

УДК 629.113

П.Е. Дмитриев¹, С.Е. Манянин¹, Ю.И. Палутин², А.С. Слюсарев³

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРУТИЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ТРАНСМИССИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ КОЛЕСА ПО НЕРОВНОЙ ДОРОГЕ

Нижегородский государственный технический университет им. П.Е. Алексеева¹
Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия²
Волжский государственный университет водного транспорта³

Технико-эксплуатационные свойства автомобиля лимитируются условиями взаимодействия колесного движителя с дорогой. Одной из приоритетных задач повышения эффективности использования автотранспортных средств является совершенствование системы «двигатель – грунт». Приводятся уравнения движения без проскальзывания абсолютно жесткого колеса по абсолютно жесткой дороге с неровным профилем; определяется способ построения функции ординат профиля дороги; выполнен анализ решений нелинейного дифференциального уравнения движения колеса.

Ключевые слова: технико-эксплуатационные свойства автомобиля, колесный движитель, динамическая модель качения, крутящий момент, система «двигатель – грунт».

Технико-эксплуатационные свойства автомобиля лимитируются условиями взаимодействия колесного движителя с дорогой. Поэтому одной из приоритетных задач повышения эффективности использования автотранспортных средств является совершенствование системы «двигатель – грунт». Существующие теории не обеспечивают требуемой объяснительной и предсказательной функций, поэтому задача построения динамической модели качения колесного движителя по неровной дороге и решение ее в аналитическом виде является актуальной.

Построение расчетной схемы и уравнений движения колесного движителя

На рис. 1 представлена динамическая схема абсолютно жесткого колеса, катящегося без проскальзывания по абсолютно жесткой дороге с неровным профилем.

Запишем сумму проекций сил, приложенных к колесному движителю, на ось n , τ :

$$\sum F_n = 0;$$

$$R_n - F_{uy} \cdot \cos(\alpha) + F_{ux} \cdot \sin(\alpha) - G \cdot \cos(\alpha) = 0; \quad (1a)$$

$$R_\tau - F_{uy} \cdot \sin(\alpha) - F_{ux} \cdot \cos(\alpha) - G \cdot \sin(\alpha) = 0, \quad (16)$$

где R_n – нормальная реакция, действующая на колесный движитель со стороны дороги; R_τ – продольная реакция, действующая на колесный движитель со стороны дороги; $F_{ux} = m \cdot \ddot{x}_O$ – горизонтальная составляющая силы инерции неподрессоренной массы m , связанной с колесным движителем; \ddot{x}_O – горизонтальная составляющая ускорения центра (точка O) колесного движителя; $F_{uy} = m \cdot \ddot{y}_O$ – вертикальная составляющая силы инерции неподрессоренной массы m , связанной с колесным движителем; \ddot{y}_O – вертикальная составляющая ускорения центра (точка O) колесного движителя; $G = m \cdot g$ – вес неподрессоренной массы m , связанной с колесным движителем; $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$ – ускорение свободного падения; α – угол между вертикалью и касательной к профилю дороги в точке контакта колесного движителя с дорогой (точка P).

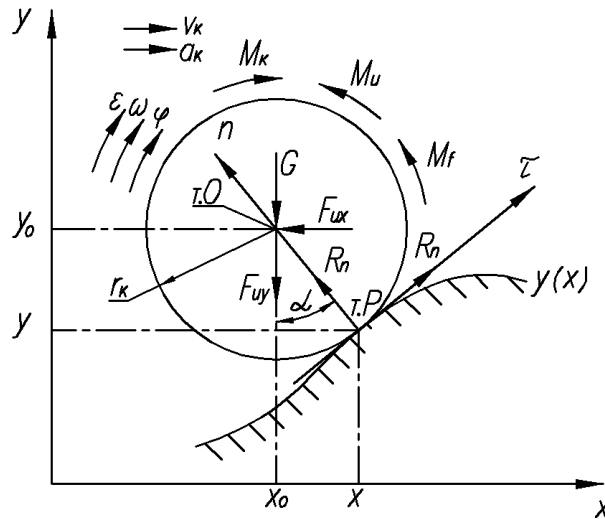


Рис. 1. Схема колеса

Запишем сумму моментов, приложенных к колесному движителю, относительно точки O:

$$\sum M_O = 0;$$

$$M_K - M_u - M_f - R_\tau \cdot r_K = 0, \quad (2)$$

где M_K – крутящий момент, подводимый к колесному движителю от полуоси; $M_u = J_K \cdot \varepsilon$ – инерционный момент, оказывающий сопротивление ускоренному вращению колесного движителя; J_K – момент инерции колесного движителя; $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ – угловое ускорение колесного движителя; $M_f = R_n \cdot f \cdot r_K$ – момент сопротивления качению колесного движителя; f – коэффициент сопротивления качению колесного движителя; r_K – радиус колесного движителя.

Подставим в уравнение (2) выражения для крутящих моментов:

$$M_K - J_K \cdot \ddot{\varphi} - R_n \cdot f \cdot r_K - R_\tau \cdot r_K = 0. \quad (3)$$

Выразим из уравнений (1a), (1б) величины R_n , R_τ и подставим в (3):

$$R_n = m \cdot \ddot{y}_O \cdot \cos(\alpha) - m \cdot \ddot{x}_O \cdot \sin(\alpha) + m \cdot g \cdot \cos(\alpha);$$

$$R_\tau = m \cdot \ddot{y}_O \cdot \sin(\alpha) + m \cdot \ddot{x}_O \cdot \cos(\alpha) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha);$$

$$M_K - J_K \cdot \ddot{\varphi} - \{m \cdot \ddot{y}_O \cdot \cos(\alpha) - m \cdot \ddot{x}_O \cdot \sin(\alpha) + m \cdot g \cdot \cos(\alpha)\} \cdot f \cdot r_K - \{m \cdot \ddot{y}_O \cdot \sin(\alpha) + m \cdot \ddot{x}_O \cdot \cos(\alpha) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)\} \cdot r_K = 0. \quad (4)$$

Сгруппируем в уравнении (4) слагаемые, при \ddot{x}_O , \ddot{y}_O , g :

$$M_K - J_K \cdot \ddot{\varphi} + \ddot{x}_O \cdot m \cdot r_K [f \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha)] - \ddot{y}_O \cdot m \cdot r_K [f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] - m \cdot g \cdot r_K [f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) переменные \ddot{x}_O , \ddot{y}_O , $\ddot{\varphi}$, α являются взаимозависимыми, поэтому, чтобы уменьшить число переменных, выразим \ddot{x}_O , \ddot{y}_O через остальные.

Модуль вектора скорости центра колесного движителя (точка O) при качении без проскальзывания определяется по формуле:

$$|v| = \dot{\varphi} \cdot r_K,$$

а его направление соответствует касательной τ .

Проекция вектора скорости центра колесного движителя на горизонтальную X и вертикальную y оси соответственно:

$$\begin{aligned}\dot{x}_O &= \dot{\varphi} \cdot r_K \cdot \cos(\alpha); \\ \dot{y}_O &= \dot{\varphi} \cdot r_K \cdot \sin(\alpha).\end{aligned}\quad (6)$$

Проекции вектора ускорения центра колесного движителя на горизонтальную x и вертикальную y оси соответственно определяются дифференцированием выражений (6):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_O &= \ddot{\varphi} \cdot r_K \cdot \cos(\alpha) - \dot{\varphi} \cdot r_K \cdot \sin(\alpha) \cdot \dot{\alpha}; \\ \ddot{y}_O &= \ddot{\varphi} \cdot r_K \cdot \sin(\alpha) + \dot{\varphi} \cdot r_K \cdot \cos(\alpha) \cdot \dot{\alpha}.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставим выражения (7) в уравнение (5) и соберем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}M_K - J_K \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot r_K [f \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha)] \cdot [\ddot{\varphi} \cdot r_K \cdot \cos(\alpha) - \dot{\varphi} \cdot r_K \cdot \sin(\alpha) \cdot \dot{\alpha}] - \\ - m \cdot r_K [f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] \cdot [\ddot{\varphi} \cdot r_K \cdot \sin(\alpha) + \dot{\varphi} \cdot r_K \cdot \cos(\alpha) \cdot \dot{\alpha}] - m \cdot g \cdot r_K [f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] = 0; \\ M_K - \ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] - \dot{\varphi} \cdot \dot{\alpha} \cdot m \cdot r_K^2 \cdot f - m \cdot g \cdot r_K [f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнение (8) содержит две переменные φ и α , которые, в случае движения колесного движителя без проскальзывания, должны однозначно выражаться друг через друга, то есть необходимо найти зависимость $\alpha = \alpha(\varphi)$. Но угол поворота колесного движителя φ выражается через длину дуги S профиля дороги по формуле:

$$s = \varphi \cdot r_K \text{ или } \varphi = \frac{s}{r_K}.$$

Таким образом, для установления зависимости $\alpha = \alpha(\varphi)$ необходимо найти, так называемое, «натуральное» уравнение кривой $\alpha = \alpha(s)$, описывающей ординаты профиля дороги.

Построение функции ординат профиля дороги

Как правило, неровности дороги моделируют синусоидальным законом, но в данном случае применение такой кривой неудобно, ввиду того, что ее натуральное уравнение не выражается в элементарных функциях.

Подберем функцию ординат профиля дороги $y=y(x)$ из следующих соображений:

- вид функции должен отражать, по крайней мере, основные характерные черты профиля дороги: иметь ограниченную осцилляцию значений, не иметь разрывов и неоднозначностей;
- иметь простое натуральное уравнение, выражающееся в элементарных функциях.

Выбор подходящей функции основывается на следующих соображениях. Будем искать функцию ординат профиля дороги $y=y(x)$ в параметрическом виде от натурального параметра s (длины дуги):

$$\begin{cases} x = x(s); \\ y = y(s).\end{cases}\quad (9)$$

Функции (9) связаны с α (угол наклона касательной к кривой в точке, определяемой s) соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos(\alpha); \\ \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha).\end{cases}\quad (10)$$

Продифференцируем соотношения (10) по s :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = -\sin(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{ds}; \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{ds}.\end{cases}\quad (11)$$

Величина $\frac{d\alpha}{ds} = \rho(s)$ – является по определению кривизной кривой.

Уравнения (11) с учетом выражения для кривизны и формул (10) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = -\rho(s) \cdot \frac{dy}{ds}; \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \rho(s) \cdot \frac{dx}{ds}. \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему двух дифференциальных уравнений второго порядка (12) получим решения $x(s)$, $y(s)$ для любой заданной кривизны $\rho(s)$.

Следует заметить, что мы свободны в выборе только четырех произвольных постоянных и длины кривой L , поэтому нельзя задать положения и наклоны обоих концов кривой, так как для этого нужно иметь шесть условий.

Примем $\rho(s) = \mu \cdot \cos(\chi \cdot s)$, где $\mu = \frac{\pi}{3}$, $\chi = 1$, тогда система уравнений (12) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\pi}{3} \cos(s) \cdot \frac{dy}{ds}; \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\pi}{3} \cos(s) \cdot \frac{dx}{ds}. \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы двух дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами (13) для визуализации графика решения и определения его соответствия требованию (1) выполнено в MathCAD (рис. 2).

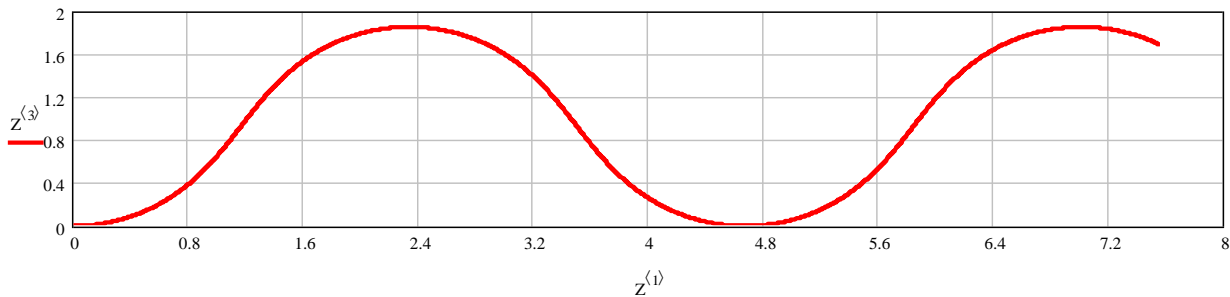


Рис. 2. Кривая ординат профиля дороги

Для нахождения зависимости $\alpha = \alpha(s)$ воспользуемся формулой:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \mu \cdot \cos(\chi \cdot s); s \quad (14)$$

$$d\alpha = \mu \cdot \cos(\chi \cdot s) \cdot ds, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \int \mu \cdot \cos(\chi \cdot s) \cdot ds = \frac{\mu}{\chi} \sin(\chi \cdot s) = \frac{\mu}{\chi \cdot r_K} \sin(\chi \cdot r_K \cdot \varphi); \quad (15)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu}{\chi \cdot r_K} \sin(\chi \cdot r_K \cdot \varphi) \right] = \mu \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(r_K \cdot \chi \cdot \varphi). \quad (16)$$

Подставим выражения (15), (16) с учетом $\mu = \frac{\pi}{3}$, $\chi = 1$ в уравнение (8), окончательно получим:

$$M_K - \ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] - (\dot{\varphi})^2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot m \cdot (r_K)^2 \cdot f \cdot \cos(r_K \cdot \varphi) - \\ - m \cdot g \cdot r_K \left[f \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(r_K \cdot \varphi)}{r_K}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(r_K \cdot \varphi)}{r_K}\right) \right] = 0. \quad (17)$$

Частные случаи уравнения движения и режимы качения колесного движителя

Уравнение движения (17) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с ограниченной вариацией нелинейных слагаемых. Перепишем слагаемые, входящие в уравнение (17) в другом порядке и введем следующие обозначения параметров:

$$M_K = \ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] + \dot{\varphi} \cdot \dot{\alpha} \cdot m \cdot r_K^2 \cdot f + m \cdot g \cdot r_K [f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] = \\ = \ddot{\varphi} \cdot J_{\text{ИП}} + (\dot{\varphi})^2 \cdot F(\dot{\alpha}) + m \cdot g \cdot r_K \cdot \psi(\alpha) = M_1 + M_2 + M_3, \quad (18)$$

где $M_1 = \ddot{\varphi} \cdot J_{\text{ИП}}$ – инерционный момент сопротивления ускоренному вращению колесного движителя; $J_{\text{ИП}} = J_K + m \cdot r_K^2$ – суммарный приведенный момент инерции колесного движителя; $M_2 = (\dot{\varphi})^2 \cdot F(\dot{\alpha})$ – момент сопротивления, обусловленный неровным профилем дороги; $F(\dot{\alpha})$ – функция, вид которой определяется скоростью изменения ординат профиля дороги; $M_3 = m \cdot g \cdot r_K \cdot \psi(\alpha)$ – момент сопротивления движения, обусловленный силой тяжести; $\psi(\alpha) = f \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$ – коэффициент сопротивления дороги.

1. В случае ровного профиля дороги ($\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$), уравнение (18) примет вид:

$$M_K = \ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] + m \cdot g \cdot r_K \cdot f,$$

которое показывает, что крутящий момент, подводимый к движителю, уравнивается инерционным моментом и моментом сопротивления качению колесного движителя.

2. В случае достаточно малых ординат профиля дороги ($\alpha \approx 0$, $\dot{\alpha} \neq 0$), уравнение (18) примет вид:

$$M_K = \ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] + \dot{\varphi} \cdot \dot{\alpha} \cdot m \cdot r_K^2 \cdot f + m \cdot g \cdot r_K \cdot f,$$

где второе слагаемое $M_2 = \dot{\varphi} \cdot \dot{\alpha} \cdot m \cdot r_K^2 \cdot f$ принимает как положительные, так и отрицательные значения (в зависимости от режима движения). Третье слагаемое $M_3 = m \cdot g \cdot r_K \cdot f$ строго положительное вне зависимости от режима качения. Если принять далее, что крутящий момент M_K , подводимый к колесному движителю, имеет постоянную величину ($M_K = \text{const}$), то угловая координата движителя будет изменяться таким образом, чтобы уравнивались крутящие моменты M_1 и M_2 :

$$\ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] - \dot{\varphi} \cdot \dot{\alpha} \cdot m \cdot r_K^2 \cdot f = 0; \\ \ddot{\varphi} \cdot [J_K + m \cdot r_K^2] - (\dot{\varphi})^2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot m \cdot (r_K)^2 \cdot f \cdot \cos(r_K \cdot \varphi) = 0.$$

Для численного решения уравнения (17) в MathCAD приведем его к стандартному виду:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega; \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J_K + m \cdot r_K^2} \left[M_K - \omega^2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot m \cdot (r_K)^2 \cdot f \cdot \cos(r_K \cdot \varphi) - \right. \\ \left. - m \cdot g \cdot r_K \left[f \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(r_K \cdot \varphi)}{r_K}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(r_K \cdot \varphi)}{r_K}\right) \right] \right]. \end{cases} \quad (18)$$

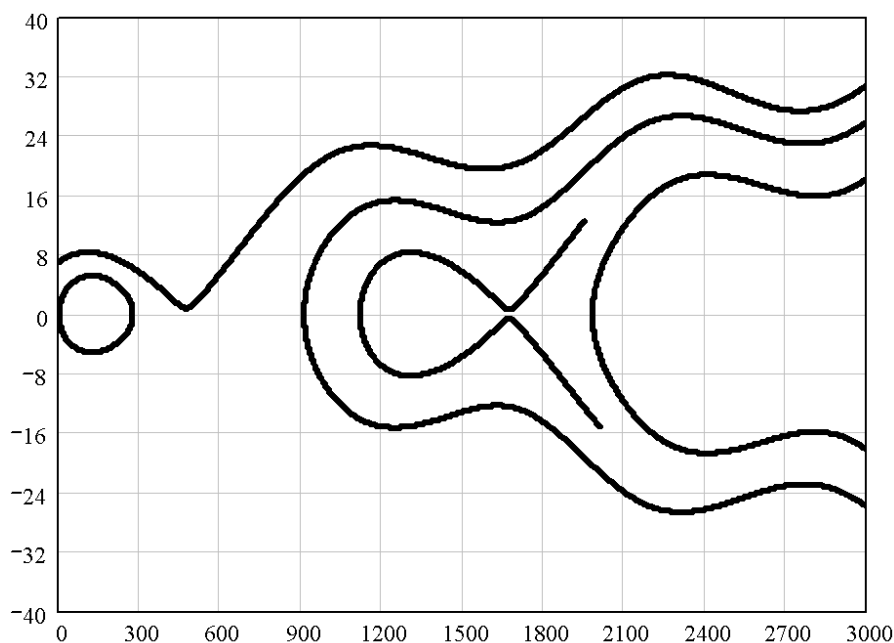


Рис. 3. Фазовые траектории колеса при $M_K \leq M_K^{KP}$

Проведенный численный анализ системы уравнений (18) позволил выявить качественную картину бифуркационной диаграммы рис. 4.

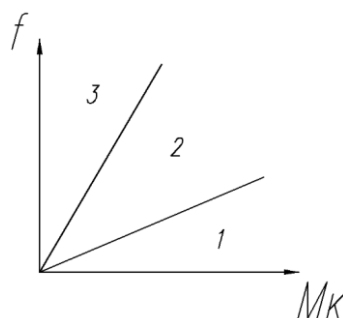


Рис. 4. Диаграмма параметров бифуркации

На диаграмме рис. 4 показаны три зоны с качественно различной топологической структурой фазового пространства.

1. При крутящем моменте, не превышающем критическое значение $M_K \leq M_K^{KP}$, имеют место осцилляционные движения колесного движителя; при превышении величины крутящего момента критического значения происходит движение колесного движителя.
2. В случае, если $M_K \leq M_K^{KP}$, возможно движение колесного движителя при начальном значении V_0 , превышающем критическое.
3. В области критических значений параметров наблюдаются солитонные решения.
4. В процессе качения колесного движителя по дороге с неровным профилем возможно чередование режимов качения.

Библиографический список

1. Шухман, С.Б. Теория силового привода колес автомобилей высокой проходимости / С.Б. Шухман, В.И. Соловьев, Е.И. Прочко; под общ. ред. С.Б. Шухмана. – М.: Агробизнесцентр, 2007. – 336 с.

2. **Кравец, В.Н.** Теория движения автомобиля: учебник / В.Н. Кравец. – Нижний Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2014. – 697 с.

*Дата поступления
в редакцию: 09.10.2018*

P.E. Dmitriev¹, S.E. Manyanin¹, Y.I. Palutin², A.S. Slusarev³

**TO DETERMINATION OF TORQUE DYNAMIC LOADS,
ACTING IN TRANSMISSION WHILE THE MOVEMENT
OF THE WHEELS ON THE UNHE ROAD**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev ¹
Nizhny Novgorod state agricultural academy²
Volga state university of water transport³

Purpose: The article presents the equations of motion without slipping of an absolutely rigid wheel along an absolutely rigid road with an uneven profile; provides a method for constructing the function of the vertical profile of the road; The analysis of solutions of the nonlinear differential equation of motion of the wheel is performed.

Design/methodology/approach: Technical and operational properties of the vehicle are limited by the conditions of interaction of the wheel propulsion with the road. Therefore, one of the priority tasks to improve the efficiency of the use of motor vehicles is the improvement of the propulsion-soil system.

Findings: In the region of critical values of the parameters, soliton solutions are observed/

In the process of rolling wheel propulsion on the road with a rough profile, it is possible alternation of rolling modes.

Research limitations/implications: Existing theories do not provide the required explanatory and predictive functions, so the task of building a dynamic model of rolling of a wheel drive on a rough road and solving it in an analytical form is relevant.

Originality/value: As a rule, road irregularities are simulated by a sinusoidal law, but in this case, the use of such a curve is not convenient, since its natural equation is not expressed in elementary functions.

Key words: vehicle technical and operational properties, wheel propulsion, dynamic rolling model, torque, propulsion-soil system.