УДК 512

С.В. Лещева, Н.В. Юрова

О КЛАССАХ СОПРЯЖЕННОСТИ В ГРУППЕ ${}^3D_4(q)$

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Данная статья является очередным шагом в решении проблемы, согласно которой неединичный класс сопряженности в конечной простой неабелевой группе содержит коммутирующие элементы. Ранее это утверждение было проверено для спорадических, проективных $L_n(q)$ и знакопеременных групп A_n, а также для групп Ри ${}^2G_2(q)$ и Сузуки ${}^2B_2(q)$. Ряд серий простых конечных групп остается непроверенным, среди которых имеются ортогональные $O_{2n+1}(q)$, $O_{2n}(q)^{\pm}$, унитарные $U_n(q)$ и симлектические $Sp_{2n}(q)$. В этой работе для одной из исключительных серий конечных простых групп ${}^3D_4(q)$ проверяется справедливость выше упомянутого утверждения.

Ключевые слова: группа Шевалле, классы сопряженности, конечная простая группа, коммутирующие элементы, централизатор.

Проблема, частный случай которой рассматривается в данной статье, состоит в следующем: в простой конечной (не циклической) группе неединичный класс сопряженности содержит коммутирующие элементы. Гипотеза о наличии коммутирующих элементов возникла при изучении так называемой теории конечных леводистрибутивных квазигрупп, при исследовании бинарных систем $G(\circ)$ с тождеством левой дистрибутивности (1):

$$x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ(x\circ z) \text{ для } x,\ y,\ z\in G(\circ). \quad (1)$$

Привлекательность тождества левой дистрибутивности состоит в том, что в бинарной системе $G(\circ)$ с ним отображение $L_a=(x\to a\circ x)$ есть, очевидно, эндоморфизм, а если $G(\circ)$ квазигруппа, то даже и автоморфизм. Данное направление основательно изучено в работе [1]. Описание всех конечных простых групп всегда было одной из главных целей математиков, работающих в теории групп. Одним из крупнейших достижений в теории групп является классификация простых конечных групп [2]. Согласно которой, любая конечная простая группа либо изоморфна одной из 26 так называемых спорадических групп, либо принадлежит одному из следующих трех семейств.

1. Циклические группы простого порядка Z_p (единственные простые группы, являющиеся абелевыми).
2. Знакопеременные группы A_n перестановок не менее 5 элементов.
3. Простые группы типа Ли, а именно:

а) классические группы Ли над конечным полем, а именно, группы Шевалле (линейная $L_n(q)$, симплектическая $SP_{2n}(q)$, ортогональная $O_n(q)$ и унитарная группы $U_n(q)$);

б) исключительные и скрученные формы групп типа Ли (включая группу Титса).

В фундаментальной работе В.М. Галкина, Л.Н. Ерофеевой, С.В. Лещевой гипотеза проверяется для спорадических, проективных $L_n(q)$ и знакопеременных групп A_n [3]. Проверка гипотезы о существовании коммутирующих элементов в произвольной конечной простой неабелевой группе для исключительной группы $G_2(q)$ и скрученных групп Ри ${}^2G_2(q)$ и

Сузуки ${}^2B_2(q)$ изложена в трудах [4] и [5] соответственно. В статье [6] это же утверждение проверено для симплектической группы $SP_4(q)$.

В исследовании наибольшую трудность представляет рассмотрение множества вариантов, возникающих при индуктивном подходе. Проблема сводится к исследованию групп небольшой размерности. Исключительные группы трудны тем, что они не допускают «хороших» матричных представлений. В частности, это касается и группы ${}^3D_4(q)$, которая замечательна и сама по себе. Она получается так называемым «скручиванием» из ортогональной группы $O_8(q)$, которая обладает специфическим автоморфизмом «тройственности», отличающим эту группу от всех остальных.

Приведем необходимые для дальнейшего некоторые определения и обозначения.

1. Представление групп Шевалле с помощью образующих и соотношений [7].

Пусть V – евклидово пространство со скалярным произведением (α,β), определенным обычным образом.

Подмножество $\Sigma \subset V$ называется системой корней в пространстве V, если выполнены следующие условия:

а) Σ – конечное множество, порождающее пространство V и не содержащее нулевого вектора;

б) для любого вектора $a \in \Sigma \Rightarrow -a \in \Sigma$ и $na \notin \Sigma$, для $n \in Z$, $n \neq \pm 1$;

в) $\langle \alpha,\beta \rangle = 2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) \in Z$ для $\forall\ \alpha,\beta \in \Sigma$ ($\langle \alpha,\beta \rangle$ называется числом Картана);

г) Σ инвариантно относительно всех отражений w_α ($\alpha \in \Sigma$), w_α – отражение относительно гиперплоскости, ортогональной к α, т.е. $w_\alpha v = v - \dfrac{2(v,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

Группа W, порожденная всеми отражениями w_α, является конечной группой и называется группой Вейля. Группы Шевалле связаны с диаграммами Дынкина из теории простых комплексных алгебр Ли.

Подмножество $\Theta \subset \Sigma$ называется базисом системы Σ, если Θ – базис векторного пространства V и все корни $\beta \in \Sigma$ записываются в виде линейных комбинаций $\beta = \sum_{\alpha\in\Theta} m_\alpha \alpha$ с целыми коэффициентами m_α, имеющими один и тот же знак (то есть все $m_\alpha \geq 0$ или все $m_\alpha \leq 0$). Вместо слова «базис» также используется термин система простых корней, а элементы множества Θ называют простыми корнями. Известно [7], что для всякой системы корней существует базис. В диаграмме (схеме) Дынкина простые корни служат вершинами графа, в котором две вершины α и β соединены ($\langle \alpha,\beta \rangle$ $\langle \beta,\alpha \rangle$) ребрами. Каждая диаграмма Дынкина определяет систему корней соответствующей группы Шевалле с точностью до изоморфизма. Верно и обратное. Построенная таким образом универсальная группа Шевалле может иметь центр. Простые группы получаются факторизацией по нему. Описание центра можно найти в [7].

2. Пусть V – конечномерное векторное пространство над конечным полем $k = F_q$. Для построения ортогональной группы $O_n(q)$ используется невырожденная симметричная форма (x, y). Эта конструкция, правда, пригодна лишь при нечетном q. В общем случае исходным объектом является квадратичная форма $Q(x)$, то есть квадратичная форма координат вектора $x \in V$ в фиксированном базисе. В нечетной характеристике $Q(x) = \dfrac{1}{2}(x, x)$, но при четном q получить $Q(x)$ из билинейной формы нельзя. Это обстоятельство создает дополнительные трудности при работе с ортогональными группами в характеристике 2.

Предполагая q четным, вводим форму (x, y) равенством (2):

$$(x, y) = Q(x + y) + Q(x) + Q(y)\,. \tag{2}$$

Она оказывается билинейной, причем $(x, x) = 0$.

В случае $\dim V = 2n$ требуем невырожденности этой билинейной формы (то есть она должна быть симплектической). Будем в этом случае говорить о невырожденности формы $Q(x)$.

Если же $\dim V = 2n + 1$, то форма (x, y) заведомо вырождена. Требуется, чтобы эта вырожденность была «минимальной». Именно, чтобы вектора a с $(a, x) = 0$ для $\forall x \in V$ (ортогональные к x) образовывали одномерное пространство $V^{\perp} \subset V$, кроме того, чтобы ограничение $Q(x)$ на $V^{\perp}$ было ненулевым. При выполнении этих условий $Q(x)$ будем считать невырожденной. Общая ортогональная группа это подгруппа в $L_n(q)$ ($n = \dim V$) преобразований, сохраняющих невырожденную квадратичную форму $Q(x)$.

Ортогональная группа O_8^+ выделяется из остальных ортогональных групп наличием внешнего автоморфизма третьего порядка. Это обстоятельство обеспечивает существование группы ${}^3D_4(q)$ из заголовка.

Для описания этого автоморфизма удобно рассматривать группу O_8^+ как группу Шевалле, построенную по графу Дынкина (рис. 1).

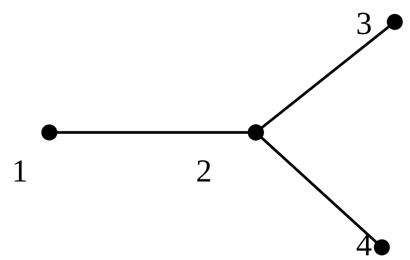

Рис. 1. Группа Шевалле, построенная по графу Дынкина

Вершины (корни) 1,2,3,4 этого графа являются векторами из евклидового пространства R^4 с ортонормированным базасом e_1, e_2, e_3, e_4. Так,

$$1 = e_1 - e_2,$$

$$2 = e_2 - e_3,$$

$$3 = e_3 - e_4,$$

$$4 = e_3 + e_4.$$

Другие корни имеют вид (3):

$$\pm e_i \pm e_j \; (i, j = 1, 2, 3, 4,\; i \neq j). \tag{3}$$

Они являются целочисленными комбинациями корней 1, 2, 3, 4. Например, максимальный положительный корень $e_1 + e_2 = 1 + 2^2 + 3 + 4$, где 2^2 означает, что корень 2 входит в линейную комбинацию дважды.

Группа O_8^+ или в стандартных обозначениях групп Шевалле D_4 строится над полем k образующими $x_\alpha(t)$, $t \in k$, $\alpha -$ корень, известный соотношениями [7]. В частности, корневая подгруппа $x_\alpha(t)$ подчиняется соотношению (4):

$$x_\alpha(t + u) = x_\alpha(t) x_\alpha(u), \tag{4}$$

а так называемые картановские элементы $h_\alpha(t)$ с параметром $t \neq 0$ мультипликативные по аргументу t.

Перестановка вершин $1 \to 3 \to 4 \to 1,\ 2 \to 2$ в графе Дынкина индуцирует перестановку корневых подгрупп $x_\alpha(t)$, осуществляющую нужный внешний автоморфизм третьего порядка φ группы D_4.

Выбирая в качестве поля k конечное поле F_{q^3} из q^3 элементов, определяем «скручивание» в D_4 как автоморфизм, переводящий $x_a(t)$ в $x_{\varphi(\alpha)}(t^q)$. Здесь $\varphi \to \varphi(\alpha)$ указанная выше перестановка корней с помощью «графового» автоморфизма. Подгруппа неподвижных элементов в D_4 построенного автоморфизма «скручивания» и есть группа ${}^3D_4(q)$ или группа Стейнберга. Эта группа оказывается простой.

Необходимые структурные результаты о группе ${}^3D_4(q)$ можно найти в [8-12], хотя не все результаты из этих статей снабжены доказательствами. Соответствующие сведения будут далее приводиться в процессе доказательства основного результата этой статьи.

Теорема. *Неединичный класс сопряженности в группе ${}^3D_4(q)$ содержит коммутирующие элементы.*

Доказательство

Доказательство разбивается на три этапа соответственно трем типам элементов: полупростым, унипотентным и смешанным. Каждый класс сопряженности, не считая единичного, состоит из элементов только одного из отмеченных типов.

Полупростые классы

Полупростой элемент содержится в некоторой абелевой подгруппе, называемой максимальным тором. С точностью до сопряженности (правда, иногда с использованием расширения основного поля) максимальный тор вкладывается в картановскую подгруппу

$$H = < h_\alpha(t) >,$$

в которой каждый элемент имеет вид

$$h = h_1(t_1)h_2(t_2)h_3(t_3)h_4(t_4).$$

Следующая таблица, взятая из [8] дает информацию о классах максимальных торов.

Таблица 1

Классы максимальных торов

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
$Z_{q^3-1} \times Z_{q-1}$	$Z_{(q^3-1)(q-1)}$	$Z_{(q^3+1)(q-1)}$	$Z_{q^2+q+1} \times Z_{q^2-q+1}$	$Z^2{}_{q^2-q+1}$	$Z^2{}_{q^4-q^2+1}$	$Z_{q^3+1} \times Z_{q+1}$
D_{12}	$Z_2 \times Z_2$	$Z_2 \times Z_2$	$SL_2(3)$	$SL_2(3)$	Z_4	D_{12}

В первой строчке табл. 1 перечисляются все семь классов $T_i (i = 0,...,6)$ максимальных торов.

Во второй указывается строение каждого тора. Символ Z_n здесь означает циклическую группу порядка n, а $Z^2 = Z \times Z$.

В третьей строчке указывается нормализатор тора в группе ${}^3D_4(q)$, точнее фактор-группа $N(T)/T$ нормализатора $N(T)$ по группе T.

Здесь следует привести некоторые пояснения. Фактор-группа $N(T)/T$ служит так называемой группой Вейля тора T. Ее элементами являются элементы группы Вейля W для группы D_4, составленные из произведений элементов вида w_α, где

$$w_\alpha h_\beta(t) w_\alpha^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(t).$$

Корень $w_\alpha(\beta)$ является результатом «отображения» β от α:

$$w_\alpha(\beta) = \beta - (\alpha,\beta)\alpha^n,$$

где (α,β) – скалярное произведение в R^4.

В группе Вейля $W(T)$ тора включаются лишь те элементы W, которые оставляют инвариантной группу ${}^3D_4(q)$. Во всех группах $W(T)$ есть элемент, который переводит при вложении T в картановскую подгруппу H элемент $h_\alpha(t)$ в $h_{-\alpha}(t)$. Таковым является произведение отражений от четырех взаимно перпендикулярных корней, например 1, 3, 4 и 1+2+3+4. Но $h_{-\alpha}(t)h_\alpha(t)$ централизует каждую корневую подгруппу в силу соотношения R_8 [7, С. 32]:

$$h_\alpha(t) x_\beta(u) h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta\left(t^{(\beta,\alpha)}u\right).$$

Поскольку группа ${}^3D_4(q)$ проста, то

$$h_{-\alpha}(t) = (h_\alpha(t))^{-1}$$

элементы торов сопряжены со своими обратными.

Это доказывает часть теоремы в случае, если элемент x тора T не является инволюцией. Если же $x^2 = 1$, что для полупростого элемента включает нечетность q, то здесь можно сослаться на результат Л. Н. Ерофеевой [3], по которому в любой простой группе класс инволюций содержит коммутирующие элементы.

В прочем, можно дать и непосредственное доказательство, которое мы опустим. Этим рассмотрение полупростых элементов закончено.

Унипотентные элементы

В табл. 2 дается информация о классах унипотентных элементов в ${}^3D_4(q)$, взятые из [9, 10].

Таблица 2

Классы унипотентных элементов

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6 (q - неч.)	u_7 (q - чет.)	u_8 (q - чет.)
$q^{12}(q^6-1)$	$q^{10}(q^2-1)$	$2q^8(q^2+q+1)$	$2q^8(q^2-q+1)$	q^6	q^4	$2q^4$	$2q^4$

В первой строке табл. 2 перенумерованы классы унипотентов, а во второй указаны порядки централизаторов этих классов. Ни в [9], ни в [10] не указаны представители классов. Их можно найти в [11], но только для нечетного q.

Поскольку для нечетного q все централизаторы имеют разные порядки, то каждый унипотент сопряжен со своим обратным. Инволюции здесь исключаются, а поэтому случай нечетного q рассмотрен.

При четном q некоторую трудность вызывает исследование классов u_7 и u_8. Утомительные выкладки с использованием разложения Брюа дают следующую картину:

1. Классы u_1 и u_2 это классы инволюций с представителями $x_2(1)$ и $x_1(1)x_3(1)x_4(1)$, каковые появляются и в нечетной характеристике.
2. Классы u_3, u_4, u_5 содержат элементы четвертого порядка, а потому элемент каждого из этих классов сопряжен со своим обратным.
3. Классы u_7, u_8 состоят из элементов восьмого порядка. Если x элемент из этих классов, то из четырех элементов x, x^3, x^5, x^7 (их централизаторы имеют тот же порядок $2q^4$) по крайней мере, два попадают в один класс. Перебор всех вариантов показывает, что x сопряжен с одним из трех оставшихся степеней. Например, если $x^3 \sim x^5$, то $x^9 = x \sim x^{15} = x^{-1}$. Инволютивные классы u_1 и u_2 можно исключить опять же с помощью теоремы, рассмотренной в работе [3].

Смешанные элементы

Как известно, смешанный элемент x разлагает в произведение коммутирующих множителей

$$x = su,$$

где s – полупрост, а u – унипотент. Унипотент u лежит в централизаторе $C(s)$ полупростой части x. В табл. 3 приводится информация о s, u и $C(s)$, взятая из [10, 8].

Таблица 3

Взаимосвязь s, u и $C(s)$

s	u	$C(s)$	
s_2	u_1, u_2, u_3, u_4	$(SL_2(q^3) \circ SL_2(q)) \cdot Z_2$	q нечетно
s_3	u_2	$(SL_2(q^3) \circ Z_{q-1}) \cdot d$	$q \geq 4$
s_4	u_1, u_3	$(Z_{q^2+q+1} \circ SL_2(q)) \cdot f^+$	
s_5	u_1	$(SL_2(q^3) \circ Z_{q+1}) \cdot d$	$q \geq 3$
s_7	u_2	$(Z_{q^3-1} \circ SL_2(q)) \cdot d$	
s_9	u_1, u_4	$(Z_{q^2-q+1} \circ SU_3(q)) \cdot f^-$	
s_{10}	u_1	$(Z_{q^3+1} \circ SL_2(q)) \cdot d$	

Здесь

$$d = Z_{(2,q-1)}, \quad f\pm = Z_{(3,q^2 \pm q+1)}.$$

Символы $A \circ B$ и $A \cdot B$ означают центральное произведение групп A и B и A расширение с помощью B. Унипотентная части $x = su$ лежат в подгруппах централизаторов типа $SL_2(q^3) \circ SL_2(q)$ и т.д. Поэтому достаточно проверять наличие коммутирующего с x сопряженного с ним элемента в таких группах. Для этого используем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $J \lhd G$ *– центральный нормальный делитель в группе, p – простое и* $(p, J) = 1$. *Если p – элемент сопряжены* $u, v \in G$ *и коммутируют в факторгруппе* G/J, *то они коммутируют и в* G.

Доказательство

Имеем

$$xy = yxc,\ c \in J.$$

Отсюда следует, что

$$x^m y = yx^m c^m.$$

Если взять $m = p^k$ такое, что $x^m = 1, c^m = 1$ и $c = 1,$ т.к. $|J|$ не делится на *p*.

Возвращаясь к смешанному элементу $x = su,$ имеем, согласно результатам из [3], что унипотент u коммутирует с некоторым сопряженным в группах $L_2(q^3), L_3(q)$ и по выше сформулированной лемме также в $SL_2(q^3)$ и $SL_3(q)$. По лемме сопряженность и коммутируемость имеет место и в $C(x)$. Наконец, и u можно заменить на su, что не меняет заключения.

Рассуждения же проходят при $s = s_7$ и $s = s_{10}$.

Во втором случае $SL_2(q)$ разрешима при $q = 2,$ но это препятствие легко преодолевается просмотром классов сопряженных элементов группы ${}^3D_4(2)$ в Атласе [13].

Случай s_7 сводится к установлению наличия коммутирующих элементов в группе $SU_3(q)$. В действительности это так, но, избегая длинных выкладок, приведем идею проверки.

Если выбрать базис e_1, e_2, e_3 в трехмерном пространстве *V* над полем F_{q^2} и построить унитарную метрику следующим образом:

$$(e_1; e_1) = (e_2; e_2) = 0,$$
$$(e_1; e_2) = (e_3; e_3) = 1,$$
$$e_3 \perp e_1, e_2,$$

то унипотенты опишутся матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}, a, b \in F_{q^2}, \bar{b} = b^q.$$

Они составляют абелеву группу – силовскую подгруппу $SU_3(q)$. Сопряжения подходящими картановскими (диагональными) элементами и приводит к доказательству утверждения.

Таким образом, рассмотрение смешанных элементов закончено.

Библиографический список

1. **Ерофеева, Л.Н.** L-группоиды / Л.Н. Ерофеева. − дисс. канд. физ.-мат. наук. – СПб, 2004. – 10 с.
2. **Горенстейн, Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985, – 352 с.
3. **Галкин, В.М.** Коммутирующие элементы в классе сопряженности / В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 8. – С. 12-20.
4. **Ерофеева, Л.Н.** О простой группе Ри ${}^2G_2(q)$ / Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева, Н.В. Мохнина, Н.В. Юрова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2017. – № 3(118). – С. 24-27.
5. **Галкин, В.М.** Коммутирующие элементы в классах сопряженности в группе Сузуки ${}^2B_2(q)$ / В.М. Галкин, Н.В. Мохнина, Н.В. Юрова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2017. – № 3(119). – С. 45-49.
6. **Юрова, Н.В.** О классах сопряженности в симплектической группе $SP_4(q)$ // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2018. – № 4(123). – С. 56-60.
7. **Стейнберг, Р.** Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975, – 263 с.
8. **Kleidman, Peter B.** The Maximal Supgroups of the Steinberg Triality Groups ${}^3D_4(q)$ and of their automorphism groups / Peter B. Kleidman // Journal of Algebra, 1988. – P. 182-199.
9. **Spaltenstein, N.** Caracters unipotes de ${}^3D_4(q)(F_q)$ / N. Spaltenstein // Comment. Maht. helvetici, 1982. – P. 676-691.
10. **Derisiotis, D.I.** Character table and blocks of finite simple Triality groups ${}^3D_4(q)$ / D.I. Derisiotis, G.O. Michler // Trausactious of the Amer. Maht. Soc., 1987. – P. 39-49.
11. **Himstedt, F.** Character tablos of parabolic Subgroups of Steinberg Triality Groups / F Himstedt // Tech. Univ. Munchen. F. Math. Report TUM M 0407, 2004.
12. **Лещева, С.В.** О φ-структуре на группе ${}^3D_4(q)$ / С.В. Лещева, О.В. Суворова // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 19-22.
13. **Conway, I.H.** Atlas of finite Groups / I.H. Conway. – Oxford, 1965, – 252 p.

Дата поступления
в редакцию: 21.02.2019

S.V. Leshcheva, N.V. Yurova

ON CONJUGACY CLASSES OF THE GROUP ${}^3D_4(q)$

Nizhny Novgorod state technical university n. a. R. E. Alekseev

Purpose: There is the conjecture that every conjugacy class of finite simply group contains the commuting elements. The conjecture for the group ${}^3D_4(q)$ is verified.

Design/methodology/approach: Information on the conjugacy classes of ${}^3D_4(q)$ is using.

Findings: This result is a stage of the testing of the general conjecture.
Research limitations/implications: Methods of this paper may be used for the investigation the other groups.
Originality/value: The result is new.

Keywords: chevalley groups, conjugacy classes, finite simple group, commuting elements.