ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

УДК 53.072 ***EDN:*** **AQHPLU**

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО УДАРА С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНОГО ПРОЦЕССОРА MATHCAD.DOC

Е.А. Никулин

ORCID: **0000-0002-2520-681X** e-mail: **nea2nea@ya.ru**
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

Представлено исследование физических аспектов столкновения двух тел, в результате которого впервые получены прямые зависимости скоростей отскока тел от коэффициента восстановления при нецентральном ударе и определены условия отсутствия отскока при абсолютно неупругом столкновении. Привлечение символьного процессора MathCAD 15 для вывода сложных формул позволило снизить трудоемкость процесса, избежать возможных ошибок ручного вывода и повысить достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: удар, коэффициент восстановления, MathCAD, символьный процессор.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Никулин, Е.А. Исследование механического удара с помощью символьного процессора MathCAD.doc // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 1. С. 7-15. EDN: AQHPLU

RESEARCH OF MECHANICAL IMPACT USING MATHCAD.DOC SYMBOLIC PROCESSOR

E.A. Nikulin
ORCID: **0000-0002-2520-681X** e-mail: **nea2nea@ya.ru**
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper presents a study of the physical aspects of the collision of two bodies. The direct dependences of the rebound velocities on the coefficient of restitution for an off-center collision were obtained for the first time, and the conditions were determined under which there is no rebound in a perfectly inelastic collision. The MathCAD 15 symbolic processor for deriving complex formulas made it possible to simplify this time-consuming process, avoid possible manual derivation errors and increase the reliability of the results obtained.

Key words: collision, coefficient of restitution, MathCAD, symbolic processor.

FOR CITATION: Nikulin E.A. Research of mechanical impact using MathCAD.doc symbolic processor. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 1. Pp. 7-15. EDN: AQHPLU

Введение

Явление механического удара присутствует в любой компьютерной программе, моделирующей движение нескольких взаимодействующих объектов. В результате столкновений подвижные объекты изменяют свои скорости и траектории дальнейшего движения. Правильный расчет этих параметров, максимально близких к реалиям окружающего мира, является важнейшей задачей физического моделирования.

Изучение механического удара входит в программу курса физики для вузов [1-4], но редко доведено до полного исследования вопросов, связанных с понятием *коэффициента восстановления*, иногда ограничиваясь простейшими случаями центрального и абсолютно упругого удара [1]. Наиболее детальное исследование представлено в [5], где, однако, спутаны векторная и скалярная величины при вычислении проекции одного вектора на другой.

В настоящей работе выполнено полное исследование механического удара с помощью т.н. символьного процессора программы MathCAD, что позволило избежать ошибок ручного вывода. Программа MathCAD набирает популярность благодаря компактности записи формул, максимально близкой к естественному математическому языку, простоте построения всех видов графиков и способности к символьным вычислениям [6]. Результаты последних выводятся справа от знака символьного равенства «→». При этом широко используются символьные операторы solve (решить), simplify (упростить), factor (разложить на множители) и блок решения системы уравнений, записанных между ключевым словом Given (дано) и встроенной функцией Find (найти).

Центральный удар

В качестве объектов исследования примем простейшие объемные тела – шары с массами $\{m_1,m_2\}$, радиусами $\{r_1,r_2\}$, векторами центров $\{c_1,c_2\}$ и скоростей в начале столкновения $\{v_1,v_2\}$ (рис. 1, *а*). Сначала изучим *центральный* (прямой) *удар*, при котором все скорости направлены по линии c_1c_2, соединяющей центры шаров. Если одно из тел (допустим, второе) значительно массивнее другого, будем полагать его массу $m_2=\infty$ (в MathCAD это не символ бесконечности, а встроенная переменная $\infty=10^{307}$). Можно полагать это сверхмассивное тело как шаром, так и плоской стенкой (рис. 1, *б*) с вектором нормали N, параллельно которому направлены все скорости.

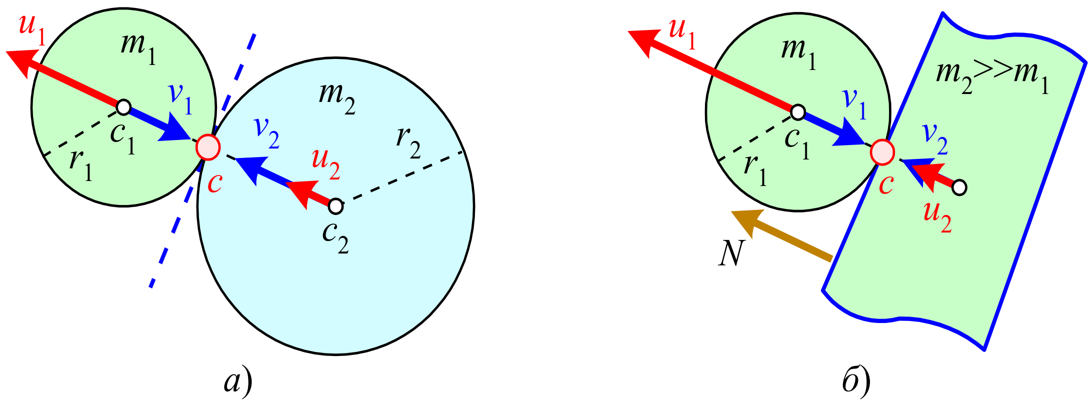


Рис. 1. Центральный удар

Fig. 1. Central collision

Требуется найти скорости $\{u_1,u_2\}$ отскока тел в конце ударного взаимодействия. При центральном ударе эти скорости также направлены параллельно вектору нормали к поверхностям в точке касания c. Во всех исследованиях различных типов ударов будем полагать бесконечно малой длительность контакта тел и отсутствие остаточных деформаций их формы. При абсолютно упругом (идеальном) ударе отсутствуют потери суммарных импульса и кинетической энергии. На основе этих двух законов сохранения в MathCAD символьно выводятся формулы конечных скоростей тел:

$$p := m1\,v1 + m2\cdot v2 \qquad K := \left(m1\cdot v1^2 + m2\cdot v2^2\right) \div 2$$

$$\text{Given} \qquad p = m1\cdot u1 + m2\cdot u2 \qquad K = \left(m1\cdot u1^2 + m2\cdot u2^2\right) \div 2$$

$$\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(u1\,,u2)^{\langle 1\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{m1\cdot v1 - m2\cdot v1 + 2\cdot m2\cdot v2}{m1 + m2} \\ \dfrac{2\cdot m1\cdot v1 - m1\cdot v2 + m2\cdot v2}{m1 + m2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Здесь и далее переменные *p* и *K* обозначают суммарные начальные импульс и кинетическую энергию двух тел. Результат символьного расчета:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}\,, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

формируется в 1-ом столбце составной 2×2-матрицы, возвращаемой функцией *Find* (неинтересный нам 0-ой столбец содержит скорости $\{u_1{=}v_1,\, u_2{=}v_2\}$ в отсутствие столкновения).

Способность символьного процессора MathCAD вычислять пределы позволяет легко получить частные случаи решения (1):

$$\lim_{m1 \to m2} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} \qquad \lim_{m2 \to \infty} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot v2 - v1 \\ v2 \end{pmatrix} \qquad \lim_{v2 \to 0}\ \lim_{m2 \to \infty} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -v1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Все они очевидны из жизненного опыта и без вычислений пределов:

- тела с равными массами $m_1{=}m_2$ при лобовом ударе обмениваются скоростями $\{u_1{=}v_2,\, u_2{=}v_1\}$ (как в занимательной игрушке «Маятник Ньютона»);
- тело бесконечной массы $m_2{=}\infty$ после удара сохраняет свою скорость $u_2{=}v_2$ и отталкивает первое тело со скоростью $-v_1$, добавляя к ней удвоенную собственную скорость $2v_2$;
- если к тому же второе массивное тело неподвижно ($v_2{=}0$), то оно так и остается неподвижным, а первое тело отскакивает от него с противоположной скоростью $-v_1$.

Другая идеализация – *абсолютно неупругий удар,* при котором тела не отскакивают друг от друга, а как бы «слипаются» в общую массу $m_1{+}m_2$, которая по закону сохранения суммарного импульса продолжает двигаться с общей скоростью *u*:

$$u := p = (m1 + m2)\cdot u \ \mathrm{solve}\,,u \ \rightarrow \frac{m1\cdot v1 + m2\cdot v2}{m1 + m2} \tag{2}$$

При равных массах тел скорость движения «слипшегося» тела двойной массы равна среднему значению скоростей столкнувшихся тел $(v_1{+}v_2)/2$, а при ударе тела с массой m_1 о тяжелое тело с массой $m_2{>>}m_1$ последнее не изменяет скорости движения $u{=}v_2$, в том числе, остается неподвижным при $v_2{=}0$:

$$\lim_{m1 \to m2} u \ \ \mathrm{factor} \ \rightarrow \frac{v1 + v2}{2} \qquad \lim_{m2 \to \infty} u \rightarrow v2 \qquad \lim_{v2 \to 0}\ \lim_{m2 \to \infty} u \ \rightarrow 0$$

И если, в отличие от (1), скорость *u* в (2) выводится только из закона сохранения импульса, вполне логично ожидать невыполнения закона сохранения кинетической энергии, вычислив ее потерю от начала до конца центрального абсолютно неупругого удара:

$$K - (m1 + m2)\cdot u^2 \div 2 \ \ \mathrm{factor} \ \rightarrow \frac{m1\cdot m2\cdot (v1 - v2)^2}{2\cdot (m1 + m2)}$$

Эта разность пошла на увеличение внутренней энергии, деформацию и нагрев обоих тел. В действительности при ударе часть внутренней энергии сжатия возвращается телам при отскоке, увеличивая разницу между конечными скоростями u_1 и u_2. Количественно это частичное восстановление кинетической энергии тел после удара характеризуется *коэффициентом восстановления* (КВ) конечной разности скоростей u_2-u_1 относительно начальной разности v_2-v_1:

$$u_2-u_1=k_в\left(v_1-v_2\right). \tag{3}$$

Отметим ошибочность предлагаемой в [4, 5] формулы $k_в=\left(u_2-u_1\right)/\left(v_1-v_2\right)$ из-за неопределенности операции деления векторов. В частном случае неподвижной стенки (v_2=u_2=0) КВ связывает длины противоположно направленных векторов скоростей падения v_1 и отражения u_1 соотношением $u_1=-k_в v_1$.

Экспериментально численное значение $k_в=\sqrt{h_{k+1}/h_k}$ определяется по отношению максимальных высот соседних отскоков упругого шара от горизонтального пола, измеряемых по нижнему краю шара. Для ваты $k_в$=0, дерева −1/2, стали − 5/9, слоновой кости − 8/9, стекла −15/16. При столкновении тел из разных материалов логично брать минимальный из двух КВ. Ручной вывод зависимостей векторов скоростей $u_1(k_в)$ и $u_2(k_в)$ от КВ достаточно трудоемок, а символьный процессор MathCAD, исходя из закона сохранения суммарного импульса и уравнения (3), справляется с этим без затруднения:

$$\begin{gathered}\text{Given}\quad p = m1\cdot u1 + m2\cdot u2 \qquad u2 - u1 = kv\cdot(v1 - v2) \qquad U := \text{Find}(u1, u2)\\ u1(kv) := U_0 \rightarrow \frac{m1\cdot v1 + m2\cdot v2 - kv\cdot m2\cdot v1 + kv\cdot m2\cdot v2}{m1 + m2}\\ u2(kv) := U_1 \rightarrow \frac{m1\cdot v1 + m2\cdot v2 + kv\cdot m1\cdot v1 - kv\cdot m1\cdot v2}{m1 + m2}\end{gathered} \tag{4}$$

Правильность вывода (4) подтверждается совпадением предельных случаев с приведенными выше свойствами абсолютно упругого ($k_в$=1) и абсолютно неупругого ($k_в$=0) ударов:

$$\lim_{m1 \to m2} \begin{pmatrix} u1(1) \\ u2(1) \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} \qquad \lim_{m1 \to m2} \begin{pmatrix} u1(0) \\ u2(0) \end{pmatrix} \text{ factor } \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{v1 + v2}{2} \\ \dfrac{v1 + v2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{m2 \to \infty} \begin{pmatrix} u1(1) \\ u2(1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot v2 - v1 \\ v2 \end{pmatrix} \qquad \lim_{m2 \to \infty} \begin{pmatrix} u1(0) \\ u2(0) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v2 \\ v2 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{v2 \to 0}\ \lim_{m2 \to \infty} \begin{pmatrix} u1(1) \\ u2(1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -v1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lim_{v2 \to 0}\ \lim_{m2 \to \infty} \begin{pmatrix} u1(0) \\ u2(0) \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

Нецентральный удар

Большинство столкновений тел происходит в произвольных направлениях скоростей $\{v_1, v_2\}$, и при их непараллельности с вектором нормали N в точке касания c удар является *нецентральным* (косым) (рис. 2).

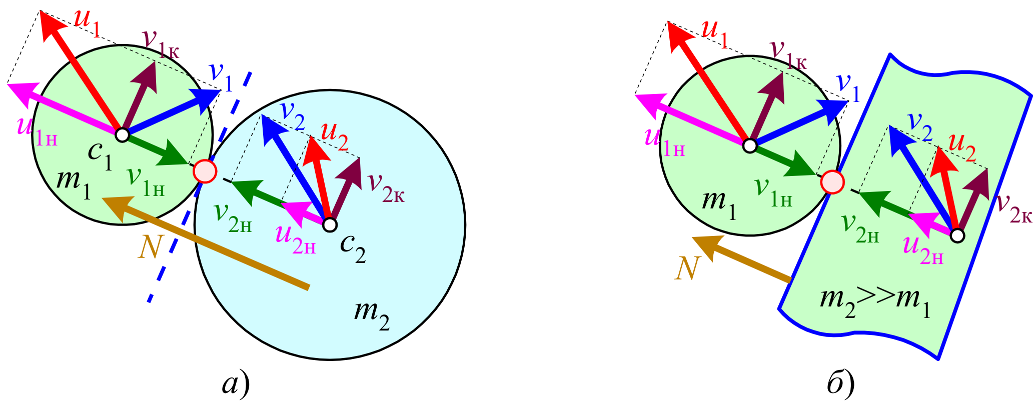


Рис. 2. Нецентральный удар

Fig. 2. Off-center collision

Поскольку в (3) коэффициент восстановления определен для векторов скоростей, параллельных вектору нормали N, то необходимо разложить векторы $\{v_1,v_2\}$ на суммы нормальных и тангенциальных (касательных) составляющих $\{v_{1н},v_{2н}\}$ и $\{v_{1к},v_{2к}\}$. Для этого определим в MathCAD *векторные* функции $pr(v,N)$ проекции вектора v на вектор N и $od(v,N)$ ортогонального дополнения (перпендикуляра) вектора v к вектору N [7]:

$$\mathrm{pr(v,N)} := \frac{\mathrm{v \cdot N}}{\mathrm{N \cdot N}}\mathrm{N} \qquad \mathrm{od(v,N)} := \mathrm{v} - \mathrm{pr(v,N)}$$

Здесь знак умножения «·» векторов означает их скалярное произведение. Еще раз отметим, что в [5] проекция вектора v на вектор N ошибочно вычисляется как *скаляр* $(v \cdot N)/(N \cdot N)$. Теперь можно записать следующие разложения для начальных $\{v_1,v_2\}$ и подлежащих нахождению конечных $\{u_1,u_2\}$ векторов скоростей:

$$v_{1н} = pr(v_1,N),\ \ v_{1к} = od(v_1,N) = v_1 - v_{1н},\ \ v_{2н} = pr(v_2,N),\ \ v_{2к} = od(v_2,N) = v_2 - v_{2н}. \tag{5}$$

Далее из выдвинутого выше допущения, что время контакта тел равно нулю, из-за чего равна нулю и работа направленных по касательной сил трения, примем важную идеализацию ударного процесса, заключающуюся в равенстве касательных составляющих скоростей:

$$v_{1к} = u_{1к},\ \ v_{2к} = u_{2к}. \tag{6}$$

Решая символьно систему аналогичных (4) уравнений совместно с (6), получим сложные зависимости скоростей $\{u_1,u_2\}$ от коэффициента восстановления $k_в$ и векторов $v_{1н}$ и $v_{2н}$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Given} \qquad \mathrm{p = m1 \cdot u1 + m2 \cdot u2} \qquad \mathrm{u2N - u1N = kv \cdot (v1N - v2N)}\\
&\mathrm{v1 - v1N = u1 - u1N} \qquad \mathrm{v2 - v2N = u2 - u2N} \qquad \mathrm{U := Find(u1, u2, u1N, u2N)}\\
&\mathrm{u1(kv) := U_0\ simplify} \ \to \mathrm{v1} - \frac{\mathrm{m2 \cdot v1N - m2 \cdot v2N + kv \cdot m2 \cdot v1N - kv \cdot m2 \cdot v2N}}{\mathrm{m1 + m2}}\\
&\mathrm{u2(kv) := U_1\ simplify} \ \to \mathrm{v2} + \frac{\mathrm{m1 \cdot v1N - m1 \cdot v2N + kv \cdot m1 \cdot v1N - kv \cdot m1 \cdot v2N}}{\mathrm{m1 + m2}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь доступны решения и для нормальных составляющих скоростей $\{v_{1н},v_{2н}\}$:

$$\mathrm{u1N(kv) := U_2} \to \frac{\mathrm{m1 \cdot v1N + m2 \cdot v2N - kv \cdot m2 \cdot v1N + kv \cdot m2 \cdot v2N}}{\mathrm{m1 + m2}}$$

$$\mathrm{u2N(kv) := U_3} \to \frac{\mathrm{m1 \cdot v1N + m2 \cdot v2N + kv \cdot m1 \cdot v1N - kv \cdot m1 \cdot v2N}}{\mathrm{m1 + m2}}$$

Дополнительно вручную упростив результаты решений (7), получим искомые скорости:

$$u_1(k_в)=v_1-\frac{m_2(1+k_в)(v_{1н}-v_{2н})}{m_1+m_2}, \quad u_2(k_в)=v_2+\frac{m_1(1+k_в)(v_{1н}-v_{2н})}{m_1+m_2}. \tag{8}$$

Во втором уравнении (7) используются нормальные, а значит, коллинеарные составляющие скоростей $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$, а не сами эти скорости, поскольку при косом ударе разностные векторы v_1-v_2 и u_2-u_1 не параллельны и не могут быть связаны скалярным коэффициентом $k_в$. Представляется необходимым опровергнуть расхожее утверждение [1-5], что при абсолютно неупругом ударе, т.е. при $k_в$=0, столкнувшиеся тела будто бы «слипаются» и дальше двигаются с равными скоростями $u_1=u_2$ как единое целое массой m_1+m_2. Сделав пробное вычитание скоростей неупругих отскоков в (8):

$$\mathrm{u2(0) - u1(0)\ simplify} \ \rightarrow \mathrm{v2 - v1 + v1N - v2N},$$

замечаем, что их равенство возможно только при *равенстве* $\boxed{v_{1к}=v_{2к}}$ *касательных составляющих начальных скоростей* $v_{1к}=v_1-v_{1н}$ и $v_{2к}=v_2-v_{2н}$. Ниже представлена программная иллюстрация этого весьма *редкого* случая.

Далее, вычислив символически два предела:

$$\lim_{\mathrm{m2}\rightarrow\infty} \mathrm{u1(kv)} \ \rightarrow \mathrm{v1 - v1N + v2N - kv\cdot v1N + kv\cdot v2N}$$

$$\lim_{\mathrm{v2N}\rightarrow 0}\ \lim_{\mathrm{m2}\rightarrow\infty} \mathrm{u1(kv)} \ \rightarrow \mathrm{v1 - v1N - kv\cdot v1N}$$

получим полезные формулы расчета скоростей отскока шара массой m_1 от преграды массой $m_2 >> m_1$, как движущейся не по касательной со скоростью $v_{2н}\neq 0$ (удар тяжелой теннисной ракеткой по легкому мячу), так и неподвижной с v_2=0 (отскок мяча от пола или стенки):

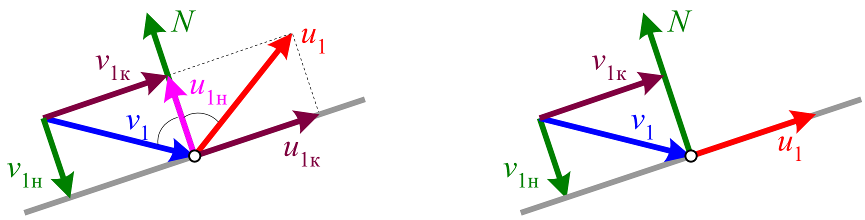
$$\lim_{m_2\to\infty} u_1=v_1-(1+k_в)(v_{1н}-v_{2н}), \quad \lim_{\substack{m_2\to\infty \\ v_2\to 0}} u_1=v_1-(1+k_в)v_{1н}. \tag{9}$$

Работа второго предела в (9) при столкновении шара с неподвижной плоскостью представлена на рис. 3:

а) при абсолютно упругом ударе реализуется равенство углов падения и отражения, а при падении перпендикулярно плоскости ($v_{1к}$=0) шар отскакивает от нее противоположно со скоростью $u_1=-v_1$;

б) при абсолютно неупругом ударе шар теряет нормальную составляющую вектора скорости и переходит в режим скольжения или качения по поверхности стенки в направлении касательной составляющей скорости $v_{1к}$. При перпендикулярном падении шар останавливается (u_1=0).

$u_1(1)=v_1-2v_{1н}=v_{1к}-v_{1н}$ $\qquad$ $u_1(0)=v_1-v_{1н}=v_{1к}$



а) $k_в$=1 $\qquad$ б) $k_в$=0

Рис. 3. Удары об стену

Fig. 3. Hitting the wall

Для получения аналогичных (1) формул прямых зависимостей конечных скоростей $\{u_1,u_2\}$ от начальных скоростей $\{v_1,v_2\}$ и исключения двойного расчета в (8) одинаковых фрагментов $(1+k_в)(pr(v_1,N)-pr(v_2,N))/(m_1+m_2)$, сформируем окончательную функцию, вычисляющую скорости двух тел после их столкновения по двухшаговому алгоритму и возвращающую составной вектор $[u_1 \; u_2]$:

$$\mathrm{udar}(m1,m2,v1,v2,N,kv) := \left| \begin{array}{l} w \leftarrow \dfrac{(1+kv)\cdot(v1-v2)\cdot N}{(m1+m2)\cdot N\cdot N}\cdot N \\ (\,v1-m2\cdot w \quad v2+m1\cdot w\,) \end{array} \right. \qquad (10)$$

Испытаем эту функцию на примерах расчета ударов с разными исходными данными.

Программа и примеры

В приведенной ниже MathCAD-программе, работающей для наглядности в 2D-пространстве, вначале задаются исходные параметры двух окружностей (на желтом фоне):

- векторы положений центров $\{c_1,c_2\}$ и скоростей в начале удара $\{v_1,v_2\}$;
- массы $\{m_1,m_2\}$ и коэффициент восстановления $k_в$.

Далее вычисляются: вектор нормали к окружностям $N=c_1-c_2$ в точке их касания, радиусы окружностей из условий $m_1/m_2=r_1^2/r_2^2$ пропорциональности массы 2D-круга квадрату (при моделировании столкновений шаров в 3D-пространстве – кубу) его радиуса и $r_1+r_2=|N|$ равенства суммы радиусов расстоянию между центрами, после чего становится возможным найти координаты точки касания c из пропорции $|c-c_1|/|c_2-c|=r_1/r_2$ как корень векторного уравнения $(c-c_1)r_2=(c_2-c)r_1$. Теперь все готово для обращения к функции $udar(m_1,m_2,v_1,v_2N,k_в)$, возвращающей строчный составной вектор $[u_1 \; u_2]$ скоростей окружностей в конце удара. Для графической иллюстрации расположения обеих окружностей и направлений начальных и конечных векторов в момент удара определим векторную функцию $o(c,r,t)=c+r[\cos(t) \; \sin(t)]^{т}$ и две составные матрицы точек $v=[c_1 \; c_1+v_1 \; im \; c_2 \; c_2+v_2]$ и $u=[c_1 \; c_1+u_1 \; im \; c_2 \; c_2+u_2]$, где точка $im=[\mathrm{i} \; \mathrm{i}]^{т}$ с мнимыми координатами (i – мнимая единица) используется для запрета вывода на XY-графике соединительных отрезков между окружающими ее точками.

$$(\,c1 \;\; c2\,) := \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \; \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right] \qquad (\,v1 \;\; v2\,) := \left[\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \; \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\right] \qquad o(c,r,t) := c + r\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

$$(\,m1 \;\; m2 \;\; kv\,) := (\,1 \;\; 4 \;\; 0\,) \qquad N := c1 - c2 \qquad t := 0, 0.1 .. 2\pi$$

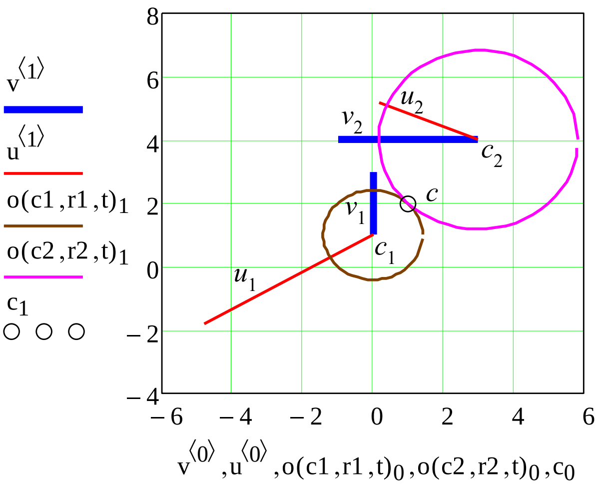
$$\text{Given} \qquad \sqrt{m1}\cdot r2 = \sqrt{m2}\cdot r1 \qquad r1 + r2 = |N|$$

$$\begin{pmatrix}r1\\r2\end{pmatrix} := \mathrm{Find}(r1, r2) \rightarrow \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 2\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad c := \frac{c1\cdot r2 + c2\cdot r1}{r1 + r2} \qquad im := \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$(\,u1 \;\; u2\,) := \mathrm{udar}(m1, m2, v1, v2, N, kv) \qquad v1K := \mathrm{od}(v1, N) \quad v2K := \mathrm{od}(v2, N)$$

$$v := \mathrm{augment}(c1, c1+v1, im, c2, c2+v2)^{T} \qquad u := \mathrm{augment}(c1, c1+u1, im, c2, c2+u2)^{T}$$

Первый пример, иллюстрирующий абсолютно упругий удар с исходными данными $c_1(0,1)$, $c_2(3,4)$, $v_1(0,2)$, $v_2(-4,0)$, $m_1=1$, $m_2=4$ и $k_в=1$, дал вектор нормали $N(-3,-3)$ длиной $3\sqrt{2}$, радиусы окружностей $r_1=\sqrt{2}$, $r_2=2\sqrt{2}$, точку их касания $c(1,2)$ и конечные векторы отскока $u_1(-4.8,-2.8)$, $u_2(-2.8,1.2)$. Вот как это выглядит на MathCAD-графике, дополненном вручную необходимыми обозначениями точек и векторов:



$$kv = 1$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

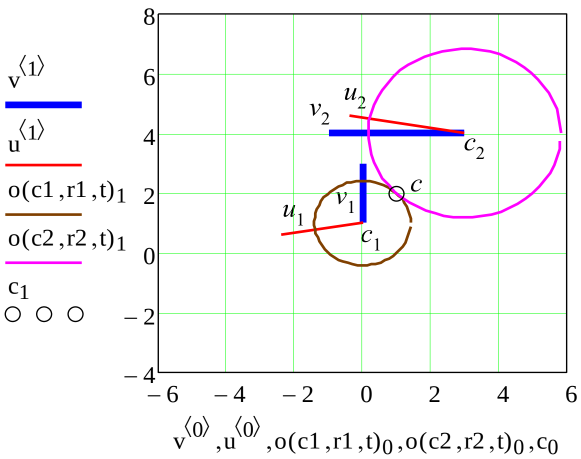
$$(r1\ \ r2) = (1.414\ \ 2.828)$$

$$(v1\ \ v2) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$(v1K\ \ v2K) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$(u1\ \ u2) = \left[\begin{pmatrix} -4.8 \\ -2.8 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -2.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}\right]$$

Во втором примере значение коэффициента восстановления изменено на $k_в$=0, а остальные исходные данные оставлены прежними. Расчет показал: несмотря на моделирование абсолютно неупругого удара, получены разные скорости отскоков окружностей $u_1 \neq u_2$, т.е. в дальнейшем окружности не будут двигаться параллельно, а сразу разойдутся друг от друга в разные стороны. Причиной такого поведения являются не равные касательные составляющие начальных скоростей $v_{1к} \neq v_{2к}$ (выделено голубым фоном).



$$kv = 0$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

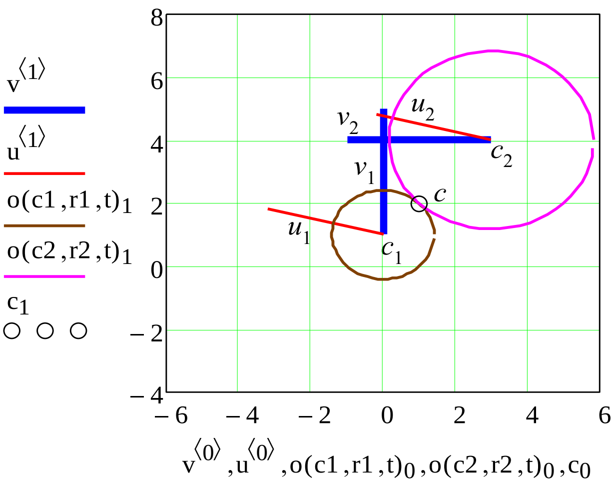
$$(r1\ \ r2) = (1.414\ \ 2.828)$$

$$(v1\ \ v2) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$(v1K\ \ v2K) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$(u1\ \ u2) = \left[\begin{pmatrix} -2.4 \\ -0.4 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -3.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}\right]$$

В третьем примере уравняем разные касательные скорости $2v_{1к}=v_{2к}$ путем удвоения первого начального вектора до $v_1(0,4)$. Как и ожидалось, в результате получились равные конечные скорости $u_1=u_2$:



$$kv = 0$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(r1\ \ r2) = (1.414\ \ 2.828)$$

$$(v1\ \ v2) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$(v1K\ \ v2K) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$(u1\ \ u2) = \left[\begin{pmatrix} -3.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -3.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}\right]$$

Это означает, что после такого «мягкого» столкновения обе окружности в отсутствие внешних сил начнут двигаться как единое целое (рис. 4, а). Но так как физически они друг с другом не склеены, то при $m_1 \neq m_2$ под действием неравных сил тяжести и сопротивления внешней среды их пути разойдутся (рис. 4, б).

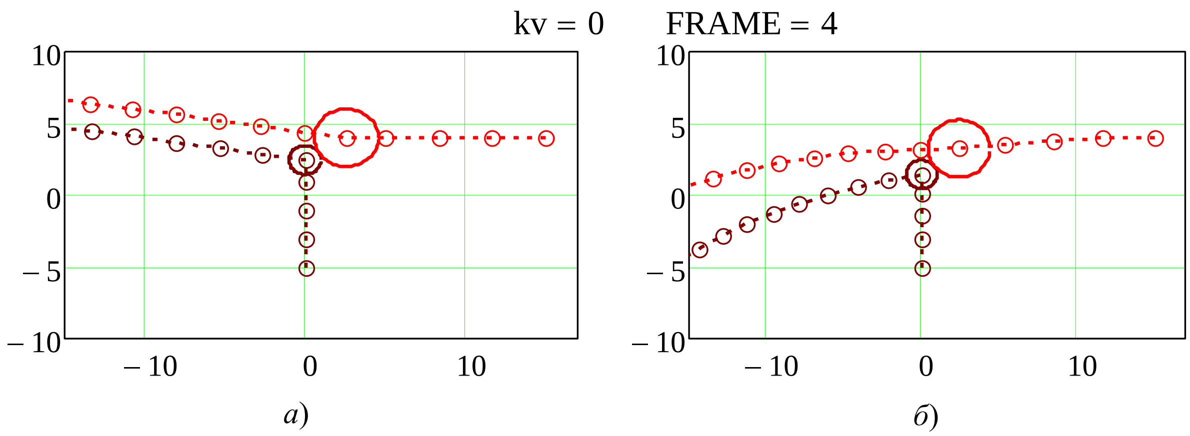


Рис. 4. Движение с абсолютно неупругим столкновением

Fig. 4. Motion with a perfectly inelastic collision

Выводы

Привлечение символьного процессора MathCAD к решению задачи полного исследования физических аспектов столкновения двух тел показало высокую эффективность за счет, во-первых, упрощения этого трудоемкого процесса, исключения возможных ошибок ручного вывода формул и, во-вторых, повышения достоверности результатов исследования. В работе впервые получены зависимости скоростей отскока тел от коэффициента восстановления при нецентральном ударе, а также определены условия отсутствия отскока при абсолютно неупругом столкновении.

Библиографический список

1. **Савельев, И.В.** Курс общей физики, том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
2. **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с.
3. **Матвеев, А.Н.** Механика и теория относительности: учебник для студентов вузов / А.Н. Матвеев. – М.: ИД «ОНИКС 21 век», 2003. – 432 с.
4. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
5. **Конгер, Д.** Физика для разработчиков компьютерных игр / Д. Конгер. – М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2007. – 520 с.
6. **Кирьянов, Д.В.** Mathcad 15 / Mathcad Prime 1/0 / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
7. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: Лань, 2017. − 708 с.

.

Дата поступления
в редакцию: 06.09.2023

Дата принятия
к публикации: 26.01.2024