УДК 517.977 ***DOI: 10.46960/1816-210X_2022_4_37***

СТАТИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ МАТРИЦ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СКАЛЯРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

А.В. Мухин
ORCID: **0000-0003-2402-7016** e-mail: **myhin-aleksey@yandex.ru**
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена задача стабилизации неустойчивых матриц линейных непрерывных стационарных систем с помощью скалярных регуляторов по выходу. В отличие от произвольной матрицы статического регулятора, скалярный регулятор определяется одним параметром. Благодаря этому упрощается как процедура синтеза регулятора, так и последующая реализация системы управления. Показано, что параметр скалярного регулятора, обеспечивающего устойчивость матрицы системы, может быть найден без применения алгебраических критериев, аппарата матричных неравенств, а также других процедур синтеза. Для реализации скалярного регулятора необходимо обеспечить выполнение двух основных условий. Во-первых, в матрице системы должен существовать хотя бы один устойчивый диагональный блок любой размерности, что вполне естественно для задач статической стабилизации по выходу. Во-вторых, в управлении и измерении должны использоваться одни и те же переменные состояния. Для этого требуется обеспечить равенство размерностей входа и выхода.

Ключевые слова: гурвицева матрица, статический регулятор, лемма Шура, теорема Гершгорина, теорема Ляпунова, матричная норма, задача выпуклого программирования, линейные матричные неравенства.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мухин, А.В. Статическая стабилизация неустойчивых матриц линейных систем с помощью скалярных регуляторов / А.В. Мухин // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2022. № 4. С. 37-45. DOI: 10.46960/1816-210X_2022_4_37

STATIC STABILIZATION OF UNSTABLE MATRICES IN LINEAR SYSTEMS USING SCALAR CONTROLLERS

A.V. Mukhin
ORCID: **0000-0003-2402-7016** e-mail: **myhin-aleksey@yandex.ru**
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The problem of stabilization of unstable matrices in linear time-invariant continuous-time systems using scalar output feedback controllers is considered. As opposed to an arbitrary matrix of a static controller, the scalar controller is defined by a single parameter. Thereby, both the controller synthesis procedure and the subsequent implementation of the control system are streamlined. According to the study, the scalar controller parameter that ensures system matrix stability may be determined without the use of algebraic criteria, matrix inequality calculator, and other synthesis procedures. Two primary conditions should be met to allow the scalar controller realization. Firstly, the system matrix should have at least one stable diagonal block in any number of dimensions, that is rather natural for static output feedback stabilization. Secondly, control and measurement should use the same state variables. This requires equal input and output dimensions.

Key words: Hurwitz matrix, static controller, Schur lemma, Gershgorin theorem, Lyapunov theorem, matrix norm, convex programming problem, linear matrix inequalities.

FOR CITATION: A.V. Mukhin. Static stabilization of unstable matrices in linear systems using scalar controllers. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2022. № 4. Pp. 37-45. DOI: 10.46960/1816-210X_2022_4_37

© Мухин А.В., 2022

Введение

Стабилизация неустойчивых матриц линейных систем с помощью статических регуляторов по выходу пользуется большим спросом в решении широкого круга задач управления. Некоторые подходы к ее решению можно найти в работах [1-6]. Наиболее широко используемые алгоритмы поиска решений приведены в работах [7-12]. В общем постановка задачи является NP-трудной [13].

В статье представлено решение задачи статической стабилизации неустойчивых матриц линейных систем с помощью скалярных регуляторов по выходу, которые можно считать частным случаем произвольных статических регуляторов по выходу. Основная идея использования такого регулятора состоит в стабилизации матрицы системы за счет смещения спектра неустойчивого подпространства в левую комплексную полуплоскость. Для этого достаточно задать скалярный параметр, величина которого может быть найдена аналитическим путем. Отдельный интерес представляет синтез скалярного регулятора минимальной величины. Показано, что задача синтеза такого регулятора является выпуклой и сводится к минимизации линейной функции на множестве, заданном линейным матричным неравенством. Основным требованием для реализации скалярного регулятора является совпадение управляемых и измеряемых переменных, а также блочно-однородный вид матриц входа и выхода [6]. Несмотря на то, что величина количества входов при этом может быть избыточной по сравнению с аналогичным значением в случае произвольного статического регулятора по выходу, предлагаемый регулятор может использоваться для сравнительного анализа и исследования переходных процессов в системе. Предполагается также, что в матрице системы существует хотя бы один устойчивый диагональный блок произвольной размерности.

Постановка задачи

Рассмотрим неустойчивую линейную непрерывную стационарную систему:

$$\dot{x} = Ax, \; x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $A \in R^{n\times n}$ – невырожденная матрица системы.

Для стабилизации (1) применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Соответствующее уравнение примет замкнутый вид:

$$\dot{x} = A_c x = (A + BKC)x \tag{2}$$

где $B \in R^{n\times m}$ – матрица входа, $K \in R^{m\times p}$ – матрица регулятора, $C \in R^{p\times n}$ – матрица выхода.

Если $p = n$, то получаем статический регулятор по состоянию. Решение такой задачи сводится к решению линейного матричного неравенства и поэтому не представляет никаких трудностей. В случае $p < n$ имеем регулятор по измеряемому выходу. Соответствующая задача сводится к решению билинейного матричного неравенства [14]:

$$AY + YA^T + BKCY + YC^TK^TB^T < 0, \tag{3}$$

где $Y = Y^T > 0$.

В работе [13] отмечено, что задача поиска матрицы статического регулятора K, обеспечивающего устойчивость матрицы замкнутой системы (2), является частным случаем более общей проблемы, которая может быть сформулирована следующим образом.

Проблема. Дано аффинное семейство матриц:

$$A(q) = A_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} q_i A_i, \tag{4}$$

где A_i – заданные квадратные матрицы, а $q_i \in R$. Существует ли в этом семействе хотя бы одна устойчивая матрица?

В работе [13] также отмечено, что теоретическое решение этой проблемы неизвестно. В работе [6] показано, что если матрицы входа и выхода можно привести к блочно-однородному виду, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы в матрице системы существовал один устойчивый диагональный блок, размерность входа обеспечивала управляемость неустойчивого блока матрицы системы, а размерность выхода была равна размерности последнего.

Рассмотрим частный случай задачи (4) при условии $q_i = q$. Зададим сумму матриц A_i в (4) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{l} A_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (5)$$

Тогда параметрическое семейство матриц примет один из двух видов:

$$A(q) = A + q \begin{cases} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (6)$$

Для приведения матрицы замкнутой системы (2) к семейству матриц (6) необходимо, чтобы матрицы входа и выхода удовлетворяли условиям:

$$B = C^T = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

или:

$$B = C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что управляемые и измеряемые переменные должны совпадать. Это возможно только при равенстве $p = m$. Отметим, что в более общем случае, единичные блоки матриц входа и выхода можно заменить квадратными матрицами полного ранга. Таким образом, задача звучит следующим образом: найти параметр q, обеспечивающий гурвицевость матриц вида (6), эквивалентных матрице замкнутой системы (2) со скалярным регулятором $K = qI_p$. Как будет показано ниже, конкретный вид матрицы (6) зависит от расположения неустойчивого подпространства, определяемого неустойчивым диагональным блоком матрицы системы.

Синтез скалярных регуляторов по выходу

Рассмотрим произвольную действительную невырожденную матрицу линейной системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Будем считать, что в матрице (9) существует устойчивое подпространство в виде диагонального блока произвольной размерности. Это означает, что такую матрицу можно разбить на блоки таким образом, что один из диагональных блоков будет устойчивым. Наиболее вероятен случай, когда размерность устойчивого блока будет меньше размерности неустойчивого. В соответствии с этим, представим матрицу системы в блочном виде с квадратными диагональными блоками следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Далее докажем лемму:

Лемма 1. Необходимым условием существования статического регулятора по выходу, обеспечивающего гурвицевость матрицы замкнутой системы (2) является устойчивость хотя бы одного диагонального блока в исходной матрице (10).

Доказательство. Пусть в матрице A один из диагональных блоков является гурвицевым. Разобьем эту матрицу на блоки в соответствии с (10). Для определенности будем считать, что блок $A_{22} \in R^{k\times k}$, где $1 \le k < n$, гурвицев. Исходя из этого, зададим матрицы входа и выхода в виде (7), а соответствующие размерности приравняем к размерности неустойчивого блока:

$$p = m = n - k. \tag{11}$$

Тогда, в соответствии с (6), матрица замкнутой системы (2) со скалярным регулятором примет вид:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} + qI & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

В соответствии с теоремой Гершгорина о локализации собственных значений [15], весь спектр такой матрицы будет локализован в объединении в объединении $n-k$ кругов:

$$\bigcup_1^{n-k} \left\{ \lambda \in C : |\lambda - (a_{ii} + q)| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \right\} = G(A^{11}), \tag{13}$$

а также в объединении k кругов:

$$\bigcup_1^{k} \left\{ \lambda \in C : |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \right\} = G(A^{22}), \tag{14}$$

где $A^{11} = [A_{11} + qI \quad A_{12}]$, $A^{11} = [A_{21} \quad A_{22}]$.

За счет выбора отрицательного значения параметра q можно добиться расположения всех кругов $G(A^{11})$ в левой комплексной полуплоскости. Если при этом условие гурвицевости матрицы A_{22} не выполняется, то стабилизировать всю матрицу (12) параметром q, перемещая только круги $G(A^{11})$, в общем случае будет невозможно, так как часть спектра $G(A^{22})$ будет локализована в правой комплексной полуплоскости. Таким образом, если в исходной матрице не существует ни одного устойчивого диагонального блока, то стабилизировать такую матрицу статическим регулятором по выходу в общем случае невозможно. Лемма доказана.

Отметим, что условие леммы справедливо не только для стабилизации системы с помощью скалярной матрицы, но также и для стабилизации посредством произвольного статического регулятора по выходу. Если один из блоков $A_{ii} \in R^{k\times k}$ является устойчивым и, кроме того, выполняются условия диагонального преобладания [15]:

$$|a_{jj}| \ge \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne j}}^{n} |a_{jl}|, j = \overline{1,k}, \tag{15}$$

то для стабилизации такой матрицы с помощью скалярного регулятора достаточно обеспечить выполнение условия диагонального преобладания для неустойчивого подпространства:

$$\alpha^2 \ge \max_{j=\overline{k+1,n}} \left\{ \sum_{l=1}^{n} |a_{jl}| \right\} \tag{16}$$

В таком случае получается простое решение, так как достаточно только переместить все круги, расположенные в правой полуплоскости в левую, и тем самым обеспечить устойчивость всей матрицы. Рассмотрим более общий случай. Будем считать, что условие гурвицевости одного из блоков сохраняется, но при этом условие диагонального преобладания не выполняется. Как и ранее будем считать, что блок $A_{22} \in R^{k \times k}$ гурвицев. Покажем, что в этом случае также стабилизируя неустойчивый блок A_{11} можно обеспечить стабилизацию всей матрицы. Применительно к рассматриваемому случаю докажем следующую теорему.

Теорема. Если в матрице системы нижний диагональный блок является гурвицевым, то параметр скалярного регулятора, обеспечивающего устойчивость матрицы замкнутой системы (12), может быть найден из следующего неравенства:

$$\alpha^2 > \frac{1}{2} \| A_{11} + A_{11}^T + (A_{12} + A_{21}^T)(A_{22} + A_{22}^T)^{-1}(A_{12} + A_{21}^T)^T \|_\infty, \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $q = -\alpha^2$. В соответствии с леммой 1 матрицу замкнутой системы со скалярным регулятором при условии (7) можно записать как:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} - \alpha^2 I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из теоремы Ляпунова следует [14], что, если матрица A_c гурвицева, то:

$$\exists Y = Y^T > 0 \rightarrow A_c Y + Y A_c{}^T < 0. \quad (19)$$

Рассмотрим решение неравенства (19) в классе блочно-диагональных матриц $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix}$. С учетом этого представим его в виде симметрической отрицательно определенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} (A_{11} - \alpha^2 I)Y_{11} + Y_{11}(A_{11} - \alpha^2 I)^T & A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T \\ (A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T)^T & A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T \end{pmatrix} < 0, \quad (20)$$

где $Y_{ii} > 0$.

Применим лемму Шура [14] и перепишем неравенство (20) в нелинейном виде:

$$(A_{11} - \alpha^2 I)Y_{11} + Y_{11}(A_{11} - \alpha^2 I)^T < (A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T)\mathcal{X}^{-1}(A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T)^T, \quad (21)$$

где $\mathcal{X} = A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T < 0$.

Убеждаемся, что разрешимость (21) можно обеспечить двумя матрицами $Y_{11} > 0$ и $Y_{22} > 0$, а также скалярным параметром $\alpha^2 \neq 0$. Это означает что решение (19) в классе блочно-диагональных матриц Y оправдано. Группируя слагаемые в (21) получим:

$$2\alpha^2 > (A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^T + (A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T)\mathcal{X}^{-1}(*)^T)Y_{11}^{-1}, \quad (22)$$

где $(*)^T = (A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T)^T$.

Как видно, разрешимость (22) можно обеспечить при любых ненулевых значениях положительно определенных матриц Y_{11} и Y_{22}. Считая их единичными, получим:

$$2\alpha^2 > A_{11} + A_{11}^T + (A_{12} + A_{21}^T)(A_{22} + A_{22}^T)^{-1}(A_{12} + A_{21}^T)^T. \quad (23)$$

Переходя к строчной матричной норме в (23), приходим к неравенству (17). Теорема доказана.

Неравенство (17) показывает, что величина регулятора может быть найдена из оценки строчной нормы матричной функции, определяемой блоками A_{ij} матрицы системы. Увеличивая величину такого регулятора можно повышать запас устойчивости системы.

Вычисленный согласно (17) регулятор является, вообще говоря, произвольным и отличным от минимально возможного. Рассмотрим теперь задачу вычисления минимального скалярного регулятора. Все введенные выше условия относительно матрицы системы сохраняются. Будем по-прежнему решать задачу в классе блочно-диагональных матриц функции Ляпунова. Как известно (см., например, [7]), билинейное матричное неравенство (3) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима система:

$$\begin{gathered}\mathcal{N}_C^T(Y^{-1}A + A^TY^{-1})\mathcal{N}_C < 0,\\ \mathcal{N}_{B^T}^T(AY + YA^T)\mathcal{N}_{B^T} < 0,\end{gathered} \tag{24}$$

где $\mathcal{N}_C$ и $\mathcal{N}_{B^T}$ – ядра матриц C и B^T, соответственно.

Видно, что система (24) не является системой линейных матричных неравенств, и ее решение представляет NP-трудную задачу. Покажем, что в рассматриваемом случае задача может быть заметно упрощена и сведена к задаче выпуклой оптимизации. Сделаем для этого следующие преобразования. Введем матрицу $X = Y^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}$, $X_{ii} = Y_{ii}^{-1}$ и представим центральные матрицы системы (24) в виде двух связанных блочных матриц:

$$F = XA + A^TX = \begin{pmatrix} F_{12} & F_{12} \\ F_{12}^T & F_{22}\end{pmatrix} \tag{25}$$

$$S = XA + A^TX = \begin{pmatrix} S_{12} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}\end{pmatrix}. \tag{26}$$

С учетом того, что матрицы B^T и C удовлетворяют (7), то система (24) примет вид:

$$\begin{gathered}F_{22} < 0,\\ S_{22} < 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Замечая, что $F_{22} = X_{22}S_{22}X_{22}$, приходим к одному неравенству $S_{22} < 0$, которое эквивалентно:

$$A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T < 0. \tag{28}$$

В силу гурвицевости A_{22} это неравенство разрешимо. Таким образом, вместо исходной системы (24) получаем одно линейное матричное неравенство относительно блока $Y_{22} > 0$. Так как верхний блок Y_{11} не входит в (28), то его можно задать произвольной положительно определенной матрицей. Считая его единичной матрицей, перепишем (20) в виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11} + A_{11}^T + 2\alpha^2 I & A_{12}Y_{22} + A_{21}^T \\ (A_{12}Y_{22} + A_{21}^T)^T & A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T\end{pmatrix} < 0, \tag{29}$$

где $Y_{22} > 0$.

Таким образом, задача синтеза минимального по абсолютной величине скалярного регулятора сводится к решению следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \alpha^2 \to min, \\ \begin{pmatrix} A_{11} + A_{11}^T + 2\alpha^2 I & A_{12}Y_{22} + A_{21}^T \\ (A_{12}Y_{22} + A_{21}^T)^T & A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^T\end{pmatrix} < 0, \\ Y_{22} > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Решение задачи (30) позволит найти ближайшую устойчивую матрицу к заданной неустойчивой матрице. Отметим, что задача (30) представляет минимизацию линейной функции на множестве, заданном линейным матричным неравенством и, следовательно, является выпуклой. Такая задача может быть решена стандартными средствами Robust Control Toolbox пакета MATLAB [16]. Посокольку левый верхний блок в (29) должен быть отрицательно определенной матрицей, нижняя граница параметра α^2 определяется неравенством:

$$\alpha^2 \geq \| [A_{11} \quad A_{12}] \|_{\infty}. \tag{31}$$

Пример

Проиллюстрируем применение полученных результатов на следующем примере. Зададим произвольную неустойчивую матрицу системы размерности $n = 10$ случайным образом с помощью встроенных команд пакета MATLAB и представим ее в блочном виде (10) с квадратными диагональными блоками. Будем считать, что нижний блок размерности $k = 4$ является устойчивым. Для простоты зададим его в виде отрицательно определенной матрицы

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Выпишем остальные блоки матрицы системы:

$$A_{11} = 0.1 \times \begin{pmatrix} 6.8372 & 3.2881 & 7.3496 & 6.8503 & 7.7193 & 4.8448 \\ 1.3208 & 6.5381 & 9.7060 & 5.9794 & 2.0567 & 1.5185 \\ 7.2272 & 7.4913 & 8.6693 & 7.8936 & 3.8827 & 7.8193 \\ 1.1035 & 5.8319 & 0.8623 & 3.6765 & 5.5178 & 1.0061 \\ 1.1749 & 7.4003 & 3.6644 & 2.0603 & 2.2895 & 2.9407 \\ 6.4072 & 2.3483 & 3.6920 & 0.8667 & 6.4194 & 2.3737 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$A_{12} = 0.2 \times \begin{pmatrix} 8.4622 & 2.5300 & 6.3496 & 11.1148 \\ 13.1115 & 2.6861 & 6.3286 & 3.6887 \\ 14.4585 & 1.9719 & 4.3513 & 4.2406 \\ 10.6242 & 2.8405 & 5.0208 & 1.5469 \\ 2.1764 & 3.3650 & 17.8584 & 18.2760 \\ 12.6353 & 3.9250 & 14.0645 & 14.1343 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$A_{21} = 0.3 \times \begin{pmatrix} 16.7337 & 29.6380 & 2.2198 & 12.0655 & 4.8340 & 20.5661 \\ 9.4029 & 5.1130 & 20.5229 & 18.6202 & 22.7434 & 8.8245 \\ 4.9861 & 7.7338 & 12.0716 & 4.6311 & 26.1333 & 15.9189 \\ 18.6749 & 11.9040 & 29.4851 & 11.4404 & 10.5233 & 24.9727 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Спектральная абсцисса матрицы системы равна:

$$\max_{1<i<10} \{Re\lambda_i(A)\} = 14.2874. \tag{36}$$

Положительное значение спектральной абсциссы свидетельствует о неустойчивости заданной матрицы. Размерность неустойчивого диагонального блока A_{11} равна 6. Исходя из этого, зададим размерности входа и выхода:

$$p = m = 6 \qquad (37)$$

Зададим матрицы B и C в виде (7). Тогда матрица замкнутой системы примет вид (18). Для вычисления стабилизирующего параметра α^2 воспользуемся неравенством (17) и получим:

$$\| A_{11} + A_{11}^T + (A_{12} + A_{21}^T)(A_{22} + A_{22}^T)^{-1}(A_{12} + A_{21}^T)^T \|_\infty \approx 291. \qquad (38)$$

Откуда имеем $\alpha^2 > 145$. При $\alpha^2 = 145$ получаем спектральную абсциссу:

$$\max_{1 \le i \le 10} \{ Re\lambda_i (A_c(\alpha^2)) \} = -0.4517. \qquad (39)$$

Следовательно, матрица замкнутой системы устойчива. Если увеличить величину регулятора вдвое, то величина спектральной абсциссы составит:

$$\max_{1 \le i \le 10} \{ Re\lambda_i (A_c(2\alpha^2)) \} = -0.7657, \qquad (40)$$

что соответствует увеличению запаса устойчивости системы в 1,7 раза.

Вычислим теперь минимальный скалярный регулятор. Для этого решим задачу (30) с помощью решателя mincx пакета MATLAB. Получаем минимальное значение скалярного регулятора $\alpha_{min}^2 \approx 94$. Убеждаемся, что матрица замкнутой системы также является гурвицевой:

$$\max_{1 < i < 10} \left\{ Re\lambda_i \left(A_c(\alpha_{min}^2) \right) \right\} = -0.0199. \qquad (41)$$

Матрица $Y_{22} = Y_{22}^T$, при которой достигается минимальное значение регулятора, равна:

$$Y_{22} = \begin{pmatrix} 3.7766 & -0.4402 & -3.4424 & -2.6033 \\ * & 7.6368 & 0.8905 & 0.2209 \\ * & * & 11.6819 & 2.7988 \\ * & * & * & 11.6789 \end{pmatrix}. \qquad (42)$$

Таким образом, решение оптимизационной задачи (30) для рассматриваемого примера позволило найти регулятор, величина которого в полтора раза меньше величины произвольного регулятора.

Заключение

Представлено решение задачи стабилизации линейной непрерывной стационарной системы с помощью скалярного регулятора по выходу. Основными преимуществами предложенного регулятора является простота процедуры синтеза, а также простота реализации соответствующей системы управления. Показано, что задача синтеза минимального скалярного регулятора сводится к решению линейного матричного неравенства. Применение полученных результатов продемонстрировано на примере.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИТММ Дмитрия Владимировича Баландина за полезные советы.

Библиографический список

1. **Syrmos, V.L.** Static Output Feedback. A Survey / V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. 1997. Vol.33, №. 2. Pp. 125-137.
2. **Astolfi, A.** Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems / A. Astolfi, P. Colaneri // Proc. 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.

3. **Astolfi, A.** An algebraic characterization for the static output feedback stabilization problem / A. Astolfi, P. Colaneri // American Control Conference. Arlington, VA, 2001. Pp. 1408-1413.
4. **Kimura, H.** Pole assignment by gain output feedback // IEEE Trans. AC. 1975. Vol. AC-20. Pp. 509-516.
5. **Röbenack, K.** Stabilization by static output feedback: a quantifier elimination approach / K. Röbenack, R. Voswinkel, Mirco Franke, Matthias Franke // Proc. Int. Conf. Syst. Theory, Control, Computing (ICSTCC 2018), Sinaia, Romania, 2018.
6. **Мухин, А.В.** О существовании статических регуляторов по выходу // Управление большими системами. 2022. Т. 96. С. 16-30.
7. **Баландин, Д.В**. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 82-99.
8. **Hassibi, A.** A path following method for solving BMI problems in control / A. Hassibi, J. How, S. Boyd // Proceedings of American Control Conference. 1999. V. 2. Pp. 1385-1389.
9. **Henrion, D.** Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI / D. Henrion, J. Loefberg et. al. // Proc. joint IEEE Conf. Decision Control and Europ. Control Conf., Sevilla, Spain, 2005.
10. **Cao, Y.-Y.** Static output feedback stabilization: an ILMI approach / Y.-Y. Cao, J. Lam, Y.-X. Sun // Automatica. 1998. V. 34. Pp. 1641-1645.
11. **El Ghaoui, L.** A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems / L. El Ghaoui, F. Oustry, M. Aitrami // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42. Pp. 1171-1176.
12. **Sadabadi, M. S.** From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey / M.S. Sadabadi, D. Peaucelle // Annual Reviews in Control. 2016. V. 42. Pp. 11-26.
13. **Поляк, Б.Т.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7-46.
14. **Баландин, Д.В.** Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007.
15. **Хорн, Р.** Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989.
16. **Gahinet, P.** The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User’s Guide / P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali. – Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

Дата поступления
в редакцию: 11.08.2022

Дата принятия
к публикации: 18.10.2022