

АНАЛИЗ И МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ПРИ БОЛЬШИХ ТОКАХ

Е.А. Михайлов

ORCID: 0000-0002-9747-4039 e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Москва, Россия

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Москва, Россия

А.П. Степанова

ORCID: 0000-0002-6557-9901 e-mail: nastasya_stepanova@mail.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Москва, Россия

А.А. Таранюк

ORCID: 0000-0002-7836-8468 e-mail: taranyuk.anton@gmail.com

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Москва, Россия

Анализируется электровихревое течение между двумя плоскостями, играющими роль электродов одинаковой полярности. В предшествующих работах было показано, что решение достаточно быстро приходит к так называемому стационарному режиму. Поэтому можно пренебречь производными по времени в уравнении Навье-Стокса. Его удобно решать в классе фон Кармана, используя скалярную функцию тока. В таком случае мы получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. При слабых токах можно пользоваться линейным приближением, а решение получается простым интегрированием. Тем не менее, в прикладных задачах оказывается существенным наличие больших токов. В таком случае решение можно получить последовательным образом с помощью методов теории возмущений. В настоящей работе построено решение с точностью до слагаемых, пропорциональных третьей степени параметра электровихревого течения. Оно было также проверено методами численного моделирования, что потребовало использования аналога завихренности течения. Изучен вопрос о том, для тока какой величины применимы различные приближения.

Ключевые слова: электровихревые течения, жидкие металлы, класс фон Кармана, уравнение Навье-Стокса, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория возмущений.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Михайлов, Е.А. Анализ и модель системы электровихревых течений между двумя плоскостями при больших токах / Е.А. Михайлов, А.П. Степанова, А.А. Таранюк // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2022. № 1. С. 32-42. DOI: 10.46960/1816-210X_2022_1_32

ANALYSIS AND MODEL OF ELECTRIC VORTEX FLOW SYSTEM BETWEEN TWO PLANES AT HIGH CURRENTS

E.A. Mikhailov

ORCID: 0000-0002-9747-4039 e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences

Moscow, Russia

M.V. Lomonosov Moscow State University

Moscow, Russia

A.P. Stepanova

ORCID: 0000-0002-6557-9901 e-mail: nastasya_stepanova@mail.ru

M.V. Lomonosov Moscow State University

Moscow, Russia

A.A. Taranyuk

ORCID: 0000-0002-7836-8468 e-mail: taranyuk.anton@gmail.com

M.V. Lomonosov Moscow State University

Moscow, Russia

Abstract. Electric vortex flow between two planes used as electrodes of the same polarity, is analyzed. In previous works it was shown that the solution quickly enough comes to the so-called stationary mode. Therefore, it is possible to neglect the time derivatives in Navier-Stokes equation. It is convenient to solve it in the von Karman class using a scalar current function. In this case, we get a nonlinear ordinary differential equation of the fourth order. With weak currents, a linear approximation can be used, and the solution is obtained by simple integration. Nevertheless, in applied problems, the presence of large currents is essential. In this case, the solution can be obtained in a consistent manner using methods of perturbation theory. In this paper, a solution is constructed with accuracy of the terms of sum proportional to the third power of electric vortex flow parameter. It was also verified by numerical simulation methods, which required the use of flow vorticity analog. Issue of what current magnitude the various approximations are applicable, is studied.

Key words: electric vortex flows, liquid metals, von Karman class, Navier-Stokes equation, ordinary differential equations, perturbation theory.

FOR CITATION: E.A. Mikhailov, A.P. Stepanova, A.A. Taranyuk. Analysis and model of electric vortex flow system between two planes at high currents. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2022. №1. Pp. 32-42.
DOI: 10.46960/1816-210X_2022_1_32

Введение

Электровихревые течения играют достаточно важную роль как с точки зрения механики сплошных сред, так и с позиции технических приложений. Они возникают, когда неоднородный электрический ток протекает через среду с высокой проводимостью (например, жидкий металл) [1, 2]. В таком случае возникает магнитное поле, которое вместе с породившим его током порождает силу Лоренца, стремящуюся вызвать закрученные движения среды. Подобные процессы начали изучаться в Институте физики в Риге в 1970-е гг. под руководством Э.В. Щербинина [3]. Они исследовались как в ходе эксперимента, так и с использованием различных теоретических подходов. Весьма весомый вклад, связанный с техническими приложениями электровихревых течений, был внесен школой Б.Е. Патона в украинском Институте электросварки имени Е.О. Патона [4]. Большой опыт фундаментальных исследований электровихревых течений накоплен в пермском Институте механики сплошных сред Уральского отделения РАН [5, 6]. Нельзя не упомянуть изучение различных приложений (в основном, связанных с проблемами черной металлургии) в Магнитогорском государственном техническом университете имени Г.И. Носова [7]. В Москве в Объединенном институте высоких температур РАН ведутся интенсивные экспериментальные исследования электровихревых течений в полусферическом контейнере [1, 8]. Кроме того, данная задача исследуется в рамках численного моделирования, а также (совместно с МГУ имени М.В. Ломоносова) с помощью различных асимптотических методов математической физики [9].

В рамках европейских исследований необходимо отметить теоретические работы, проводимые в Университете Шеффилда (Великобритания). С их помощью были построены спектральные разложения для течений в полусфере для ряда простых случаев (например, при точечном центральном электроде) [10]. Значительный вклад внесли специалисты Университета Леобена (Австрия) [2, 11]. Систематические исследования на протяжении десятилетий ведутся в Центре имени Гельмгольца Дрезден – Россендорф (Германия) [12]. В рамках ос-

новой методологии всех вышеописанных исследований прослеживается достаточно ярко выраженная тенденция. Первые работы были связаны с попытками построить аналитические решения, хотя они и имели ограниченную точность. Начиная с 1990-х гг., с развитием вычислительной техники все чаще изучение стало проводиться методами прямого численного моделирования. Позволяя получить достаточно точные решения, они часто не дают возможности понять принципиальные закономерности, характеризующие взаимосвязь между принципиально важными параметрами. Вместе с тем, подобная взаимосвязь может быть изучена только с использованием аналитических подходов, связанных с применением методов математической физики.

Одним из интересных примеров электровихревых течений является осесимметричное течение между двумя плоскостями [13]. Схематически оно показано на рис. 1. Электрический ток распространяется от двух плоских электродов одноименной полярности к третьему, который расположен на достаточно большом расстоянии от оси симметрии. Это порождает электровихревое течение в форме двух встречных струй вдоль оси, причем вдоль обоих электродов жидкий металл подтекает к оси, а посередине межэлектродного расстояния образуется радиально-щелевая струя, расходящаяся от оси. Такое растекание тока встречается в ванне с расплавом в осесимметричных дуговых печах постоянного тока в окрестности оси симметрии, когда диаметр подового электрода примерно равен диаметру пятна контакта дуги с расплавом. Модельная задача для такого течения является предметом исследования в настоящей работе.

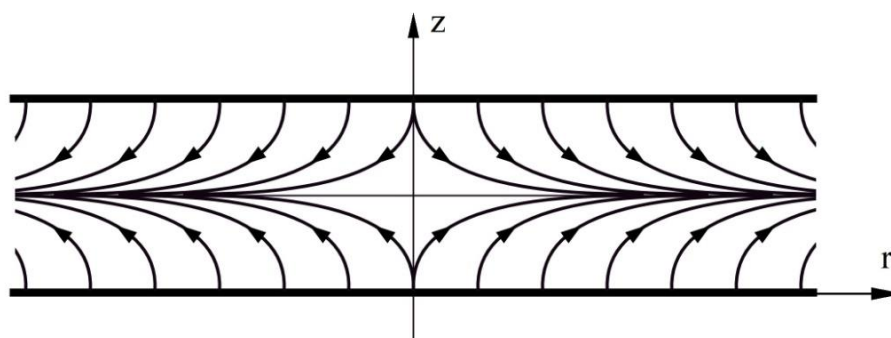


Рис. 1. Схематическое изображение осесимметричного течения между двумя плоскостями (один из примеров электровихревых течений)

Fig. 1. Schematic representation of axisymmetric flow between two planes (one of the examples of electric vortex flows)

Достаточно удобным в случае подобных процессов является использование скалярной функции тока. Это преобразует уравнение Навье-Стокса к уравнению в частных производных, которое имеет четвертый порядок по координате [14, 15]. Опыт решения подобных задач показывает, что течение достаточно быстро выходит на стационарный режим. Это приводит нас к возможности пренебречь производными по времени. Если искать решение в классе фон Кармана, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка [14]. Его решение можно найти, пользуясь последовательными приближениями в рамках теории возмущений, хорошо известной в математической физике. В предыдущих работах было найдено решение вплоть до слагаемых, пропорциональных квадрату параметра электровихревого течения [14, 15]. Этого может оказаться недостаточным в том случае, если мы рассматриваем достаточно интенсивные электрические токи.

В данной работе мы представляем вывод третьего приближения для электровихревого течения, даем выражения для скалярной функции тока и компонент скоростей. Дается оценка, при каких значениях электрических токов оказывается возможным пренебречь нелинейными слагаемыми, а когда – ограничиться лишь более простым квадратичным приближением. Полученные аналитические результаты требуют численной верификации. В таком случае

с вычислительной точки зрения удобно воспользоваться вспомогательной функцией, имеющей смысл завихренности течения: это позволяет понизить порядок исходной системы уравнений до второго. В таком случае задача может быть решена с помощью хорошо известного метода счета на установление [16]. Отдельного внимания заслуживают граничные условия. Так, условие прилипания обычно сводится к условию равенства нулю как самой скалярной функции, так и ее нормальной производной на границе. Однако гораздо удобнее приравнять нулю только саму скалярную функцию, поставив второе условие для функции завихренности. В качестве такого условия мы применяем так называемое условие Тома [17], хорошо зарекомендовавшее себя в различных задачах гидродинамики.

Уравнения для электровихревого течения

Запишем уравнение Навье-Стокса, описывающее движение жидкого металла между двумя плоскостями [3, 14] (1):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}; \quad (1)$$

где \mathbf{v} – скорость движения жидкого металла, ρ – его плотность, p – давление, η – коэффициент вязкости, \mathbf{f} – массовая плотность силы Лоренца, которая может быть выражена следующим образом:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}];$$

где \mathbf{j} – плотность электрического тока, \mathbf{B} – индукция магнитного поля.

Одна из сложностей уравнения (1) состоит в том, что оно содержит градиент давления, достаточно трудный для вычислений. С этой целью можно взять ротор от обеих частей равенства. С учетом несжимаемости жидкого металла это приведет нас к такому выражению:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{\rho} \text{rot}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \eta \Delta \boldsymbol{\omega};$$

где $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v}$ – завихренность течения [9].

Нас будет интересовать осесимметричная задача в цилиндрической системе координат, с учетом отсутствия вращения в азимутальном направлении. Тогда скорость течения можно представить с помощью скалярной функции тока ψ [13, 14]:

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial z}; \quad v_z = \frac{\partial \psi}{r \partial r}.$$

Аналогично можно ввести электрическую функцию тока ϕ , которая даст нам возможность представить компоненты тока таким образом [13, 14]:

$$j_r = -\frac{\partial \phi}{r \partial z}; \quad j_z = \frac{\partial \phi}{r \partial r}.$$

Магнитное поле будет обладать только азимутальной компонентой, определяемой следующим образом [13]:

$$B_\phi = \frac{1}{r} \mu_0 \phi.$$

Так же, как и в большом числе подобных уравнений, удобно было бы переписать (1) в безразмерных единицах. Будем измерять линейные размеры в единицах расстояния между параллельными плоскостями H , единицей для измерения скорости будет $\frac{\eta}{H}$, а для времени

– в $\frac{H^2}{\eta}$. Функция тока будет измеряться в единицах ηH . Также для дальнейшей работы нам

потребуется так называемый параметр электровихревого течения $S = \frac{\mu_0 I^2}{\eta^2 \rho}$, где I – величина

на электрического тока [14]. Как и в большом количестве подобных задач, удобно использовать так называемый класс фон Кармана [13]. В таком случае для гидродинамической и электрической функций тока мы будем иметь выражения:

$$\begin{aligned}\psi(r, z, t) &= r^2 F(z, t); \\ \phi(r, z) &= r^2 \left(z - \frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

Для функции $F(z, t)$ мы можем получить следующее уравнение (2):

$$\frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t} + F \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} = \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + S \left(z - \frac{1}{2} \right). \quad (2)$$

Отметим, что в таком случае независимая переменная z будет меняться в промежутке $0 < z < 1$.

Опыт решения подобных задач показывает, что решение достаточно быстро выходит на стационарный режим. Поэтому можно пренебречь частной производной по времени. Это превратит (2) в обыкновенное дифференциальное уравнение [14] (3):

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} = \frac{d^4 F}{dz^4} + S \left(z - \frac{1}{2} \right). \quad (3)$$

При формулировке граничных условий необходимо учитывать, что $F(z)$ по сути представляет собой скалярную функцию тока. Исходя из физических соображений, как данная функция, так и ее нормальная производная к границе должны принимать нулевые значения. Примерно то же самое можно сказать и про данную функцию [14]:

$$F(0) = F(1) = F'(0) = F'(1) = 0.$$

Данную задачу можно решать как аналитически, с использованием теории возмущений, так и численно.

Аналитическое решение в линейном и нелинейном случае

Решение уравнения (3) удобно искать в виде разложения по степеням параметра электровихревого течения S [14]:

$$F(z) = S^1 F_1(z) + \dots + S^n F_n(z) + \dots$$

В зависимости от требуемой точности мы можем ограничиться любым конечным числом слагаемых. Для их поиска удобно воспользоваться методом последовательных приближений: сначала найти функцию F_1 , а потом вычислять каждую последующую через предыдущие. В предшествующих работах было получено уравнение для первого приближение [14, 15]:

$$\frac{d^4 F_1}{dz^4} + S \left(z - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Обе его части можно четыре раза проинтегрировать и найти константы интегрирования из начальных условий. Таким образом, функция для первого приближения запишется так [14]:

$$F_1(z) = -\frac{1}{120} \left(z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right).$$

Продолжая аналогично данные действия, мы можем получить уравнение для второго приближения:

$$\frac{d^4 F_2}{dz^4} = \varphi_2(z);$$

где

$$\varphi_2(z) = F_1(z) \frac{d^3}{dz^3} F_1(z).$$

Функция для второго приближения выглядит так [15]:

$$F_2(z) = \frac{1}{199584000} z^2 (z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right) (105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3).$$

В предшествующих исследованиях были найдены только первые два приближения. Вместе с тем, для больших значений параметра электровихревого течения S этого оказывается недостаточно. Поэтому возникает необходимость поиска третьего приближения. Для поиска соответствующей функции получим уравнение (4):

$$\frac{d^4 F_3}{dz^4} = \varphi_3(z); \quad (4)$$

где:

$$\varphi_3(z) = (F_1(z) \frac{d^3}{dz^3} F_2(z) + F_2(z) \frac{d^3}{dz^3} F_1(z)).$$

Явная подстановка $F_1(z)$ и $F_2(z)$ дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_3(z) = & \frac{1}{7983360000} (34650z^8 - 138600z^7 + 217140z^6 - 166320z^5 + 62370z^4 - 9240z^3 + 13) \times \\ & \times \left(\frac{5z^4}{2} + \left(\frac{z^2}{2} - (z^5 + 2z^3) \right) \right) + \\ & + \frac{1}{199584000} z^2 (z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{10} - \frac{z^2}{2} \right) (105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3). \end{aligned}$$

Пошагово интегрируя обе части (4) четыре раза и находя константы интегрирования с помощью описанных выше начальных условий, получим:

$$\begin{aligned} F_3(z) = & \frac{-4299750}{53353114214400000} z^2 (z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2124643}{143325} z^{10} + \frac{1898801}{143325} z^8 + \frac{141433}{716625} z^6 + \right. \\ & + \frac{169082}{2149875} z^4 + \frac{46556}{716625} z^5 + z^{12} - 6z^{11} - \frac{128}{716625} - \frac{3116}{2149875} z - \frac{10544}{2149875} z^2 - \\ & \left. - \frac{27364}{2149875} z^3 - \frac{612614}{143325} z^7 - \frac{548068}{28665} z^9 \right). \end{aligned}$$

Решение с точностью до третьего приближения будет выглядеть следующим образом:

$$F(z) \cong S^1 F_1(z) + S^2 F_2(z) + S^3 F_3(z).$$

Возможно получить и следующие приближения, и ниже мы планируем сделать оценку величины функции $F_4(z)$.

Численное решение

С целью верификации решения, полученного в предыдущем разделе, и оценки оправданности использования третьего приближения необходимо также решить задачу численно.

Также важно понять, имеет ли место в действительности быстрый выход решения на стационарный режим. Безусловно, для этого можно взять решение исходной задачи (2). Тем не менее, процесс решения уравнения четвертого порядка представляет отдельную сложность с точки зрения численной схемы и ее устойчивости. По этой причине удобно ввести вспомогательную функцию:

$$W = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Тогда можно заменить уравнение на следующую систему (3-4):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -F \frac{\partial W}{\partial z} + S \left(z - \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}; \quad (3)$$

$$0 = -W + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Уравнение (4) удобно решать с помощью так называемого счета на установление [16], когда эллиптическая задача заменяется на параболическую (5):

$$\mu \frac{\partial F}{\partial t} = -W + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}; \quad (5)$$

где μ – некоторый малый параметр, который обеспечивает разные масштабы времени по сравнению с задачей (3). Задача (3), (5) является типичным примером системы с коэффициентами разного порядка при производных [18]. При малом значении μ решение оказывается достаточно близким к решению (3) – (4), а в случае выхода на стационарный режим – в точности равно ему.

Отдельного внимания заслуживают граничные условия. Для функции F потребуем равенства нулю на границе необходимой нам области:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = 0.$$

Вместо условий равенства нулю нормальной производной для нас будет удобно использовать т.н. условия Тома. Для это разложим по формуле Тейлора с точностью до второго слагаемого функцию F :

$$F(\Delta z, t) \cong F(0, t) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \Delta z^2;$$

где Δz – шаг численной схемы. Учитывая, что согласно нашей модели $F(0, t) = \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$, данное уравнение запишется в форме:

$$F(\Delta z, t) \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \Delta z^2.$$

Сделав соответствующую замену, мы можем получить следующее:

$$W(0, t) = \frac{2}{\Delta z^2} F(\Delta z, t).$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для области около верхней полуплоскости-электрода. Таким образом, мы можем решить систему уравнений (3) и (5) со следующими граничными условиями:

$$F(0, t) = F(1, t) = W(0, t) - \frac{2}{\Delta z^2} F(\Delta z, t) = W(1, t) - \frac{2}{\Delta z^2} F(1 - \Delta z, t) = 0.$$

Расчет показывает, что решение достаточно быстро (за время порядка единицы) выходит на стационарный режим:

$$F(z, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} F_{num}(z).$$

Результат, даваемый первым и вторым приближением при $S = 10^4$, а также результат численного моделирования представлен на рис. 2. Также показано численное решение. Отметим, что результат, даваемый третьим приближением, не приведен по той причине, что он практически полностью совпадает с численным, и их было бы невозможно отличить на данном графике.

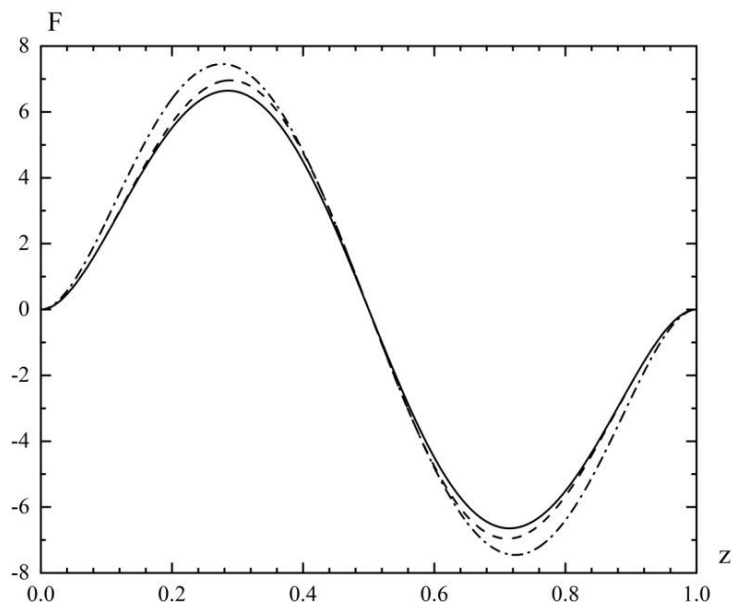


Рис. 2. Зависимость функции F от координаты при $S = 10^5$.
Сплошная линия показывает результат численного моделирования,
штриховая – второе приближение, штрих-пунктирная – первое приближение

Fig. 2. Dependence of the function F on the coordinate if $S = 10^5$.
Solid line shows the result of numerical simulation,
dashed line shows the second approximation, dash-and-dot line shows the first approximation

Чтобы оценить разницу между ними, введем вспомогательную функцию:

$$G(z) = \frac{F_{num}(z) - S^1 F_1(z) - S^2 F_2(z)}{S^3}.$$

Если бы третье приближение давало абсолютно точное решение, данная функция бы совпадала с $F_3(z)$. Значение $G(z)$, полученное с помощью численного моделирования для разных S , показано на рис. 3. Можно видеть, что при больших значениях S различие между ними возрастает. Исходя из данного графика, можно заключить, что область применимости приближения ограничивается значениями $S < S_0$, где $S_0 \sim 10^5$.

Общий вид течения демонстрирует полная функция тока $\psi = r^2 F$, линии уровня которой соответствуют линиям тока жидкости. Рис. 4 показывает картину течения при $S = 10^4$.

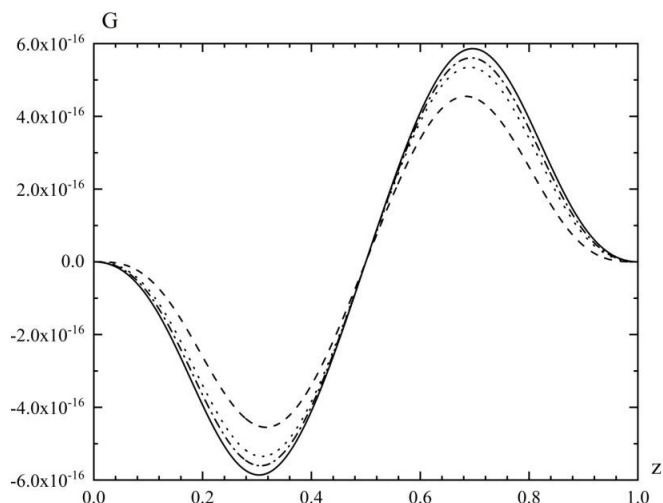


Рис. 3. Зависимость функции G от координаты. Сплошная линия – найденное аналитически третье приближение, штриховая – результат численного моделирования для $S = 5 \cdot 10^4$, пунктирная – для $S = 2 \cdot 10^4$, штрих-пунктирная – для $S = 10^4$

Fig. 3. Dependence of the function G on the coordinate. The solid line is the analytically found third approximation, the dashed line is the result of numerical modeling for $S = 5 \cdot 10^4$, dot line – for $S = 2 \cdot 10^4$, dash-and-dot line – for $S = 10^4$

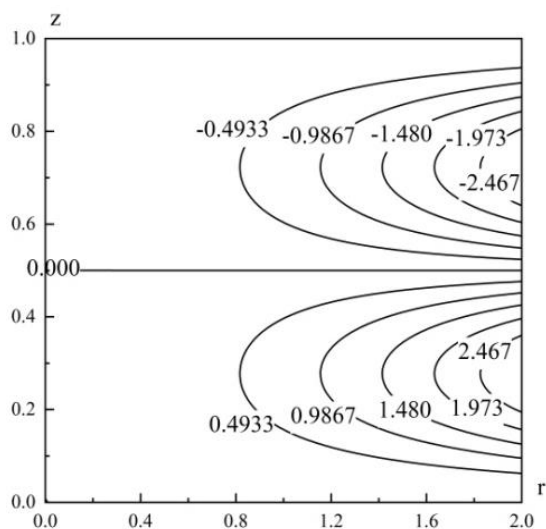


Рис. 4. Функция тока $\psi(r, z)$ при $S = 10^4$.

Fig. 4. Current function $\psi(r, z)$ if $S = 10^4$.

О четвертом приближении

Теоретически вычисление дальнейших приближений можно продолжать практически до бесконечности. Вместе с тем, выражение для каждой из следующих функций $F_n(z)$ оказывается все более сложным (выше было показано, что даже для $F_3(z)$ оно является достаточно громоздким). Тем не менее, имея численное решение, мы вполне можем приближенно определить функцию, соответствующую четвертому приближению. Действительно, с точностью до четвертого приближения функция выглядит так:

$$F(z) \cong S^1 F_1(z) + S^2 F_2(z) + S^3 F_3(z) + S^4 F_4(z).$$

Если мы имеем численный результат $F_{num}(z)$, то предполагая, что $F(z) \cong F_{num}(z)$, мы имеем:

$$F_4(z) \cong \frac{F_{num}(z) - S^1 F_1(z) - S^2 F_2(z) - S^3 F_3(z)}{S^4}.$$

Данная функция представлена на рис. 5. Для сравнения там также приведена $F_3(z)$, уменьшенная на несколько порядков. Можно видеть, что функция для четвертого приближения значительно меньше, чем таковая для третьего. Таким образом действительно, при не слишком больших значениях S оказывается вполне возможным пренебречь четвертым приближением. Также из характерных значений F_3 и F_4 , показанных на данном графике, становится понятным, почему третье приближение оказывается применимым при величинах параметра электровихревого течения, не превышающих 10^5 .

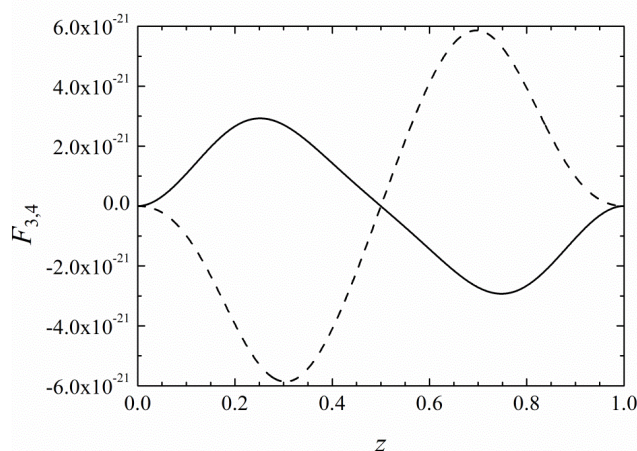


Рис. 5. Типичный вид функций для различных приближений. Сплошная линия показывает $F_4(z)$, пунктирная - $10^{-5} F_3(z)$.

**Fig. 5. Typical type of functions for various approximations
Solid line shows $F_4(z)$, dot line - $10^{-5} F_3(z)$.**

Выводы

Исследовано электровихревое течение между двумя плоскостями при различной величине электрического тока. Наиболее удобно возможность использования той или иной модели описывается с помощью так называемого параметра электровихревого течения S , включающего в себя величину тока и другие основные характеристики задачи. Ранее [14, 15] было построено второе приближение, границы применимости которого, по-видимому, соответствуют его значениям вплоть до 10^3 . В настоящей работе было получено третье приближение, которое дает вполне приемлемую точность при $S < 10^5$. Также был оценен примерный вид функции, характеризующей четвертое приближение.

Вместе с тем, построение дальнейших приближений является достаточно затруднительным. Аналитические выражения для каждого следующего выражения усложняются, и поэтому для еще больших величин токов, видимо, нужно использовать различные численные подходы.

Авторы выражают благодарность А.Ю. Чудновскому (Институт физики Латвийского университета) за помощь в постановке задачи и ценные замечания.

Библиографический список

1. **Жилин, В.Г.** К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений / В.Г. Жилин, Ю.П. Ивочкин, И.О. Тепляков // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 49. № 6. С. 957-960.
2. **Kharicha, A.** Experimental and numerical analysis of free surface deformation in an electrically driven flow / A. Kharicha, I. Teplyakov, Y. Ivochkin, A. Guseva, M. Wu, A. Ludwig // Experimental Thermal and Fluid Science. 2015. V. 62. Pp. 192-201.
3. **Бояревич, В.В.** Электровихревые течения / В.В. Бояревич, Я.Ж. Фрейберг, Е.И. Шилова, Э.В. Щербинин. – Рига: Зинатне, 1985. – 315 с.
4. **Патон, Б.Е.** Исследование магнитогидродинамических явлений в шлаковой ванне при ЭСП / Б.Е. Патон, Б.И. Медовар, Ю.Г. Емельяненко и др. // Проблемы специальной электрометаллургии, 1982. Т. 17. С.3-8.
5. **Хрипченко, С.Ю.** Электровихревые течения в тонких слоях проводящей жидкости / С.Ю. Хрипченко // Магнитная гидродинамика. 1991. Т. 27. № 1. С. 126-129.
6. **Мандрыкин, С.Д.** Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом канале / С.Д. Мандрыкин, И.В. Колесниченко, Г.Л. Лосев, П.Г. Фрик // Вестник Пермского университета. Физика. Вып. 2 (40). С.20-26.
7. **Ячиков, И.М.** Исследование на физической модели поведения токонесущей жидкости в ванне ДППТ под действием внешнего вертикального магнитного поля / И.М. Ячиков, И.В. Портнова, Т.П. Ларина // Известия вузов. Черная металлургия, 2018. № 1. С.28-34.
8. **Ивочкин, Ю.П.** Численное и экспериментальное исследование структуры закрученного электровихревого течения / Ю.П. Ивочкин, И.О. Тепляков, А.А. Гусева, Ю.Н. Токарев // Тепловые процессы в технике. 2012. № 8. С. 345-352.
9. **Михайлов, Е.А.** Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении / Е.А. Михайлов, И.О. Тепляков // Вестник Московского университета: Физ. Астрономия, 2018. № 2. С.39-44.
10. **Sozou, C.** Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current in a hemispherical container / C. Sozou, W.M. Pickering // Journal of Fluid Mechanics, 1976. Vol.73. P. 641-650.
11. **Kharicha, A.** Bohacek Review on Modeling and Simulation of Electroslag Remelting / A. Kharicha, E. Karimi-Sibaki, M. Wu, A. Ludwig. J.: Steel Res. Int., 2018. Vol. 89. 1700100.
12. **Liu, K.** Numerical and experimental investigation of electro-vortex flow in a cylindrical container / K. Liu, F. Stefani, N. Weber, T. Weier, B.W. Li // Magnetohydrodynamics. 2020. Vol. 56. No. 1. Pp. 27-42.
13. **Каудзе, М.З.** Осесимметричное электровихревое течение между двумя плоскостями, индуцируемое переменным током / М.З. Каудзе, А.Ю. Чудновский // Магнитная гидродинамика. 1989. Т. 25. №2. С. 55-62.
14. **Михайлов, Е.А.** Асимптотическое разложение решения уравнения для медленного осесимметричного электровихревого течения между двумя плоскостями / Е.А. Михайлов, А.Ю. Чудновский // Сибирский журнал индустриальной математики, 2020. Т. 23. С. 88-100.
15. **Михайлов, Е.А.** Решение задачи об электровихревом течении между двумя плоскостями при различной величине тока / Е.А. Михайлов, А.Ю. Чудновский // Волны и вихри в сложных средах: 11-я конференция – школа молодых ученых; 1-3 декабря 2020 г. С. 120-123.
16. **Белов, А.А.** Эволюционная факторизация и сверхбыстрый счет на установление / А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С.47-64.
17. **Weinan, E.** Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes / E. Weinan, J.G. Liu // Journal of Computational Physics. 1996. V. 124. P. 368-382.
18. **Бутузов, В.Ф.** Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с разными степенями малого параметра / В.Ф. Бутузов, И.В. Неделько // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т.40. № 6. С. 877-899.

*Дата поступления
в редакцию: 07.10.2021*