УДК 658.512 DOI: 10.46960/1816-210X_2022_2_36

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕСУРСОВ В ЗАДАЧАХ ОБЪЕМНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ДАННЫХ

М.Х. Прилуцкий
ORCID:**0000-0003-0655-2677**e-mail: **pril@iani.unn.ru**
Российский федеральный ядерный центр «Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»
Саров, Россия

О.В. Кривошеев
ORCID:**0000-0002-9987-591X** e-mail: **OLvkrivosheev@rosatom.ru**
Российский федеральный ядерный центр «Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»
Саров, Россия

Рассматриваются задачи объемного планирования в условиях неполноты данных. Построена общая математическая модель, в рамках которой поставлена многокритериальная задача объемного планирования. Предложены процедуры восполнения не достающихся исходных данных, основанные на методах машинного обучения. Предложен эффективный алгоритм решения задачи объемного планирования, основанный на последовательном решении систем линейных двусторонних алгебраических неравенств транспортного типа.

Ключевые слова: производственные ресурсы, объемное планирование, неполнота исходных данных, методы машинного обучения, многокритериальная задача, решение систем линейных двусторонних алгебраических неравенств.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Прилуцкий, М.Х. Распределение производственных ресурсов в задачах объемного планирования в условиях неполноты данных / М.Х. Прилуцкий, О.В. Кривошеев // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2022. № 2. С. 36-43. DOI: 10.46960/1816-210X_2022_2_36

DISTRIBUTION OF PRODUCTION RESOURCES IN VOLUMETRIC PLANNING PROBLEMS UNDER CONDITIONS OF INCOMPLETE DATA

M.Kh. Prilutsky
ORCID:**0000-0003-0655-2677**e-mail: **pril@iani.unn.ru**
Russian Federal Nuclear Center –
The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

O.V. Krivosheev
ORCID:**0000-0002-9987-591X** e-mail: **OLvkrivosheev@rosatom.ru**
Russian Federal Nuclear Center –
The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

Abstract. Problems of volumetric planning under conditions of incomplete data are considered. A general mathematical model is constructed, within the framework of which a multi-criteria problem of volumetric planning is set. Procedures for filling of missing source data based on machine learning methods, are proposed. Effective algorithm for solving of the volumetric planning problem is proposed, based on the sequential solution of systems of linear bilateral algebraic inequalities of transport type.

***Key words**:* production resources, extensive planning, incomplete initial data, machine learning methods, multi-criterion task, solving of systems of linear bilateral algebraic inequalities.

FOR CITATION: M.Kh. Prilutsky, O.V. Krivosheev. Distribution of production resources in volumetric planning problems under conditions of incomplete data. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2022. № 2. Pp. 36-43. DOI: 10.46960/1816-210X_2022_2_36

Введение

Процесс распределения производственных ресурсов [1] определяется довольно общей концепцией, в рамках которой рассматривается широкий класс задач распределения ресурсов, относящихся к теории расписаний [2] и формализуемых в сетевых канонических структурах. Принципиальная сложность, помимо большой размерности, заключается в том, что проблематично точно задать исходные параметры, особенно когда речь идет о планировании производства новых высокотехнологичных изделий. Поэтому для ряда исходных параметров вместо точного и подробного описания числовых значений приходится оперировать с обобщенными, приближенными оценками, использование которых приводит, как правило, к неадекватным результатам. Подобные системы мы будем называть *системами распределения производственных ресурсов в условиях неполноты данных.*

Задачи этого класса всегда актуальны: это обусловлено значительным многообразием сфер производственной деятельности, порождающих подобные проблемы. К наиболее типичным в этом случае отраслям производства, где находят применение задачи распределения ресурсов, относятся: организационно-экономические (управление производственной деятельностью, цифровизация процессов управления, планирование научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ); разработка программного обеспечения; изготовление сложных наукоемких изделий; строительство объектов и инфраструктуры; управление ресурсами многопроцессорных вычислительных комплексов при использовании технологий параллельных вычислений и др.

1. Содержательное описание проблемы распределения производственных ресурсов при решении задач планирования в условиях неполноты данных

В рамках концепции [2] будем моделировать процессы распределения производственных ресурсов сетевой канонической структурой – взвешенными ориентированными графами без петель и контуров, элементам которых поставлены в соответствие определенные характеристики. Проблема оптимального планирования заключается в определении порядка выполнения заданной совокупности работ и стратегии распределения ресурсов между работами, при которых определенные обобщенные показатели функционирования системы принимают экстремальные значения.

Особенностями рассматриваемых производственных систем являются условия неполноты данных. Для выделенных фрагментов текущего плана производства, где еще не определена полная технология изготовления, не выделены конкретные единицы необходимых ресурсов, а заданы лишь группы соответствующих ресурсов – рабочие группы, подразделения, цеха и др., требуется предоставлять возможность учитывать для работ соответствующие им ресурсы с разным уровнем детализации. Детализация зависит от текущей проработки технологического процесса. Поэтому математические модели, формализующие процессы планирования, должны позволять одновременно описывать ресурсы с различным уровнем детализации. Для этого при распределении производственных ресурсов в условиях неполноты данных осуществляется перестроение входных параметров модели изготовления изделий. Это происходит следующим образом: в случае неполного описания группы операций, например, комплектов, узлов или подузлов, происходит замена на объединенную операцию, потребляемый ресурс которой определяется как новый ресурс, представляющий собой объединение ресурсов, соответствующих объединяемым операциям. Длительность и гранулярность таких объединенных операций задаются пользователем, исходя из доступной информации о «близких» технологических процессах, которые предприятие уже использовало в своей практике. Такой подход обладает следующими важными преимуществами:

- в модели могут одновременно присутствовать как изделия с детализированным, так и с неполным описанием технологического процесса;
- степень детализации изделий с неполным описанием может управляться путем различной гранулярности объединяемых операций. В объединенную операцию могут быть включены операции, которые определяются исходя из доступной у пользователя информации о «близких» технологических процессов, которые предприятие уже использовала в своей практике.

Для реализации указанного подхода, с целью повышения достоверности решения задач распределения производственных ресурсов в условиях неполноты данных, могут быть использованы методы машинного обучения. Канонический подход к решению комплекса задач производственного планирования включает в себя взаимозависимую последовательность задач планирования [2]. Это – задачи объемного планирования, объемно-календарного планирования и сменно-суточного планирования. В задаче объемного планирования исходные данные, определяющие математическую модель, учитываются без конкретизации. Решается задача распределения общего плана предприятия по различным показателям искомого плана, таким как заказы, изделия, комплекты, узлы, такты планирования, подразделения предприятия, группы ресурсов, ресурсы и др. План предприятия в задачах объемного планирования задается в объемных показателях (нормо-часы, рубли, условные тонны). В задаче объемно-календарного планирования уже учитываются номенклатура изделий, время функционирования системы. Каждая работа для своего выполнения использует определенную совокупность ресурсов согласно заданному для этой работы технологическому маршруту. Для каждой работы определены время и затраты ресурсов на ее выполнение, которое характеризуется не только потреблением, но и производством ресурсов (полуфабрикатов), используемых в дальнейшем процессе производства. При обычных для таких задач условиях (работа выполняется без перерывов, конкретный ресурс не может одновременно использоваться несколькими работами, работа не может начать выполняться, если она полностью не обеспечена необходимыми ресурсами) требуется построить такое расписание выполнения работ, которому соответствуют «наилучшие» оценки качества функционирования системы. В задачах сменно-суточного планирования для каждой работы указана длительность изготовления и ресурсы, которые должны быть использованы для ее выполнения. Для каждого ресурса указано время его поступления в систему. Оптимальным решением задачи сменно-суточного планирования является план производства, обеспеченный ресурсами, для которого достигают экстремальные значения критерии, определяющие условия эффективного функционирования производственной системы.

В условиях неполноты данных формализация математических моделей объемного, объемно-календарного и сменно-суточного планирования позволяет для выделенных фрагментов текущего плана производства, для которых не определены конкретные единицы необходимых ресурсов, определять в объемных показателях необходимые группы ресурсов, которые обеспечат выполнение этих фрагментов плана.

2. Задача объемного планирования

2.1 Содержательное описание.

Решается задача распределения общего плана предприятия по различным показателям искомого плана: заказам, изделиям, комплектам, узлам (сборочным единицам), подузлам, деталям, тактам планирования, подразделениям предприятия, группам оборудования и др. С целью сохранения преемственности в математических подходах к получению конструктивных решений [2,5] план предприятия задается в объемных показателях планирования – нормо-часах, рублях, условных тоннах. Формально задача объемного планирования может быть поставлена как задача определения таких объемов работ, для которых выполняются ограничения, связанные с заданными показателями искомого плана, и достигают экстремальные значения критерии, определяющие условия эффективного функционирования производственной системы [2-4].

2.2. Математическая модель и постановка задачи.

Для задач рассматриваемого класса для сохранения содержательного смысла вместо векторов варьируемых переменных используются многоиндексные матрицы неизвестных. В таких задачах суммирование может осуществляться по одному или нескольким индексам. Число индексов в задачах распределения ресурсов может быть достаточно большим. Так, в [3] рассматривается четырехиндексная, в [2] – пятииндексная система ограничений. Поэтому для удобства изложения мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [4]. Пусть $N(s)$ − множество натуральных чисел от 1 до s. Каждому натуральному l из этого множества поставим в соответствие параметр (индекс)j_l, который может принимать значения из множества $J_l = \{1,2,\dots,n_l\}$, $n_l \geq 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$, $f \subseteq N(s)$. Назовем *t*-индексом упорядоченный наборF_f=$(j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t})$, тогда множество всех *t*-индексов выражается через декартово произведение k_tмножеств $E_f = J_{k_1} \times J_{k_2} \times \dots \times J_{k_t}, t = \overline{1,s}$, на которых определены индексы. Каждому *t*-индексуF_fпоставим в соответствие действительное число $z_{F_f}, F_f \in E_f$.Тогда совокупность таких чисел для всех возможных значений индексов $j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t}$определяет *t*-индексную матрицу, которая обозначается как$\{z_{j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t}}\} = \{z_{F_f}\}$. Если $\bar{f} = N(s) \setminus f$, то через $F = F_f F_{\bar{f}}$ обозначим *s*-индексный набор $(j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t}, j_{k_{t+1}}, \dots, j_{k_s})$.Полагаем для общности, что если $f = \emptyset$, то E_f состоит из специально выделенного 0-индекса $F_\emptyset$, где$F = F_\emptyset F$, и запись $\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\bar{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \dots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f F_{\bar{f}}}$, $F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}$ определяет многоиндексную матрицу в сокращенной записи. Математическая модель проблемы объемного планирования с использованием многоиндексных матриц может задаваться через систему линейных двусторонних алгебраических неравенств транспортного типа (коэффициенты матрицы ограничений могут принимать только значения из множества $\{1, -1, 0\}$:

$$a_{F_{\bar{f}}} \leq \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\bar{f}}} \leq b_{F_{\bar{f}}}, F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}, f \in M, \tag{1}$$

где $M \subseteq 2^{N(s)}$и $a_{F_{\bar{f}}}$ и $b_{F_{\bar{f}}}$определяют минимальные и максимальные величины, в рамках которых должны находиться объемы работ, определяющие искомые планы [2, 5-8].

С помощью ограничений (1) фактически можно записать двусторонние, односторонние неравенства и ограничения типа «равно» [2,9]. В задаче объемного планирования необходимо найти такие величины$x_{F_f F_{\bar{f}}}$, для которых выполняются условия типа (1) и достигают минимальные значения критерии, которые в рассматриваемой постановке определяются контролируемыми ограничениями системы. В качестве контролируемых ограничений, в зависимости от особенностей производственных систем, могут выступать любые из ограничений, составляющих математическую модель проблемы объемного планирования.

Так, если I – множество номеров подразделений предприятия, J – множество номеров заказов, K – множество номеров изделий, L – множество номеров комплектов, S – множество узлов, D – множество номеров деталей, T – множество номеров тактов планирования, то математическая модель проблемы объемного планирования будет представлять собой систему линейных, семииндексных двусторонних алгебраических неравенств. Если $x_{ijklsdt}$ – объем работ, который будет выполнен в подразделении i по заказу j изделию k комплекту lузлу s детали dв такт планирования t, и заданы ограничения на минимальный $B^-_{kst}(a_{F_{\bar{f}}})$ и максимальный $B^+_{kst}(b_{F_{\bar{f}}})$ объем работ, который должен быть выполнен по изделию k узлу s в такт планирования t, $0 \le B^-_{kst} \le B^+_{kst}$, $i \in I, \rightleftarrows j \in J, k \in K, l \in L, s \in S, d \in D, t \in T$, то соответствующие ограничения математической модели будут иметь вид:

$$B^-_{kst} \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{d \in D} x_{ijklsdt} \le B^+_{kst}, k \in K, s \in S, t \in T, \quad (2)$$

Тогда формально задача объемного планирования для подразделений предприятия может быть поставлена как задача определения таких величин: $x_{ijklsdt}$ – объемы работ, которые должны быть выполнены в подразделении i по заказу j изделию k комплекту l узлу s детали d в такт планирования t, для которых выполняются ограничения математической модели типа (2),и на которых достигается экстремальное значение критерия оптимизации, который определяет условия эффективного функционирования производственной системы. Критерии могут формироваться на основе любого ограничения типа (2) математической модели. Пусть для производственной системы в качестве контролируемых ограничений выступают ограничения $C^-_j \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{d \in D} \sum \sum x_{ijklsdt} \le C^+_j, j \in J$, где C^-_j, C^+_j определяют соответственно минимальные и максимальные объемы работ, планируемые предприятием по заказу j, $j \in J$. Тогда в качестве критериев оптимальности для рассматриваемой задачи может быть выбран функционал $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j) \to \min$, $j \in J$, где $\vec{x}_j = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} \sum_{s \in S} \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} x_{ijklsdt}$. Функции $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j)$ являются неотрицательными по обе стороны от нуля, и в нуле принимающими нулевые значения. Эти функции определяют оценки отклонений искомых показателей от «желательных» показателей плана. В качестве таких функций могут быть выбраны кусочно-линейные, а свертку можно провести как линейную комбинацию этих функций. В этом случае для формальной постановки задачи необходимо, чтобы пользователь указал углы наклона линейных участков функций и коэффициенты свертки. Однако, как показал опыт внедрения [2, 5, 6], пользователь может лишь указать границы для величин отклонений, в которых эти величины являются «отличными», «очень хорошими», «хорошими», «удовлетворительными» и др. Тогда функции отклонений $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j)$ должны быть кусочно-постоянными, разбивающими множество величин отклонений по каждому критерию на области «качества» отклонений. Такими функциями могут быть функции, область значений которых задается множеством целых неотрицательных чисел от 1 до p (1 – «отлично», 2 – «очень хорошо» и т.д.). Определим функцию $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j)$ следующим образом. Для каждой компоненты j рассмотрим совокупность вложенных друг в друга сегментов $S_j^{t_j}$, $S_j^{t_j} \subseteq S_j^{t_j+1}$, $t_j = \overline{1, p-1}$, p≥1, $j \in J$.. Тогда $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j) = t_j$, если значение аргумента функции принадлежит сегменту $S_j^{t_j}$, но не принадлежит вложенному сегменту $S_j^{t_j-1}$. После сделанных преобразований в качестве критериев оптимальности определены функции $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j) \to \min$, $j \in J$. Содержательно введение данных критериев означает, что для каждого заказа мы стремимся определить такой объем работ, который определяет наилучшее из возможных условий. При этом «лучшим» условием для заказа j является выделение этому заказу объем работ из сегмента, для которого $t_j = 1$, а «худшим» - выделение объема работ из сегмента, для которого $t_j = p$. При условии, что для заказа j значение функции равно $t_j = p$, означает, что соответствующий сегмент просто совпадает с двусторонним ограничением математической модели по этому заказу. Получили многокритериальную задачу с критериями $f_j(\vec{x}_j, C^-_j, C^+_j) \to \min$, $j \in J$, и ограничениями типа (2). Отличительная особенность поставленной задачи заключается в том, что если нам известно допустимое решение системы ограничений задачи объемного планирования, то нам известен вектор значений номеров сегментов, соответствующих этому решению. С другой стороны, задание вектора значений номеров сегментов определяет систему линейных двусторонних алгебраических неравенств, состоящую из ограничений исходной математической модели и совокупности из $|J|$ линейных двусторонних алгебраических неравенств, соответствующих вектору значений номеров сегментов. Отсюда, если $|J| = n$, то существует np различных наборов значений сегментов. Каждому из них соответствует система линейных двусторонних алгебраических неравенств транспортного типа. Будем говорить, что набор значений сегментов «допустимый», если соответствующая ему система линейных двусторонних ограничений транспортного типа совместна.

2.3. Определение параметров неполных данных с использованием методов машинного обучения.

Предлагаемый подход восполнения неполных данных продемонстрируем на следующем примере. Пусть по заказу j_0 изделию k_0 комплекту l_0существует узел s_0, для которого не определены ограничения на объемы работ, требуемые для его выполнения. Пусть существуют схожие изделия (из тех, которые предприятие уже ранее изготавливало), для которых все исходные параметры заданы. Предлагаемый подход восполнения недостающих данных состоит из следующих шагов. На первом шаге (*поиск соответствующих узлов*) алгоритма восстановления для узла s_0 находят соответствующее узлы в схожих изделиях. На втором шаге (*восстановление ограничений на объемы работ, требуемые для изготовления узла* s_0) для узлаs_0 на основании соответствующих схожих узлов восстанавливаются требуемые ограничения. Далее восстановленные данные используются в алгоритме решения задачи объемного планирования. Восполнение исходных данных происходит следующим образом. Для узлаs_0с неполным описанием находится множество аналогичных узлов. Вводится «мера схожести» между узлами, и тогда задача поиска наиболее схожего узла ставится как оптимизационная задача поиска наиболее схожего узла. При оценке меры схожести для каждого узла строится вектор признаков, учитывающий множество комплектов, в которые входит узел s_0и множество подузлов, входящих в узелs_0. Тогда мера схожести узлов определяется как свертка мер схожести узла s_0, множества комплектов, в которые входит узел s_0и множество подузлов, входящих в узел s_0. При этом принципиальным является вопрос определения коэффициентов свертки, так как от этих коэффициентов зависит достоверность восполняемой недостающей информации. Поиск оптимальных значений коэффициентов свертки осуществляется методами машинного обучения. Рассматривается обучающее множество, учитывающее размер обучающей выборки, исходный узел s_0, множество узлов аналогов. Формируется целевая функция потерь как мера ошибочных распознаваний соответствующего узла среди узлов изделий аналогов. Тем самым задача обучения значений весовых коэффициентов свертки меры схожести узлов ставится как задача оптимизации.

Одной из проблем, возникающих при решении практических задач машинного обучения, является переобучение модели. С целью контроля возможного переобучения, множество данных разбивается на обучающее множество и валидационное множество. Тогда, при решении задачи поиска коэффициентов свертки, контролируются функция потерь, рассчитанные отдельно на обучающем и валидационном множествах. При этом рекордное значение вектора весовых коэффициентов определяется на основании валидационного множества.

2.4. Алгоритмы решения задачи объемного планирования.

Построенная математическая модель учитывает следующие основные особенности, обусловленные использованием многоиндексных параметров с различной индексной размерностью: ограничения математической модели представляют собой систему линейных алгебраических двусторонних неравенств транспортного типа, каждое из которых получается суммированием по некоторым индексам; критерии оптимизационных задач задаются в виде ступенчатых функций, аргументами которых так же являются суммы значений варьируемых параметров по некоторым индексам [3].

Для решения поставленной многокритериальной задачи предлагается осуществить свертку критериев оптимальности [7], для чего на множестве частных критериев оптимальности установим полный линейный порядок. Не уменьшая общности, путем перенумерации частных критериев оптимальности, будем считать, что чем меньше номер критерия, тем критерий «предпочтительнее», согласно введенному порядку. Очевидно, что если $\rho = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ - набор значений номеров сегментов, где n - число частных критериев оптимальности, а $\upsilon_i \in \{1,\ldots,p\}$, то оптимальное решение поставленной задачи достигается на таком наборе, для которого выполняется:

- υ_1^0 – номер сегмента, при котором набор $\rho = (\upsilon_1^0, p, p, \ldots, p)$ является допустимым, при условии, что либо $\upsilon_1^0 = 1$, либо при значении $\upsilon_1^0 - 1$система ограничений не совместна;
- υ_2^0 – номер сегмента, при котором набор $\rho = (\upsilon_1^0, \upsilon_2^0, p, \ldots, p)$ является допустимым, при условии, что либо $\upsilon_2^0 = 1$, либо при значении $\upsilon_2^0 - 1$система ограничений не совместна;
- υ_n^0 – номер сегмента, при котором набор $\rho = (\upsilon_1^0, \upsilon_2^0, , \upsilon_i^0, \ldots, \upsilon_n^0)$ является допустимым, при условии, что либо $\upsilon_n^0 = 1$, либо при значении $\upsilon_n^0 - 1$ система ограничений не совместна.

Отсюда следует, что для решения задачи объемного планирования необходимо найти вектор $\rho^0 = (\upsilon_1^0, \upsilon_2^0, , \upsilon_i^0, \ldots, \upsilon_n^0)$, для чего нужно проверить на совместность np систем линейных алгебраических двусторонних неравенств транспортного типа. Учитывая тот факт, что для введенной системы сегментов имеет место «вложенность» сегментов $S_j^{t_j} \subseteq S_j^{t_j+1}$, $t_j = \overline{1, p-1}$, p≥1, $j = \overline{1,n}$, то число проверок на совместность имеет порядок $n\,log_2\,p$.Как показал опыт внедрения [2, 4, 5], для задач объемного планирования обычно выполняются условия, при которых задачи могут быть сведены к задаче распределения однородного ресурса в сильносвязной иерархической структуре [8]. Это классы задач, для которых множество Mсостоит из системы вложенных друг в друга подмножеств индексов. Эти задачи на языке теории графов ставятся следующим образом. Обозначим через $G = (V, A), A \subseteq V^2$ орграф, который представляет собой корневое ориентированное дерево. Пусть R_iи Q_i соответственно множество вершин графа, непосредственно предшествующих вершине i и непосредственно следующих после вершины i. Вершины графа разобьем на множества$\{i_0\}$, V^t, V^k – корень дерева, множество листьев и остальные вершины соответственно, при этом$R_{i_0} = \emptyset, |R_i| = 1,\ i \in V \setminus \{i_0\}, Q_i \neq \emptyset, i \in V \backslash V^t, Q_i = \emptyset, i \in V^t$. При выполнении этих условий из [8] следуют необходимые и достаточные условия совместности системы линейных двусторонних алгебраических неравенств транспортного типа, основанные на алгоритме приведенных границ с вычислительной сложностью $O(n)$, предложенном в [8]. В общем случае для проверки на совместность систем линейных неравенств известны различные классические результаты линейной алгебры (теорема Александрова – Фань-Цзы, теорема Черникова [9]). Кроме того, для проверки совместности и получения решения совместных систем могут быть использованы первый этап двухэтапного симплекс-метода, метод эллипсоидов [10] с оценкой $O(n^3(n+m)L)$, алгоритм Кармаркара [11] с оценкой $O(n^{4,5} \log n)$, где n – количество неизвестных в системе, а m – количество неравенств. Кроме точных методов, для решения систем линейных неравенств могут быть использованы итерационные методы, например, релаксационный метод ортогональных проекций Агмона-Моцкина [12] и его модификация [13], хорошо зарекомендовавшая себя для случая транспортных систем линейных двусторонних многоиндексных неравенств [14].

Заключение

Полученные результаты составили основу разработанных программных средств распределения производственных ресурсов при решении задач планирования для предприятий ВПК (АО «Уралтрансмаш», АО «Концерн «Алмаз-Антей», ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ). Внедрение разработанных программных средств в практику планирования позволяет сделать вывод об адекватности построенных математических моделей реальным условиям функционирования производственных высокотехнологичных предприятий.

Библиографический список

1. **Лазарев, А.А.** Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора / А.А. Лазарев, Е.Р. Гафаров. − М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2006.
2. **Прилуцкий, М.Х.** Задачи оптимального планирования как задачи распределения ресурсов в сетевых канонических структурах / М.Х. Прилуцкий, В.С. Власов, О.В. Кривошеев // Информационные технологии. 2017. Т. 23. № 9. С. 650-657.
3. **Прилуцкий, М.Х.** Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования. // Известия академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78-82.
4. **Раскин, Л.Г.** Многоиндексные задачи линейного программирования (теория, методы, приложения) / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.
5. **Кривошеев, О.В.** Анализ тенденций развития цифровых платформ для выбора архитектурных решений при создании цифрового предприятия // В сборнике: Информационные системы и технологии – 2019. Сборник материалов XXV Международной научно-технической конференции. 2019. С. 288-292.
6. **Афраймович, Л.Г.** Многопродуктовые потоки в древовидных сетях / Л.Г. Айфраймович, М.Х. Прилуцкий // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2008. №. 2. С. 57-63.
7. **Прилуцкий, М.Х.** Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах. // Автоматика и телемеханика, 1996. № 2. С. 24-29.
8. **Прилуцкий, М.Х.** Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры. // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления SICPRO’2000». – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2000, С. 2038-2049.
9. **Черников, С.Н.** Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
10. **Пападимитриу, Х.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
11. **Franklin J.** Convergence in Karmarkar's Algorithm for Linear Programming. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 24, No. 4 (Aug., 1987). Pp. 928-945.
12. **Motzkin T.S., Schoenberg I.J.** The relaxation method for linear inequalities. // Caned. J. Moth. 1954. V. 6. № 3. P. 393-404.
13. **Афраймович, Л.Г.** Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах / Л.Г. Айфраймович, М.Х. Прилуцкий // Автоматика и телемеханика. 2006. № 6. С. 194-205.
14. **Прилуцкий, М.Х.** Задачи объемно-календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства / М.Х. Прилуцкий, И.В. Нетронин // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 4(127). С. 36-43.

Дата поступления
в редакцию: 14.03.2022