

УДК 517.4

DOI: 10.46960/1816-210X\_2021\_3\_32

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ СИГНАЛА  
ПРИ ЦИФРО-АНАЛОГОВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ****В.М. Галкин**ORCID: 0000-0003-1762-7718 e-mail: [vladimirgalkins@gmail.com](mailto:vladimirgalkins@gmail.com)Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
*Нижний Новгород, Россия***Л.Н. Мазунова**ORCID: 0000-0003-3262-8348 e-mail: [matematixx@mail.ru](mailto:matematixx@mail.ru)Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
*Нижний Новгород, Россия*

Анализируются теоретические основания цифровой обработки сигналов, связанные с дискретным преобразованием Фурье – базовым алгоритмом преобразования сигналов в цифровых устройствах. Дискретное преобразование Фурье интерпретируется как некоторый унитарный оператор в конечномерном пространстве, изучена его структура, найдены собственные значения и собственные подпространства; получены новые результаты, касающиеся особенностей восстановления сигнала по его частотному спектру. Рассмотрена аппроксимация периодического сигнала интерполяционным тригонометрическим многочленом по коэффициентам, полученным в результате применения дискретного преобразования Фурье. Обнаружено, что при увеличении числа отсчетов отклонение интерполяционного многочлена от исходного сигнала не стремится к нулю. Изложение иллюстрируется примерами, один из которых показывает хорошее приближение сигнала интерполяционным полиномом.

**Ключевые слова:** цифровизация, цифровая обработка сигналов, периодический сигнал, аналоговый сигнал, аппроксимация, интерполяционный многочлен, отсчеты, унитарный оператор, спектр, собственные числа, собственные подпространства.

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Галкин, В.М. Повышение точности воспроизведения сигнала при цифро-аналоговом преобразовании / В.М. Галкин, Л.Н. Мазунова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2021. № 3. С. 32-40.  
DOI: 10.46960/1816-210X\_2021\_3\_32

**INCREASING THE SIGNAL PRESENTATION ACCURACY  
DURING DIGITAL-TO-ANALOG CONVERSION****V.M. Galkin**ORCID: 0000-0003-1762-7718 e-mail: [vladimirgalkins@gmail.com](mailto:vladimirgalkins@gmail.com)Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia***L.N. Mazunova**ORCID: 0000-0003-3262-8348 e-mail: [matematixx@mail.ru](mailto:matematixx@mail.ru)Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia*

**Abstract.** The theoretical fundamentals of digital signal processing related to the discrete Fourier transform – the basic signal conversion algorithm in digital devices are analyzed. The discrete Fourier transform is interpreted as a unitary operator in finite-dimensional space. Its structure is investigated, eigenvalues and the eigen subspace are found, and new results in the specific features of restoring a signal by its frequency spectrum are obtained. Approximation of a periodic signal with an interpolation trigonometric polynomial by coefficients obtained with the discrete Fourier transform is considered. With an increasing number of samples, the deviation of the interpolation polynomial from the initial

signal does not tend to zero. The presentation is illustrated with examples, one of which demonstrates a close approximation of the signal with the interpolation polynomial.

**Key words:** digitizing, digital signal processing, periodic signal, analog signal, approximation, interpolation polynomial, samples, unitary operator, spectrum, eigenvalues, eigen subspaces.

**FOR CITATION:** V.M. Galkin, L.N. Mazunova. Increasing the signal presentation accuracy during digital-to-analog conversion. Transactions of NNSTU n. a. R.E. Alekseev. 2021. № 3. Pp. 32-40. DOI: 10.46960/1816-210X\_2021\_3\_32

В современном мире непрерывно растет количество зарегистрированных устройств, передающих информацию. Происходит структурная реорганизация основ многих отраслей. Уже появились облачные сервисы, технологии определения местонахождения человека, усовершенствованные интерфейсы взаимодействия между человеком и машиной, аутентификация, различные интеллектуальные датчики и т.п. Таким образом, цифровая трансформация постепенно приходит во все сферы жизни человека, и со временем ее проявления будут еще более заметными. Цифровизация в глобальном смысле представляет собой внедрение цифровых технологий в разные сферы жизни и производства во всех без исключения странах. В узком смысле под цифровизацией понимается преобразование информации в цифровую форму информации. Передача такой оцифрованной информации ведет к снижению издержек, появлению новых возможностей и т.д.

По своей природе многие сигналы являются аналоговыми, а компьютер может выполнить обработку цифрового сигнала. В связи с этим необходимо выполнять преобразование сигнала из аналоговой формы в цифровую. Аналого-цифровое преобразование сигнала включает в себя два этапа: дискретизация сигнала (во времени или пространстве) и квантование по уровню. Дискретное преобразование Фурье является базовым алгоритмом преобразования сигналов в цифровых устройствах. Он реализован в различных программных средствах. Чтобы грамотно его использовать и правильно интерпретировать результаты, необходимо владеть соответствующим математическим аппаратом. Например, чтобы повысить точность – соответствие полученных значений исходному сигналу, нужно увеличить частоту дискретизации, т.е. чаще производить выборку. Здесь можно воспользоваться теоремой Котельникова: если аналоговый сигнал имеет ограниченный спектр, он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой, строго большей удвоенной верхней частоты. Однако снижение точности может произойти и при восстановлении сигнала по его частотному спектру. Одной из задач исследования является выяснение особенностей интерполяционного приближения тригонометрическим многочленом.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое используется при цифровой обработке сигналов, по существу является унитарным оператором в конечномерном комплексном пространстве со скалярным произведением. Если  $V$  – такое пространство размерности  $N$ , то в нем можно выбрать базис такой, что скалярное произведение векторов  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  и  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  из  $V$  запишется формулой  $(x, y) = x_0 \cdot \bar{y}_0 + x_1 \cdot \bar{y}_1 + \dots + x_{N-1} \cdot \bar{y}_{N-1}$ , где черта сверху означает комплексное сопряжение. ДПФ определяется как линейный оператор  $L: V \rightarrow V$ , переводящий вектор  $x$  в  $L(x) = x^*$ , где (1):

$$x_k^* = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \xi^{-mk}, \quad (1)$$

$$\text{а } \xi = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

Формула (1) определяет прямое преобразование. Обратное же выражает компоненты  $x$  через компоненты  $x^*$  (2):

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m^* \xi^{mk}. \quad (2)$$

Из свойств ДПФ в литературе отмечаются:

а) сдвиг

$$x_{k-n}^* = \xi^{-kn} x_k^*$$

б) свертка

$$(x_k, y_k)^* = (x_k^*, y_k^*)$$

в) равенство Парсеваля

$$(x, y) = \frac{1}{N} (x^*, y^*), \text{ правда обычно равенство Парсеваля рассматривается при } x = y.$$

В формулах а) и б) предполагается, что индексы у компонент векторов могут быть любыми целыми числами, взятыми по модулю  $N$ . Формула в) означает, что оператор  $\sqrt{N}L$  является унитарным. С точки зрения линейной алгебры исчерпывающей информацией об операторе считается знание его собственных значений и структуры собственных подпространств. В известной литературе эти вопросы относительно  $L$  не затрагиваются, возможно, из-за отсутствия приложений. Поэтому ниже дается решение соответствующих вопросов.

*Предложение 1.* Оператор  $L^2$  переводит вектор  $x$  в вектор  $x^{**}$ , причем  $x_k^{**} = N x_{-k}$ .

$$\begin{aligned} \text{Доказательство.} \text{ Используя (1), имеем } x_k^{**} &= \sum_{s=0}^{N-1} x_s^* \xi^{-sk} = \sum_{s=0}^{N-1} \left( \sum_{r=0}^{N-1} x_r \xi^{-rs} \right) \xi^{-sk} = \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_r \sum_{s=0}^{N-1} \xi^{-s(r+k)} = N x_{-k}, \end{aligned}$$

ввиду известной (и широко применяемой) формулы  $\sum_{s=0}^{N-1} \xi^{-sk} = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ .

Доказанное предложение позволяет разложить линейное пространство  $V$  в прямую сумму двух подпространств, на которые  $L^2$  действует скалярным образом.

*Предложение 2.*  $V = V^+ \oplus V^-$ , где  $V^+$  состоит из векторов  $x$ , у которых  $x_k = x_{-k}$ , а  $V^-$  состоит из векторов  $x$ , у которых  $x_k = -x_{-k}$ . На  $V^+$   $L^2 = N$ , а на  $V^-$   $L^2 = -N$ .

*Доказательство.* Из  $x_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{-k}) + \frac{1}{2}(x_k - x_{-k})$  для произвольного вектора  $x \in V$  следует представление  $V = V^+ \oplus V^-$ . В то же время Предложение 1 показывает, что действие оператора  $L^2$  на  $V^+$  есть умножение на  $N$ , а действие на  $V^-$  – умножение на  $-N$ .

В свою очередь, подпространства  $V^+$  и  $V^-$  можно далее разложить в прямые суммы меньших подпространств, на которые уже  $L$  действует скалярно. Это обычный прием в линейной алгебре: если квадрат оператора  $M$  есть скаляр,  $M^2 = \lambda$ , то  $M^2 - \lambda = (M - \sqrt{\lambda})(M + \sqrt{\lambda})$  и пространство раскладывается в прямую сумму подпространств, на которых  $M = \sqrt{\lambda}$  и  $M = -\sqrt{\lambda}$ .

Таким образом, имеем  $V^+ = V^{++} \oplus V^{+-}$ ,  $V^- = V^{-+} \oplus V^{--}$ , и оператор  $L$  действует на слагаемые следующим образом: на  $V^{++}$   $L = \sqrt{N}$ , на  $V^{+-}$   $L = -\sqrt{N}$ , на  $V^{-+}$   $L = i\sqrt{N}$ , на  $V^{--}$   $L = -i\sqrt{N}$ ,  $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ .

Остается подсчитать размерность этих собственных подпространств. Если обозначить размерности  $V^{++}$ ,  $V^{+-}$ ,  $V^{-+}$ ,  $V^{--}$  соответственно через  $a, b, c, d$ , ( $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ ), то, очевидно,  $a + b = \dim V^+$  – размерность  $V^+$ , а  $c + d = \dim V^-$  – размерность  $V^-$ . Размерности  $V^+$  и  $V^-$  легко подсчитываются:  $\dim V^+ = \frac{N}{2} + 1$  при  $N$  четном (у векторов из  $V^+$  неза-

висимыми компонентами служат  $x_0, x_1, \dots, x_{\frac{N}{2}}$  и  $\dim V^+ = \frac{N+1}{2}$  при  $N$  нечетном. Размер-

ность же  $\dim V^- = N - \dim V^+$ . Дополнительные соотношения для  $a, b, c, d$  можно получить из

рассмотрения характеристического многочлена  $f(t) = (t - \sqrt{N})^a (t + \sqrt{N})^b (t - i\sqrt{N})^c (t + i\sqrt{N})^d$ , в котором коэффициент при  $t^{N-1}$  равен  $-a\sqrt{N} + b\sqrt{N} - c \cdot i\sqrt{N} + d \cdot i\sqrt{N}$ .

С другой стороны, этот коэффициент равен следу, взятому с обратным знаком, матрицы оператора  $L$  в любом базисе пространства  $V$ . Из представления (1) видно, что этот след равен  $Tr L = \sum_{s=0}^N \xi^{-s^2}$ . Определение точного значения этой суммы представляет собой тонкую

теоретико-числовую проблему, идущую от Гаусса. Ответ можно найти в книге Дирихле [4],

$$\text{и он таков: } Tr L = \begin{cases} \sqrt{N}, & N \equiv 1 (4) \\ 0, & N \equiv 2 (4) \\ -i\sqrt{N}, & N \equiv 3 (4) \\ (1-i)\sqrt{N}, & N \equiv 4 (4) \end{cases}.$$

Соотношения  $a + b = \dim V^+$ ,  $c + d = \dim V^-$  и  $-a\sqrt{N} + b\sqrt{N} - c \cdot i\sqrt{N} + d \cdot i\sqrt{N} = Tr L$  позволяют найти значения  $a, b, c, d$ . Приведем окончательный ответ.

$$N \equiv 1 (4): a = \frac{N+3}{4}, b = \frac{N-1}{4}, c = \frac{N-1}{4}, d = \frac{N-1}{4}$$

$$N \equiv 2 (4): a = \frac{N+2}{4}, b = \frac{N+2}{4}, c = \frac{N-2}{4}, d = \frac{N-2}{4}$$

$$N \equiv 3 (4): a = \frac{N+1}{4}, b = \frac{N+1}{4}, c = \frac{N-3}{4}, d = \frac{N+1}{4}$$

$$N \equiv 0 (4): a = \frac{N}{4} + 1, b = \frac{N}{4}, c = \frac{N}{4} - 1, d = \frac{N}{4}$$

Пример:  $N = 4$   $\xi = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$ .

Вектор  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  принадлежит  $V^+$ , если  $x_1 = x_3$ , и вектор  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  принадлежит  $V^-$ , если  $x_0 = x_2 = 0$ ,  $x_1 = -x_3$ . Таким образом,  $\dim V^+ = 3$ , а  $\dim V^- = 1$ . Стандартная процедура нахождения собственных векторов и собственных значений оператора приводит к следующему результату:  $V^{++}$  состоит из линейных комбинаций векторов  $\vec{e}_1 = (2, 1, 0, 1)$  и  $\vec{e}_2 = (1, 0, 1, 0)$ . Это собственные векторы, отвечающие собственному значению 2. Размерность  $V^{++}$  равна 2. Пространство  $V^{+-}$  одномерно с базисным вектором  $\vec{e}_3 = (-1, 1, 1, 1)$ . Базисным вектором в  $V^-$  служит  $\vec{e}_4 = (0, 1, 0, -1)$ . Он соответствует собственному значению  $-2i$ , и таким образом  $V^{--} = (0)$ , а  $V^{-+} = V^-$ .

Собственно, на этом теория ДПФ и заканчивается. Можно добавить несколько «табличных» примеров, которые могут служить контрольными при проведении прикладных расчетов. Так, легко просчитать ДПФ от вектора  $x = (1, e^{i\tau}, e^{2i\tau}, \dots, e^{(N-1)i\tau})$  и получить

$$x_k^* = \frac{1 - e^{i\tau N}}{1 - e^{i\tau - \frac{2\pi}{N}k}}, k \neq 0.$$

ДПФ для вектора  $x = (0, 1, 2, \dots, N-1)$  можно получить, продифференцировав приведенный выше результат по переменной  $\tau$ , поделив на  $i$  и положив затем  $\tau = 0$ . Это дает  $x_k^* = -\frac{N}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{N}k}}$ ,  $k \neq 0$  и  $x_0^* = \frac{N(N-1)}{2}$ .

ДПФ не получило бы широкого распространения, если бы не бурное развитие цифровой техники, в основе которой лежит идея цифровой передачи сигналов. Как математический аппарат для описания процессов передачи сигналов ДПФ появляется следующим образом. Сигнал описывается функцией  $x(t)$  от времени  $t$ . В большинстве природных процессов время считается непрерывным, и сам процесс наблюдается конечный промежуток времени, например, от  $t = 0$  до  $t = T$ . Изменяя при необходимости, масштаб времени, можно считать  $T = 2\pi$ . Тогда  $x(t)$  можно описывать рядом Фурье (3):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \quad (3)$$

или, в комплексной форме,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad (4)$$

где  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ ,  $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$  ( $c_k = \overline{c_{-k}}$ ).

Экспонента  $e^{ikt}$  называется  $k$ -ой гармоникой,  $c_k$  – ее (комплексной) амплитудой. Коэффициенты  $c_k$  в (4) вычисляются по известной формуле (5):

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-\frac{2\pi i}{T}kt} dt. \quad (5)$$

Равенство Парсеваля для (3) и (4) записывается в виде (6):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (6)$$

и истолковывается как равенство средней на периоде  $T$  энергии сигнала и суммы таковых же энергий, составляющих сигнал гармоник. При цифровой обработке сигнала задается не  $x(t)$  как функция непрерывного аргумента – времени (это так называемый, аналоговый сигнал), а только значения  $x_k = x(t_k)$  в дискретном множестве  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$  моментов времени. Эти значения называются отсчётами в соответствующие моменты времени. Обычно ограничиваются равноотстоящими значениями времени и предполагают  $t_k = \frac{2\pi}{N}k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Если использовать для приближенного вычисления интегралов в формулах (5) и (6) формулы прямоугольников, получим (7):

$$c_k \approx \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_s \xi^{-ks}, \quad \xi = e^{\frac{2\pi i}{N}}, \quad (7)$$

т.е. результат  $x_k^*$  дискретного преобразования Фурье есть приближение с точностью до множителя  $\frac{1}{N}$  комплексной амплитуды  $k$ -ой гармоники в разложении Фурье сигнала  $x(t)$ .

Удивительно, но приближения интеграла и  $c_k$  в (6) приводит к точному равенству (8):

$$\sum_{k=1}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k^*|^2. \quad (8)$$

Если ввести тригонометрический полином  $F_N(t)$  равенством (9):

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m^* e^{imt}, \quad (9)$$

то из (4) следует, что  $F_N(t_k) = x_k = x(t_k)$ . Поскольку  $x(t)$  предполагается действительной, то и  $\operatorname{Re}(F_N(t_k)) = x(t_k)$ , т.е.  $\operatorname{Re}(F_N(t))$  является тригонометрическим (действительным) интерполяционным многочленом для  $x(t)$ .

Одним из главных вопросов в теории интерполяции является изучение поведения интерполяционного приближения при увеличении числа интерполяционных точек. Рассмотрим эту задачу для функции  $F_N(t)$  из (9). Для этого приведем другое выражение для  $F_N(t)$ .

*Предложение 1.*

$$F_N(t) = \frac{1}{N} (e^{iNt} - 1) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{x_m e^{imt}}{e^{it} - e^{im}}. \quad (10)$$

В справедливости этого предложения легко убедиться, если заметить, что  $F_N(t)$  есть многочлен от  $e^{it}$ , а (10) это просто формула интерполирования Лагранжа для точек  $t = t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

С помощью (10) доказывается весьма неожиданное утверждение.

*Предложение 2.*

В точках  $t = t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right)$ ,  $k = 0, 1, \dots$   $\operatorname{Re}(F_N(t))$  принимает значение

$$\frac{1}{N} (x_0 + x_1 + \dots + x_{N-1}).$$

*Доказательство.*

Множитель  $e^{iNt} - 1$  в (10) при  $t = t_{k+\frac{1}{2}}$  равен  $-2$ . Под знаком суммы множитель

$$\frac{e^{imt}}{e^{it} - e^{im}} \text{ при } t = t_{k+\frac{1}{2}} \text{ преобразуется к виду } \frac{1}{e^{i\left(\frac{t}{k+\frac{1}{2}} - t_m\right)} - 1} = \frac{e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{t}{k+\frac{1}{2}} - t_m\right)}}{e^{\frac{i}{2}\left(\frac{t}{k+\frac{1}{2}} - t_m\right)} - e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{t}{k+\frac{1}{2}} - t_m\right)}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{t}{k+\frac{1}{2}} - t_m\right)}}{2i \sin\left(\frac{\left(\frac{t}{k+\frac{1}{2}} - t_m\right)}{2}\right)} \text{ и имеет действительную часть, равную } -\frac{1}{2}. \text{ В итоге и получаются для}$$

$\operatorname{Re}\left(F_N\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)$  нужные значения.

*Следствие.* При  $N \rightarrow \infty$   $F_N(t)$  не стремится к  $x(t)$ .

В заключении приведем два иллюстрационных примера.

1. Рассмотрим функцию  $x(t) = t$  на интервале  $[0, 2\pi]$ . Фурье-разложение имеет вид

(11):

$$x(t) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt. \quad (11)$$

При подсчете  $x_k^* = \sum_{s=0}^{N-1} x_m \xi^{-mk}$  используют ДПФ от вектора  $(0, 1, 2, \dots, N-1)$ , приведен-

ное в конце п.1, что дает при  $x_m = \frac{2\pi}{N} m$   $x_0^* = \pi(N-1)$ ,  $x_m^* = \frac{-2\pi}{1 - e^{-\frac{2\pi i m}{N}}}$ .

Интерполяционный многочлен согласно (9)  $F_N(t) = \pi \left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{m=1}^{N-1} \frac{2\pi}{1 - e^{-\frac{2\pi i m}{N}}} \cdot e^{imt} \cdot \frac{1}{N}$ .

Отделение в этом случае действительной части дает (12):

$$\operatorname{Re}(F_N(t)) = \pi \left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\pi}{N \sin \frac{\pi m}{N}} \cdot \sin \left(t + \frac{\pi}{N}\right) m. \quad (12)$$

Энергия ненулевых гармоник в (11) равна  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3}$ . Энергия же таковых в (12)

$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} \left(\frac{\pi}{N \sin \frac{\pi m}{N}}\right)^2$ . Непростое доказательство того, что выражение равно  $\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)$ , мы

опускаем.

Отметим, что при  $N \rightarrow \infty$  энергия гармоник в (12) становится вдвое меньше, чем энергия в (11). Это явление можно объяснить так, как будто мнимая часть  $\operatorname{Im}(F_N(t))$  «забирает» половину энергии гармоник в  $x(t)$ .

Более неприятное явление состоит в изменении спектрального состава  $x(t)$  при переходе  $\operatorname{Re}(F_N(t))$ , даже если компенсировать изменение энергии «усилением» сигнала  $\operatorname{Re}(F_N(t))$ . Действительно, амплитуда гармоник в  $x(t)$  пропорциональна  $\frac{1}{n}$ , а в  $\operatorname{Re}(F_N(t))$

они равны  $\frac{\pi}{N \sin \frac{\pi m}{N}}$  ( $m = 0, 1, \dots, N-1$ ). При  $N \rightarrow \infty$  и фиксированном  $n$  эти амплитуды

приближаются к  $\frac{1}{n}$ , но это не так, если  $n$  взять пропорциональным  $N$ , в частности, при

$n = N-1$  соответствующая амплитуда становится равной  $\frac{\pi}{N \sin \frac{\pi}{N}} \approx 1$ , а не  $\frac{1}{n}$ .

На рис.1 представлена действительная часть Фурье-разложения  $\operatorname{Re}(F_N(t))$ .

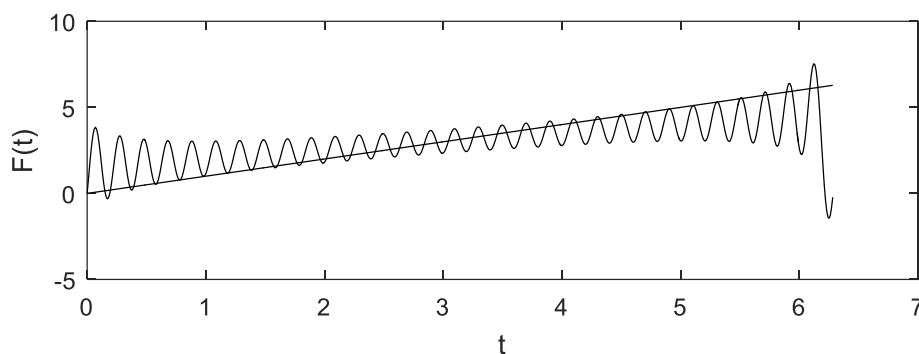


Рис. 1. Фурье-разложение функции  $x(t) = t$

Fig. 1. The Fourier decomposition of function  $x(t) = t$

Авторы рекомендуют вместо  $\text{Re}(F_N(t))$  взять действительную часть суммы  $\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x_m^* e^{imt}$

(рис. 2). Оказывается, здесь наблюдается хорошее приближение к  $x(t)$ , но анализ этого явления мы приводить не будем.

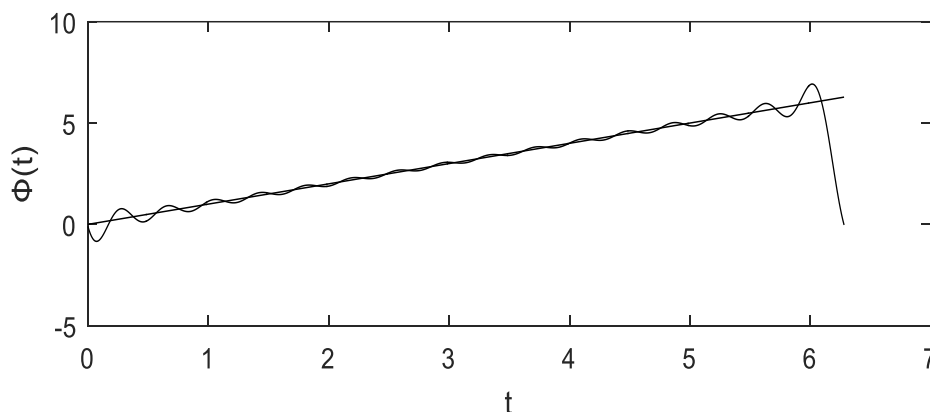


Рис. 2. Фурье-разложение функции  $x(t) = t$

Fig. 2. The Fourier decomposition of function  $x(t) = t$

2. В [5] рассматривается пример разложения функции  $x(t) = e^{-t^2}$ ,  $t \in [-5, 5]$ ,  $N = 512$

. Компьютерные вычисления позволяют найти значения  $x_m^*$ . Так, оказывается,

$$x_0^* = 90.5724 + 0.0000i$$

$$x_1^* = -82.0903 + 0.5037i$$

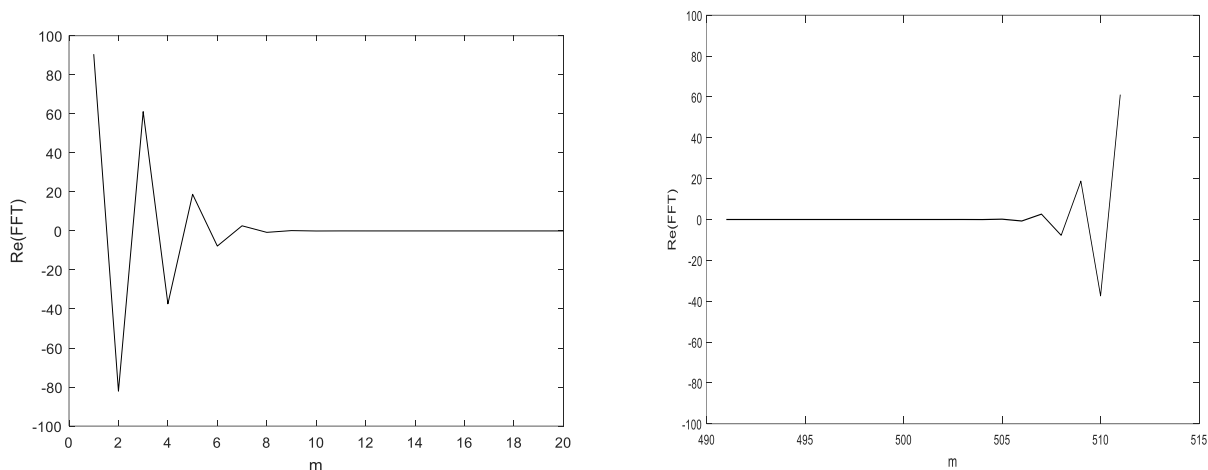
$$x_2^* = 61.1195 - 0.7501i$$

$$x_3^* = -37.3817 + 0.6882i$$

$$x_4^* = 18.7815 - 0.4611i$$

...





**Рис. 3. Действительная часть преобразования Фурье, построенная как функция номера**

**Fig. 3. The real part of the Fourier transform as a number function**

На рис. 3 обращает на себя внимание симметрия, которая является следствием равенства  $x_{N-m}^* = x_m^*$ , что следует из (7). Как и в предыдущем примере,  $\text{Re}(F_N(t))$  не стремится к  $x(t)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Таким образом, при применении дискретного преобразования Фурье следует учитывать следующие особенности. Во-первых, ошибочно полагать, что при увеличении числа отсчетов возрастает точность приближения. Во-вторых, один из примеров показывает, что для лучшей аппроксимации исходного сигнала вместо действительной части тригонометрического многочлена, составленного по коэффициентам, полученным с помощью дискретного

преобразования Фурье, можно взять действительную часть суммы 
$$\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x_m^* e^{imt}.$$

Современный этап развития общества характеризуется интенсивным внедрением цифровых технологий в разные сферы жизни. Цифровые телесистемы создают возможность организации систем видеотелефонии, видеоконференцсвязи; существенно повышают качества передачи изображений и звука, цифрового сопряжения сетей с компьютерными Интернет-сетями. Актуальность цифровой трансформации на уровне целых отраслей экономики формирует нарастающий интерес к проблемам аналого-цифровых преобразований.

### Библиографический список

1. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов / Р. Лайонс. – М.: Бином, 2015. – 656 с.
2. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – СПб., 2011. – 756 с.
3. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.
4. Дирихле, П.Г.Л. Лекции по теории чисел / П.Г.Л. Дирихле. – М.: Книга по требованию, 2014. – 404 с.
5. Князев, Б.А. Дискретное преобразование Фурье – как это делается / Б.А. Князев, В.С. Черкасский // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. 2008. №3/4. С. 74-86.

Дата поступления  
в редакцию: 13.12.2019