

УДК 533.6.011.5

DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_30

ПРИМЕНЕНИЕ САЕ-МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ УДАРНО-ВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ

А.В. Стручков

ORCID: 0000-0002-6979-8968 e-mail: andrye134@yandex.ru

Российский федеральный ядерный центр

«Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Саров, Россия

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Нижний Новгород, Россия

А.С. Козелков

ORCID: 0000-0003-3247-0835 e-mail: ASKozelkov@vniief.ru

Российский федеральный ядерный центр

«Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Саров, Россия

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Нижний Новгород, Россия

Исследовано сверхзвуковое (с числом Маха 2) течение вязкого газа в канале с клином, характеризующееся взаимодействием отраженной ударной волны с пристеночным слоем течения вблизи поверхности. Для исследования структуры течения применяется САЕ-система ЛОГОС – отечественный пакет программ для решения задач имитационного моделирования на неструктурированных расчетных сетках. Данное течение характерно для различных устройств и систем, применяемых в летательных аппаратах, например, воздухозаборников. В этом случае в процессе взаимодействия пристеночного слоя течения с падающей ударной волной локально формируется отрывная зона потока. Подобная картина возникает в задаче сверхзвукового течения в канале. На данном примере анализируется влияние ударно-волновой структуры на аэродинамические свойства поверхности канала. В частности, рассматривается добавление на одну из стенок канала конструктивных элементов в форме треугольной пирамиды и полусферы для снижения общего значения коэффициента сопротивления. В результате работы найдены форма турбулизатора, а также одна из возможных схем их размещения на поверхности нижней стенки канала для уменьшения ее коэффициента силы лобового сопротивления.

Ключевые слова: пакет программ, САЕ-система, уравнения Навье-Стокса, ударные волны, сверхзвуковое течение газа, пристеночный слой.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Стручков, А.В. Применение САЕ-моделирования для исследования формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом течении / А.В. Стручков, А.С. Козелков // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2023. № 2. С. 30-49. DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_30

APPLICATION OF CAE-MODELING FOR THE STUDY OF SHOCK-WAVE STRUCTURE FORMATION AT SUPERSONIC FLOW

A.V. Struchkov

ORCID: 0000-0002-6979-8968 e-mail: andrye134@yandex.ru

Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics

Sarov, Russia

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

A.S. Kozelkov

ORCID: 0000-0003-3247-0835 e-mail: ASKozelkov@vniief.ru

Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. Supersonic viscous gas flow (Mach No 2) in a wedged channel is investigated, which is characterized by reflected shock wave interaction with wall layer of the flow close to the surface. To study the flow structure, LOGOS CAE-system is applied, which is a software package made in Russia for the purposes of simulation modeling using unstructured computational grids. Such flow is typical for various devices and systems used in flying vehicles, e.g. intake air systems. In this case, the wall layer of the flow interacts with primary shock wave forming a local detached flow region. Similar pattern is found in a channel at supersonic flow. This example allows to analyze the effect of a shock-wave structure on the aerodynamics of channel surface. Particularly, the authors investigate adding structural components shaped as triangular pyramid and semisphere onto one of the channel walls to decrease total resistance factor. The study is resulted in finding a shape of turbulence promoters and one of their possible layouts on the lower wall surface of the channel reducing the drag force factor of the surface.

Key words: software package, CAE-system, Navier-Stokes equations, shock waves, supersonic gas flow, wall layer.

FOR CITATION: A.V. Struchkov, A.S. Kozelkov. Application of CAE-modeling for the study of shock-wave structure formation at supersonic flow. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2023. № 2. Pp. 30-49.
DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_30

Введение

Системы автоматизированного проектирования (САЕ) стали неотъемлемой частью современных промышленных технологий. Они представляют собой комплекс программных модулей, используемых инженером для определения характеристик поведения в реальности, разработанной на компьютере модели изделия. Обобщенно САЕ можно характеризовать как систему инженерного анализа, в работе которой применяются разные математические подходы: конечно-элементный, конечно-разностный, а также конечно-объемный методы. Данные системы нашли широкое применение в таких наукоемких областях, как авиастроение, ракетостроение, машиностроение и др.

Пакет программ ЛОГОС – одна из отечественных САЕ, разрабатываемых в настоящее время [1]. Этот цифровой продукт применяется для моделирования различных процессов аэродинамики, газодинамики и гидродинамики с учетом процесса турбулентного перемешивания, а также процесса распространения тепла (в твердом теле и газе) и многих других физических явлений. Для расчета физических процессов здесь реализованы различные физико-математические модели. В пакете применяются эффективные численные методы, ориентированные на использование неструктурированных сеток, состоящих из произвольных многогранников. В состав включен препостпроцессор, предназначенный для импорта и обработки CAD/FEM/CFD-моделей, а также генерации поверхностных и объемных сеток. Для работы в препостпроцессоре используется визуальная среда, применяемая для подготовки расчетной модели. Для анализа полученных результатов применяется интерактивная система инженерной визуализации. Применение САЕ-систем, в частности, пакета программ ЛОГОС, способствует повышению эффективности обоснования решений инженерных задач.

Известно, что сверхзвуковое обтекание характеризуется наличием в потоке ударных волн, поэтому ударно-волновые конфигурации потока лежат в основе внешней и внутренней аэродинамики. В этом случае особенности распределения локальных аэродинамических характеристик определяются сложными структурами течения с взаимодействующими скачками уплотнения и замкнутыми отрывными зонами. Изучение свойств и поведения ударных волн является важной задачей при проектировании летательных аппаратов [2-6]. Воздей-

ствия ударной волны на пристеночный слой течения – процесс, который необходимо учитывать при расчете аэродинамических характеристик (например, коэффициента сопротивления, тепловых потоков на поверхности) исследуемого объекта [6-8]. Более того, процесс проникновения ударной волны в пограничный слой и ее взаимодействие с твердой стенкой составляет одну из фундаментальных проблем газовой динамики.

Результаты экспериментальных исследований процессов, соответствующих сверхзвуковым течениям, весьма немногочисленны [9-11]. Для восполнения необходимых данных можно воспользоваться математическим моделированием, получив подробную информацию о протекающих процессах [12-14]. Однако при этом следует принимать во внимание качество разрешения ударно-волновых структур, что подразумевает сохранение на ее фронте точности, монотонности и устойчивости решения; особенно это касается расчетов на производных неструктурированных сетках. Одним из способов является применение модифицированного ограничителя потока [15]. В случае же использования неструктурированных расчетных сеток, актуальных для сложных геометрических объектов, повышению точности расчета способствует также применение гибридного метода вычисления градиентов. Данные приемы способствуют правильному моделированию развития неустойчивых возмущений и отслеживанию их взаимодействия с неоднородностями течения (такими, как зоны отрыва потока). Если в качестве исследуемого объекта рассматривается модель реального самолета, для сокращения времени расчета и повышения эффективности можно применить метод многосеточной инициализации и алгоритм статической адаптации [16-17].

Все эти подходы реализованы в пакете программ ЛОГОС. Для них проведена верификация, получены достоверные результаты на задачах различных классов и направлений (аэродинамика, гидродинамика [18-20], геофизика [21-22]). В рамках данной работы САЕ-система ЛОГОС рассматривается для исследования формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом течении в канале.

Основные уравнения и метод расчета

В пакете программ ЛОГОС для моделирования нестационарного трехмерного течения газа с учетом эффектов вязкости и процесса теплопроводности используется система уравнений Навье-Стокса. Ее вид с учетом осреднения по Рейнольдсу [16-17, 23] в декартовой системе координат представлен далее (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u} \bar{u}) = -\nabla p + \nabla(\tau_{\mu} + \tau_t), \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u} h) = \nabla[\bar{u}(\tau_{\mu} + \tau_t) - (\bar{q}_{\mu} + \bar{q}_t)]. \end{cases} \quad (1)$$

При записи системы (1) применяются следующие обозначения: ρ – плотность; \bar{u} – вектор скорости газа (имеет компоненты u , v , w); p – величина давления; $E = C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энергия газа; $h = C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энтальпия газа; τ_{μ} и τ_t – молекулярная и турбулентная составляющие тензора касательных напряжений; q_{μ} и q_t – молекулярная и турбулентная составляющие плотности теплового потока; T – температура газа; $C_v = (C_p T - R/m)$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме; C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; R – универсальная газовая постоянная; m – молярная масса газа.

Выражение для величины молекулярной составляющей тензора касательных напряжений, использующее связь с тензором скоростей деформаций [23]:

$$\tau_{\mu} = 2\mu(T) \left(S - \frac{1}{3} I \nabla \bar{u} \right), \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{u} + [\nabla \bar{u}]^t \right). \quad (3)$$

Выражение для компоненты вектора плотности теплового потока по закону Фурье [23]:

$$q_{\mu} = \lambda(T) \nabla T. \quad (4)$$

Коэффициент динамической вязкости $\mu(T)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ в зависимости от температуры потока выражаются через формулу Сазерленда [23]:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.5} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}, \quad (5)$$

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.5} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}, \quad (6)$$

где μ_0 – коэффициент динамической вязкости при температуре T_0 , λ_0 – коэффициент теплопроводности при температуре T_0 , T_s – константа Сазерленда.

Для замыкания системы уравнений (1) (связь τ_i и q_i с осредненными параметрами течения) используются дополнительные соотношения, называемые моделями турбулентности. Например, в модели Спаларта–Аллмараса [24] рассматривается единственное уравнение переноса, записанное относительно модифицированной кинематической турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} + P^{\nu} - D^{\nu} \quad (7)$$

В уравнении (7) генерационный и диссипативный члены P^{ν} и D^{ν} являются источниками членами и определяются следующим образом:

$$D^{\nu} = \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \quad (8)$$

$$P^{\nu} = c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{b1} \rho f_{t2} \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad (9)$$

где d – ближайшее расстояние до твердой стенки, κ – постоянная Кармана.

Определим формулы для других параметров, участвующих в уравнении переноса турбулентной вязкости:

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}, \quad (10)$$

Здесь Ω является модулем тензора завихренности:

$$\Omega = \left(2\Omega_{ij} \Omega_{ij} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (12)$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad (13)$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad (14)$$

$$r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, \quad (15)$$

$$C_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b1})}{\sigma}. \quad (16)$$

Функция f_{t2} используется для подавления численного перехода от ламинарного к турбулентному режиму в пограничном слое и записывается следующим образом:

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2). \quad (17)$$

Эффективная турбулентная вязкость в данной модели определяется согласно выражению:

$$\mu_t = \rho \tilde{v} f_{v1} \quad (18)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad (19)$$

$$\chi = \frac{\tilde{v}_t}{\nu}. \quad (20)$$

Эмпирические константы модели следующие: $\sigma = \frac{2}{3}$, $\kappa = 0,41$, $c_{b1} = 0,1355$,

$c_{b2} = 0,622$, $C_{w2} = 0,3$, $C_{w3} = 2$, $C_{v1} = 7,1$, $C_{t3} = 1,2$, $C_{t4} = 0,5$.

В пакете программ ЛОГОС пользователю предлагается несколько моделей турбулентности, выбор которых зависит от решаемой задачи. Модель Спаларта-Аллмараса, разрабатываемая для расчета задач внешней аэродинамики, является сейчас одной из наиболее используемых в практических приложениях. В данной работе исследование сверхзвукового течения проводилось с применением этой модели. Представленная система уравнений в пакете программ ЛОГОС аппроксимируется методом конечных объемов [25], при этом для записи законов сохранения используется интегральная формулировка. Используемый в программном комплексе метод конечных объемов основан на интегрировании дифференциальных уравнений по контрольному объему – расчетной ячейке. Ячейки сетки являются произвольными многогранниками, покрывающие расчетную область без зазоров и наложений. Пример ячейки показан на рис. 1 слева, а пример расчетной сетки – справа.

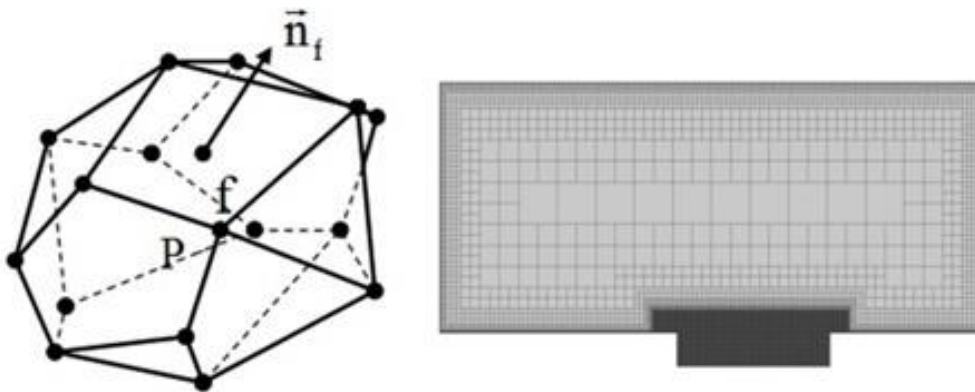


Рис. 1. Ячейка сетки (слева); расчетная сетка (справа)

Fig. 1. Grid cell (left), computational grid (right)

Система уравнений Навье-Стокса в векторной форме представляется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} W dV + \oint_{\Delta \Sigma_p} (F - G) dS = \int_{\Delta V} H dV, \quad (22)$$

где вектор W – вектор консервативных переменных, F и G – вектора конвективных и диффузионных потоков, H – источниковый член,

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u u_n + p n_x \\ \rho v u_n + p n_y \\ \rho w u_n + p n_z \\ \rho H u_n + p u_n \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \\ \tau u + q \end{pmatrix}, \quad (23)$$

здесь u_n – нормальная составляющая скорости, q – тепловой поток, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений.

Полное описание способа аппроксимации системы уравнений (22) представлено в [25]. При решении задач большое значение имеет точность вычисления конвективных потоков. В случае задач аэродинамики зачастую используются схемы семейства AUSM (Advection Upstream Splitting Method) [26-27] и как частный случай – схема AUSM+ [27-28].

Согласно [28-29], в схеме AUSM+ конвективный поток через грань ячейки определяется выражением:

$$F_f = c_f (\bar{M}_L^+ U_L + \bar{M}_R^- U_R) + \left(P_L^+ \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}} P_L + P_R^- \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}} P_R \right) \quad (24)$$

где c_f – скорость звука на грани; U_L и U_R – векторы примитивных переменных слева и справа от грани f ; P_L и P_R – вектор давления $P = P\{0, n_x, n_y, n_z, 0\}^T$ слева и справа от грани f , \bar{M}_L^+ , \bar{M}_R^- , $P_L^+ \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}}$, $P_R^- \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}}$ – параметры схемы.

Если $M_L^+ + M_R^- \geq 0$, где M_L и M_R – числа Маха слева и справа от грани:

$$\bar{M}_L^+ = M_L^+ + M_R^- [(1-\omega)(1+f_R) + f_R - f_L], \quad \bar{M}_R^- = M_R^- \omega (1+f_L). \quad (25)$$

Если $M_L^+ + M_R^- < 0$,

$$\bar{M}_L^+ = M_L^+ \omega (1+f_L), \quad \bar{M}_R^- = M_R^- + M_L^+ [(1-\omega)(1+f_L) + f_L - f_R]. \quad (26)$$

Параметр ω задан функцией, имеющий вид:

$$\omega(p_L, p_R) = 1 - \min \left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L} \right)^3. \quad (27)$$

Параметр $f_{L,R}$ принимает минимальное значение во всей области, кроме областей с осцилляциями решения:

$$f_{L,R} = \begin{cases} \left(\frac{p_{L,R} - 1}{p_s} \right) \min \left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\min(p_L, p_R)} \right)^2, & P_L^+ p_L + P_R^- p_R \neq 0, \\ 0 & \end{cases} \quad (28)$$

Для определения параметров на грани используются полиномы второго порядка:

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2, & |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2} (M \pm |M|), & |M| > 1, \end{cases}, \quad P_\alpha^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \alpha M (M^2 - 1), & |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M)), & |M| > 1. \end{cases} \quad (29)$$

Для расчета конвективных потоков необходимо провести реконструкцию решения, заключающуюся в определении параметров слева и справа от грани f . При решении задач газовой динамики реконструкция решения может производиться относительно примитивных переменных Q , консервативных переменных W , а также относительно акустических инвариантов. Для первого порядка аппроксимации в качестве параметров слева и справа от грани берутся значения из центра ячейки (рис. 2): $\phi_f^- = \phi_P$, $\phi_f^+ = \phi_E$.

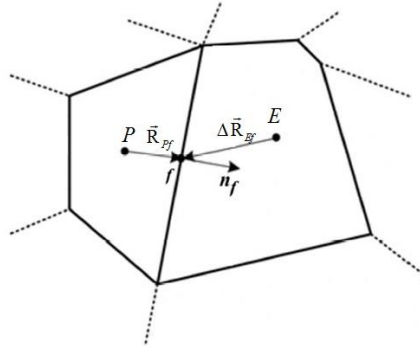


Рис. 2. Схема реконструкции величины

Fig. 2. Value reconstruction diagram

Для повышения точности при определении параметров на грани применяют реконструкцию 2-го порядка аппроксимации [25,30]:

$$\begin{aligned}\phi_f^- &= \phi_P + \alpha_f^-(\Delta \vec{R}_{Pf} \cdot \nabla \phi_P), \\ \phi_f^+ &= \phi_E + \alpha_f^+(\Delta \vec{R}_{Ef} \cdot \nabla \phi_E),\end{aligned}\quad (30)$$

где ϕ_f^- и ϕ_f^+ – значение параметров слева и справа от грани, ϕ_P и ϕ_E – значение параметров в центре ячейках E и P (рис. 2), \vec{R}_{Pf} и \vec{R}_{Ef} – расстояние от центра ячеек E и P до центра грани f , $\nabla \phi_E$ и $\nabla \phi_P$ – величина градиента в ячейках E и P , α_f^- и α_f^+ – функции-ограничители, применяемые для снижения величины осцилляций на разрывных решениях. Функция используется для ограничения величины градиента (уменьшать значение градиента, умножая его на величину $\alpha_f \leq 1$), применяемого для реконструкции параметров слева и справа от грани ячейки [31-32].

Отметим, что при расчете на неструктурированных сетках в силу наличия возможности появления ячейки сколь угодно сложной формы достаточно актуальна проблема точного вычисления градиента. Кроме того, на таких сетках функция ограничителя может иметь случайный характер включения, даже в областях невозмущенного потока. Поэтому для получения более точного решения при расчете на неструктурированной сетке необходимо выполнить модификацию как самого выражения ограничителя потока, так и метода расчета градиента газодинамической величины [15]. В итоге вычислительную процедуру модуля, применяемого для решения задач аэродинамики в рамках пакета программ ЛОГОС, можно представить в виде блок-схемы на рис. 3 слева. В случае, когда для расчетной области используется алгоритм многосеточной инициализации, блок-схема вычислительной процедуры принимает вид, показанный на рис. 3 справа.

Согласно [16], алгоритм многосеточной инициализации выполняется для получения начального распределения газодинамических полей, совпадающих по структуре и характеру течения с конечным решением. Такой подход не является обязательным для задач всех типов течений, однако в случае сверхзвуковых течений может повышать эффективность расчета. Далее представлены результаты применения пакета программ ЛОГОС при исследовании особенностей сверхзвукового течения.

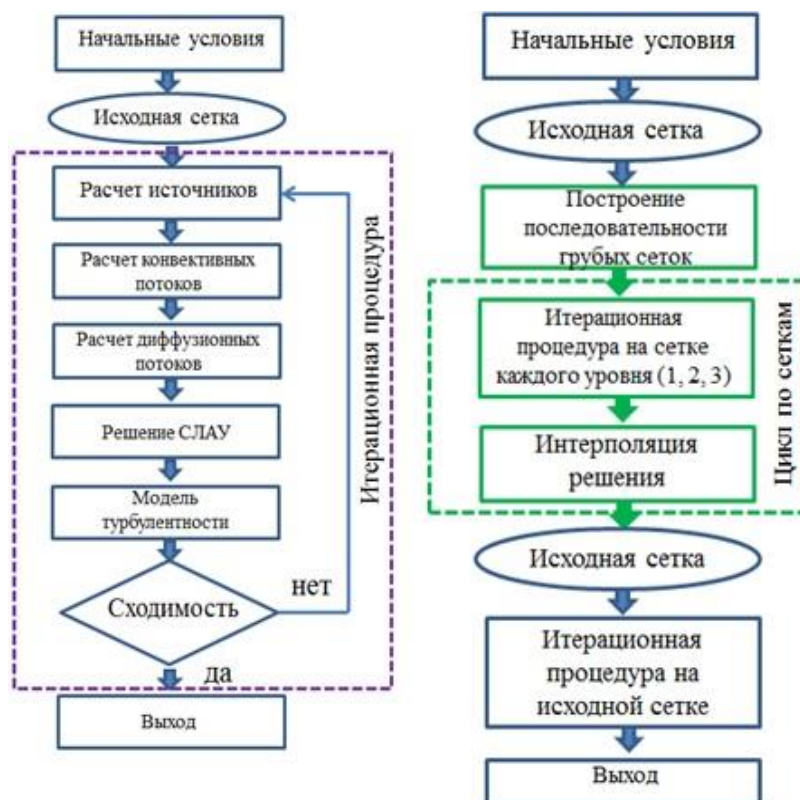


Рис. 3. Вычислительная процедура

Fig. 3. Computational procedure

Исследование в пакете программ ЛОГОС формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом обтекании клина

Изучению сверхзвукового течения газа в канале переменного сечения посвящены работы [4-6; 33-36], в которых проводились как расчетные, так и экспериментальные исследования. В результате было установлено, что в канале возникает структура течения, характеризующаяся взаимодействующими скачками уплотнения и образованием замкнутых отрывных зон, что определяет распределение аэродинамических характеристик по поверхности обтекаемого канала.

В настоящей работе САЕ-система ЛОГОС применяется для исследования сверхзвукового течения газа в канале переменного сечения при числе Маха, равном двум ($M=2$). Такая геометрия канала может использоваться для решения задачи о взаимодействии падающей ударной волны с пограничным слоем у поверхности и для решения задачи отражения скачка уплотнения. Кроме того, рассматриваемая геометрия имитирует модель простейшего бокового сверхзвукового воздухозаборника. Решение подобной задачи определит особенности формирования сверхзвукового течения газа при заданных условиях. В физической плоскости расчетная область представляет собой канал, ограниченный сверху и снизу твердыми поверхностями (рис. 4). Геометрические параметры канала следующие: высота входа в канал $a_0 = 1$, высота горла $a = 0,824$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 7$, начальный клин имеет угол раствора 10° .

На входной границе («FreeStream») задан поток вязкого совершенного газа с числом Маха 2, температурой 300°K , давлением 101325 Па . На выходной границе («Pressure») задано давление 101325 Па . Нижняя и верхняя поверхности являются твердыми стенками («Wall No Slip»). Задача считается в симметричной постановке.

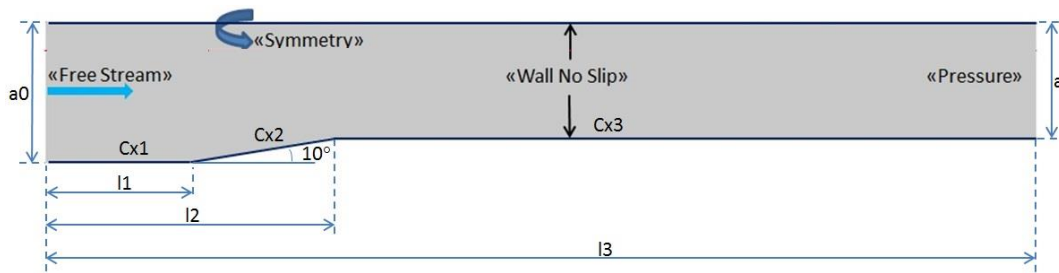


Рис. 4. Схема расчетной области

Fig. 4. Computational region diagram

В результате расчета необходимо определить значение коэффициента сопротивления Cx для нижних составляющих стенки канала: $Cx1$, $Cx2$, $Cx3$. Расчет выполняется на неструктурированной сетке (рис. 5), построенной из усеченных шестигранников. Число ячеек составляет 294170.



Рис. 5. Расчетная сетка

Fig. 5. Computational grid

Общее представление о структуре поля течения в плоском канале дают картины изолиний и распределения различных параметров потока. В качестве примера на рис. 6 приведены картины изолиний числа Маха, а так же распределение температуры и давления.

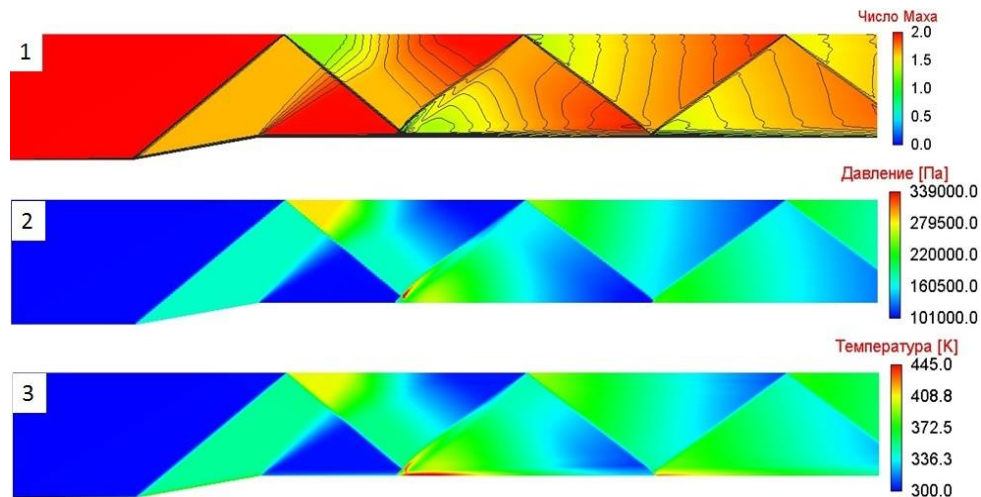


Рис. 6. Изолинии и поле числа Маха (1), давление (2), температура (3)

Fig. 6. Isolines and Mach number fields (1), pressure (2), temperature (3)

Возмущения от стенки обтекаемого клина распространяются в виде скачков уплотнения вниз по потоку. Отраженная от нижней поверхности ударная волна начинает взаимодействовать с потоком у верхней поверхности, что приводит к формированию замкнутой отрывной области [4-6]. В возмущенном поле течения пограничные слои характеризуются толщиной, позволяющей четко формироваться системе взаимодействующих скачков уплотнения. В результате обтекания отрывной зоны на верхней поверхности образуется скачок уплотнения, падающий на нижнюю поверхность, где инициирует отрыв потока. Отметим, что замкнутая отрывная область течения на нижней поверхности канала является более обширной (рис. 7).

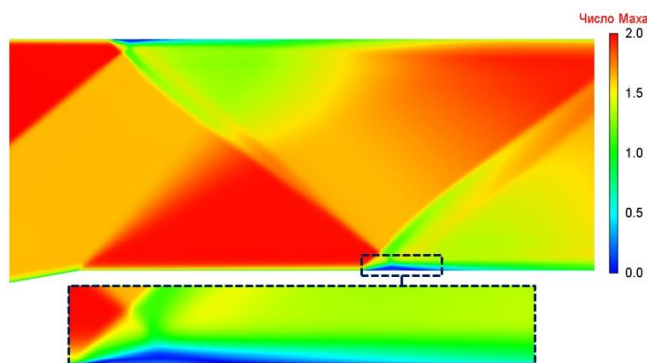


Рис. 7. Отрывная зона на нижней поверхности

Fig. 7. Detached region on lower surface

На рис. 8 представлено поле плотности в области взаимодействия ударной волны с пограничным слоем.

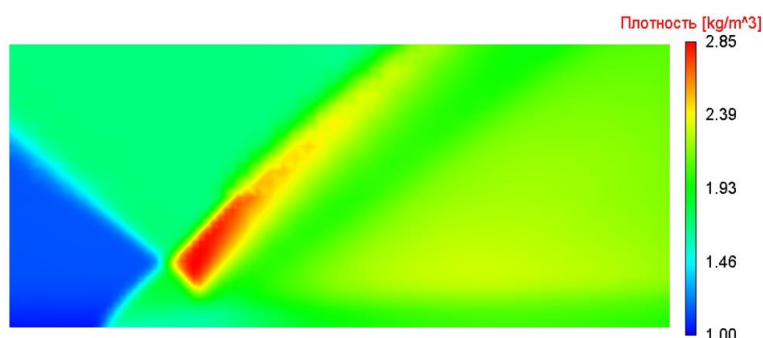


Рис. 8. Поле плотности (локально в области падения ударной волны)

Fig. 8. Density field (locally in the region impacted by a shock wave)

Согласно [4-6, 33-36], течение в канале характеризуется двумя типами взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем. В случае малой интенсивности ударной волны в области взаимодействия общий перепад давления меньше критического значения, что приводит к безотрывному течению газа. Если же ударная волна имеет большую интенсивность, то в результате ее взаимодействия с пограничным слоем формируется замкнутая отрывная зона, характеризующаяся дозвуковым циркуляционным течением.

В рассматриваемом случае падающая ударная волна взаимодействует с турбулентным пограничным слоем (рис. 9), в результате чего формируется отрывная зона с дозвуковым течением.

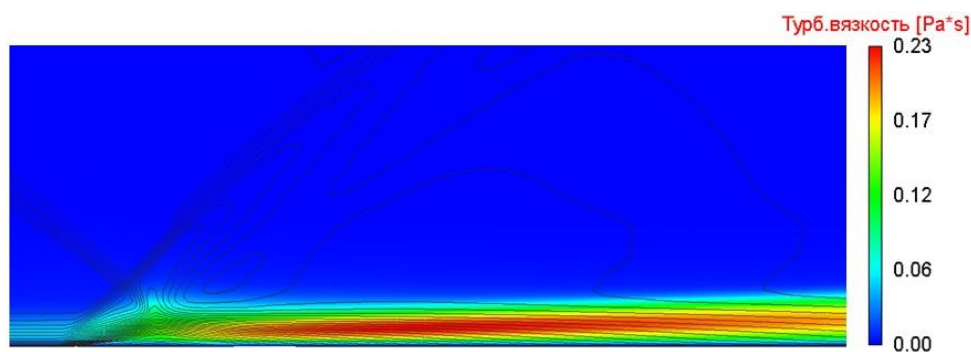


Рис. 9. Турбулентная вязкость в области падения ударной волны

Fig. 9. Turbulent viscosity in the region impacted by a shock wave

В области отрыва потока на нижней поверхности параметры турбулентности достигают высоких значений, что является признаком турбулизации течения в слое смешения отрывной зоны. Далее по потоку пристеночное течение имеет такие же высокие значения турбулентной вязкости.

Для зоны отрыва пограничного слоя характерны отрицательные значения коэффициента поверхностного трения. В рассматриваемой задаче точка отрыва имеет координату $X=2,01$, точка присоединения – $X=2,21$. Отрывная зона при данной конфигурации канала и параметрах потока имеет длину 0,2 (рис. 10). Отметим, что в области падения второй ударной волны ($x=4,2$) также наблюдается отрывная зона, однако ее протяженность очень мала.

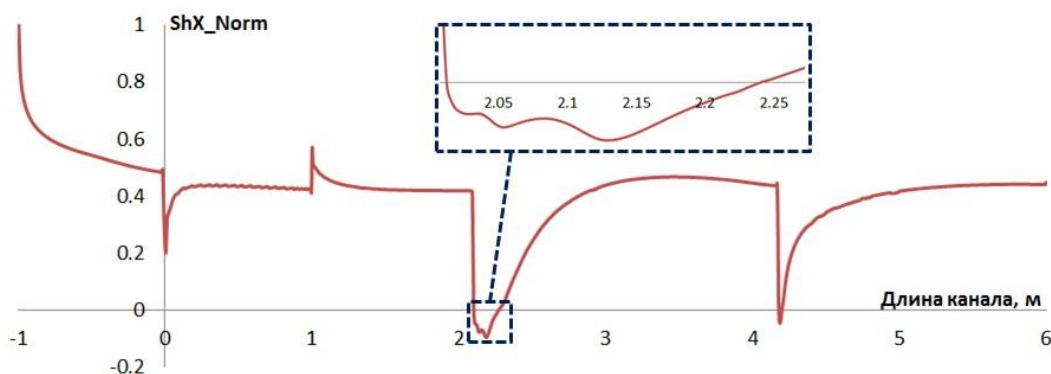


Рис. 10. График распределения нормированного коэффициента трения по нижней стенке

Fig. 10. Distribution graph of normalized friction factor along the lower wall

Распределение коэффициента трения показывает, что на участке канала $[0;1]$ наблюдаются осцилляции численного решения, что, скорее всего, связано с физической неустойчивостью течения на данном участке.

Ниже представлен график распределения давления по координате x вдоль длины канала от его начала (рис. 11) вблизи верхней стенки на высоте 0,95.

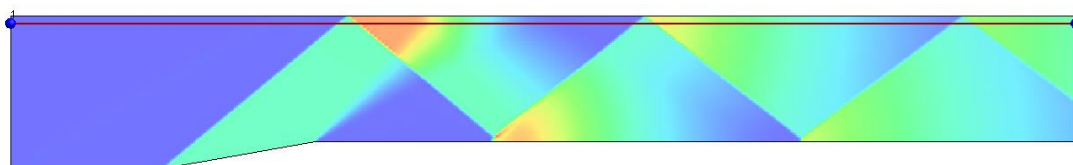


Рис. 11. Линия для оценки распределения давления на высоте 0,95

Fig. 11. Estimation line of pressure distribution at the height of 0.95

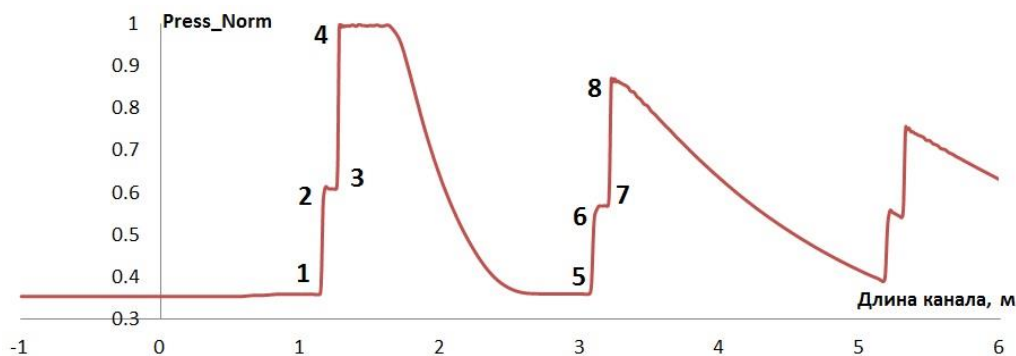


Рис. 12. Распределение давления вдоль линии $y=0,95$

Fig. 12. Pressure distribution along $y=0.95$ line

На графике (рис. 12) изображена картина, которая сформировалась при обтекании клина сверхзвуковым потоком газа в результате многократного отражения ударной волны от стенки канала. Участки 1-2 – присоединенная к клину ударная волна, участок 3-4 – ударная волна, отраженная от стенки канала, 5-6 – ударная волна, прошедшая через область, занимаемую волной разрежения, 7-8 – ударная волна после отражения от верхней границы канала [13]. Аналогично для оценки характера распределения ударно-волновой структуры вблизи нижней стенки канала оценивалось давление вдоль линии на высоте 0,226 (рис. 13) вблизи нижней стенки.

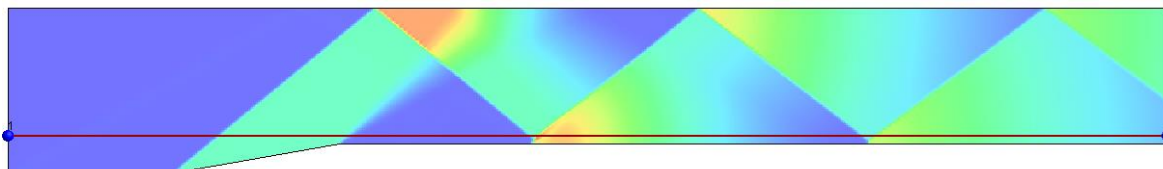


Рис. 13. Линия для оценки распределения давления на высоте 0,226

Fig. 13. Estimation line of pressure distribution at the height of 0.226

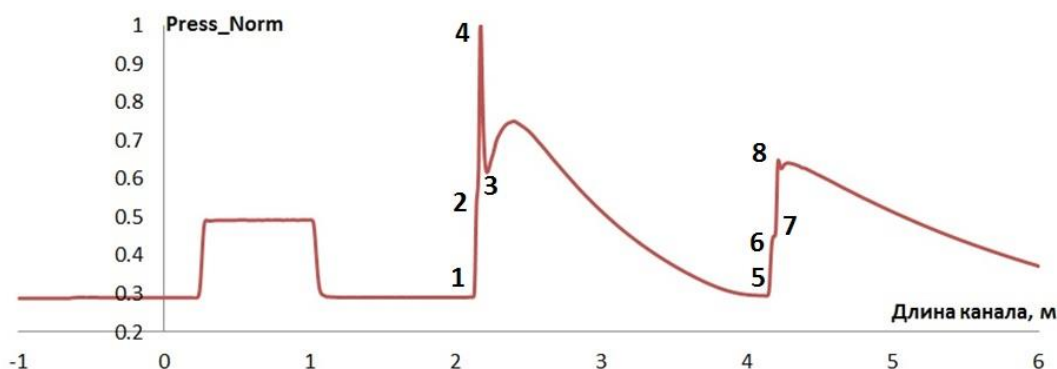


Рис. 14. Распределение давления вдоль линии $y = 0,226$

Fig. 14. Pressure distribution along $y=0.226$ line

На рис. 14 изображена картина, характеризующая взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. Участки 1-2 – ударная волна, пришедшая от верхней границы с характерным локальным максимумом в результате взаимодействия с пограничным слоем и образованием области отрыва потока, 3-4 – ударная волна, прошедшая через область, занимаемую волной разрежения, 7-8 – ударная волна после отражения от нижней границы канала.

В области взаимодействия падающей ударной волны и пограничного слоя на нижней поверхности реализуется максимум давления, в результате которого возникает отрыв пограничного слоя. Далее вниз по потоку градиент давления становится меньше, наблюдается присоединение к нижней поверхности канала оторвавшегося пограничного слоя. Для оценки аэродинамических свойств нижней стенки канала приведем значения коэффициента сил лобового сопротивления согласно схеме (рис. 15).

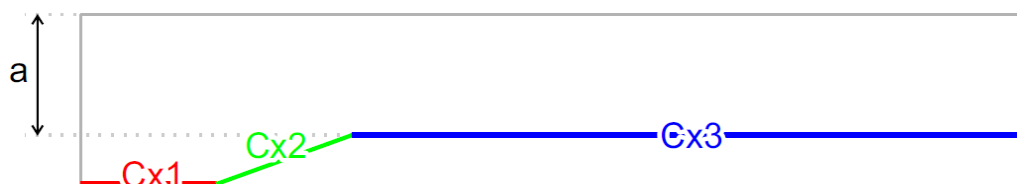


Рис. 15. Схема оценки коэффициента силы лобового сопротивления

Fig. 15. Evaluation scheme for drag force factor

Итоговые значения коэффициентов представлены в табл. 1.

Таблица 1.

Значение коэффициента силы лобового сопротивления

Table 1.

Drag force factor value

Геометрия	Cx1	Cx2	Cx3
Исходный вид	0,00175112	0,046674	0,0012023

В значение коэффициента силы лобового сопротивления всей нижней поверхности наибольший вклад вносит ударно-волновая структура. Именно на нижней стенке канала происходит взаимодействие ударной волны с пограничным слоем течения, что определяет локальные аэродинамические свойства объекта.

Одним из возможных и наиболее простых способов для изменения распределения локальных АДХ является изменение формы обтекаемой поверхности за счет добавления локальных конструктивных элементов, меняющих структуру пристеночного течения. В качестве предлагаемых элементов рассматриваются остроугольная равнобедренная пирамида и полусфера. Однако схема их размещения является отдельной задачей для исследования и рассматривается далее.

Влияние дополнительных механических элементов на распределение аэродинамических характеристик в сверхзвуковом течении

Рассматривается влияние дополнительных механических элементов на локальные аэродинамические свойства поверхности за счет изменения свойств пристеночного течения. В качестве возможных механических элементов, которые будем называть турбулизаторами, предлагается остроугольная равнобедренная пирамида и полусфера (рис. 16).

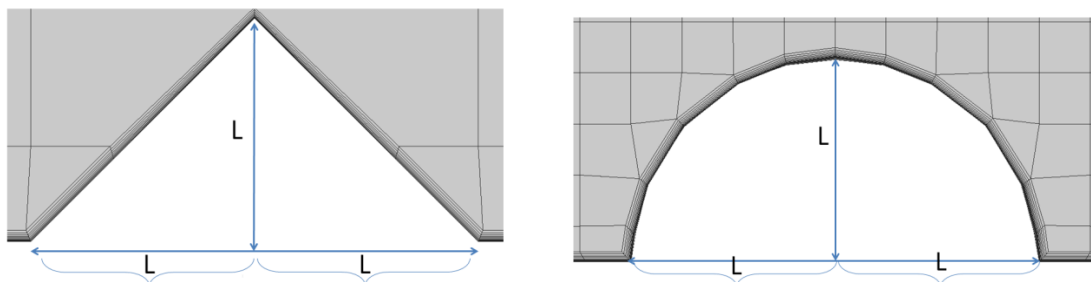


Рис. 16. Форма дополнительных механических элементов

Fig. 16. Shape of additional structural components

Высота пирамиды и радиус полусферы равны L (рис. 15). Рассматриваются только неровности, выступающие над базовой линией канала. Допускается размещение турбулизаторов на нижней стенке, однако конкретное их положение (рис. 17) является предметом исследования данной работы.

Первым вариантом размещения турбулизаторов на стенке является положение перед падающей ударной волной. Однако неизвестно, на каком именно расстоянии до места взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. На рис. 18 схематично показано положение пирамиды и полусферы на фоне поле числа Маха для исходной геометрии канала.

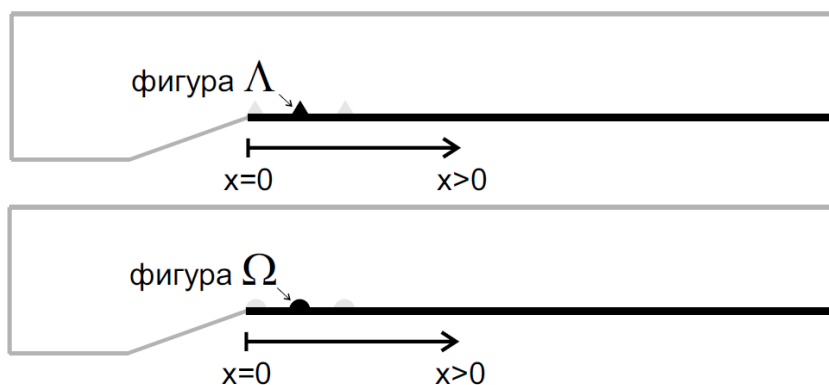


Рис. 17. Схема размещения элементов на стенке канала

Fig. 17. Component layout along the channel wall

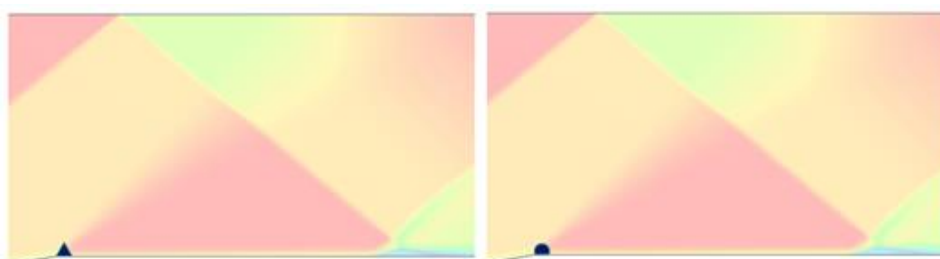


Рис. 18. Положение элементов на нижней стенке (треугольная пирамида – слева, полусфера – справа)

Fig. 18. Component location along the lower wall (triangle pyramid - left, semisphere - right)

Такое размещение соответствует точке отхода ударной волны от нижней поверхности. В результате обтекания модифицированной геометрии канала формируется следующая структура течения (рис. 19, приводится в сравнении с исходной геометрией).

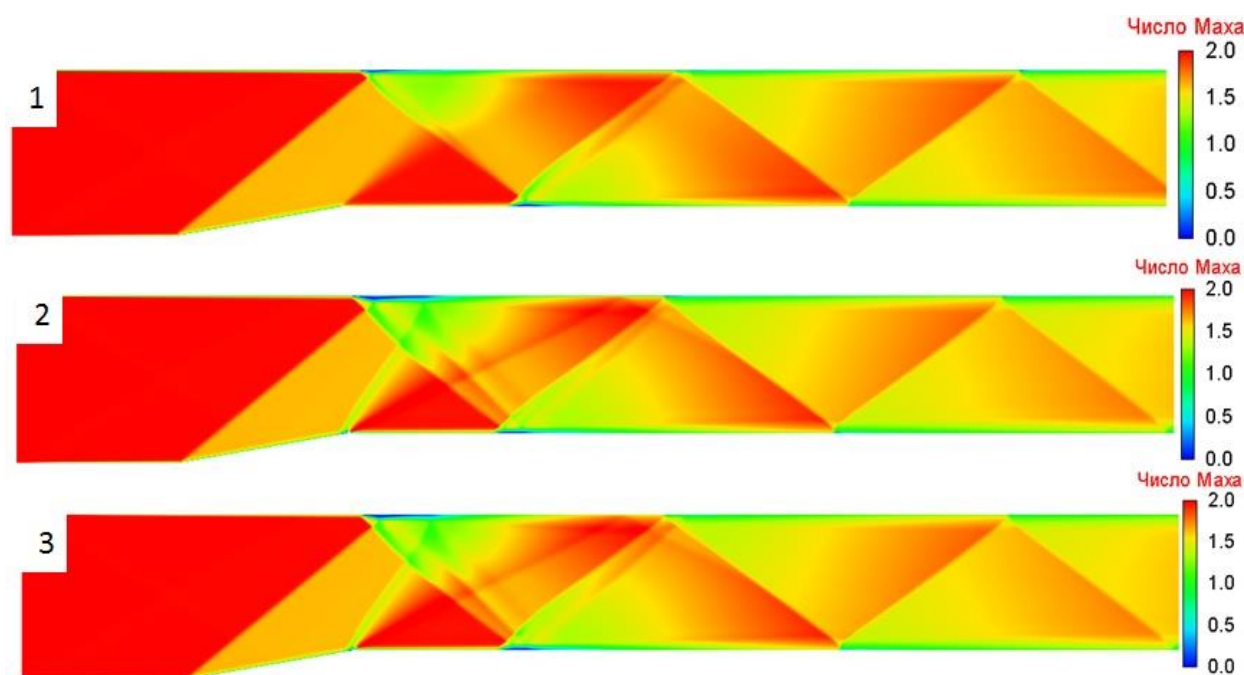


Рис. 19. Поле числа Маха (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Fig. 19. Mach number field (1 – original geometry, 2 – semisphere, 3 – pyramid)

Согласно полученным результатам (рис. 20), внесенный элемент формирует дополнительную ударную волну. При этом турбулизатор попадает в область распространения ударной волны, идущей от клиновидной поверхности.

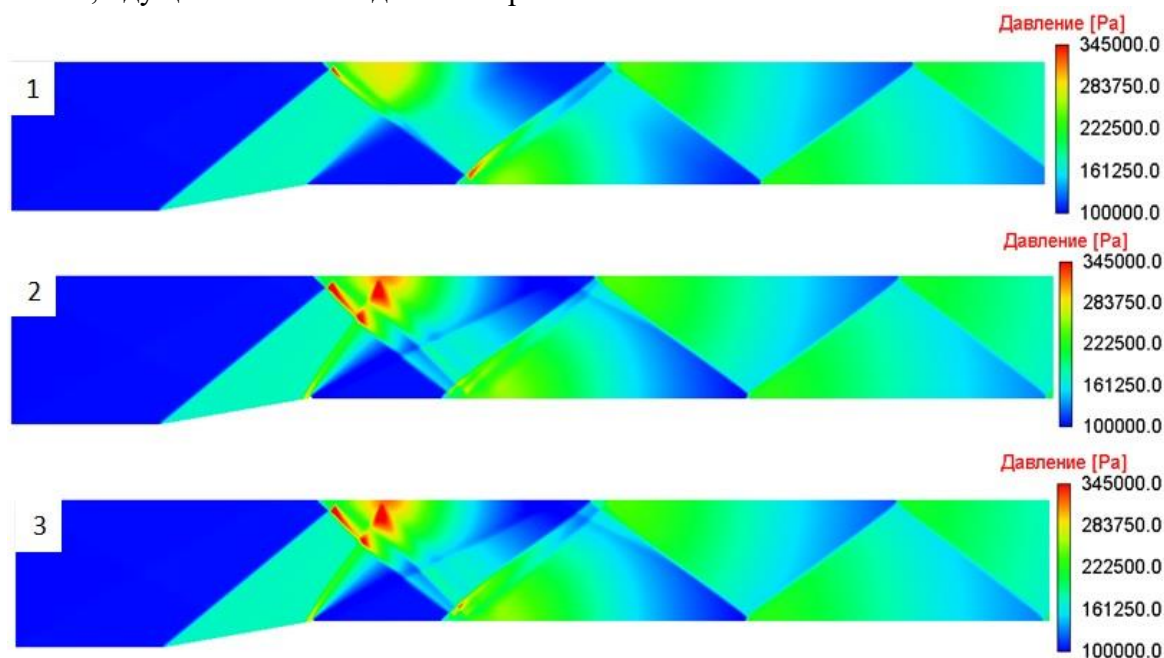


Рис. 20. Поле давления (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Fig. 20. Pressure field (1 – original geometry, 2 – semisphere, 3 – pyramid)

В результате взаимодействия системы ударных волн (от клиновидной поверхности и от полусферы) вблизи верхней поверхности (рис. 20) наблюдаются области повышенного давления, возникшие на пересечении фронтов. Такое распределение газодинамических параметров является более сложным и не способствует улучшению локальных аэродинамических свойств нижней поверхности канала (табл. 2). Отметим, что в данной задаче исследуется влияние на поток и распределение локальных аэродинамических свойств поверхности, расположенной далее по потоку от точки установки турбулизатора.

Таблица 2.

Значение C_x (схема обозначения C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} показана на рис. 15)

Table 2.

C_x value (reference diagram of C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} shown in figure 15)

Геометрия	C_{x1}	C_{x2}	C_{x3}
Стандартный вид	0,00175112	0,046674	0,0012023
С учетом турбулизатора (полусфера)	0,00175112	0,0494023	0,0011013
С учетом турбулизатора (пирамида)	0,00175112	0,0489995	0,0010678

Наблюдается снижение коэффициента силы лобового сопротивления C_{x3} на 10 %. Однако данный результат был получен в результате того, что часть ударной волны пришла на поверхность турбулизатора и тем самым ослабила ударную волну, идущую от клиновидной поверхности к верхней стенке канала. Такой подход изменяет первоначальную волновую структуру за счет перенаправления «образующей» ударной волны. Напомним, что основной целью является изменение свойств течения за счет влияния на пристеночный слой течения. Поэтому необходимо переместить турбулизатор далее по потоку и убрать его из области распространения ударной волны (рис. 21).

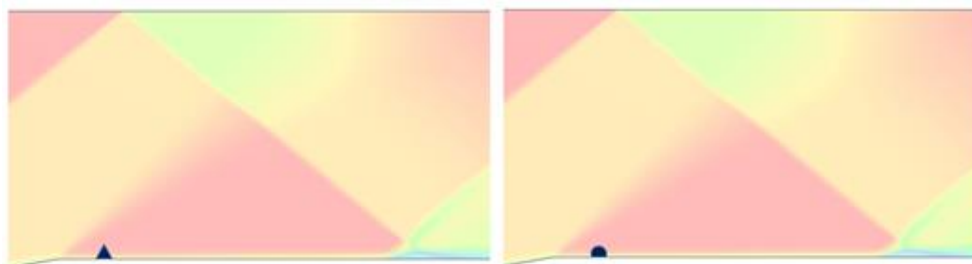


Рис. 21. Расположение турбулизаторов на нижней поверхности

Fig. 21. Turbulence promoter's layout on lower surface

В результате обтекания данной конфигурации элементов реализуется следующая картина течения. На рис. 22 далее показаны поля числа Маха и давления в сравнении с течением в канале исходного вида.

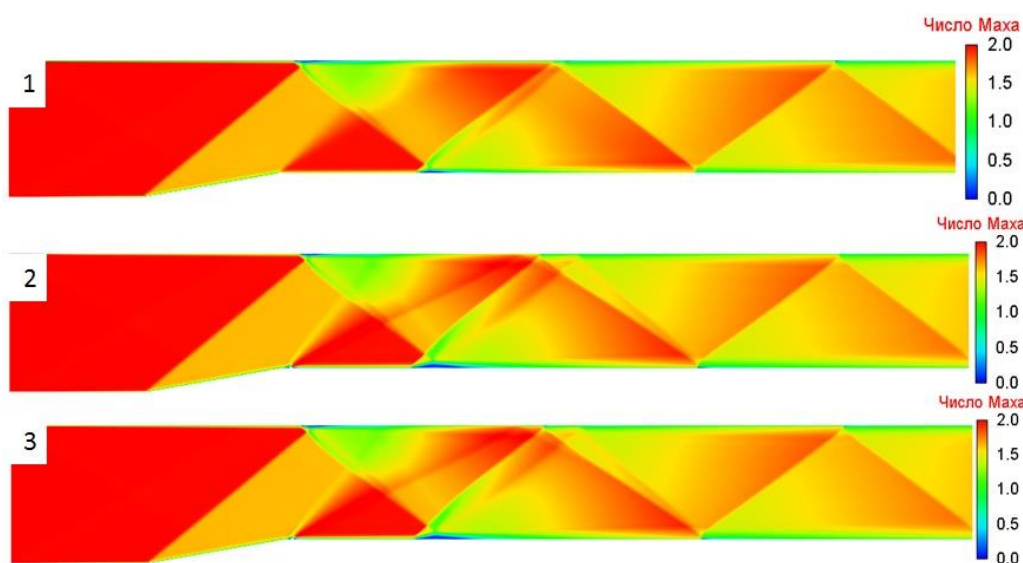


Рис. 22. Поле числа Маха (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Fig. 22. Mach number field (1 – original geometry, 2 – semisphere, 3 – pyramid)

Согласно полученным характеристикам (рис. 22), при данной конфигурации дополнительный элемент формирует слабое возмущение, вызывающее менее заметный (по сравнению с первым вариантом) рост давления вблизи верхней поверхности (рис. 23). Новое возмущение не изменяет общую структуру ударно-волновой картины. Наибольшее изменение наблюдается в области падения скачка уплотнения на нижнюю стенку, где формируется обширная отрывная зона. В целом оба типа турбулизаторов формируют одинаковую новую структуру потока. Расширение отрывной зоны привело к снижению значения коэффициента силы лобового сопротивления C_{x3} на 15 % в области вниз по потоку за турбулизатором (табл. 3).

Таблица 3.

Значение C_x (схема обозначения C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} показана на рис. 15)

Table 3.

C_x value (reference diagram of C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} shown in figure 15)

Геометрия	C_{x1}	C_{x2}	C_{x3}
Стандартный вид	0,00175112	0,046674	0,0012023
С учетом турбулизатора (полусфера)	0,00175111	0,0466851	0,00104364
С учетом турбулизатора (пирамида)	0,00175112	0,046678	0,00103392

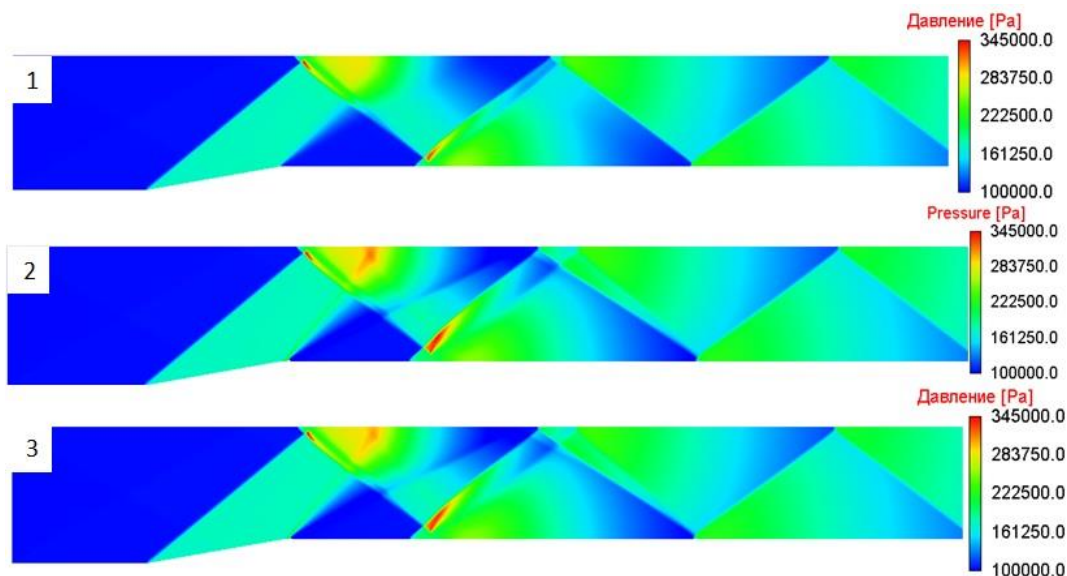


Рис. 23. Поле давления (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Fig. 23. Pressure field (1 – original geometry, 2 – semisphere, 3 – pyramid)

Рассмотрим протяженность области отрыва потока для исходного канала и второй конфигурации канала. Для этого построим график распределения коэффициента трения по нижней поверхности (рис. 24).

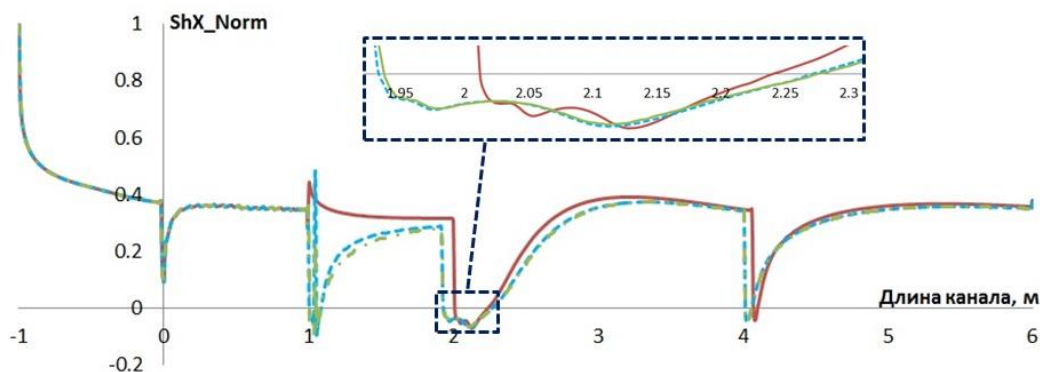


Рис. 24. График распределения нормированного коэффициента трения по нижней стенке (красная линия – исходная геометрия, синяя – с турбулизатором полусфера, зеленая – с турбулизатором пирамида)

Fig. 24. Distribution graph of normalized friction factor along the lower wall (red line – original geometry, blue line – with semisphere turbulence promoter, green line – with pyramid turbulence promoter)

Будем считать, что с учетом обоих турбулизаторов формируется равная отрывная зона. Координата $X_s=1,92$ – определяет точку отрыва пограничного слоя, а $X_a = 2,27$ – точку присоединения (attachment). Отрывная зона при данной конфигурации канала и параметрах потока имеет длину 0,35.

Таблица 4.

Параметры отрывной зоны в области падения скачка уплотнения

Table 4.

Detached region parameters at the region impacted by a shock wave

Геометрия	Начало (X_s)	Конец (X_a)	Длина
Стандартный вид	2,01	2,21	0,2
С учетом турбулизатора	1,92	2,27	0,35

Расширение отрывной зоны повлияло на распределение давления вдоль линии канала на высоте $y = 0,226$ (рис. 25).

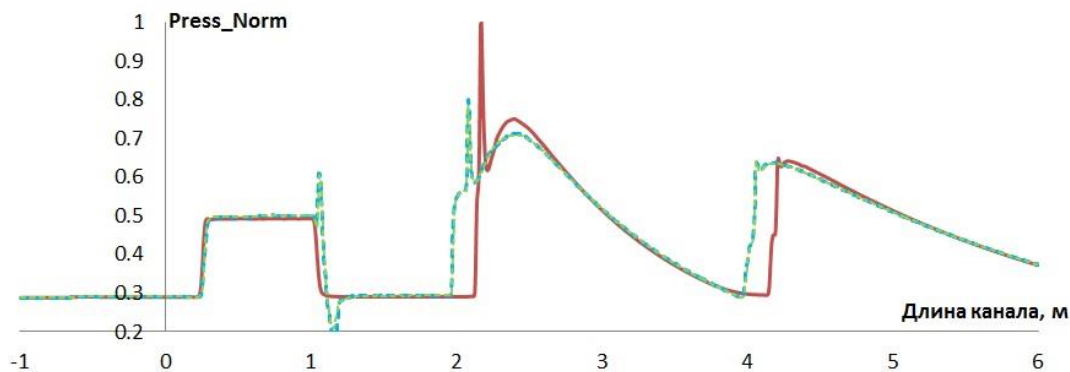


Рис. 25. Распределение давления вдоль линии $y = 0,226$

Fig. 25. Pressure distribution along $y=0.226$ line

Согласно представленному графику, максимальное значение давления в области взаимодействия ($1,9 < x < 2,2$) скачка уплотнения с пристеночным слоем уменьшилось на 20 % (с 352 кПа до 282 кПа).

Таким образом, применение турбулизатора в форме полусферы и пирамиды позволило уменьшить значение коэффициента силы лобового сопротивления на поверхности далее по потоку на 15 %. Проведенный эксперимент показывает немного большее влияние треугольного турбулизатора. Однако значительное влияние на распределение локальных характеристик поверхности оказывает конфигурация размещения турбулизаторов. В целом добавление турбулизаторов вносит слабое возмущение в течение, но имеет заметное влияние на пристеночный слой течения, что способствует изменению характеристик его взаимодействия с падающим скачком уплотнения.

Заключение

В работе представлено применение пакета программ ЛОГОС для исследования формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом обтекании клина. В результате выявлены особенности взаимодействия ударной волны с пристеночным течением. С помощью методов и алгоритмов численного моделирования показано влияние изменения геометрии канала на распределение локальных аэродинамических характеристик. Установлено, что добавление турбулизаторов на обтекаемую поверхность способствует изменению характеристик пристеночного течения, что, в свою очередь, приводит к изменению параметров в области взаимодействия пограничного слоя и падающей ударной волны.

Результаты получены при финансовой поддержке национального проекта «Наука и университеты» в рамках программы Минобрнауки РФ по созданию молодежных лабораторий № FSWE-2021-0009 (научная тема: «Разработка численных методов, моделей и алгоритмов для описания гидродинамических характеристик жидкостей и газов в естественных природных условиях, и условиях функционирования промышленных объектов в штатных и критических условиях на суперкомпьютерах петафлопсного класса») и при поддержке гранта Президента РФ для поддержки научных школ НШ-70.2022.1.5.

Библиографический список

1. Цифровые технологии в жизненном цикле российской авиационной техники: монография: под ред. М.А. Погосьяна – М.: Изд-во МАИ, 2020. – 448 с.
2. **Максимов, Ф.А.** Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке // Сб. мат. межд. научн. конф. «Проблемы баллистики». Т. 2. – СПб.: БГТУ, 2006. С. 44-48.
3. **Максимов, Ф.А.** Использование гибридных сеток для решения задач аэродинамического проектирования / Ф.А. Максимов, Ю.Д. Шевелев // Супервычисления и математическое моделирование. Труды XIII межд. семинара. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2012. С. 330-338.
4. **Башкин, В.А.** Применение метода Ньютона к расчету внутренних сверхзвуковых отрывных течений / В.А. Башкин, В.И. Егоров, Д.В. Иванов // Прикладная математика и техническая физика. 1997. Т. 38. № 1. С. 30-42.
5. **Башкин, В.А.** Торможение сверхзвукового потока в плоских и осесимметричных каналах / В.А. Башкин, В.И. Егоров, Д.В. Иванов // Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 143-152.
6. **Башкин, В.А.** Сверхзвуковое течение вязкого газа в плоском канале при больших числах Рейнольдса / В.А. Башкин, В.И. Егоров, Д.В. Иванов // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39. № 1. С. 115-122.
7. **Anderson, J.D.** Hypersonic and high-temperature gas dynamics / J.D. Anderson. – McGraw-Hill Book Company. 1988. P.702.
8. **Хейз, У.Д.** Теория гиперзвуковых течений / У.Д. Хейз, Р.Ф. Пробстин – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 607 с.
9. **Бражко, В.Н.** Экспериментальное исследование особенностей течения около наветренной стороны треугольного крыла с затупленными передними кромками при гиперзвуковых скоростях потока. Модели и методы аэродинамики / В.И. Бражко, А.В. Ваганов и др. – Материалы 10-й Международной школы-семинара. – М.: МЦНМО, 2010. – 200 с.
10. **Землянский, Б.А.** Возможности и результаты экспериментальных исследований теплообмена на моделях летательных аппаратов в гиперзвуковых поршневых аэродинамических трубах / Б.А. Землянский, В.В. Кислых, В.П. Маринин // Тезисы докладов международной научно-технической конференции «Фундаментальные проблемы высокоскоростных течений» 21-24 сентября 2004 г. – Жуковский: ЦАГИ, 2004.
11. **Белошенко, Б.Г.** Экспериментальные исследования газодинамики и теплообмена с использованием модели межблокового отсека ракеты-носителя при «горячем» разделении второй и третьей ее ступеней / Б.Г. Белошенко, В.Е. Волков, М.Ю. Куршаков и др. // Космонавтика и ракетостроение. – 2002. Вып. 3 (28).
12. **Бекетаева, А.О.** Численное моделирование взаимодействия ударной волны с пограничным слоем в плоском сверхзвуковом потоке со вдувом струи / А.О. Бекетаева, Е.С. Моисеева, А.Ж. Найманова // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 2. С. 181-191.
13. **Грудницкий, В.Г.** Характеристическая консервативная форма законов сохранения и устойчивые, монотонные вычислительные схемы для исследования разрывных течений / В.Г. Грудницкий, М.А. Мендель // Электронный журнал «Труды МАИ». Вып. № 67 [Электронный ресурс] Режим доступа: www.mai.ru/science/trudy/ (Дата обращения 15.01.2023).
14. **Ваганов, А.В.** Моделирование особенностей обтекания наветренной стороны треугольного крыла с затупленными передними кромками на основе численного решения уравнений Навье-Стокса. Модели и методы аэродинамики. Материалы 10-й Международной школы-семинара / А.В. Ваганов, В.Я. Нейланд и др. – М.: МЦНМО, 2010. – 200 с.
15. **Struchkov, A.** Implementation of Flux Limiters in Simulation of External Aerodynamic Problem on Unstructured Meshes / A. Struchkov, A. Kozelkov et al. – Fluids 2023, 1.
16. **Стручков, А.В.** Применение метода геометрической многоуровневой инициализации для ускорения решения задач аэродинамики на произвольных неструктурированных сетках // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2021. № 4 (135). С. 32-42.
17. **Kozelkov, A.S.** Two Methods to Improve the Efficiency of Supersonic Flow Simulation on Unstructured Grids / A.S. Kozelko, A.V. Struchkov, et al. – Fluids 2022, 7.
18. **Dmitriev, S.M.** Simulation of turbulent convection at high Rayleigh numbers / S.M. Dmitriev, A.S. Kozelkov, A.A. Kurkin, M.A. Legchanov, N.V. Tarasova, V.V. Kurulin, V.R. Efremov, R. Shamin // Modeling and simulation in engineering, Hindawi Publishing Corporation, 2018, p. 5781602.

19. **Kozelkov, A.S.** Investigation of Supercomputer Capabilities for the Scalable Numerical Simulation of Computational Fluid Dynamics Problems in Industrial Applications / A.S. Kozelkov, V.V. Kurulin, S.V. Lashkin, R.M. Shagaliev, A.V. Yalozo // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016. V. 56, № 8. Pp. 1506-1516.
20. **Kozelkov, A.S.** Eddy resolving numerical scheme for simulation of turbulent incompressible flows / A.S. Kozelkov, V.V. Kurulin // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015. Vol. 55. №7, Pp. 1255-1266.
21. **Efremov, V.** Technology of 3D Simulation of High-Speed Damping Processes in the Hydraulic Brake Device. «Modeling and Simulation in Engineering» / V. Efremov, A. Kozelkov, S. Dmitriev, A. Kurkin, V. Kurulin, D. Utkin. Academic editor: Dr. Konstantin Volkov. – Kingston University London, UK, 2018.
22. **Tyatyushkina, E.S.** Verification of the LOGOS Software Package for Tsunami Simulations / E.S. Tyatyushkina, A.S. Kozelkov, A.A. Kurkin, E.N. Pelinovsky, V.V. Kurulin, K.S. Plygunova, D.A. Utkin // *Geosciences* 2020, 10, 385; doi:10.3390/geosciences10100385.
23. **Лойцянский, Л.Г.** Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1979. – 904 с.
24. **Spalart, P.R.** A one-equation turbulence model for aerodynamic flows / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // *AIAA Paper*. 1992. № 0439.
25. **Ferziger, J.H.** Computational methods for fluid dynamics. Third edition / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. – 423 p.
26. **Roe, P.L.** Characteristic Based Schemes for the Euler Equations // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1986. Vol. 18. Pp. 337-365.
27. **Liou, M.-S.** A Sequel to AUSM: AUSM+ // *J. Comput. Phys.* 1996. Vol. 129. Pp. 364-382.
28. **Rodionov, A.V.** Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: The three dimensional case // *J. Comput. Phys.* 2018. V. 361. Pp. 50-55.
29. **Vierendeels, J.** Blended AUSM+ Method for All Speeds and All Grid Aspect Ratios / J. Vierendeels, B. Merci, E. Dick // *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 2001. 12. Vol. 39. Issue: 12. Pp. 2278-2282.
30. **Jasak, H.** Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow. Thesis submitted for the degree of doctor // Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, London, 1996.
31. **Kim, K.H.** Methods for the accurate computations of hypersonic flows. I AUSMPW+ scheme Methods / K.H. Kim, Ch. Kim, O.-H. Rho // *J. Comput. Phys.* 2001. Vol. 174. Pp. 38-80.
32. **Sweby, P.K.** High resolution using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.*, 21 (1984), pp. 995-1011.
33. **Булат, П.В.** Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем / П.В. Булат, К.Н. Волков // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88. № 5.
34. **Булат, П.В.,** Интерференция встречных скачков уплотнения / П.В. Булат, П.В. Денисенко, Н.В. Продан // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2015. Том 15. № 2. С. 346-355.
35. **Булат, П.В.** Гистерезис интерференции встречных скачков уплотнения при изменении числа Маха / П.В. Булат, П.В. Денисенко, Н.В. Продан, В.В. Упырев // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2015. Т. 15. № 5. С. 930-941.
36. **Булат, П.В.** Отражение косоугольного скачка уплотнения от стенки / П.В. Булат, В.В. Упырев, П.В. Денисенко // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2015. Том 15. № 2. С. 338-345.

*Дата поступления
в редакцию: 19.04.2023*

*Дата принятия
к публикации: 02.06.2023*