

УДК 533.6.011.5

EDN: SIGMDF

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ CAE-МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ РАСЧЕТА НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ С ПЕРЕКРЫТИЯМИ

А.В. Саразов

ORCID: 0000-0002-1143-8978 e-mail: alex_sar@bk.ru

Российский федеральный ядерный центр

«Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Саров, Россия

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева

*Нижний Новгород, Россия***А.С. Козелков**

ORCID: 0000-0003-3247-0835 e-mail: ASKozelkov@mail.ru

Российский федеральный ядерный центр

«Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Саров, Россия

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева

Нижний Новгород, Россия

Рассматриваются вопросы численного моделирования задач обтекания тел со сложной геометрической формой. Представлены основные уравнения тепло- и массопереноса вязкого сжимаемого газа. Проведена модификация исходных соотношений для задач с подвижными границами, позволяющая сохранить порядок аппроксимации численной схемы путем введения вектора скорости грани контрольного объема. В качестве подхода моделирования используется методика расчета на сетках с перекрытиями. Приведены ключевые этапы предложенной технологии расчета. Для уменьшения вычислительной сложности построения интерполяционного шаблона предлагается использование иерархических структур данных. Восстановление расчетных полей на интерфейсных гранях выполняется посредством специализированных алгоритмов на основе градиентов и расширенного множества ячеек доноров. Работоспособность алгоритмов демонстрируется на примере задачи обтекания дозвуковым потоком сжимаемого газа двухзвенного профиля крыла. Анализ показал преимущество предложенных подходов интерполирования в отношении точности получаемых результатов для актуальных задач авиационной промышленности.

Ключевые слова: пакет программ ЛОГОС, уравнения Навье-Стокса, сетки с перекрытиями, интерполяционный шаблон.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Саразов, А.В. Повышение точности CAE-моделирования задач аэродинамики с использованием технологии расчета на трехмерных неструктурированных сетках с перекрытиями / А.В. Саразов, А.С. Козелков // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексева. 2024. № 2. С. 43-58. EDN: SIGMDF

INCREASING ACCURACY OF CAE MODELING IN AERODYNAMICS USING CALCULATION TECHNOLOGY ON THREE-DIMENSIONAL UNSTRUCTURED MESHES WITH OVERLAPS

A.V. Sarazov

ORCID: 0000-0002-1143-8978 e-mail: alex_sar@bk.ru

Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics

Sarov, Russia

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

A.S. Kozelkov

ORCID: **0000-0003-3247-0835** e-mail: **ASKozelkov@mail.ru**

Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper discusses numerical simulation of flows around bodies with complex geometric shapes. The basic equations of heat and mass transfer of viscous compressible gas are given. A modification of the original relations for problems with moving boundaries is presented, which makes it possible to preserve the order of approximation of the numerical scheme by introducing the velocity vector of the control volume edge. The calculation technique on meshes with overlaps was considered as a modeling approach. The key stages of the proposed calculation technology are given. It is proposed to use hierarchical data structures to reduce the computational complexity of constructing an interpolation template. Restoration of calculated fields on interface edges is performed using specialized algorithms based on gradients and an extended set of donor cells. The problem of a subsonic flow of compressible gas around a two-section airfoil is considered to demonstrate the performance of the algorithms. The analysis showed the advantage of the proposed interpolation approaches in terms of the accuracy of the results for current problems in the aviation industry.

Key words: LOGOS software, Navier-Stokes equations, meshes with overlaps, interpolation pattern.

FOR CITATION: A.V. Sarazov, A.S. Kozelkov. Increasing accuracy of CAE modeling in aerodynamics using calculation technology on three-dimensional unstructured meshes with overlaps. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 2. Pp. 43-58. EDN: SIGMDF

Современная инженерная практика все чаще сталкивается с проблемами, связанными с оптимизацией различных модификаций образцов техники с целью улучшения аэродинамических качеств летательного аппарата. Как правило, они возникают в процессе подбора наиболее выгодного расположения того или иного проектируемого узла в общей компоновке изделия. В качестве примера можно рассмотреть различные конфигурации механизации крыла, расположения подвесного топливного бака и т.д.

Характер изменения формы или положения отдельных элементов объекта исследования, а также требования, предъявляемые к точности получаемых результатов, определяют выбор методов моделирования. В ряде случаев удается использовать одну дискретную модель для серии расчетов, отличающихся лишь координатами узлов расчетной сетки, путем использования различных алгоритмов деформирования [1, 2]. В качестве альтернативы методу деформирования расчетной сетки можно рассмотреть метод расчета на сетках с перекрытиями [3]. В силу постоянного усложнения конструкции перспективных образцов авиационной техники и режимов ее эксплуатации востребованность и актуальность исследований в данном направлении высоки [4]. Метод расчета на сетках с перекрытиями позволяет существенно сократить время подготовки задачи, поскольку подразумевает разбиение исходной геометрической модели на отдельные элементы. Полученные дискретные модели, учитывающие особенности и геометрическую форму лишь отдельного элемента общей модели, согласно идеологии рассматриваемого метода, объединяются в одну общую сетку с перекрытиями. Расчетная методика учитывает наличие возможных пересечений расчетных сеток и обеспечивает их корректное взаимодействие посредством генерации интерполяционного шаблона [5].

Помимо алгоритма построения наиболее соответствующего интерполяционного шаблона, в методике расчета на сетках с перекрытиями ключевое значение имеет выбор метода интерполяции для обеспечения требуемой точности расчета. Алгоритмы интерполяции применяются для обеспечения взаимодействия несвязанных расчетных сеток. На текущий момент не существует общепринятого метода интерполирования полей применительно к технологии расчета с использованием неструктурированных перекрывающихся сеток, что определяет актуальность подобных исследований.

1. Методика решения задачи

1.1. Основные уравнения и дискретизация

Течения вязкого сжимаемого газа описываются системой уравнений Навье-Стокса. В настоящее время ее аналитические решения получены лишь для ряда постановок задач с существенными упрощениями характеристик течения, что нехарактерно для реальных процессов. В связи с этим разработаны различные подходы для численного решения системы уравнений Навье-Стокса: метод конечных разностей, панельный метод, метод конечных элементов, метод конечных объемов. По ряду причин в настоящее время наибольшее распространение получил метод конечных объемов. Он требует наличия расчетной сетки, в которой ячейки сетки (контрольные объемы) могут быть произвольными многогранниками, заполняющими расчетную область без зазоров и наложений. Каждый многогранник ограничен произвольным числом граней, вершинами которых являются узлы сетки. Общий вид ячейки показан на рис. 1.

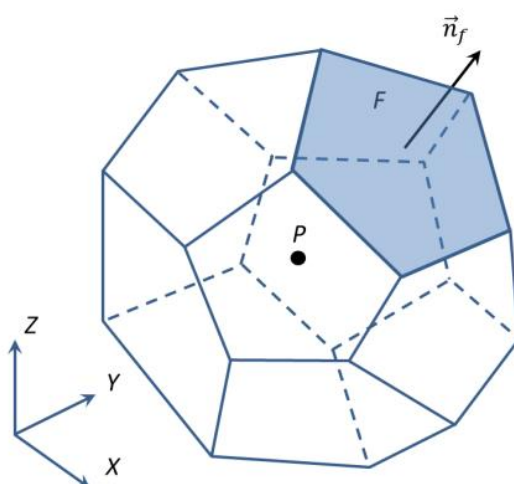


Рис. 1. Общий вид ячейки сетки:

P – центр ячейки, F – одна из граней ячейки, выделенная цветом, \vec{n}_f – нормаль к грани F

Fig. 1. General view of a mesh cell:

P – center of a mesh cell, F – one of the cell edges, highlighted in color, \vec{n}_f – normal of the F edge

Система уравнений Навье-Стокса в векторной форме имеет вид [6]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} W dV + \iint_{\Delta S} (F - G) dS = \int_{\Delta V} H dV \quad (1)$$

где вектор W – вектор консервативных переменных, H – источниковый член, F и G – вектора конвективных и диффузионных потоков:

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho v u_n + p n_x \\ \rho v v u_n + p n_y \\ \rho w u_n + p n_z \\ \rho H u_n + p u_n \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \\ \tau u + q \end{pmatrix} \quad (2)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора скорости, ρ – плотность, p – давление, E – полная энергия, u_n – нормальная составляющая скорости, q – тепловой поток, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений.

Система уравнений течения вязкого газа вида (1) будет вносить погрешности в схему дискретизации в случае расчета нестационарных задач с движением отдельных границ. По

этой причине необходимо выполнить модификацию исходных уравнений путем введения в вектор конвективных потоков скорости движения грани:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} W dV + \iint_{\Delta S} (F - \vec{x}W - G) dS = \int_{\Delta V} H dV \quad (3)$$

где \vec{x} – скорость движения границы контрольного объема.

Помимо введения в систему уравнений вектора скорости движения грани, уравнение (3) также учитывает скорость изменения контрольного объема. Скорость движения грани напрямую влияет на порядок аппроксимации численной схемы. Поэтому одним из требований к алгоритму вычисления вектора скорости движения грани является удовлетворение условия геометрической консервативности (*Geometric Conservation Law*, GCL) [7]. Отметим, что сохранение порядка аппроксимации численной схемы гарантируется соблюдением условия геометрической консервативности [7].

Движение границ, в свою очередь, требует построения нестационарных схем расчета для уравнений типа (3). Один из широко применяемых подходов исходит из предположения, что течение потока в каждый момент времени рассматривается как результат установления некоторого стационарного процесса [8]. Поэтому вместо решения уравнений вида (3) рассматриваются модифицированные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} W dV + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Delta V} W dV + \iint_{\Delta S} (F - \vec{x}W - G) dS = \int_{\Delta V} H dV, \quad (4)$$

где τ – псевдовремя.

Построение численной схемы основано на использовании теоремы о среднем. В методе конечных объемов средние значения расчетных полей в ячейке и на гранях отнесены к центрам ячейки и граней соответственно. Следовательно, выражение вида (4) будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (WV)_P + \frac{\partial}{\partial \tau} (WV)_P + \sum_{f=1}^N [F(W) - \vec{x}W - G(W, \nabla W)]_f S_f - (H(W, \nabla W))_P V_P^{n+1} = 0 \quad (5)$$

где n – шаг по времени, N – количество граней в ячейке P .

Выражение (5) можно представить в операторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (WV)_P + \frac{\partial}{\partial \tau} (WV)_P + L(W) = 0 \quad (6)$$

где:

$$L(W) = \sum_{f=1}^N [F(W) - \vec{x}W - G(W, \nabla W)]_f S_f - (H(W, \nabla W))_P V_P^{n+1} \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой разностный оператор, содержащий аппроксимацию конвективных и диффузионных потоков с учетом движения граней контрольного объема. По причине того, что разностный оператор $L(W)$ основан на неявных аппроксимациях потоков с использованием односторонних разностей, аппроксимация выражения вида (4) имеет первый порядок по пространству. Для решения нелинейного уравнения вида (6) на новый момент времени применяется метод итераций по нелинейности. Тогда выражение (7) можно представить в виде:

$$L(W^{\gamma+1}) = L(W^{\gamma+1}) - L(W^{\gamma}) + L(W^{\gamma}) = \Delta L_1(W^{\gamma+1}, W^{\gamma}) + L_2(W^{\gamma}) \quad (8)$$

где γ – индекс итерации, а выражение для члена $L_2(W^{\gamma})$ приведено ниже:

$$L_2(W^{\gamma}) = \sum_{f=1}^N [F(W^{\gamma}) - \vec{x}W^{\gamma} - G(W^{\gamma}, \nabla W^{\gamma})]_f S_f - (H(W^{\gamma}, \nabla W^{\gamma}))_P V_P \quad (9)$$

$$\Delta L_1(W^{\gamma+1}, W^{\gamma}) = \sum_{f=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial W} - \vec{x} - \frac{\partial G}{\partial W} \right]_f^{\gamma} (W^{\gamma+1} - W^{\gamma})_f S_f - \frac{\partial H}{\partial W}_P^{\gamma} (W^{\gamma+1} - W^{\gamma})_P \quad (10)$$

На основании выражений (8)-(10) численная схема решения уравнений Навье-Стокса может быть представлена в разностной форме:

$$\left(\frac{2V_P^{n+1} - V_P^n + V_P^{n+1}}{\Delta t} \right) \Delta W_P^{\gamma+1} + \sum_{f=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial W} - \bar{x} - \frac{\partial G}{\partial W} \right]_f \Delta W_f^{\gamma+1} S_f - \frac{\partial H}{\partial W_P} \Delta W_P^{\gamma+1} V_P^{n+1} = R(W) \quad (11)$$

Правая часть уравнений является невязкой уравнений баланса:

$$R(W) = (2V_P^{n+1} - V_P^n) \frac{W_P^n - W_P^\gamma}{\Delta t} - \sum_{f=1}^N \left[F - \bar{x}W - G \right]_f \Delta S_f + H_P^\gamma V_P^{n+1} \quad (12)$$

Первым этапом расчета конвективных потоков является реконструкция расчетных величин слева и справа от грани ячейки, после чего применяются схемы типа *Pou* [9] и AUSMP [10]. Данные схемы относят к схемам типа Годунова, имеющим ясную физическую интерпретацию. Вычисление диффузионных потоков выполняется с применением явной схемы, где градиенты и расчетные параметры в центрах ячейки интерполируются в центры граней.

Дополнительно для возможности численного моделирования задач обтекания подвижных тел с использованием подхода сеток с перекрытием требуется построение интерполяционного шаблона, обеспечивающего взаимодействие независимых сеток.

1.2. Интерполяционный шаблон

Технология расчета на основе сеток с перекрытиями, как было отмечено выше, подразумевает применение нескольких не связанных друг с другом сеток как единого целого. Поэтому в объединенной дискретной модели существуют области пространства, где две или более сеток перекрываются друг с другом. Соответственно, одной из центральных задач рассматриваемой методики является построение интерполяционного шаблона, который обеспечивает сопряжение независимых сеток. Построение подобного шаблона взаимодействия состоит из этапов определения интерфейсов, поиска нерасчетных областей дискретных моделей и восстановления полей на интерфейсах. По причине высокой востребованности подобной техники расчета в инженерных приложениях алгоритмы сопряжения должны базироваться на предположении, что ячейками расчетной сетки являются произвольные многогранники. В свою очередь, интерполяционные шаблоны, созданные на основе различных подходов [5], могут отличаться друг от друга (рис. 2).

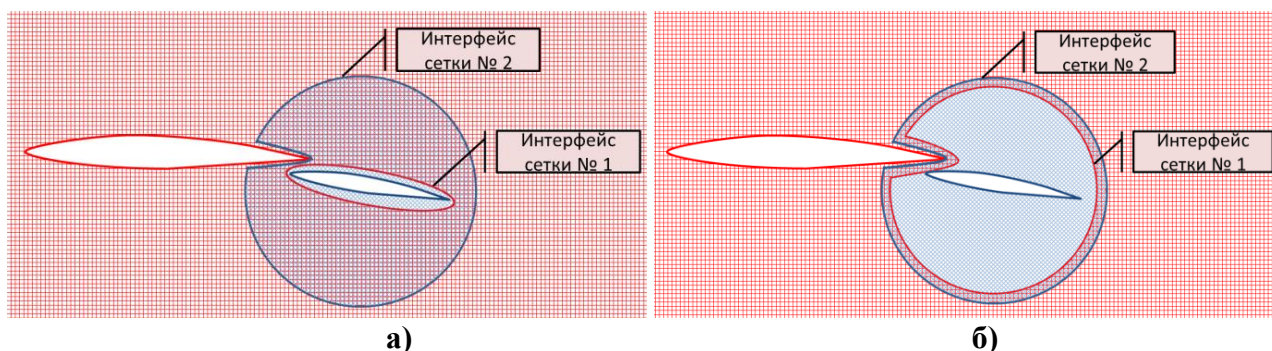


Рис. 2. Интерполяционные шаблоны для двухзвенного профиля крыла:

а) большие перекрытия, б) минимизация перекрытий

Fig. 2. Interpolation templates for a two-section airfoil:

a) large overlaps, b) minimizing overlaps

Как правило, подходы, обеспечивающие минимизацию переклестов [11], являются предпочтительными ввиду экономии вычислительных ресурсов и повышают устойчивость итерационного процесса к различным родам осцилляциям. В случае движения или изменения формы одной из границ процедуру маркировки необходимо повторить для новой конфигурации формы обтекаемого объекта.

Тем не менее, методы маркировки (определения нерасчетных областей), построение интерфейсов взаимодействия являются скорее технической стороной расчета на сетках с перекрытиями, тогда как подходы восстановления расчетных полей на интерфейсах в большинстве своем относятся к методическим аспектам, влияющим на конечный результат моделирования. С развитием технологии расчета на сетках с перекрытиями проводились исследования, направленные на повышение качества получаемого решения с помощью алгоритмов интерполяции высокой точности [12, 13]. Также предпринимались попытки построения консервативных схем расчета [14-17]. Подобные подходы можно условно разделить на две категории. В первую группу входят методики, где выполнение законов сохранения гарантировалось путем применения специальных схем расчета, основанных на использовании геометрических характеристик элементов сетки [13, 14]. Основной недостаток данного подхода состоит в том, что реализация его для произвольных трехмерных сеток крайне затруднительна. Методы второй группы основываются на построении сетки без перекрытий на основе перекрывающихся сеток [17] (рис. 3).

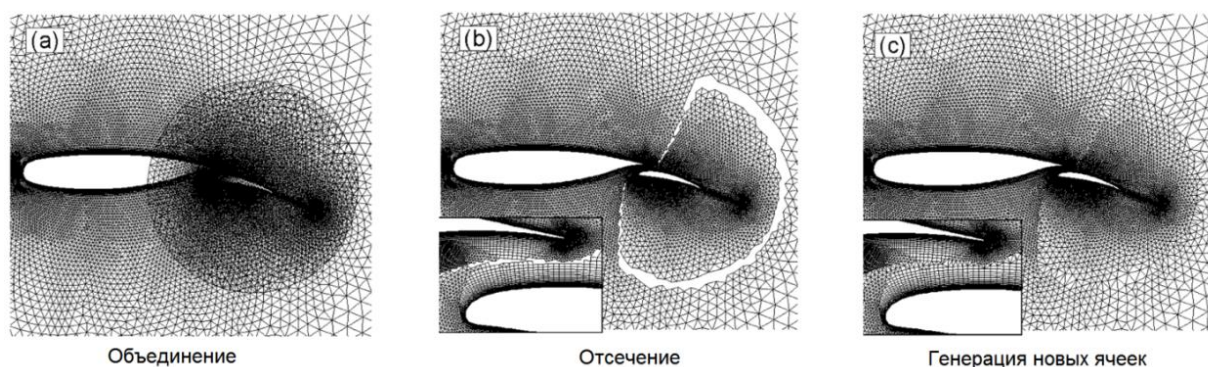


Рис. 3. Методика DRAGON

Fig. 3. DRAGON method

Методы восстановления значения полей на интерфейсах, гарантирующие консервативность, в большинстве случаев задают высокие требования к дискретной модели и детально проработаны для регулярных двумерных расчетных сеток. Применение подобных подходов к реконструкции для трехмерных неструктурированных расчетных сеток весьма проблематично, особенно для нестационарных задач с движением границ. По этой причине на практике точность результатов достигается качественными методами интерполирования. Это позволяет использовать известные схемы расчета сжимаемых и несжимаемых течений без каких-либо ограничений, что является достоинством подобных подходов.

Наиболее распространенными методами интерполяции [12] для численного моделирования задач с сетками с перекрытием являются:

- метод обратных взвешенных расстояний;
- метод трилинейной интерполяции.

Поскольку подходы интерполирования отличаются реализацией и требованиями к входным данным, это оказывает влияние как на построение интерполяционного шаблона, так и на получаемые результаты. Рассмотрим каждый из представленных подходов.

1.3. Метод обратных взвешенных расстояний

Метод обратных взвешенных расстояний опирается на геометрическое распределение ключевых точек, на основе которых происходит восстановление полей. На рис. 4 представлен результат процедуры поиска доноров на примере двумерной задачи.

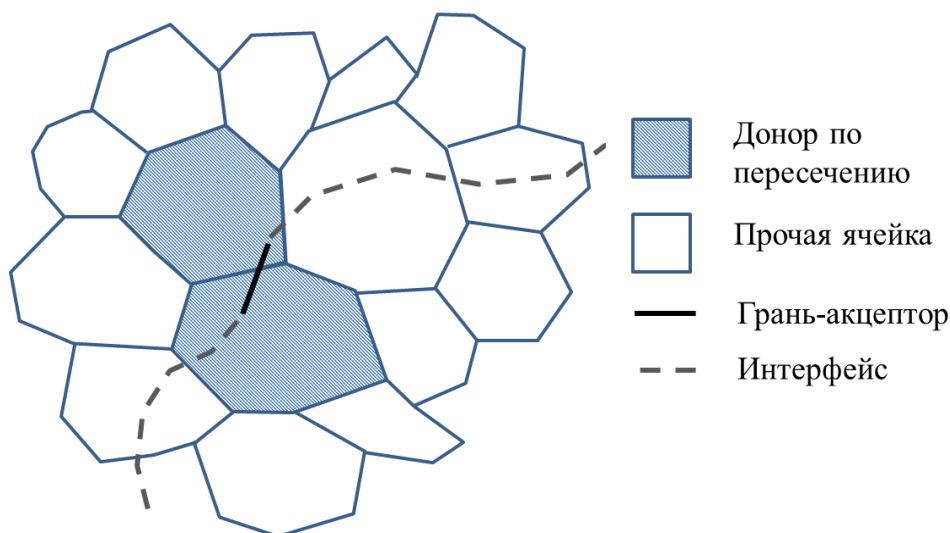


Рис. 4. Результат поиска доноров для метода обратных взвешенных расстояний

Fig. 4. Result of donor search for the inverse distance weighting

Данный метод интерполирования предполагает, что ячейка, имеющая наименьшее расстояние от центра до грани интерфейса, имеет больший весовой коэффициент. Расчет величин проводится с помощью формулы:

$$\varphi(x_a, y_a, z_a) = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i(s_i) \varphi(x_i, y_i, z_i)}{\sum_{k=1}^N \omega_k(s_k)}, \quad (13)$$

Весовая функция ω_i определяется соотношением:

$$\omega_i(s_i) = \frac{1}{\| \{ (x_a - x_i), (y_a - y_i), (z_a - z_i) \} \|^p}, \quad (14)$$

где x_a, y_a, z_a – координаты центра грани-акцептора, x_i, y_i, z_i – центр ячейки i -го донора, p – положительная константа.

Выбор степени p обусловлен плавностью изменения интерполируемой величины при изменении начальных данных алгоритма, и, как правило, на практике выбор $p=2$ дает наиболее качественные результаты.

1.4. Метод трилинейной интерполяции

Метод трилинейной интерполяции [5] является расширением линейной интерполяции для трехмерного пространства. Значение функции формируется на основе 8 точек, окружающих целевую точку (рис. 5).

В отличие от предыдущего метода интерполяции, при построении шаблона взаимодействия необходимо гарантировать нахождение точки внутри параллелепипеда. С целью оптимизации вычислительного процесса взамен параллелепипеда используется куб, центр которого совпадает с центром интерфейсной грани. Для каждой грани акцептора необходимо построить обрамляющий куб так, чтобы центр грани находился строго внутри. При поиске доноров для каждой грани используется не сама грань, а куб, содержащий центр грани. На рис. 6 представлен результат поиска доноров для грани-акцептора на примере двухмерной задачи.

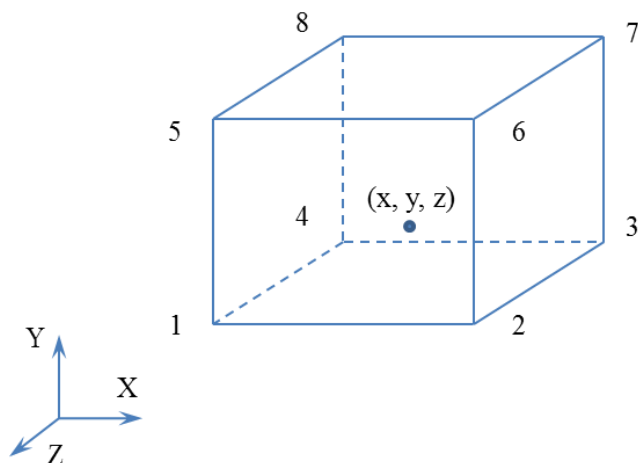


Рис. 5. Шаблон трилинейной интерполяции

Fig. 5. Trilinear interpolation pattern

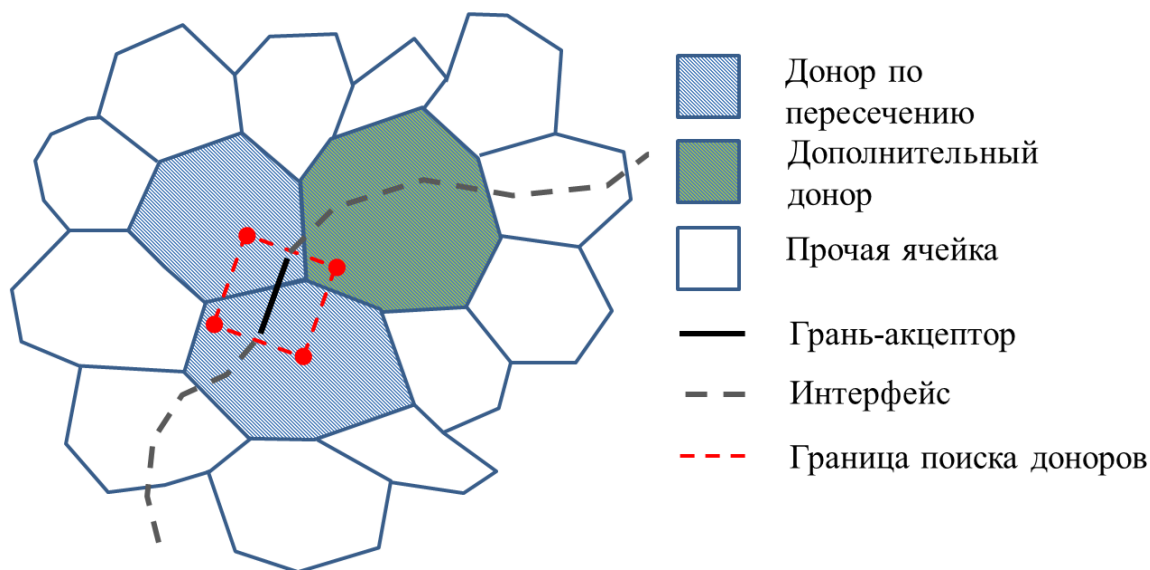


Рис. 6. Результат поиска доноров для трилинейной интерполяции

Fig. 6. Result of donor search for the trilinear interpolation

В отличие от метода обратных взвешенных расстояний, множество доноров содержит еще одну ячейку по причине расширенного шаблона интерполяции.

Процедура поиска доноров для интерфейсов состоит из двух этапов:

- поиск ячеек, пересекающихся с кубом, соответствующим грани интерфейса;
- анализ полученного множества на предыдущем шаге с целью поиска ячеек, содержащих вершины куба.

Процедура поиска ячеек основана на применении эффективных структур данных, таких как альтернативные бинарные деревья [18]. Поиск ячеек, содержащих вершины куба проводится прямым перебором полученного ранее множества ячеек. Ячейки, не содержащие вершины куба, не участвуют в процессе восстановления расчетных данных для текущей грани-акцептора. Описанная процедура выполняется для всех интерфейсных граней.

По завершении построения интерполяционного шаблона в процессе расчета восстановление данных выполняется по формуле:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_a, y_a, z_a) = & \frac{\varphi(x_1, y_1, z_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_2 - x_a)(y_2 - y_a)(z_2 - z_a) + \\
& + \frac{\varphi(x_1, y_1, z_2)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_2 - x_a)(y_2 - y_a)(z_a - z_1) + \\
& + \frac{\varphi(x_1, y_2, z_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_2 - x_a)(y_a - y_1)(z_2 - z_a) + \\
& + \frac{\varphi(x_1, y_2, z_2)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_2 - x_a)(y_a - y_1)(z_a - z_1) + \\
& + \frac{\varphi(x_2, y_1, z_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_a - x_1)(y_2 - y_a)(z_2 - z_a) + \\
& + \frac{\varphi(x_2, y_1, z_2)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_a - x_1)(y_2 - y_a)(z_a - z_1) + \\
& + \frac{\varphi(x_2, y_2, z_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_a - x_1)(y_a - y_1)(z_2 - z_a) + \\
& + \frac{\varphi(x_2, y_2, z_2)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}(x_a - x_1)(y_a - y_1)(z_a - z_1)
\end{aligned} \tag{15}$$

Данный тип интерполяции обладает повышенной устойчивостью в силу расширенного шаблона взаимодействия, и рекомендуется для задач, в которых происходит проникновение твердых тел друг в друга.

2. Сравнительный анализ исходных методов интерполяции

С целью проведения сравнительного анализа подходов восстановления данных на гранях-акцепторах и алгоритмов интерполирования рассматривается двухзвенный элементарный профиль крыла GA(W)-1 с однощелевым выдвигным закрылком [19] (рис. 7).

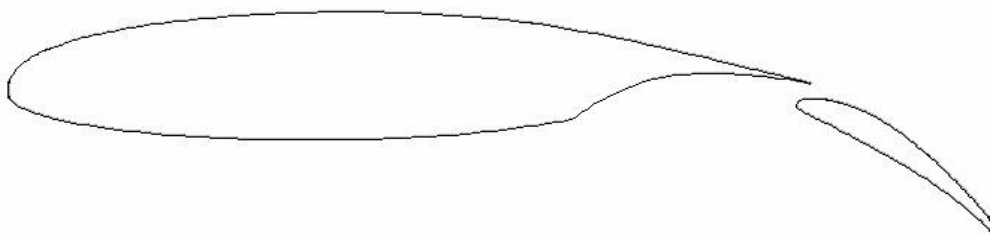


Рис. 7. Общий вид двухзвенного профиля GA(W)-1

Fig. 7. General view of the two-section airfoil GA(W)-1

Результаты каждого метода интерполирования сравниваются с коэффициентами подъемной силы (C_{ya}) и коэффициентами сопротивления (C_{xa}) для различных углов атаки (α), полученными с использованием сетки без перекрытий и в ходе натурального эксперимента. Для численного моделирования применялась расчетная сетка, состоящая из 587 167 ячеек с двумя топологически несвязанными регионами. На рис. 8 представлена дискретная модель вблизи профиля крыла.

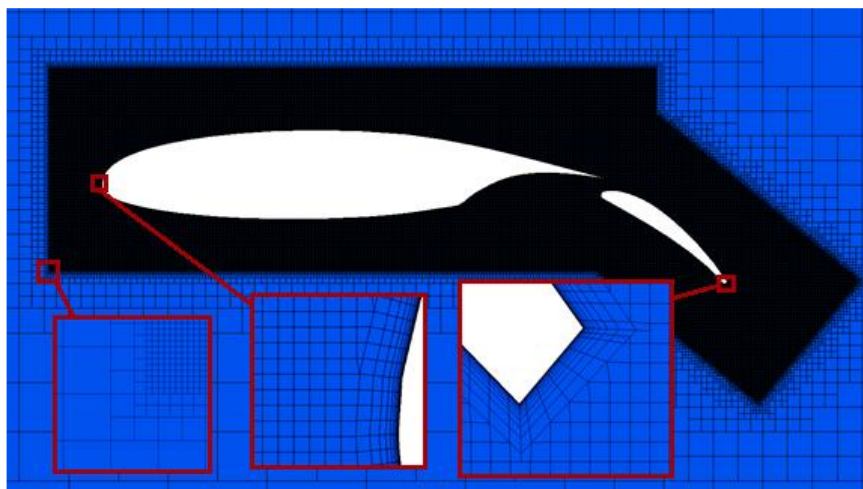


Рис. 8. Активные ячейки

Fig. 8. Active cells

Расчет аэродинамических нагрузок на профиль GA(W)-1 производился для углов атаки в диапазоне $\alpha = -2^\circ \div 14^\circ$ и числа Маха $M_\infty = 0.21$. Число Рейнольдса взято равным $Re = 2.2 \times 10^6$. В качестве параметров начальной инициализации использовались следующие величины: $P_\infty = 47096 \text{ Па}$, $T_\infty = 288 \text{ К}$, $\rho_\infty = 0.56968 \text{ кг/м}^3$, $c = 321 \text{ м/с}$, $\mu = 1.85e-5 \text{ Па} \cdot \text{с}$, где P_∞ – давление, T_∞ – температура, ρ_∞ – плотность, c – скорость звука, μ – динамическая вязкость.

На открытых границах в качестве граничного условия использовался свободный поток с числом Маха $M = 0.21$ и направлением потока, соответствующим указанным выше углам атаки. Воздух рассматривается как идеальный газ, для описания турбулентных характеристик использовалась модель Спаларта-Аллмараса [20].

Представленные выше методы и алгоритмы, как и все расчеты в данной работе, реализованы в ЛОГОСе – российском пакете программ инженерного анализа (CAE), предназначенном для решения широкого круга промышленных задач [21-23].

На рис. 9 представлено распределение числа Маха вблизи профиля для угла атаки $\alpha = 0^\circ$, используется метод обратной весовой интерполяции. Видна непрерывная структура течения, полученная с применением методики расчета на сетках с перекрытиями.

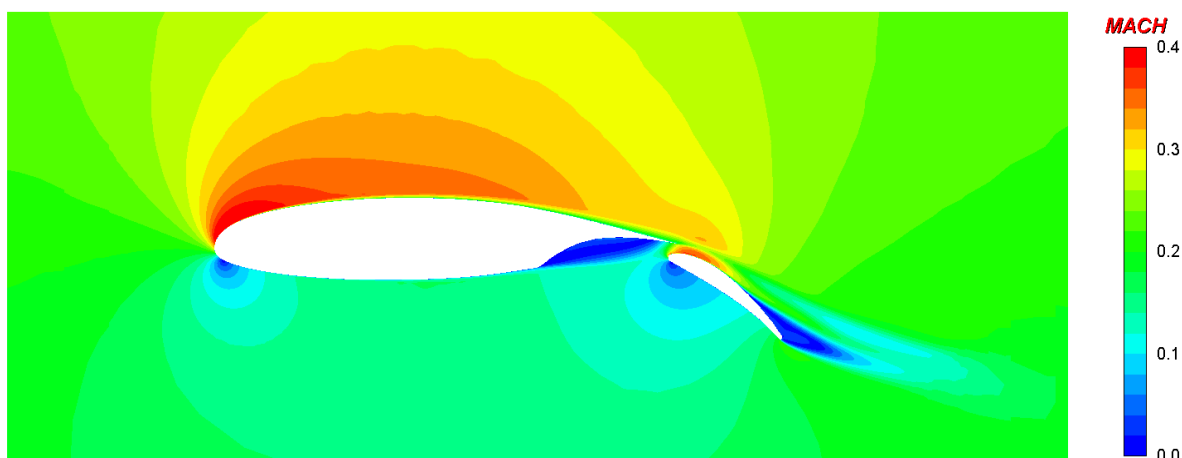


Рис. 9. Распределение числа Маха

Fig. 9. Mach number distribution

Для количественного анализа ниже приводятся графики коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления для двух методов интерполяции.

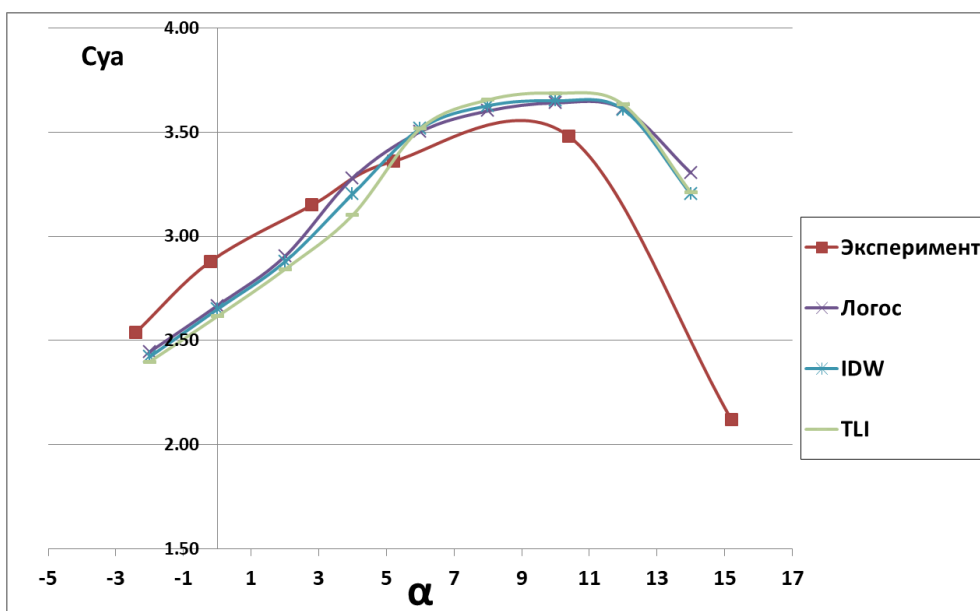


Рис. 10. График изменения коэффициента подъемной силы

Fig. 10. Lift coefficient curve

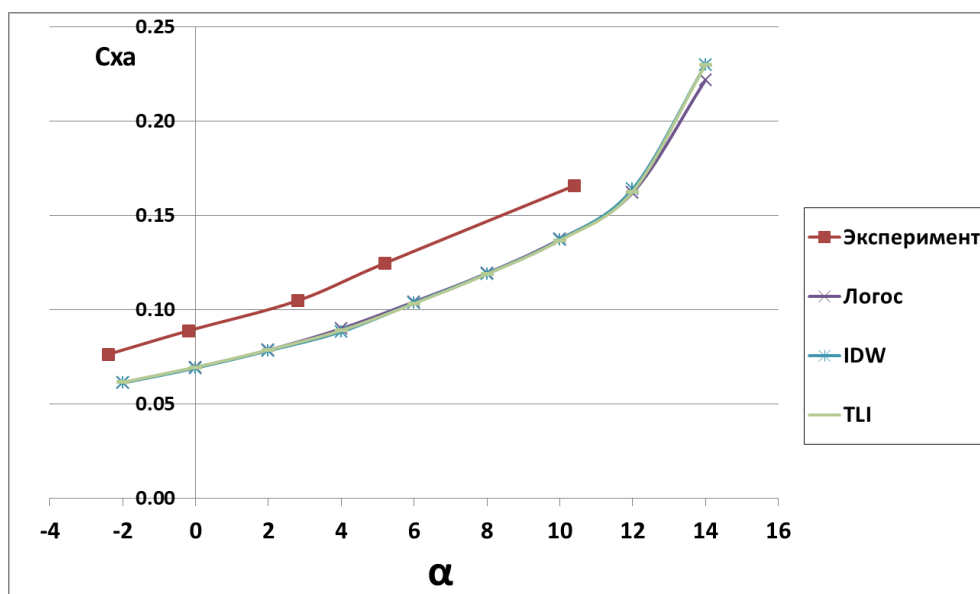


Рис. 11. График изменения коэффициента лобового сопротивления

Fig. 11. Drag coefficient curve

Результаты моделирования показывают хорошее согласование с экспериментальными данными и результатами расчета на сетке без перекрытий по коду ЛОГОС. Однако при больших углах атаки имеется небольшое завышение коэффициента подъемной силы – так же, как и у результатов, полученных на сетке без перекрытий.

Более детальный анализ показал, что метод трилинейной интерполяции в среднем проигрывает методу обратных взвешенных расстояний. Это обусловлено более диссипативными свойствами данного метода интерполирования для данного типа задач, характеризующимися сложной структурой потока на дозвуковых режимах.

Несмотря на хорошее согласование результатов, ни один из подходов технологии расчета на сетках с перекрытиями не дал идеального совпадения интегральных величин с результатами, полученными в расчете с эквивалентной сеткой без перекрытий. Поэтому для задач в нестационарной постановке, требующих высокой точности результатов, подобные методы могут привести к неверным результатам. Для повышения точности численного моделирования необходимо проводить дальнейшие исследования, направленные на обеспечение консервативности путем геометрических операций и вычисления точных весов для каждого донора.

3. Разработанные методы интерполяции

3.1. Метод интерполяции с использованием градиентов

Как и в случае с методом обратных взвешенных расстояний, интерполяционный шаблон по построению обеспечивает геометрическую близость акцепторов и доноров (рис. 4), поэтому, основываясь на одном доноре, значение полей на интерфейсной грани можно восстановить по формуле:

$$\varphi(x_a, y_a, z_a) = \varphi(x_i, y_i, z_i) + \nabla \varphi(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{S}, \quad (16)$$

где $\vec{S} = \{(x_a - x_i), (y_a - y_i), (z_a - z_i)\}$, а x_a, y_a, z_a – координаты центра грани-акцептора, x_i, y_i, z_i – центр ячейки i -го донора.

Тем не менее, подобная запись будет справедлива для каждого донора, поэтому возникает вопрос минимизации возможной ошибки. Пусть целевая функция метода наименьших квадратов будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N \left(\varphi(x_a, y_a, z_a) - \varphi(x_i, y_i, z_i) - \nabla \varphi(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{S}_i \right)^2 \rightarrow \min \quad (17)$$

В данном случае задача интерполяционные веса $\varphi(x_a, y_a, z_a)$ каждого донора определяются путем решения оптимизационной задачи вида (17) для всех расчетных полей.

3.2. Метод весовой интерполяции

Идея подхода основана на трilinearной интерполяции и призвана уменьшить диссипативные свойства алгоритма при расширенном шаблоне. Данный алгоритм требует для расчета полей на акцепторах наличия четырех точек, образующих тетраэдр (рис. 12).

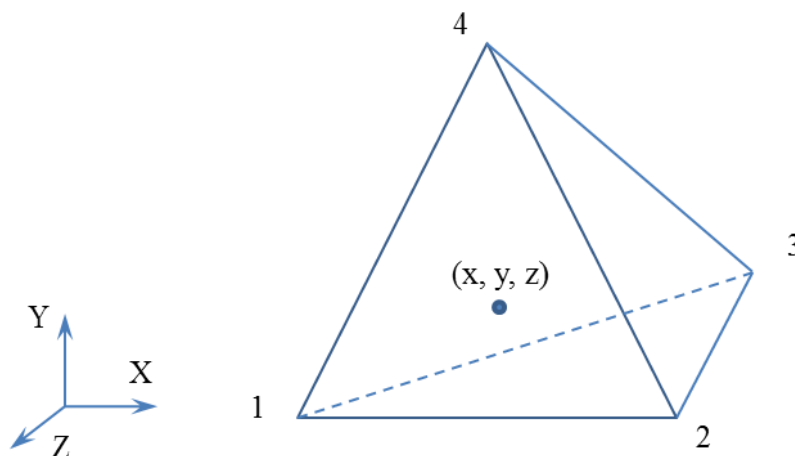


Рис. 12. Шаблон весовой интерполяции

Fig. 12. Weight interpolation pattern

Как и в случае с трилинейной интерполяцией, в операции поиска доноров используются геометрические характеристики тетраэдра, связанного с конкретной гранью интерфейса. Тетраэдр ориентируется в пространстве так образом, чтобы центры интерфейсной грани и тетраэдра совпадали, и одна из граней тетраэдра была перпендикулярна нормали грани-акцептора (рис. 13).

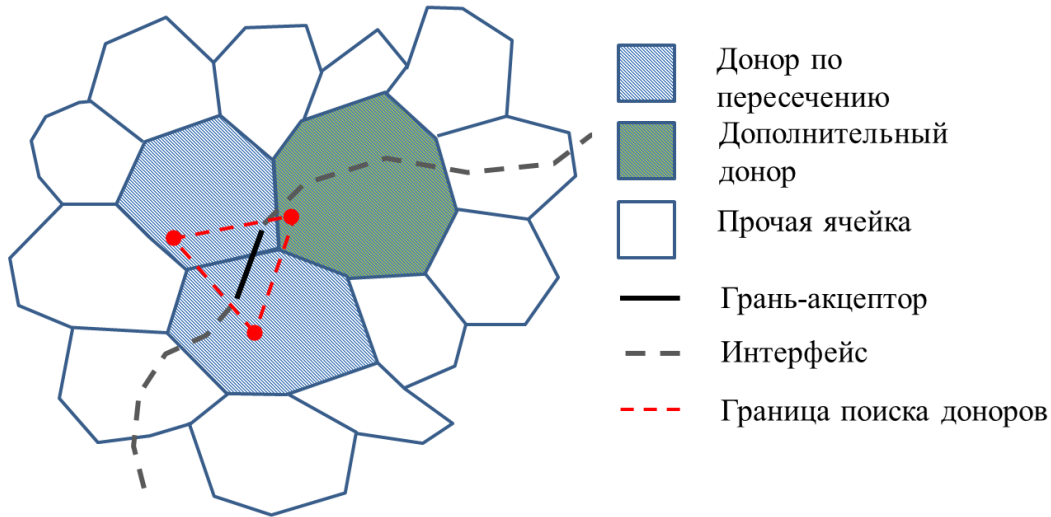


Рис. 13. Результат поиска доноров для весовой интерполяции

Fig. 13. Result of donor search for weight interpolation

Множество доноров для конкретной грани дополняется еще одним донором, как и в случае с трилинейной интерполяцией. Шаги построения интерполяционного шаблона также аналогичны этапам, используемым в случае с трилинейной интерполяцией.

Значение полей формируется на основе выражения:

$$\varphi(x_a, y_a, z_a) = \omega_1 \tilde{\varphi}_1(x_a, y_a, z_a) + \omega_2 \tilde{\varphi}_2(x_a, y_a, z_a) + \omega_3 \tilde{\varphi}_3(x_a, y_a, z_a) + \omega_4 \tilde{\varphi}_4(x_a, y_a, z_a), \quad (18)$$

где $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = (x - x_a)$, $\omega_3 = (y - y_a)$, $\omega_4 = (z - z_a)$.

С целью минимизации вычислительных операций в методе интерполяции весовыми функциями используется правильный тетраэдр с центром в точке (x_a, y_a, z_a) . Коэффициенты $\tilde{\varphi}_i$ выбираются таким образом, чтобы значение функции в j -ой вершине было равно $\varphi_j(x_j, y_j, z_j)$.

Принимая во внимание вышесказанное, вычисление значений полей на акцепторах сводится к выражению:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 W_i \varphi(x_i, y_i, z_i), \quad (19)$$

$$W_i = \frac{w_i}{\sum_{k=1}^4 w_k}, \quad (20)$$

Весовые коэффициенты w_i вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} W_1 &= s_{22} \cdot s_{33} \cdot s_{44} + s_{23} \cdot s_{34} \cdot s_{42} + s_{32} \cdot s_{43} \cdot s_{24} - s_{42} \cdot s_{33} \cdot s_{24} - s_{22} \cdot s_{43} \cdot s_{34} - s_{32} \cdot s_{23} \cdot s_{44} \\ W_2 &= s_{41} \cdot s_{33} \cdot s_{24} + s_{21} \cdot s_{43} \cdot s_{34} + s_{31} \cdot s_{23} \cdot s_{44} - s_{21} \cdot s_{33} \cdot s_{44} - s_{21} \cdot s_{43} \cdot s_{34} - s_{31} \cdot s_{23} \cdot s_{44} \\ W_3 &= s_{21} \cdot s_{32} \cdot s_{44} + s_{31} \cdot s_{42} \cdot s_{24} + s_{41} \cdot s_{22} \cdot s_{34} - s_{41} \cdot s_{32} \cdot s_{24} - s_{21} \cdot s_{42} \cdot s_{34} - s_{31} \cdot s_{22} \cdot s_{44} \\ W_4 &= s_{41} \cdot s_{32} \cdot s_{23} + s_{21} \cdot s_{42} \cdot s_{33} + s_{31} \cdot s_{22} \cdot s_{43} - s_{21} \cdot s_{32} \cdot s_{43} - s_{41} \cdot s_{22} \cdot s_{33} - s_{31} \cdot s_{42} \cdot s_{23} \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
 s_{21} &= x_1 - x_a, s_{31} = y_1 - y_a, s_{41} = z_1 - z_a, \\
 s_{22} &= x_2 - x_a, s_{32} = y_2 - y_a, s_{42} = z_2 - z_a, \\
 s_{23} &= x_3 - x_a, s_{33} = y_3 - y_a, s_{43} = z_3 - z_a, \\
 s_{24} &= x_4 - x_a, s_{34} = y_4 - y_a, s_{44} = z_4 - z_a
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Для более детального анализа результатов ниже приводятся графики аэродинамических коэффициентов, полученными различными методами интерполирования.

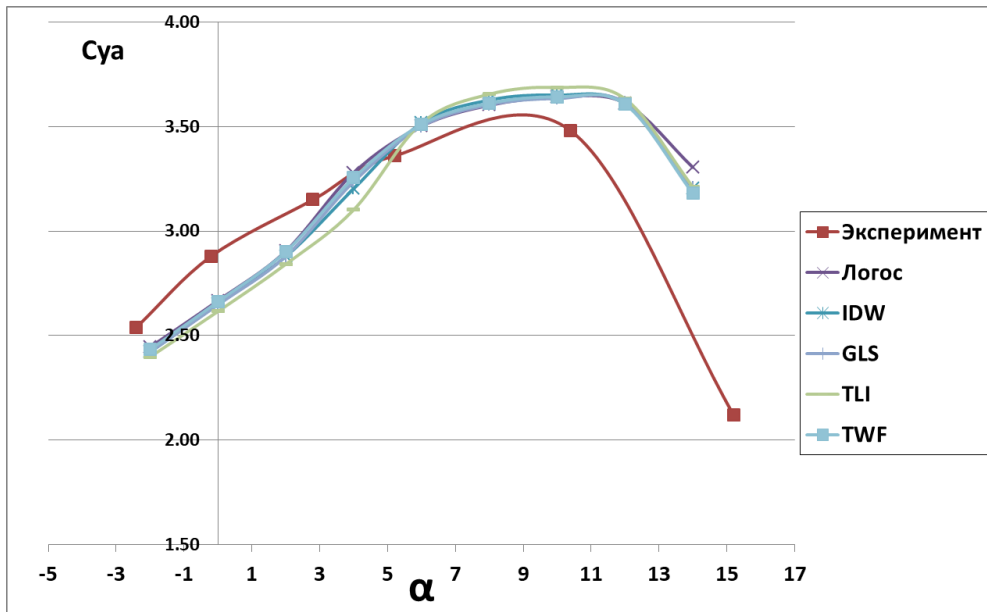


Рис. 14. График изменения коэффициента подъемной силы

Fig. 14. Lift coefficient curve

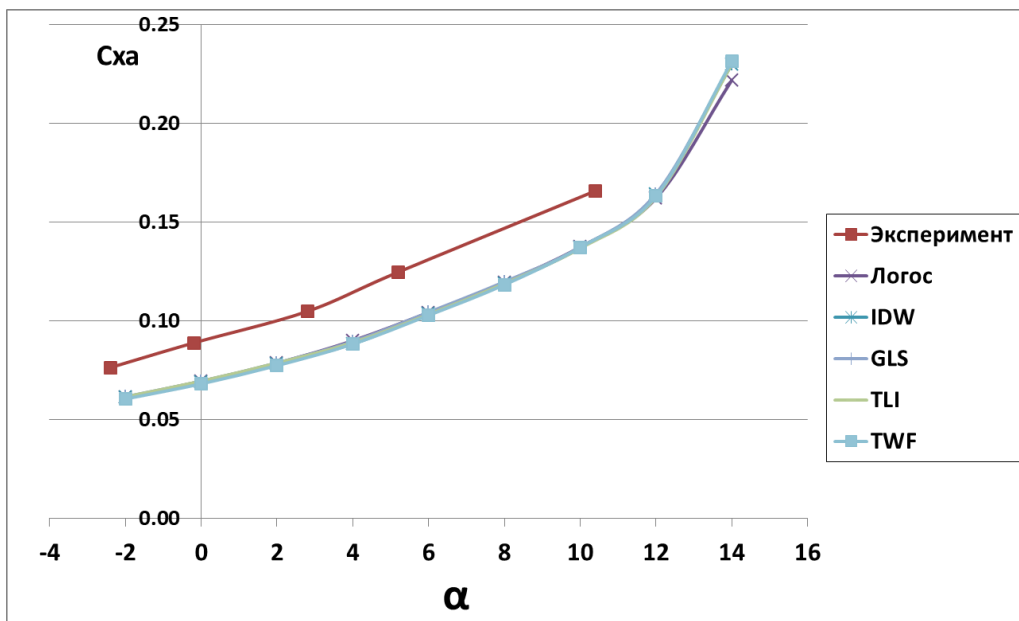


Рис. 15. График изменения коэффициента лобового сопротивления

Fig. 15. Drag coefficient curve

Результаты, полученные на основе разработанных и описанных выше методов, хорошо согласуются с результатами, полученными в ходе натурального эксперимента и путем расчета на сетке без перекрытий. Метод с применением градиентов расчетных полей позволил улучшить результаты, полученные с помощью метода обратных взвешенных расстояний. Метод интерполирования весовыми функциями дал лучшие результаты на расширенном шаблоне, в отличие от трилинейной интерполяции.

Заключение

Исследованы аспекты численного моделирования задач аэродинамики на основе метода расчета на сетках с перекрытиями. Предложенный метод позволяет использовать, помимо регулярных дискретных моделей, неструктурированные сетки. Применение данного метода предполагает построение отдельных сеток, учитывающих лишь геометрические особенности одного элемента модели, что существенно сокращает время подготовки.

Важным этапом рассматриваемого метода расчета является генерация интерполяционного шаблона, предназначенного для обеспечения взаимодействия пар *донор-акцептор*. Результаты моделирования на сетках с перекрытиями зависят от свойств построенного шаблона взаимодействия, включающего процедуры маркировки и определения интерфейсов, а также от выбора метода интерполирования расчетных величин. В работе представлены подходы, используемые при восстановлении данных на интерфейсах. Выбор того или иного подхода влияет на построение шаблона интерполяции. Метод восстановления значений расчетных полей на основе градиентов позволяет не только учесть геометрические характеристики ячеек, но и свойства потока.

Описанные методы продемонстрированы на характерной задаче. Сравнительный анализ результатов, полученных разными методами интерполяции, показал хорошее согласование друг с другом, с результатами моделирования с применением сетки без перекрытий, а также с результатами натуральных экспериментов.

Результаты получены при поддержке национального проекта «Наука и университеты» в рамках программы Минобрнауки РФ по созданию молодежных лабораторий № FSWE-2024-0001 (научная тема: «Разработка численных методов, моделей и алгоритмов для описания течений жидкостей и газов в естественных природных условиях, и условиях функционирования промышленных объектов в штатных и критических условиях на суперкомпьютерах экса- и зеттапроизводительности»), а также при поддержке научной программы Национального центра физики и математики, направление № 2 «Математическое моделирование на супер-ЭВМ экса- и зеттапроизводительности. Этап 2023-2025».

Библиографический список

1. **Гильманов, А.Н.** Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 248 с.
2. **Анучина, Н.Н.** О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями // Числ. метод. сплош. сред. – Новосибирск: ИТПМ. 1970. Т. 1. № 4. С. 3-84.
3. **Benek, J. A.** A 3-D Chimera Grid Embedding Technique / J.A. Benek, P.G. Buning, J.L. Steger // AIAA Paper. № 85-1523, 1985.
4. **Саразов, А.В.** Моделирование динамики полета летательного аппарата с учетом работы силовой установки и органов управления / А.В. Саразов, А.С. Козелков, А.А. Уткина, А.В. Корнев // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. 2022. Т. 1. С. 203-204.
5. **Wang, Z.J.** A Fully Automated Chimera Methodology for Multiple Moving Body Problems / Z.J. Wang, V. Parthasarathy // International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 33, № 7, pp 919-938, 2000.
6. **Волков, К.Н.** Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 488 с.

7. **Thomas, P.D.** Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids / P.D. Thomas, C.K. Lombard // AIAA Journal (1979), V. 17, № 10, pp. 1030-1037.
8. **Blazek, J.** Computational fluid dynamics: principles and applications. – Elsevier, 2001. – 470 p.
9. **Roe, P. L.** Introduction to computational fluid dynamics. Lecture Notes to a Short Course at Cranfield Institute of Technology, May 27-29, 1986.
10. **Weiss, J.M.** Preconditioning Applied to Variable and Const Density Flows / J.M. Weiss, W.A. Smith // AIAA Journal 33 (1995) 2050-2057/
11. **Deryugin, Yu.N.** Features of overset meshes methodology on unstructured grids / Yu.N. Deryugin, A.V. Sarazov, R.N. Zhuchkov // Mathematical Models and Computer Simulation. – 2017. – Volume. 9. Issue 5. – Pp. 587-597.
12. **Lee, K.R.** High-Order Interpolation Method for Overset Grid Based on Finite Volume Method / K.R. Lee, J.H. Park, K.H. Kim // AIAA Journal, 2011, Vol. 49, No. 7, pp. 1387-1398.
13. **Hahn, S.** Extension of CHIMPS for Unstructured Overset Simulation and Higher-Order Interpolation / S. Hahn, G. Iaccarino, S. Ananthan, D. Baeder // AIAA Paper, 2009-3999.
14. **Marsha, J. Berger.** On conservation at grid interfaces. // SIAM Journal on Numerical Analysis, 24(5):967–984, 1987.
15. **Wang, Z.F.** A unified conservative zonal interface treatment for arbitrarily patched and overlapped grids. / Z.F. Wang, H.Q. Yang // AIAA Paper No. 94-0320, 1994.
16. **Tang, H.** An Overset Grid Method for 3D unsteady incompressible flows / H. Tang, S.C. Jones, F. Sotiropoulos // Journal of Computational Physics, 2003, 191(2), 567-600.
17. **Jung, M. S.** A Conservative Overset Mesh Scheme via Intergrid Boundary Reconnection on Unstructured Meshes./ M. S. Jung, O. J. Kwon. // AIAA Paper 2009-3536, 2009.
18. **Bonet, J.** An alternating digital tree (ADT) algorithm for 3D geometric searching and intersection problems / J. Bonet, J. Peraire // International Journal for Numerical Methods in Engineering 1991; 31, 1–17.
19. **Wentz, W.H.** Development of a Fowler Flap System for High Performance General Aviation Airfoil / W.H. Wentz, H.C. Seetharam // NASA CR-2443, 1974.
20. **Дмитриев, С.М.** Применение полуэмпирических моделей турбулентности для моделирования турбулентной конвекции / С.М. Дмитриев, О.Л. Крутякова, А.С. Козелков, А.А. Куркин, В.В. Курулин, Д.А. Уткин // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2019. № 2. С. 18-33.
21. **Kozelkov, A.S.** Application of Mathematical Modeling to Study Near-Field Pressure Pulsations of a Near-Future Prototype Supersonic Business Aircraft / A.S. Kozelkov, D.Yu. Strelets, M.S. Sokuler, R.H. Arifullin // J. Aerosp. Eng., 2022, 35(1): 04021120.
22. **Kozelkov, A.S.** Two Methods to Improve the Efficiency of Supersonic Flow Simulation on Unstructured Grids / A.S. Kozelkov, A.V. Struchkov, D.Yu. Strelets // Fluids 2022, 7, 136. <https://doi.org/10.3390/fluids7040136>.
23. **Struchkov, A.V.** Numerical simulation of aerodynamic problems based on adaptive mesh refinement method / A.V. Struchkov, A.S. Kozelkov, K.N. Volkov, A.A. Kurkin, R.N. Zhuchkov, A.V. Sarazov // Acta Astronautica v. 172, July 2020, pp. 7-15.

*Дата поступления
в редакцию: 21.03.2024*

*Дата принятия
к публикации: 24.04.2024*