

УДК 519.688

DOI: 10.46960/1810-210X_2020_4_35

Н.В. Тарасова

**ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ВСПЛЫТИЯ ТВЕРДЫХ СФЕР И ВОЗДУШНЫХ ПУЗЫРЬКОВ**Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики

Дано подробное описание моделей, используемых для численного моделирования всплытия одиночных твердых сфер и воздушных пузырьков, приведены их особенности. Осуществляется анализ точности применяемых методов, проводятся исследования на сеточную сходимость и сеточную диффузию для задач всплытия одиночного пузырька воздуха или одиночной твердой сферы. Определяется оптимальный размер счетной области и оценивается точность приближения величин на интерфейсах перекрывающихся сеток. Целью исследования является анализ точности и доказательства достоверности получаемых с помощью такого подхода результатов.

Ключевые слова: неструктурированные сетки, сетки типа «Химера», сеточная сходимость, численная диссипация, метод интерполяции.

Введение

На протяжении последних десятилетий значительное внимание уделяется изучению движения одиночных пузырьков и твердых сфер в жидкости в поле силы тяжести [1-6]. Широкое поле исследований связано с многообразием режимов движения и большим диапазоном изменения возможных характерных параметров. Такие работы интересны как с точки зрения фундаментальной науки, так и в рамках начального базового этапа исследований для дальнейшего практического применения. Пузырьковые течения играют основную роль в процессах кавитации, барботажа, флотации полезных ископаемых, седиментации и др. Движение твердых частиц (в том числе, и сфер) является классической задачей механики сплошных сред с приложением к различным природным явлениям и техническим процессам (например, движение катализатора в химических реакторах, осаждение или восхождение дисперсных частиц в атмосфере, секвестирование углерода и т.д.)

В связи с трудностью создания идеальных условий и осуществления точных измерений в натурных экспериментах и одновременным наращиванием вычислительных мощностей и развитием численных методов в последние годы наиболее распространенным инструментом исследований становится численное моделирование. Оно позволяет проводить всесторонний анализ явлений, обеспечивает детальную визуализацию, дает возможность проводить точные измерения без затрат на оборудование.

Наращивание вычислительных мощностей в последние годы позволило применять новые более точные численные методы. В частности, всплытие одиночного пузырька воздуха или твердой сферы можно смоделировать в обозримые сроки с помощью методов прямого численного моделирования. Такой подход заключается в решении системы уравнений Навье-Стокса, записанной для двухфазной среды в трехмерной постановке, с учетом модели поверхностного натяжения [2, 7]. Для отслеживания межфазной границы используется объемный метод VOF [7, 8]. В этом случае, в отличие от феноменологических моделей взаимодействующих континуумов, в которых применяются эмпирические зависимости, взаимодействие фаз на интерфейсах учитывается автоматически в процессе решения.

При применении метода конечных объемов для дискретизации требуется подробное сеточное разрешение в окрестности межфазной границы. Поскольку размеры пузырька и сферы малы по сравнению с необходимой для исследования длиной пробега, для обеспече-

ния достаточного сеточного разрешения и экономии вычислительных ресурсов приходится применять специальные подходы: например, использование подвижных расчетных областей, или сеток с перекрытиями [9]. Особенностью применяемой модели также является учет члена поверхностного натяжения в уравнении сохранения импульсов. Будучи сингулярным, он является потенциальным источником дополнительной неустойчивости при взаимодействии сред с большой разницей в плотности [10]. Важнейшим этапом для установления точности, достоверности и приемлемости применяемых методов для любой модели является валидация. В работах [11-13] были представлены результаты численного моделирования всплытия одиночных пузырьков воздуха и твердых сфер диаметром от 1 до 20 мм в воде. Особое внимание уделялось изучению локальных физических характеристик процесса движения.

В данной работе подробно описываются используемые при моделировании модели и их особенности. Осуществляется анализ точности применяемых методов, проводятся исследования на сеточную сходимость и сеточную диффузию для задач всплытия одиночного пузырька воздуха или одиночной твердой сферы. Определяется оптимальный размер счетной области и оценивается точность приближения величин на интерфейсах перекрывающихся сеток. Все эти исследования позволяют убедиться в достоверности получаемых с помощью такого подхода результатов при решении задач о всплытии одиночных твердых сфер и пузырьков.

Физико-математическая модель и численные методы

Для численного исследования всплытия одиночных пузырьков и твердых сфер решается система уравнений Навье-Стокса [14, 15], дополненная уравнениями переноса объемной доли. Данная система в консервативной форме, в декартовых координатах, имеет вид (1):

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho\vec{g} + \int_S \sigma'_i n' \delta(x-x') dS, \\ \frac{\partial\alpha_i}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(2s_{ij} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right), \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь ρ , \vec{u} , p , t – плотность, скорость, давление и время, соответственно, \mathbf{T} – тензор вязких напряжений, \vec{g} – вектор ускорения свободного падения, μ – ламинарная вязкость. α_i – концентрация i -го вещества, σ – коэффициент поверхностного натяжения, которые появляются в случае рассмотрения всплытия газообразных пузырьков.

Предполагается, что фазы несжимаемы. Последний член в правой части уравнения сохранения импульса описывает действие сил поверхностного натяжения. В качестве дискретной модели для реализации этих сил используется модель непрерывной поверхностной силы (CFS) [10]. В этой модели эффект поверхностного натяжения рассматривается как дополнительная объемная сила, сконцентрированная на интерфейсе: $\int_{S(t)} \sigma'_i n' \delta(x-x') dS \approx \sigma k \nabla \alpha_i$,

Кривизна поверхности вычисляется на основе локальных градиентов в поверхности по нормали к интерфейсу: $k = -\nabla \cdot (\nabla \alpha_i / |\nabla \alpha_i|)$. Тангенциальной компонентой силы пренебрегают. Коэффициент поверхностного натяжения σ вдоль поверхности раздела фаз не меняется.

В случае всплытия воздушного пузырька для возможности проведения расчетов в трехмерной постановке в обозримые сроки даже с использованием суперкомпьютерных мощностей (сотни вычислительных ядер) в условиях подробного сеточного разрешения при-

ходится использовать подвижную область. Пузырек окружается сеткой, которая движется вместе с ним в соответствии с движением центра масс пузырька. На границах подвижной области задаются граничные условия, обеспечивающие свободное протекание потока воды. При этом исходные уравнения модифицируются согласно следующему дифференциальному

$$\text{тождеству: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \varphi dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_{\partial \Omega(t)/\partial t} \varphi \dot{x} \cdot \vec{n} dS,$$

где $\varphi = \rho, \rho u, \alpha_i$, \dot{x} – скорости перемещения центра масс пузырька.

Для описания движения твердой сферы в жидкости используется модель твердого тела (2):

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad \sum_{i=1}^P \vec{M}_i = T \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times T \vec{\omega} \quad (2)$$

здесь m – масса твёрдого тела, \vec{F}_i – сила, действующая на тело, \vec{V} – скорость поступательного движения, \vec{M}_i – момент, действующий на тело, $\vec{\omega}$ – угловая скорость, T – тензор моментов инерции.

При этом множество \vec{F}_i включает в себя как внешние силы, так и внутренние гидродинамические силы, определяемые самой системой жидкость/твердое тело. В качестве внешней силы выступает сила тяжести. Равнодействующая гидродинамических сил вычисляется на каждом расчетном шаге в процессе решения и включает силу давления (F_p) и силу трения (F_τ) (3):

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_\tau, \quad \vec{F}_p = \int p \vec{n} dS, \quad \vec{F}_\tau = \int \mu \frac{\partial u_\tau}{\partial n} dS, \quad (3)$$

здесь \vec{n} – внешняя нормаль к грани, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, u_τ – тангенциальная компонента скорости, V – объем ячейки интегрирования, S – площадь грани.

Дискретизация системы уравнений (1) осуществляется методом конечных объемов на произвольной неструктурированной сетке, а для её численного решения используется полностью неявный метод [16], основанный на известном алгоритме SIMPLE [14].

Для численного решения методом конечных объемов уравнения переноса величин, входящие в (1), записывают в общей интегральной форме [14, 17] (4):

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \varphi dV + \oint_S \rho \varphi \vec{u} \vec{n} dS = \oint_S \Gamma_\varphi \vec{n} \nabla \varphi dS + \int_V \Phi dV \quad (4)$$

здесь φ – немая переменная, Γ_φ – коэффициент диффузии или вязкости, или 0 (в случае уравнения непрерывности), Φ – источниковый член, V – контрольный объем, S – поверхность контрольного объема, \vec{n} – нормаль к поверхности.

Значения всех переменных хранятся в центрах контрольных объемов. Одним из ключевых моментов является нахождение значения произвольной величины φ_f на грани f , используя значения в центрах соседних ячеек φ_P и φ_N . Способ вычисления величины на грани определяется выбором соответствующей конвективной схемы [14, 15]. В данной работе при проведении численных экспериментов в основном используются три схемы: UD (противопоточная схема первого порядка), LUD (противопоточная градиентная схема с линейной интерполяцией второго порядка точности) и CD (центрально-разностная схема второго порядка точности) [17].

Простейшей конвективной схемой является противопотоковая схема первого порядка точности UD (Upwind Differencing). Эта схема устойчива на неструктурированных сетках, но обладает большой численной диффузией. Схема LUD подобна схеме UD, но

дополнительно использует реконструкцию величины на грань с линейной интерполяцией. Схема CD (второго порядка точности) обладает наименьшей диссипативной ошибкой, однако неустойчива, и при наличии больших градиентов использование схемы приводит к осцилляциям в поле решения [14,17].

Альтернативой использования вышеперечисленных схем является гибридная схема (схема смешанного дифференцирования), представляющая собой комбинацию устойчивой схемы UD и какой-либо схемы более высокого порядка точности [14, 18,19] (5):

$$\varphi_f = (1-\gamma)\varphi_f^{UD} + \gamma\varphi_f^{CD,LUD}, \quad (5)$$

где $0 \leq \gamma \leq 1$ - коэффициент смешения.

Для многофазных течений очень важно разрешать с нужной точностью окрестность межфазной границы, чтобы граница между фазами не размывалась. Для уменьшения влияния сеточной диффузии необходимо выбирать схемы и методы, обеспечивающие максимально четкое определение интерфейса между фазами. С этой целью для аппроксимации конвективного слагаемого уравнения переноса объемных долей используется схема M-CICSAM [20], относящаяся к классу сжимающих схем высокого разрешения и обеспечивающая сохранение минимально возможной толщины границы раздела сред, а также сохранение формы распределения объемных долей при параллельном переносе и вращении.

При рассмотрении всплытия пузырька воздуха в воде плотности сред воздух-вода различаются примерно в 1000 раз. Различные способы аппроксимации значений плотности на грани ячеек могут давать значения ρ_f , отличающиеся на порядки, оказывая сильное влияние на получаемое решение. Существуют специальные приемы [21, 22] для уменьшения численной неустойчивости, которая может возникнуть в данных случаях, и повышения качества расчетов. Дискретизация, основанная на записи уравнения сохранения импульса в полудивергентной форме, обеспечивает высокое качество решения и его малую чувствительность к способу вычисления плотности на гранях ячеек. Такой прием существенно стабилизирует итеративную процедуру численного решения. В таком случае система (1) записывается в следующем виде (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j \rho) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \alpha_k) = -\frac{\alpha_k}{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

Для описания движения твердой сферы используются технология «Химера» [9], подразумевающая построение независимых сеток для различных объектов с последующим объединением в одну общую сетку с перекрытиями. Вся область моделирования в этом случае заполнена «базовой» расчетной сеткой, на которую накладывается и по которой движется сетка, привязанная к твердой сфере. На каждом расчетном шаге эти сетки объединяются в одну общую сетку, представляющую область решения (рис. 1).

Результатом интегрирования уравнений (2) являются новые координаты центра тяжести сферы и новый угол поворота. На основе полученных данных вычисляются перемещение узлов, лежащих на поверхности сферы. Вместе со смещением узлов, принадлежащих поверхности твердого тела, происходит смещение всей сеточной области, привязанной к данной границе.

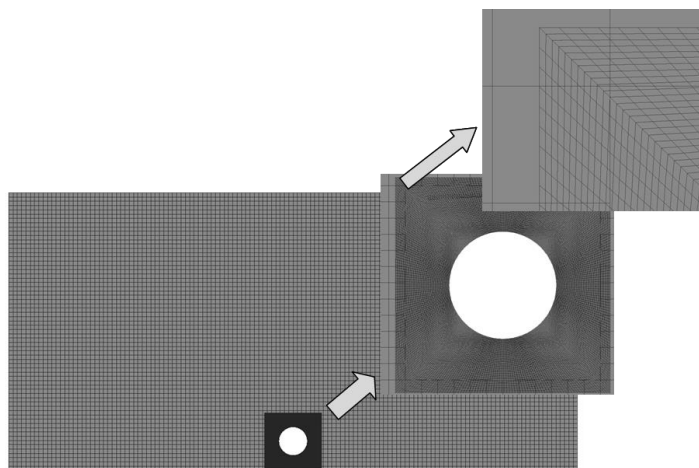


Рис. 1. Расчетная область с выделенной зоной для движущегося объекта

Взаимодействие сеток осуществляется посредством интерполяции величин с ячеек одной сетки на грани другой сетки в местах их наложения. Для этого строится интерполяционный шаблон, определяющий: 1) ячейки, исключенные из счета на данный момент, 2) ячейки доноры, расчетные поля которых используются для передачи информации на грани другой расчетной сетки и 3) грани акцепторы – интерфейсные грани, на которые передается информация с другой расчетной сетки.

Такой подход дает возможность использовать большие расчетные области. Базовая расчетная сетка может быть достаточно грубой, в то время как сетка, привязанная к твердой сфере, имеет более подробное сеточное разрешение. В этом случае нет необходимости в отслеживании границ твердого тела, оно происходит автоматически.

Описанная физико-математическая модель реализована в пакете программ ЛОГОС, предназначенном для решения трехмерных задач аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [23].

Постановка задачи

В случае всплытия одиночного пузырька рассматривается трехмерная область размерами от $2D$ до $10D$ по каждому пространственному направлению. На границах области задаются граничные условия, обеспечивающие свободное протекание жидкости. Во избежание размытия межфазной границы расчетный шаг выбирается таким образом, чтобы число Куранта составляло величину $CFL \approx 0.5$. Изначально жидкость считается покоящейся, а коэффициент поверхностного натяжения для воды равен 0.0727 Н/м. Начальное давление во всей области равно атмосферному.

При проведении расчетов на двумерной неподвижной сетке для тестирования границ применимости технологии движения сетки расчетная область представляет собой прямоугольник размерами $16D$ на $120D$ (D – диаметр пузырька). Пузырь задан не касающимся стенок, на расстоянии 5 мм от нижней стенки расчетной области. В случае движения твердой сферы внешняя расчетная область представляет собой параллелепипед размерами $20D \times 20D \times 100D$, размеры подвижного региона варьируются от $2D$ до $5D$. На поверхности твердой сферы ставится граничное условие «непроницаемая стенка».

Анализ точности, выбор оптимальных параметров моделирования

Сеточная сходимость

При использовании сеточных методов для моделирования процессов одним из ключевых этапов валидации является исследование сеточной сходимости. Принимая во внимание

изложенные выше особенности используемых моделей (моделирования многофазных сред, учета сил поверхностного натяжения), важно обеспечить достаточное сеточное разрешение, особенно в окрестности межфазной границы.

В случае воздушных пузырьков расчеты на сеточную сходимость проводились на последовательности двумерных неподвижных эйлеровых сгущающихся сеток для пузырька диаметром $d = 5$ мм. Рассматривалось 6 вариантов сеток: с разрешением $N=6, 10, 12, 14, 16$ и 20 ячеек на радиус пузырька. Фрагменты некоторых из них представлены на рис. 2.

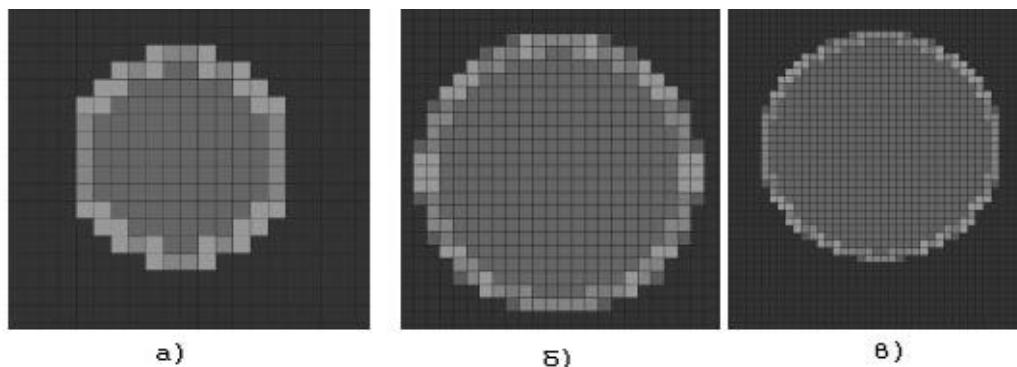


Рис. 2. Фрагменты расчетных сеток в окрестности пузыря:
а) 6 ячеек на радиус пузырька, б) 10 ячеек на радиус, в) 16 ячеек на радиус

Влияние сеточного разрешения на точность решения исследовалось на основе оценки средней скорости всплытия пузырька. Результаты анализа представлены на рис. 3, 4. На рис. 3 отражены графики зависимости средней скорости всплытия пузырька от времени, полученные на последовательности сгущающихся сеток; на рис. 4 – график установления средней скорости всплытия в зависимости от разрешения сетки.

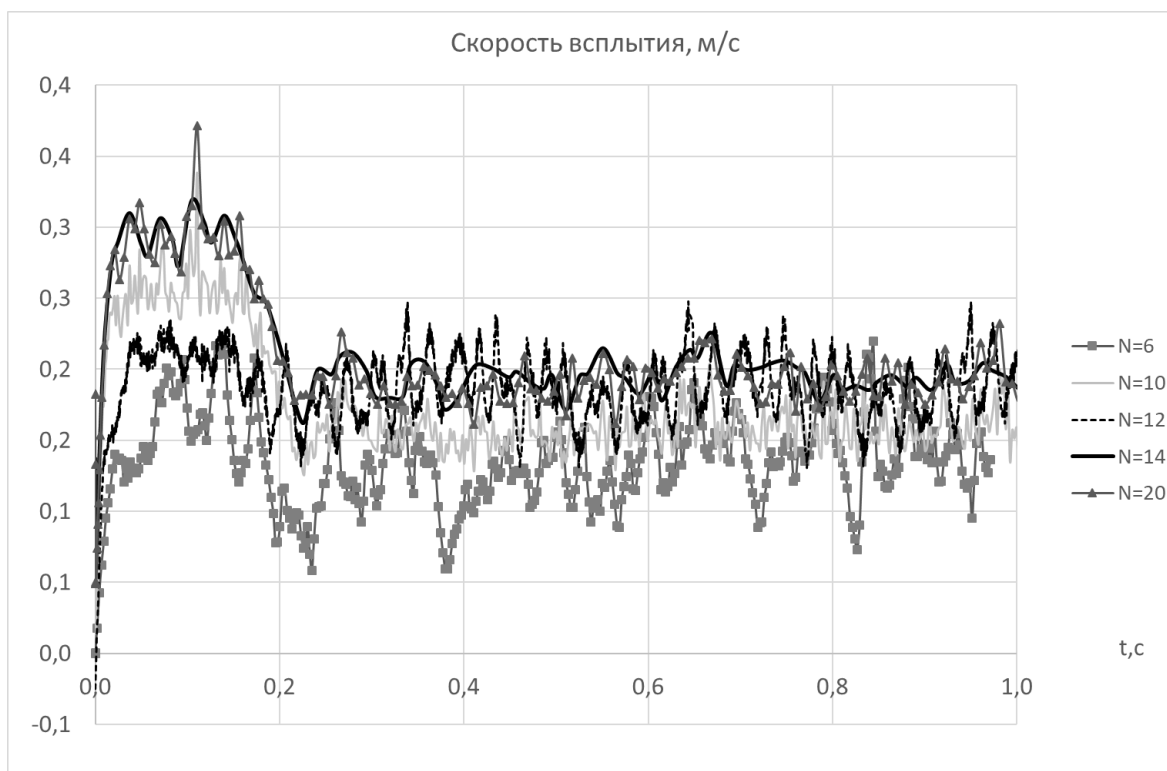


Рис. 3. Динамика изменения средней скорости всплытия пузырька на сетках с разным разрешением

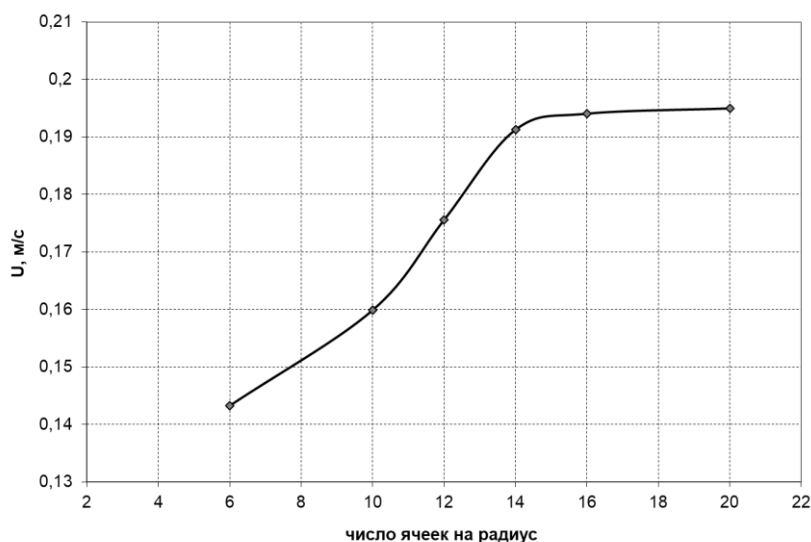


Рис. 4. Средняя скорость всплытия воздушного пузырька в зависимости от сеточного разрешения

Результаты установившегося решения сравнивались с результатами [7]. Видно, что сеточного разрешения 16 ячеек на радиус пузырька достаточно для достижения приемлемой точности. Следует заметить, что средняя скорость всплытия пузырька очень чувствительна к сеточному разрешению, пока оно не становится больше, чем 16 ячеек на радиус пузырька. Однако увеличение разрешения от 16 до 20 ячеек на радиус выражается в изменении средней скорости всплытия не более чем на 1 %. Целесообразно проводить расчеты на сетках с разрешением 16 ячеек на радиус пузырька.

Аналогичные исследования на сеточную сходимость были проведены и для твердых сфер. В условиях использования сеток с перекрытиями сеточное разрешение может быть грубым в областях, расположенных вдалеке от твердого тела, тогда как в его окрестности строится расчетная сетка с подробным разрешением. При этом особое внимание стоит уделять размерам подвижного региона, связанного с твердой сферой.

Рассматривались сетки с разрешением: $N = 5, 10, 25$ и 50 ячеек на радиус сферы в подвижном регионе для сферы диаметром 10 мм. Примеры сеток представлены на рис. 5. Следует отметить, что в качестве характерного размера рассматривается диаметр твердой сферы, тогда как сама сфера моделируется твердым телом, представленным жесткими границами и не содержащим ячеек.

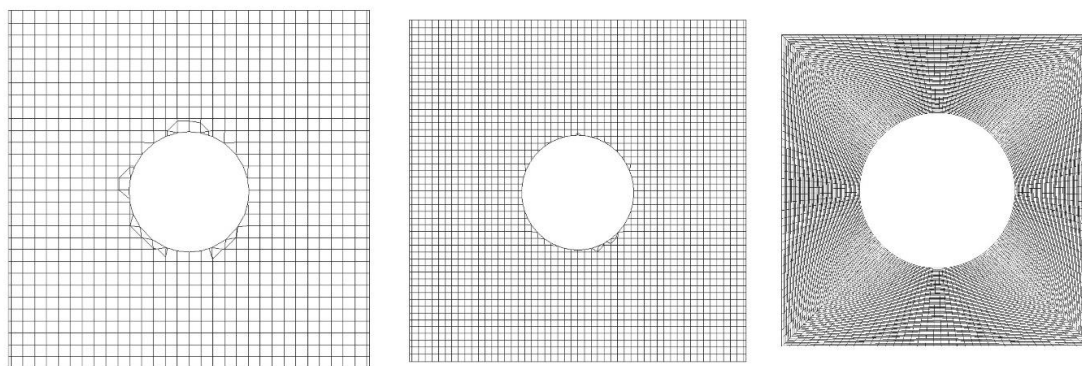


Рис. 5. Фрагменты расчетных сеток в окрестности твердой сферы:
а) 5 ячеек на радиус сферы, б) 10 ячеек на радиус, в) 25 ячеек на радиус сферы

В результате исследований выявлено, что сходимость по средней скорости всплытия наступает уже при разрешении 25 ячеек на радиус сферы (табл. 1).

Таблица 1

Средняя скорость всплытия твердой сферы

Количество ячеек на радиус сферы	5	10	25	50
\bar{u} (м/с)	0,2	0,27	0,283	0,285

При использовании сеток с перекрытиями точность моделирования в большей степени определяется размерами движущегося региона с подробным сеточным разрешением. При его небольших размерах относительно всей области моделирования можно использовать самые подробные сетки без значительного увеличения размеров всей расчетной сетки. Поэтому при расчетах использовались сетки с разрешением 60 ячеек на радиус сферы.

Сеточная диффузия, численная диссипация

При численном решении задач математической физики с помощью сеточных методов возникают эффекты, связанные с аппроксимационной (схемной) вязкостью, то есть вязкостью, порождаемой структурой разностных схем. Очень важно оценивать ее величину для каждого класса задач. Влияние аппроксимационной вязкости на решение аналогично влиянию физической вязкости. Поэтому необходимо соизмерять эти величины и оценивать численную диссипацию и схемную (сеточную) диффузию. Схемная вязкость должна быть мала по сравнению с физической.

Численные расчеты показывают, что свойства схем особенно проявляются в областях разрывов решения. Исследование схемной вязкости можно проводить на примере решения первой задачи Стокса, имеющей аналитическое решение для вязкой несжимаемой среды, как это сделано в работе [24]. В случае тангенциального разрыва двух плоскопараллельных потоков имеется аналитическое решение для зависимости зоны размазывания скачка скорости от времени, которая выражается формулой Шлихтинга [25] (7):

$$\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}, \quad (7)$$

здесь η – кинематическая физическая вязкость.

Рассматривается плоская задача, геометрия которой представляет собой прямоугольник, состоящий из двух равных областей (рис. 6). Потоки в этих областях направлены противоположно друг другу вдоль оси OY и имеют скорость, по модулю равную w . На верхней и нижней границах (BC и AD) задано условие периодичности. Плотность вещества равна 1 кг/м^3 . В расчетах использовалась расчетная сетка с размером ячейки $h = 0,00015$. Этот размер соответствует сеточному разрешению 16 ячеек на радиус пузырька для самого крупного из них.

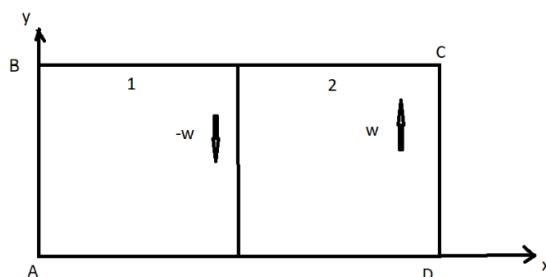


Рис. 6. Начальная геометрия для первой задачи Стокса

В расчетах в стационарной постановке с физической вязкостью $\eta = 10^{-10} \text{ Па}\cdot\text{с}$ размазывания зоны скачка уплотнения не происходило, что соответствует аналитическому решению (7) для невязкой жидкости. При задании физической вязкости $\eta = 0,005 \text{ Па}\cdot\text{с}$ происходит размазывание скачка скорости. Ширина зоны размазывания определялась по ячейкам

расчетной сетки, в которых скорости отличались от скорости основного потока на 1 %. На рис. 7 представлено для примера поле значения скорости на момент времени 9 с.

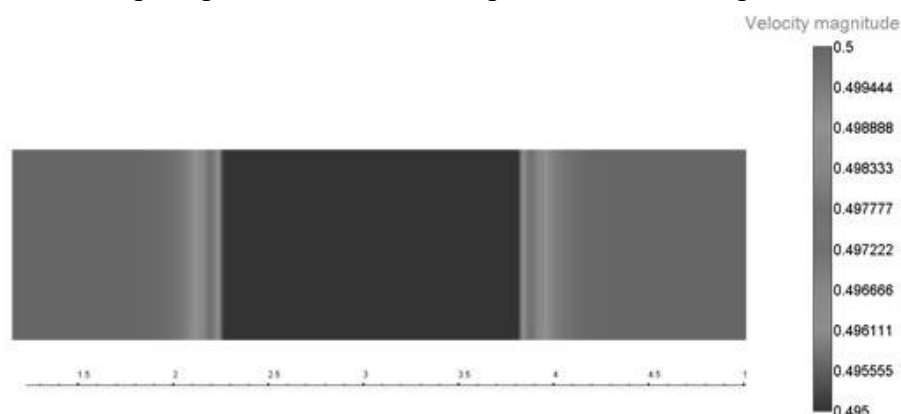


Рис. 7. Поле модуля скорости на $t = 9$ с

На рис. 8 приводится расчетная и аналитическая (7) зависимости ширины зоны Δ от времени. Видно, что расчетная зависимость ширины зоны хорошо согласуется с аналитической зависимостью для данного разрешения сетки.

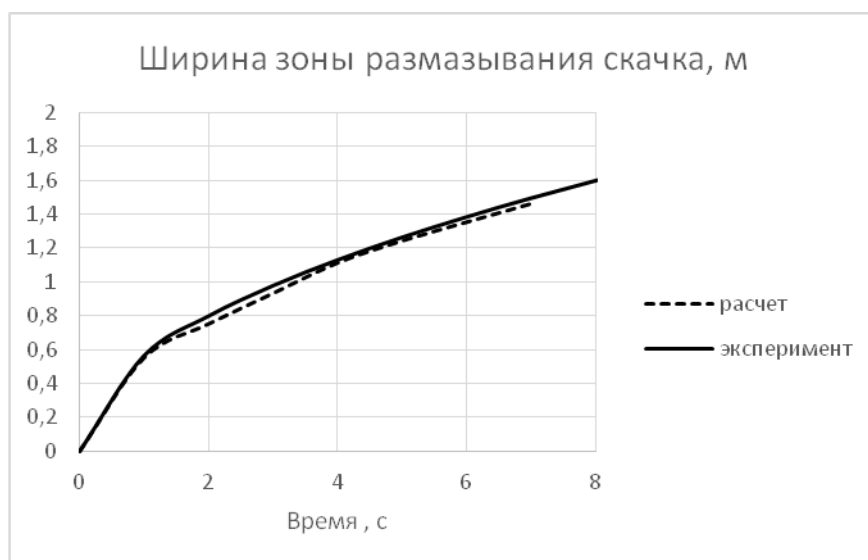


Рис. 8. Задача Стокса. Зависимость ширины зоны Δ от времени (стационарный расчет)

Данные результаты показывают, что для задач в стационарной постановке схемная вязкость для рассматриваемого разрешения близка к нулю. Далее рассматривается эта же задача в нестационарной постановке. В нестационарном случае вся область моделирования движется как одно целое вдоль оси Ox со скоростью $Ux = 1$.

При решении задачи Стокса в случае нулевой физической вязкости с помощью численных методов, имеющих схемную вязкость, должен наблюдаться рост зоны размазывания скачка скорости. В таком случае, пользуясь аналитической зависимостью (7), можно оценить величину схемной вязкости по ширине расчетной зоны размазывания скачка скорости:

$$\eta_c \approx \left(\frac{\Delta_c}{8\sqrt{t}} \right)^2$$

В расчетах на сетках с характерным размером счетной ячейки $h = 0,00015$ (что соответствует самому большому размеру ячейки при разрешении 16 ячеек на радиус пузырька)

с пренебрежимо малой физической вязкостью флюидов, равной 10^{-10} Па*с, вычисленный коэффициент схемной вязкости оказался порядка 10^{-5} .

Влияние схемной вязкости на результаты расчетов исследовано для расчета в нестационарной постановке с физической вязкостью $\eta = 0.001$ Па*с. На рис. 9 приведена расчетная зависимость ширины зоны Δ от времени для численного расчета на сетке с $h = 0,00015$ и аналитическая зависимость (7).

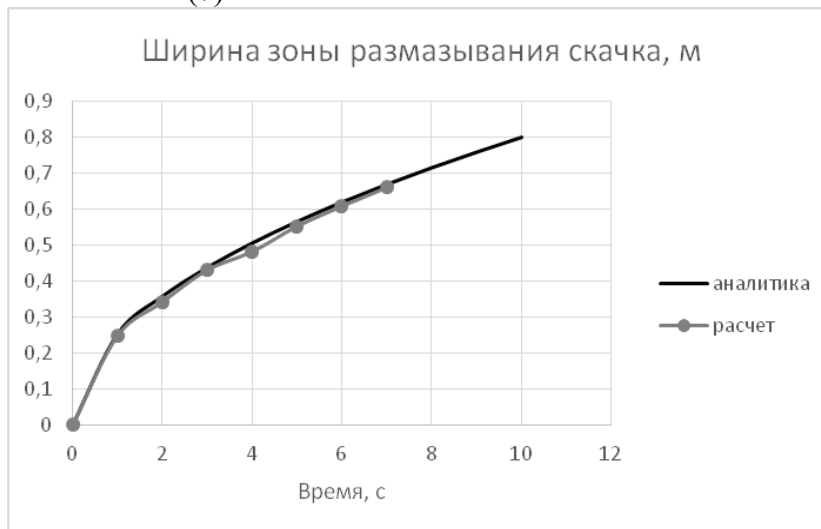


Рис. 9. Задача Стокса. Зависимость Δ от времени (нестационарный расчет)

Аналитическая зависимость хорошо согласуется с расчетной, т.е., коэффициент схемной вязкости меньше коэффициента физической вязкости ($\eta_c < \eta$) и не влияет на результаты расчета для такого сеточного разрешения. В дополнение к приведенным исследованиям, проиллюстрировать точность метода определения формы пузыря по изменению функции-маркера можно, вычислив зависимость объема пузыря от времени. На рис. 10 приводятся графики зависимости объема пузыря, нормированного на начальный объем, от времени. Из графиков следует, что при рассмотрении пузырьков диаметром 1, 3, 5, 8 и 10 мм во всех расчетах, кроме случая $d = 1$ мм, сеточная диффузия не превышала 15 %.

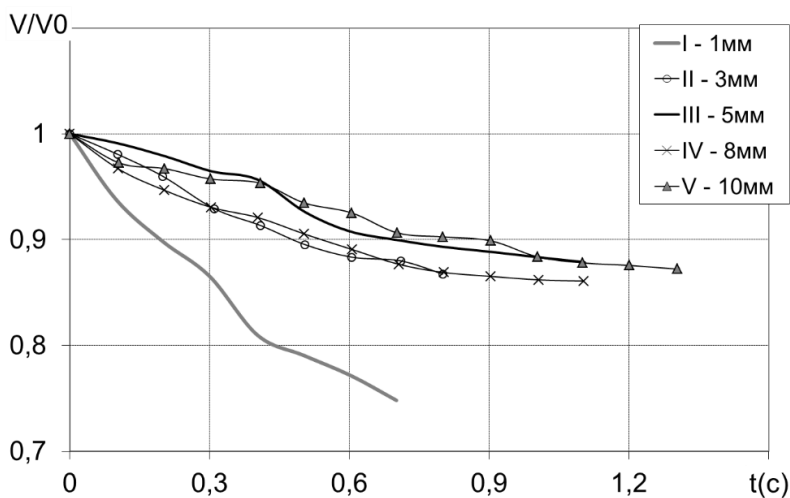


Рис. 10. Изменение объема пузырька в течение расчета (степень сеточной диффузии)

Влияние размеров области моделирования

В случае всплытия пузырька при использовании подвижного региона для анализа влияния размеров области моделирования был проведен ряд расчетов. Размеры области варьировались от $2D$ до $10D$ в каждом пространственном направлении, где D – диаметр пузырька. При этом сеточное разрешение было фиксированным и составляло приблизительно 16 ячеек на диаметр пузырька. Для оценки влияния близости границ использовались показания средней скорости всплытия пузырька. Целью этого анализа являлось определение наименьшего допустимого размера области моделирования, при котором влияние близости границ пренебрежимо мало на скорость всплытия.

На рис. 11 представлены графики зависимости средней скорости всплытия пузырька от времени для сеток разного размера. Наблюдается существенное изменение скорости по мере увеличения области от $2D$ до $6D$. При дальнейшем увеличении размеров области моделирования существенных различий уже нет. При размерах области больших $6D$ разница между получаемыми значениями скорости всплытия становится менее трех процентов. Основываясь на этих наблюдениях, можно заключить, что размера области в $6D$ достаточно для проведения расчетов.

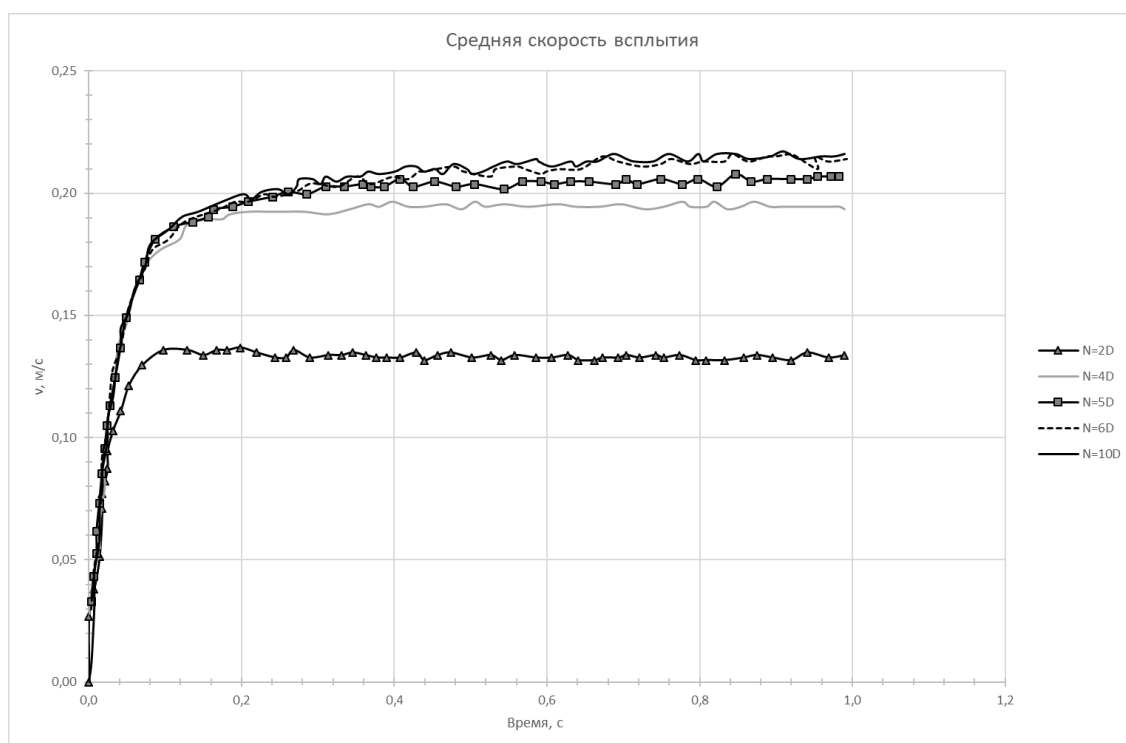


Рис. 11. Средняя скорость всплытия пузырька в зависимости от времени для разных размеров области моделирования

При рассмотрении всплытия твердых сфер внешняя расчетная область представляет собой параллелепипед размерами $20D \times 20D \times 100D$. Поскольку расчеты в таком случае проводятся на перекрывающихся сетках, то на первый план выходит влияние на точность решения размеров подвижного региона, связанного со сферой. А точнее близость интерфейсных границ этого региона к сфере.

Для анализа зависимости средней скорости всплытия сферы диаметром 10 мм от размера подвижного региона была проведена серия расчетов с варьируемым размером этого региона. Сеточное разрешение при этом составляло 60 ячеек на радиус сферы. В табл. 2 представлены результаты расчетов на сетках с размерами подвижной области $2D$, $3D$, $4D$ и $5D$ в каждом пространственном направлении, где D – диаметр сферы.

Таблица 2

Средняя скорость всплытия твердой сферы диаметром 10мм

Размер подвижного региона, D	2	3	4	5
u, м/с	0,26	0,28	0,287	0,291

Видно, что значение средней скорости всплытия не меняется для подвижных областей размерами больше 4D. Это означает, что подвижный регион размером 4D следует считать оптимальным при дальнейшем моделировании. Следует отметить, что сетка внешнего региона в окрестности интерфейсных границ должна иметь сеточное разрешение близкое к разрешению в подвижном регионе. Поэтому от размеров подвижного региона будет зависеть предполагаемые зоны измельчения внешнего региона.

Влияние подвижной области моделирования

Для получения достоверной картины всплытия пузырька необходимо рассматривать область размерами, намного превосходящими размеры самого пузырька. При этом траектория пузырька заранее непредсказуема для обеспечения необходимого разрешения сетки по пути следования. Все это выливается в огромные размерности требуемых расчетных сеток при стандартном подходе. Для уменьшения численных затрат применяются идеология подвижного региона, когда сетка строится только в небольшой окрестности пузырька и двигается согласно перемещению центра масс пузырька. На границах такой расчетной области задаются граничные условия, которые обеспечивают свободное протекание жидкости. При этом характерный размер области моделирования по направлениям составляет 6D, где D – диаметр пузырька.

Для оценки достоверности результатов, получаемых при применении технологии движения сетки, выполнено сравнение результатов расчетов, проведенных на подвижной и неподвижной двумерных сетках для пузырей диаметром 3мм и 5 мм. Количественное сравнение результатов проводилось по средней скорости всплытия пузырька (табл. 3). Видно, что расхождение результатов незначительное, в пределах допустимой погрешности.

Таблица 3

Средняя скорость всплытия пузырька на подвижной и неподвижной сетках

Диаметр пузырька (мм)	3	5
\vec{u} (м/с) (неподвижная сетка)	0.189	0.195
\vec{u} (м/с) (подвижная сетка)	0.183	0.19

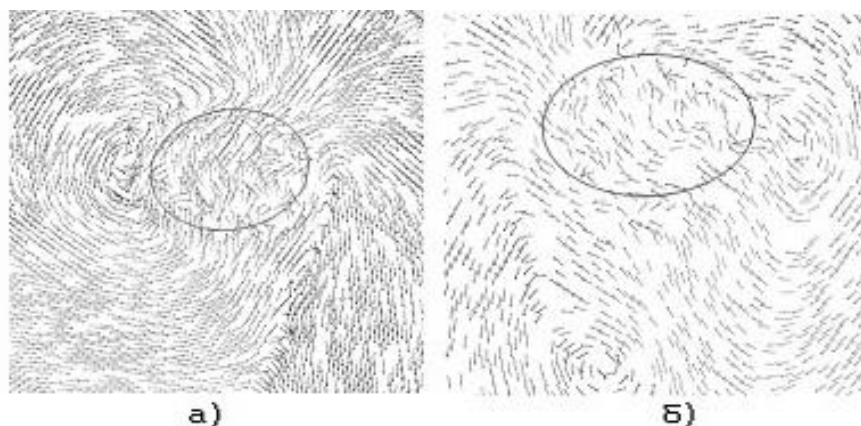


Рис. 12. Поле скорости в окрестности пузырька $d = 5$ мм в двумерном расчете: а) подвижная сетка, б) неподвижная область (пузырь выделен черной окружностью)

На рис. 12 представлено сравнение характерного поля скорости в окрестности пузырька ($d = 5$ мм) в случае использования подвижной и неподвижной сетки. Нестационарное поле скорости обладает одними и теми же характеристиками. В обоих случаях с одной стороны пузырька происходит формирования вихря, в то время как с другой его стороны виден уже оторвавшийся вихрь. Из представленных результатов можно сделать вывод, что применение идеологии подвижной области не дает погрешностей, существенно влияющих на результат. Наблюдается хорошее качественное и количественное согласие результатов на подвижной и неподвижной сетках. Это говорит о корректности применения подвижных сеток для численного решения задачи.

Заключение

Представлена методика, применяемая для численного моделирования всплытия одиночных пузырьков воздуха и твердых сфер. Особое внимание уделено особенностям, которые следует учитывать при проведении расчетов. Проведено исследование точности моделирования, обоснованности выбора описанного подхода. С помощью численного эксперимента исследовано влияние выбора размеров области моделирования, сеточного разрешения. Исследованы свойства используемых численных схем применительно к задачам данного класса. Определены оптимальные параметры моделирования.

Проведенные исследования являются предварительным этапом перед проведением серии расчетов для более детального исследования особенностей всплытия твердых сфер и воздушных пузырьков.

Библиографический список

1. **Veldhuis, C.** Shape oscillations on bubbles rising in clean and in tap water / C. Veldhuis, A. Biesheuvel, L. Wijngaarden // *Physics of fluids*. – 2008. – V. 20. – P. 1-12.
2. **Hua, J.** Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method / J. Hua, J. Stene, P. Lin // *J. Comp. Phys*. – 2008. – V. 227. – No. 6. – P. 3358-3382.
3. **Horowitz, M.** The effect of Reynolds number on the dynamics and wakes of freely rising and falling spheres / M. Horowitz, C.H.K. Williamson // *J. Fluid Mech*. – 2010. – V. 651. – P. 251-294.
4. **Архипов, В.А.** О нестационарном всплытии пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса / В.А. Архипов, И.М. Васенин, А.С. Ткаченко, А.С. Усанина // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2015. – № 1. – С. 86-94.
5. **Abbad, M.** Effects of the history force on an oscillating rigid sphere at low Reynolds number / M. Abbad, M. Souhar // *Experiments Fluids*. – 2004. – No. 36. – P. 775-782.
6. **Stepanyants, Y.A.** Particle and bubble dynamics in a creeping flow / Y.A. Stepanyants, G.H. Yeoh // *Eur. J. Mech. – B/Fluids*. – 2009. – V. 28. – P. 619-629.
7. **Rusche, H.** Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at high phase fraction // PhD thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Dep. of Mech. Eng., London, 2002.
8. **Jacquim, D.** Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling // *J. Comp. Phys*. – 1999. – №155, – P. 96-127.
9. **Benek, J.A.** A 3-D Chimera Grid Embedding Technique / J.A. Benek, P.G. Buning, J.L. Steger // *AIAA Paper*. – 1985. – No. 85-1523.
10. **Brackbill, J.U.** A continuum method for modelling surface tension / J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach // *J. Comp. Phys*. – 1992. – V. 100. – P. 335-354.
11. **Козелков, А.С.** Численное моделирование свободного всплытия пузырька воздуха / А.С. Козелков, А.А. Куркин, В.В. Курулин, С.В. Лашкин, Н.В. Тарасова, Е.С. Тягوشкина // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2016. – № 6. – С. 3-14.
12. **Kozelkov, A.S.** Study of specific features of free rise of solid spheres in a viscous fluid at moderate Reynolds number / A.S. Kozelkov, A.A. Kurkin, S.M. Dmitriev, N.V. Tarasova, V.R. Efremov, E.N. Pelinevsky, D.Yu. Strelets // *European Journal of Mechanics – B / Fluids*. – 2018. – V.72. – P. 616-623.
13. **Козелков, А.С.** Исследование особенностей всплытия пузырьков воздуха и твердых сфер / Козелков А.С., Ефремов В.Р., Дмитриев С.М., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Тарасова Н.В., Стрелец Д.Ю. // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. – 2018. – Т.11. – №4. – С.73-80.

14. **Ferziger, J.H.** Computational methods fluid dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric // Springer. 2001.
15. **Флетчер, К.** Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991.
16. **Chen, Z.J.** A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows / Z.J. Chen., A.J. Przekwas // J. Comp. Phys. – 2010. – V. 229. – P. 9150-9165.
17. **Jasak, H.** Error Analysis and Estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Thesis submitted for the degree of doctor // Imperial College of Science, 1996.
18. **Козелков, А.С.** Моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках с использованием модели отсоединенных вихрей / А.С. Козелков, В.В. Курулин, О.Л. Пучкова, Е.С. Тятюшкина // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – №8. – С.81-96.
19. **Kozelkov, A.** Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes / A. Kozelkov, V. Kurulin, V. Emelyanov, E. Tyatyushkina, K. Volkov // Journal of Scientific Computing. – 2016. – V. 67. – P. 176-191.
20. **Waclawczyk, T.** Remarks on prediction of wave drag using VOF method with interface capturing approach / T. Waclawczyk, T. Koronowicz // Archives of civil and mechanical engineering. – 2008. – V. 8. – P. 5-14.
21. **Храбрый, А.И.** Численное моделирование течений со свободной поверхностью на основе метода VOF / А.И. Храбрый, Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова (Труды Крыловского государственного научного центра). – 2013. – Вып. 78 (362). – С. 53-64
22. **Яцевич, С.В.** О применении алгоритма PISO в задачах динамики молекулярно-несмешивающихся жидкостей / С.В. Яцевич, В.В. Курулин, Д.П. Рубцова // ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2015. – № 1. – С. 16-29.
23. **Козелков, А.С.** Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях / А.С. Козелков, Р.М. Шагалиев, В.В. Курулин, А.В. Ялозо, С.В. Лашкин // Вычислительная математика и математическая физика. – 2016. – Т. 56. – № 8. – С. 1524-1535.
24. **Янилкин, Ю.В.** Об аппроксимационной вязкости разностных схем и расчеты течений вязкой жидкости / Ю.В. Янилкин, О.О. Топорова, А.Л. Стадник, Л.Е. Корзакова // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2016. – Вып. 3. – С. 3-17.
25. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974.

*Дата поступления
в редакцию: 05.11.2020*

N.V. Tarasova

SPECIFIC FEATURES OF NUMERICAL SIMULATION OF FREE RISE OF SOLID SPHERES AND AIR BUBBLES

Federal State Unitary Enterprise «Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics»

The paper presents detailed description of models used for numerical simulation of freely rising single solid spheres and air bubbles, including their features. Analysis of accuracy of applied methods is made. Grid sensitivity analysis and research of level of numerical diffusion for problem of rising single bubble or single solid sphere were carried out. The acceptable domain size is defined and the accuracy of approximation of values to interface of overset grids is estimated. The main goal of this study is analysis of accuracy and proving validity of results obtained with the help of such methods.

Keywords: unstructured grids, overset grids (Chimera), grid sensitivity analysis, numerical diffusion, interpolation method