6}$$

Ковариационная матрица возбуждающего белого шума R_k определяется выражением:

$$Q_{wk}=Q_k(0)-B_k(m)M_k(1,m+1)^T. \tag{7}$$

Уравнения Юла-Уокера дают точное решение системы относительно коэффициентов по заданным $(m+1)$ первым отсчетам КФ без учета остального, возможно весьма длинного и важного, «хвоста» корреляций. Это подразумевает аналитическую форму задания КФ или хорошо аппроксимированные экспериментальные данные. На практике для случайных внешних возмущений корреляционные свойства находятся статистическим оцениванием по множеству реализаций, поэтому оценки значений КФ как случайные величины сами имеют определенный разброс. Для более точного соответствия модели (5) реальному процессу необходимо искать аппроксимирующее решение, построенное по отсчетам КФ на всем интервале корреляции, то есть $Q_k(i),\, i=\overline{0,\tau}\,,\, \tau>m+1$.

Сформируем расширенную блочную матрицу ковариаций:

$$M_k(\tau,m)=\begin{bmatrix} Q_k(0)\,Q_k(1) & \cdots & Q_k(m) \\ {Q_k}^T(1)\,Q_{k-1}(0) & \cdots & Q_{k-1}(m-1) \\ & \vdots & \\ {Q_k}^T(m)\,{Q_{k-1}}^T(m-1) & \cdots & Q_{k-m}(0) \\ {Q_k}^T(m+1)\,{Q_{k-1}}^T(m) & \cdots & {Q^T}_{k-m}(1) \\ & \vdots & \\ {Q_k}^T(\tau)\,{Q_k}^T(\tau-1) & \cdots & {Q^T}_{k-m}(\tau-m) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Предлагается искать решение переопределенной системы уравнений (8) по методу наименьших квадратов с помощью псевдообратной матрицы ${M_k}^+(\tau,m)$:

$$B_k(m)=M_k(1,\tau+1)[{M_k}^+(\tau,m)]^T, \tag{9}$$

где

$${M_k}^+(\tau,m)=\left[{M_k}^T(\tau,m)M_k(\tau,m)\right]^{-1}{M_k}^T(\tau,m).$$

Синтез фильтров состояния и возмущения

Имея априорную модель возмущения (5) в системе (1), (2), можно решать задачу построения фильтра для получения оценок $\widehat{\xi_k}$ по измерениям y_k. Воспользуемся теорией стохастических наблюдателей минимальной размерности [5] и для простоты рассмотрим случай полного измерения вектора состояния $(n=l)$:

$$y_{k+1}=x_{k+1}+\eta_{k+1}. \tag{10}$$

Наилучшей оценкой предсказания $\hat{\xi}_{k+1/k}$ в соответствии с (5) является:

$$\hat{\xi}_{k+1/k}=\sum_{j=0}^{m}B_{k,j}\,\hat{\xi}_{k-j}. \tag{11}$$

Уравнение фильтра (3) в этом случае примет вид:

$$\hat{\xi}_{k+1}=\sum_{j=0}^{m}B_{k,j}\,\hat{\xi}_{k-j}+F_{k+1}\left[y_{k+1}-A_k y_k-C_k\hat{\xi}_k\right], \tag{12}$$

где матричный коэффициент фильтрации F_{k+1} должен минимизировать ошибку оценки:

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k - \hat{\xi}_k.$$

Используя (1), (2), (5), получим уравнение относительно ошибки оценки:

$$\tilde{\xi}_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} B_{k,j}\,\tilde{\xi}_{k-j} - F_{k+1}\left[C_k\tilde{\xi}_k + \eta_{k+1} - A_k\eta_k\right] + \omega_k.$$

Характеристикой точности оценивания является ковариационная матрица ошибки оценки $\tilde{Q}_k(0) = E\{\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}_k^T\}$, рекуррентное уравнение для которой приводится к виду:

$$\tilde{Q}_{k+1}(0) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} B_{k,i}\,\tilde{Q}_{k-min(i,j)}(|i-j|)B_{k,j}^T - \sum_{j=0}^{m} B_{k,j}\tilde{Q}_k^T(j)C_k^T\,F_{k+1}^T - \sum_{j=0}^{m} F_{k+1}C_k\tilde{Q}_k(j)\,B_{k,j}^T$$
$$+ F_{k+1}C_k\tilde{Q}_k(0)C_k^T F_{k+1}^T + F_{k+1}\left(R_{k+1} + A_kR_kA_k^T\right)F_{k+1}^T - F_{k+1}C_kF_kR_kA_k^T$$
$$- A_kR_kF_k^TC_k^TF_{k+1}^T + Q_{wk.}$$

В соответствии с принципами построения стохастических наблюдателей оптимальный коэффициент фильтрации должен обеспечивать минимум следа ковариационной матрицы ошибки оценки $tr\tilde{Q}_{k+1}(0)$. Приравняв производную от $tr\tilde{Q}_{k+1}(0)$ по матрице F_{k+1} к нулю, получим:

$$F_{k+1} = \left[\sum_{j=0}^{m} B_{k,j}\tilde{Q}_k^T(j)C_k^T + A_kR_kF_k^TC_k^T\right]\left[C_k\tilde{Q}_k(0)C_k^T + R_{k+1} + A_kR_kA_k^T\right]^{-1}. \qquad (13)$$

Подставив коэффициент фильтрации F_{k+1} из (13), получим рекуррентное уравнение для КФ ошибки оценки $\tilde{Q}_k(j) = E\{\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}_{k-j}^T\}$ $(j = \overline{0,m})$:

$$\tilde{Q}_{k+1}(0) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} B_{k,i}\,\tilde{Q}_{k-min(i,j)}(|i-j|)B_{k,j}^T - F_{k+1}\left[\sum_{j=0}^{m} B_{k,j}\tilde{Q}_k^T(j)C_k^T + A_kR_kF_k^TC_k^T\right]^{,T} + Q_{wk} \qquad (14)$$

$$\tilde{Q}_{k+1}(j) = \sum_{i=0}^{m} B_{k,i}\,\tilde{Q}_{k-min(i,j-1)}(|i-j+1|) - F_{k+1}C_k\tilde{Q}_k(j-1)) - F_{k+1}A_kR_kF_k^T\delta_{j,1}, \qquad (15)$$

с начальным условием $\tilde{Q}_0(j) = Q_0(j)$.

Таким образом, уравнения (12)-(15) дают алгоритм синтеза фильтра минимальной размерности для оценивания возмущений при полном измерении состояния объекта. Данный алгоритм может быть использован как самостоятельно, так и в комбинации с каким-либо фильтром, вырабатывающим оценки состояния. Одним из возможных вариантов такого фильтра при неполном измерении вектора состояния системы (1), (2) является условно оптимальный фильтр [2], который для рассматриваемого случая задается системой рекуррентных уравнений:

$$\hat{x}_{k+1} = A_k\hat{x}_k + C_k\hat{\xi}_k + G_{k+1}\left[y_{k+1} - H_{k+1}\left(A_k\hat{x}_k + C_k\hat{\xi}_k\right)\right], \qquad (16)$$

$$G_{k+1} = \tilde{P}_{k+1/k}H_{k+1}^T\left(H_{k+1}\tilde{P}_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1}\right)^{-1}, \qquad (17)$$

$$\tilde{P}_{k+1/k} = A_k\tilde{P}_kA_k^T + A_k\tilde{V}_k(0)C_k^T + C_k\tilde{V}_k^T(0)A_k^T + C_k\tilde{Q}_k(0)C_k^T, \qquad (18)$$

$$\tilde{V}_{k+1}(i) = (I - G_{k+1}H_{k+1})\left[A_k\tilde{V}_k(i+1) + C_k\tilde{Q}_{k+i+1}^T(i+1)\right],\ i = \overline{0,-m}, \qquad (19)$$

где I – единичная матрица, $\tilde{P}_0 = P_0$, $\tilde{V}_0(i) = 0$, $\tilde{V}_k(i) = E\{(x_k - \hat{x}_k)\tilde{\xi}_{k-i}^T\}$.

Стационарная система

Построение фильтров (12), (16) для общего случая нестационарных векторных случайных процессов является сложной задачей, особенно для оценивания априорных ковариационных функций возмущений. Для устойчивой наблюдаемой системы с постоянными параметрами:

$$x_{k+1} = Ax_k + C\xi_k,$$
$$y_{k+1} = Hx_{k+1} + \eta_{k+1},$$

и центрированного, стационарного в ковариационном смысле процесса:

$$\xi_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} B_j \, \xi_{k-j} + \omega_k \tag{20}$$

решения уравнений относительно ковариационных матриц ошибок оценок сходятся и дают постоянные значения коэффициентов F и G в выражениях фильтров:

$$\hat{\xi}_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} B_j \, \hat{\xi}_{k-j} + F\left[y_{k+1} - H\left(A\hat{x}_k + C\hat{\xi}_k\right)\right], \tag{21}$$
$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + C\hat{\xi}_k + G\left[y_{k+1} - H\left(A\hat{x}_k + C\hat{\xi}_k\right)\right].$$

Как отдельный случай имеет смысл рассмотреть ситуацию, когда возмущение меняется заведомо медленнее состояния системы. При малом периоде квантования времени может быть допустимо использование экстраполятора нулевого порядка $\hat{\xi}_{k+1/k} = \hat{\xi}_k$. Тогда совместное рассмотрение уравнений фильтров состояния и возмущения дает значительно более простые соотношения для коэффициента фильтрации F_{k+1} и ковариационной матрицы ошибки оценки $\tilde{Q}_k(0)$:

$$F_{k+1} = \tilde{L}_k^T H^T \left(H\tilde{P}_{k+1/k}H^T + R\right)^{-1},$$
$$\tilde{L}_k = A\tilde{V}_k(0) + C\tilde{Q}_k(0),$$
$$\tilde{P}_{k+1/k} = A\tilde{P}_k A^T + A\tilde{V}_k(0)C^T + C\tilde{V}_k^T(0)A^T + C\tilde{Q}_k(0)C^T,$$
$$\tilde{P}_{k+1} = \left(I - F_{k+1}H\right)\tilde{P}_{k+1/k},$$
$$\tilde{Q}_{k+1}(0) = \tilde{Q}_k(0) - F_{k+1}H\tilde{L}_k,$$
$$\tilde{V}_{k+1}(0) = \tilde{L}_k - \tilde{P}_{k+1/k}H^T F_{k+1}^T.$$

Такой подход отличается малыми вычислительными затратами и оправдан в случае заведомо медленно меняющегося возмущения, вид ковариационной функции которого априорно неизвестен.

Пример

В качестве примера рассмотрим возмущения, действующие на рельсовый экипаж вследствие геометрических неровностей рельса в горизонтальной и вертикальной плоскости. Выполненные на практике замеры отклонений на длительном участке пути [6], привязанные к постоянной скорости движения, позволили получить статистические оценки ковариационных функций $Q(i)$, представленных на рис. 1, 2.

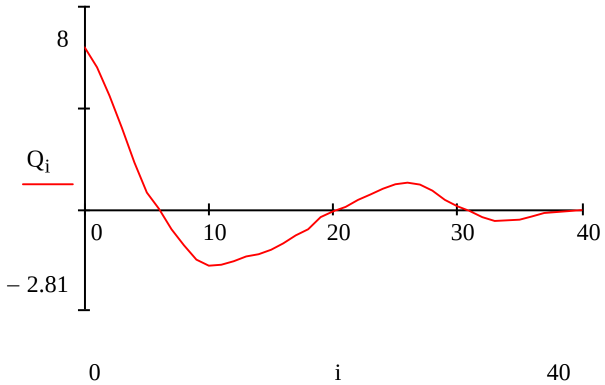

Рис. 1. Ковариационная функция отклонения рельса $Q(i)$, (мм^2) в дискретном времени в вертикальной плоскости

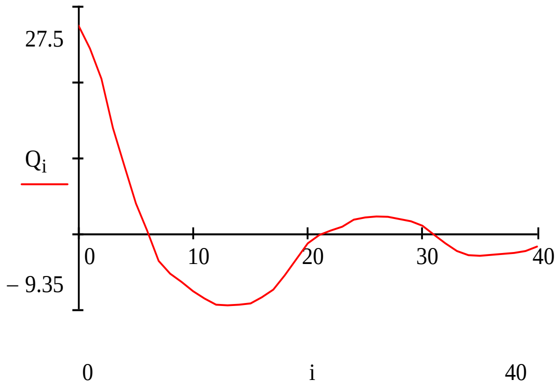

Рис. 2. Ковариационная функция отклонения рельса $Q(i)$, (мм^2) в дискретном времени в горизонтальной плоскости

Расчет параметров модели возмущения в виде (20) проводились для разных порядков процесса авторегрессии m. На рис. 3, 4 представлены приближения графиков ковариационной функции модели $F(i)$ к априорной $Q(i)$ процесса порядка $m = 3$, когда параметры модели вычисляются только по первым четырем отсчетам $Q(i)$.

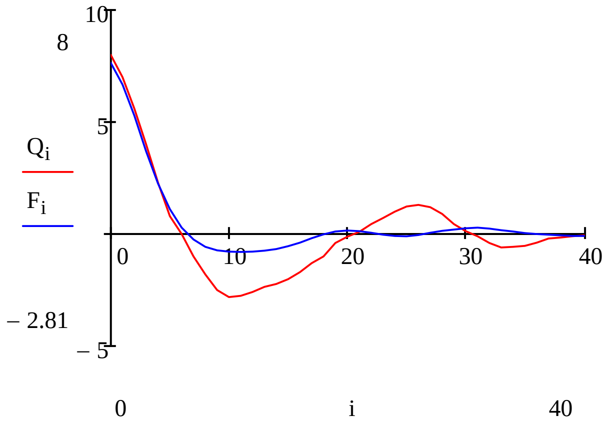

Рис. 3. Ковариационная функция модели отклонений в вертикальной плоскости при $m = 3$

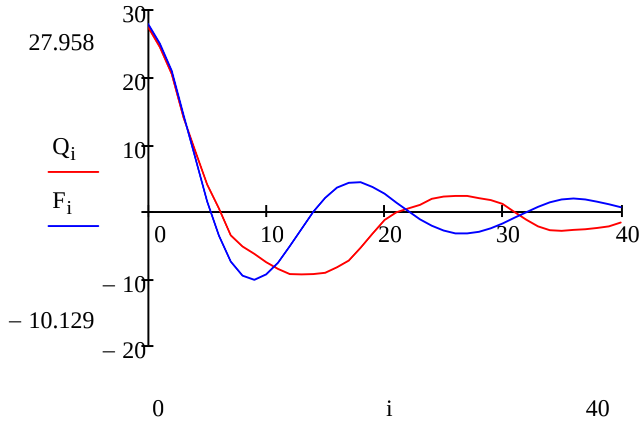

Рис. 4. Ковариационная функция модели отклонений в горизонтальной плоскости при $m = 3$

В данном случае уравнения Юла-Уокера дают плохое приближение, так как совсем не учитывают значения $Q(i)$ при $i > m + 1$. Предлагаемый алгоритм (9) расчета параметров задействует заданную ковариационную функцию на всей ее длине и позволяет в среднем получить лучшие приближения для адекватной модели (рис. 5, 6).

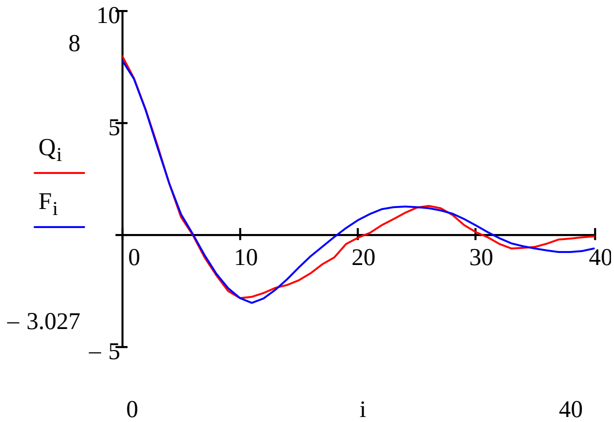

Рис. 5. Ковариационная функция модели отклонений в вертикальной плоскости при $m = 10$

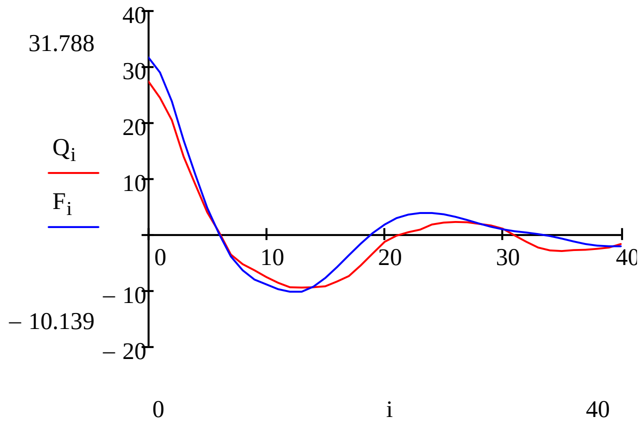

Рис. 6. Ковариационная функция модели отклонений в горизонтальной плоскости при $m = 10$

Построенная модель далее применяется в фильтре (21) для получения предсказаний возмущений, причем это не приводит увеличению порядка уравнений основной системы управления, как этого требует типовой подход расширения пространства состояний.

Библиографический список

1. **Медич, Д.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление. / Д. Медич. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
2. **Квакернаак, Х.** Линейные оптимальные системы управления. / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977 – 650 с.
3. **Кондратьев, В.В.** Фильтрация и анализ линейных дискретных систем управления при непараметрическом задании коррелированных шумов. / В.В. Кондратьев, А.А. Кочешков // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 6. – С. 67-76.

4. **Викулов, А.В.** Анализ и моделирование динамических свойств информационных систем. / А.В. Викулов, А.А. Кочешков // Труды НГТУ им Р.Е. Алексеева. – 2012. – № 4 – С. 83-90.
5. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. / Под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 420 с.
6. **Ромен, Ю.С.** Анализ случайных процессов геометрических неровностей рельсовых нитей / Ю.С. Ромен, А.Н. Савоськин, А.А. Акишин // Изв. ПГУПС. – 2014. – № 1. – С. 22-32.
7. **Краснова, С.А.** Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем / С.А. Краснова, В.А. Уткин. – М.: Наука, 2006. – 272 с.

Дата поступления
в редакцию: 11.01.2019

A.A. Kocheschкov

ESTIMATION OF PERTURBATIONS IN DISCRETE STOCHASTIC SYSTEMS

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev

Purpose: problems of estimating stochastic processes of external correlated perturbations in discrete control systems are analyzed with particular attention to the efficiency of the algorithms.
Methodology/approach: a theoretical framework is proposed based on discrete-time control theory methods and stochastic processes correlation theory. In contrast to the state space expansion method, separate design of the state filter and perturbation filter is implemented. The cases of multidimensional systems with constant and variable parameters are considered.
Results: algorithms for the synthesis of optimal and suboptimal filters under various assumptions are presented.

Key words: stochastic system, state space model, correlated perturbations, estimation, non-stationary models.