

**ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

**Т. И. ТРОФИМОВА**

# КУРС ФИЗИКИ

*Рекомендовано  
Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для инженерно-технических  
специальностей высших учебных заведений*

11-е издание, стереотипное

Книга представлена отдельными главами

Москва  
  
ACADEMIA  
2006

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73  
Т761

Рецензент —  
профессор кафедры физики им. А. М. Фабриканта  
Московского энергетического института (технического университета) *В.А. Касьянов*

**Трофимова Т. И.**

Т761 Курс физики: учеб. пособие для вузов / Таисия Ивановна Трофимова. — 11-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2006. — 560 с.  
ISBN 5-7695-2629-7

Учебное пособие (9-е издание, переработанное и дополненное, — 2004 г.) состоит из семи частей, в которых изложены физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики, электричества и магнетизма, оптики, квантовой физики атомов, молекул и твердых тел, физики атомного ядра и элементарных частиц. Рационально решен вопрос об объединении механических и электромагнитных колебаний. Установлена логическая преемственность и связь между классической и современной физикой. Приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73

*Оригинал-макет данного издания является собственностью  
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом  
без согласия правообладателя запрещается*

ISBN 5-7695-2629-7

© Трофимова Т. И., 2004  
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2004  
© Оформление. Издательский центр «Академия», 2004

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Небольшой объем учебного пособия достигнут с помощью тщательного отбора и лаконичного изложения материала.

Книга состоит из семи частей. В первой части дано систематическое изложение физических основ классической механики, а также рассмотрены элементы специальной (частной) теории относительности. Вторая часть посвящена основам молекулярной физики и термодинамики. В третьей части представлены электростатика, постоянный электрический ток и электромагнетизм. В четвертой части, посвященной теории колебаний и волн, механические и электромагнитные колебания рассмотрены параллельно, указаны их сходства и различия и сопоставлены физические процессы, происходящие при соответствующих колебаниях. В пятой части изложены элементы геометрической и электронной оптики, волновая оптика и квантовая природа излучения. Шес-

тая часть посвящена элементам квантовой физики атомов, молекул и твердых тел. В седьмой части рассмотрены элементы физики атомного ядра и элементарных частиц.

Изложение материала ведется без громоздких математических выкладок, особое внимание обращено на физическую суть явлений и описывающих их понятий и законов, а также на преемственность современной и классической физики. Все биографические данные приведены по книге Ю. А. Храмова «Физики» (М.: Наука, 1983).

Автор выражает глубокую благодарность коллегам и читателям, чьи доброжелательные замечания и пожелания способствовали улучшению книги, и особую признательность профессору В. А. Касьянову за рецензирование пособия и сделанные им замечания.

Ознакомиться с работами автора можно в Интернете на сайте [www.yandex.ru](http://www.yandex.ru) «Физика. Трофимова Т. И.». Замечания и предложения просьба направлять автору по электронной почте [trofimova@miem.edu.ru](mailto:trofimova@miem.edu.ru).

# ВВЕДЕНИЕ

## ПРЕДМЕТ ФИЗИКИ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Окружающий нас мир, все существующее вокруг нас и обнаруживаемое нами посредством ощущений представляют собой материю.

Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является движение. Движение в широком смысле слова — это всевозможные изменения материи — от простого перемещения до сложнейших процессов мышления.

Разнообразные формы движения материи изучаются различными науками, в том числе и физикой. Предмет физики, как, впрочем, и любой науки, может быть раскрыт только по мере его детального изложения. Дать строгое определение предмета физики довольно сложно, потому что границы между физикой и рядом смежных дисциплин условны. На данной стадии развития нельзя сохранить определение физики только как науки о природе.

Академик А. Ф. Иоффе (1880-1960; российский физик) определил физику как науку, изучающую общие свойства и законы движения вещества и поля. В настоящее время общепризнано, что все взаимодействия осуществляются посредством полей, например гравитационных, электромагнитных, полей ядерных сил. Поле наряду с веществом является одной из форм существования материи. Неразрывная связь поля и вещества, а также различие в их свойствах будут рассмотрены по мере изучения курса.

Физика — наука о наиболее простых и вместе с тем наиболее общих формах

движения материи и их взаимных превращениях. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая и др.) присутствуют во всех высших и более сложных формах движения материи (химических, биологических и др.). Поэтому они, будучи наиболее простыми, являются в то же время наиболее общими формами движения материи. Высшие и более сложные формы движения материи — предмет изучения других наук (химии, биологии и др.).

Теснейшая связь физики с многими отраслями естествознания, как отмечал академик С. И. Вавилов (1891 — 1955; российский физик и общественный деятель), привела к тому, что физика глубочайшими корнями выросла в астрономию, геологию, химию, биологию и другие естественные науки. В результате образовался ряд новых смежных дисциплин, таких, как астрофизика, биофизика и др.

Физика тесно связана и с техникой, причем эта связь имеет двусторонний характер. Физика выросла из потребностей техники (развитие механики у древних греков, например, было вызвано запросами строительной и военной техники того времени), и техника, в свою очередь, определяет направление физических исследований (например, в свое время задача создания наиболее экономичных тепловых двигателей вызвала интенсивное развитие термодинамики). С другой стороны, от развития физики зависит технический уровень

производства. Физика — база для создания новых отраслей техники (электронная техника, ядерная техника и др.).

Бурный темп развития физики, растущие связи ее с техникой указывают

на значительную роль курса физики во вузе — это фундаментальная база для теоретической подготовки инженера, без которой его успешная деятельность невозможна.

## ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Основным методом исследования в физике является *опыт* — основанное на практике чувственно-эмпирическое познание объективной действительности, т. е. наблюдение исследуемых явлений в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений и многократно воспроизводить его при повторении этих условий.

Для объяснения экспериментальных данных выдвигаются гипотезы. *Гипотеза* — это научное предположение, позволяющее уяснить сущность происходящих явлений и требующее проверки на опыте и теоретического обоснования для того, чтобы стать достоверной научной теорией.

В результате обобщения экспериментальных данных, а также накопленного опыта людей устанавливаются *физические законы* — устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе. Наиболее важные законы устанавливают связь между физическими величинами. Измерение физической величины есть действие, выполняемое с помощью средств измерений для нахождения значения физической величины в принятых единицах.

Единицы физических величин можно выбрать произвольно, но тогда возникнут трудности при их сравнении. Поэтому целесообразно ввести систему единиц, охватывающую единицы всех физических величин.

Для построения системы единиц произвольно выбирают единицы для нескольких не зависящих друг от друга физических величин. Эти единицы называются *основными*. Остальные же единицы, называемые *производными*, выводятся из физических законов, связывающих их с основными единицами.

В научной, а также в учебной литературе обязательна к применению Система интернациональная (СИ), которая строится на семи основных единицах — метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела — и двух дополнительных — радиан и стерадиан.

*Метр* (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299\,792\,458$  с.

*Килограмм* (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

*Секунда* (с) — время, равное  $9\,192\,631\,770$  периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

*Ампер* (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

**Кельвин (К)** —  $1/273,16$  часть термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль (моль)** — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде  $^{12}\text{C}$  массой  $0,012$  кг.

**Кандела (кд)** — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение

частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

**РадIAN (рад)** — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

**Стерadian (ср)** — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

# ЧАСТЬ 1

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

### Глава 1

#### ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

##### § 1. Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения

*Механика* — часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. *Механическое движение* — это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Развитие механики как науки начинается с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый Архимед (287 — 212 до н.э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564 — 1642) и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643 — 1727).

Механика Галилея — Ньютона называется *классической механикой*. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света  $c$  в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью  $c$ , изучаются *релятивистской механикой*, основанной на *специальной теории относительности*, сформули-

рованной А.Эйнштейном (1879 — 1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы — они заменяются законами *квантовой механики*.

Уравнения релятивистской механики в пределе (для скоростей, малых по сравнению со скоростью света) переходят в уравнения классической механики, уравнения квантовой механики в пределе (для масс, больших по сравнению с массами атомов) также переходят в уравнения классической механики. Это указывает на ограниченность применимости классической механики — *механики тел больших масс* (по сравнению с массой атомов), *движущихся с малыми скоростями* (по сравнению со скоростью света).

Механика делится на три раздела: 1) кинематику; 2) динамику; 3) статику.

*Кинематика* изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

*Динамика* изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

*Статика* изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно ус-

тановить и законы равновесия. Поэтому законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

В механике для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач используются разные **физические модели**. Простейшей моделью является **материальная точка** — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Материальная точка — понятие **абстрактное**, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению **системы материальных точек**.

Под воздействием тел друг на друга тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель — абсолютно твердое тело. **Абсолютно твердым** называют **тело**, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. **Поступательное движение** — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. **Вращательное движение** — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на од-

ной и той же прямой, называемой **осью вращения**.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства и в какие моменты времени эта точка находилась в том или ином положении.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета**. С ним связывается **система отсчета** — совокупность системы координат и часов. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки  $A$  в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  или радиусом-вектором  $r$ , проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1).

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$r = r(t). \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки**.

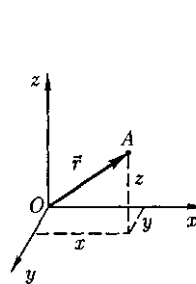


Рис. 1

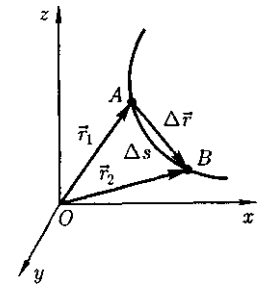


Рис. 2



Число независимых величин, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **числом степеней свободы**. Если материальная точка свободно движется в пространстве, то, как уже было сказано, она обладает тремя степенями свободы (координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$ ); если она движется по некоторой поверхности, то двумя степенями свободы, если вдоль некоторой линии, то одной степенью свободы.

Исключая  $t$  в уравнениях (1.1) и (1.2), получим уравнение траектории движения материальной точки. **Траектория** — линия, описываемая в пространстве движущейся точкой. В зависимости от формы траектории движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным*.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рис. 2). Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении  $A$ . Длина участка траектории  $AB$ , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется **длиной пути**  $\Delta s$  и является *скалярной функцией* времени:  $\Delta s = \Delta s(t)$ . Вектор  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением**.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения  $|\Delta \vec{r}|$  равен пройденному пути  $\Delta s$ .

## § 2. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина — скорость, которой опреде-

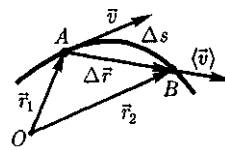


Рис.3

ляется как *быстрота* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени  $t$  ей соответствует радиус-вектор  $r_1$  (рис. 3). В течение малого промежутка времени  $\Delta t$  точка пройдет путь  $\Delta s$  и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение  $\Delta r$ .

**Вектором средней скорости** ( $\vec{v}$ ) называется отношение приращения  $\Delta r$  радиуса-вектора точки к промежутку времени  $\Delta t$ :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением  $\Delta r$ . При неограниченном уменьшении  $\Delta t$  средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной скоростью**  $v$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость  $v$ , таким образом, есть векторная величина, определяемая первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости  $v$  направлен по касательной к траектории в сторону движения (см. рис. 3). По мере уменьшения  $\Delta t$  длина пути  $\Delta s$  все больше будет приближаться к  $|\Delta \vec{r}|$ , поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.2)$$

При **неравномерном движении** модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной ( $v$ ) — **средней скоростью неравномерного движения**:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Из рис. 3 вытекает, что  $\langle v \rangle > |Av|$ , так как  $\Delta s > |Ar|$ , и только в случае прямолинейного движения

$$\Delta s = |Ar|.$$

Если выражение  $ds = v dt$  [см. формулу (2.2)] проинтегрировать по времени в пределах от  $t$  до  $t + \Delta t$ , то найдем длину пути, пройденного точкой за время  $\Delta t$ :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt. \quad (2.3)$$

В случае **равномерного движения** числовое значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (2.3) примет вид

$$s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v \Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , определяется интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

### § 3. Ускорение и его составляющие

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение**.

Рассмотрим **плоское движение**, т. е. движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор  $v$  задает скорость точки  $A$  в момент времени  $t$ . За время  $\Delta t$  движущаяся точка перешла в положение  $B$  и приобрела скорость, отличную от  $v$  как по модулю, так и направлению и равную  $v_1 = v + \Delta v$ . Перенесем вектор  $v_1$  в точку  $A$  и найдем  $\Delta v$  (рис. 4).

**Средним ускорением** неравномерного движения в интервале от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется векторная величина, равная отношению изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  к интервалу времени  $\Delta t$ :

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

**Мгновенным ускорением  $a$  (ускорением)** материальной точки в момент времени  $t$  будет предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

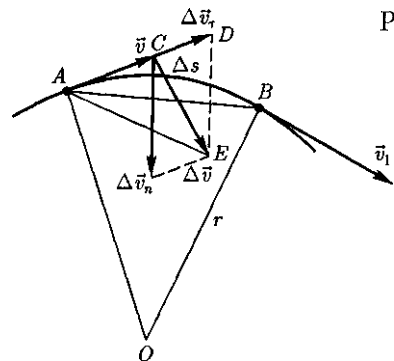


Рис. 4

Таким образом, ускорение  $a$  есть векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени.

Разложим вектор  $\Delta \vec{v}$  на две составляющие. Для этого из точки  $A$  (см. рис. 4) по направлению скорости  $v$  отложим вектор  $AD$ , по модулю равный  $v_1$ . Очевидно, что вектор  $CD$ , равный  $\Delta \vec{v}_\tau$ , определяет изменение скорости за время  $\Delta t$  по модулю:  $\Delta v_\tau = v_1 - v$ . Вторая же составляющая  $\Delta \vec{v}_n$  вектора  $\Delta \vec{v}$  характеризует изменение скорости за время  $\Delta t$  по направлению.

### Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости: она определяет быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка  $B$  достаточно близка к точке  $A$ , поэтому  $As$  можно считать дугой окружности некоторого радиуса  $r$ , мало отличающейся от хорды  $AB$ . Тогда из подобия треугольников  $AOB$  и  $EAD$  с л е  $\frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v_1}{r}$ , так как  $AB = v \Delta t$ , то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v v_1}{r}.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим  $v_1 \rightarrow v$ .

Поскольку  $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}$ , угол  $EAD$  стремится к нулю, а так как треугольник  $EAD$  равнобедренный, то угол  $ADE$  между  $v$  и  $\Delta \vec{v}_n$  стремится к прямому. Следовательно, при  $\Delta t \rightarrow 0$  векторы  $\Delta \vec{v}_n$  и  $v$  оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор  $\Delta \vec{v}_n$ , перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Составляющая ускорения

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по главной нормали к траектории к центру ее кривизны.

**Полное ускорение** тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рис. 5):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Итак, *тангенциальная* составляющая ускорения характеризует *быстроту изменения модуля скорости* (направлена по касательной к траектории), а *нормальная* составляющая ускорения — *быстроту изменения направления скорости* (направлена по главной нормали к центру кривизны траектории). Составляющие  $a_\tau$  и  $a_n$  перпендикулярны друг другу.

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

- 1)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = 0$  — прямолинейное равномерное движение;
  - 2)  $a_\tau = a = \text{const}$ ,  $a_n = 0$  — прямолинейное равнопеременное движение.
- При таком виде движения

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Если начальный момент времени  $t_1 = 0$ , а начальная скорость  $v_1 = v_0$ , то,

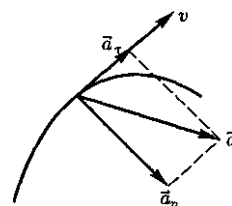


Рис.5

приняв  $t_2 = t$  и  $v_2 = v$ , получим  $a = \frac{v - v_0}{t}$ , откуда

$$v = v_0 + at.$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента времени  $t$ , найдем, что длина пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

3)  $a_\tau = f(t)$ ,  $a_n = 0$  — прямолинейное движение с переменным ускорением;

4)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = \text{const}$ . При  $a_\tau = 0$  скорость изменяется только по направлению. Из формулы  $a_n = \frac{v^2}{r}$  следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным;

5)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n \neq 0$  — равномерное криволинейное движение;

6)  $a_\tau = \text{const}$ ,  $a_n \neq 0$  — криволинейное равнопеременное движение;

7)  $a_\tau = f(t)$ ,  $a_n \neq 0$  — криволинейное движение с переменным ускорением.

## § 4. Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса  $R$  (рис. 6). Ее положение через промежуток времени  $\Delta t$  задается углом  $\Delta\varphi$ .

Элементарные (бесконечно малые) повороты можно рассматривать как векторы (они обозначаются  $\Delta\vec{\varphi}$  или  $d\vec{\varphi}$ ). Модуль вектора  $d\vec{\varphi}$  равен углу поворо-

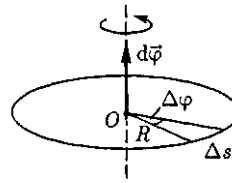


Рис. 6

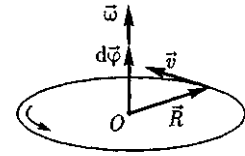


Рис. 7

та, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. подчиняется **правилу правого винта** (см. рис. 6). Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами**. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

**Угловой скоростью** называется векторная величина, определяемая первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор  $\vec{\omega}$  направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т. е. так же, как и вектор  $d\vec{\varphi}$  (рис. 7). Размерность угловой скорости  $\dim \omega = T^{-1}$ , а ее единица — радиан в секунду (рад/с).

Линейная скорость точки (см. рис. 6)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т. е.

$$v = \omega R.$$

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$v = [\vec{\omega} R].$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен  $\omega R \sin(\vec{\omega} \vec{R})$ , а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{\omega}$  к  $R$ .

Если  $\omega = \text{const}$ , то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения**  $T$  — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Так как промежуток времени  $\Delta t = T$  соответствует  $\Delta\varphi = 2\pi$ , то  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности в единицу времени, называется **частотой вращения**:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

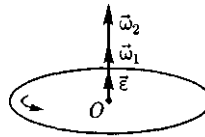
откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

**Угловым ускорением** называется векторная величина, определяемая первой производной угловой скорости по времени:

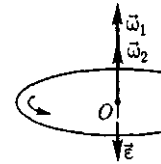
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном дви-



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$$

Рис.8



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$$

Рис.9

жений вектор  $\varepsilon$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$  (рис. 8), при замедленном — противоположен ему (рис. 9).

Тангенциальная составляющая ускорения  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ ,  $v = \omega R$  и

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути  $s$ , пройденного точкой по дуге окружности радиусом  $R$ , линейная скорость  $v$ , тангенциальное ускорение  $a_\tau$ , нормальное ускорение  $a_n$ ) и угловыми величинами (угол поворота  $\varphi$ , угловая скорость  $\omega$ , угловое ускорение  $\varepsilon$ ) выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi, \quad v = R\omega, \quad a_\tau = R\varepsilon, \quad a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ( $\varepsilon = \text{const}$ )

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость.

### Контрольные вопросы

- Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
- Что такое система отсчета?
- Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?

- Какое движение называется поступательным? вращательным?
- Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
- Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
- Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
- Что называется угловой скоростью? угловым ускорением? Как определяются их направления?
- Какова связь между линейными и угловыми величинами?

## ЗАДАЧИ

1.1. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением  $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$  ( $C = 0,1 \text{ м/с}^2$ ,  $D = 0,03 \text{ м/с}^3$ ). Определите: 1) время после начала движения, через которое ускорение  $a$  тела будет равно  $2 \text{ м/с}^2$ ; 2) среднее ускорение ( $a$ ) тела за этот промежуток времени. [1] 10 с; 2)  $1,1 \text{ м/с}^2$

1.2. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите угол, под которым тело брошено к горизонту, если максимальная высота подъема тела равна  $1/4$  дальности его полета. [ $45^\circ$ ]

1.3. Колесо радиусом  $R = 0,1 \text{ м}$  вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением  $\omega = 2At + 5Bt^4$  ( $A = 2 \text{ рад/с}^2$  и  $B = 1 \text{ рад/с}^3$ ). Определите полное ускорение точек обода колеса через  $t = 1$  после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время. [ $a = 8,5 \text{ м/с}^2$ ;  $N = 0,48$ ]

1.4. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом  $r = 4 \text{ м}$ , задается уравнением  $a_n = A + Bt + Ct^2$  ( $A = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 6 \text{ м/с}^3$ ,  $C = 3 \text{ м/с}^4$ ). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время  $t_1 = 5 \text{ с}$  после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени  $t_2 = 1 \text{ с}$ . [1]  $6 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $85 \text{ м}$ ; 3)  $6,32 \text{ м/с}^2$

1.5. Частота вращения колеса при равнозамедленном движении за  $t = 1 \text{ мин}$  уменьшилась от  $300$  до  $180 \text{ мин}^{-1}$ . Определите: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время. [1]  $0,21 \text{ рад/с}^2$ ; 2)  $240$

1.6. Диск радиусом  $R = 10 \text{ см}$  вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением  $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$  ( $B = 1 \text{ рад/с}$ ,  $C = 1 \text{ рад/с}^2$ ,  $D = 1 \text{ рад/с}^3$ ). Определите для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение  $a_\tau$ ; 2) нормальное ускорение  $a_n$ ; 3) полное ускорение  $a$ . [1]  $1,4 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $28,9 \text{ м/с}^2$ ; 3)  $28,9 \text{ м/с}^2$

## Глава 2

### ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### § 5. Первый закон Ньютона.

##### Масса. Сила

В основе классической динамики (основной раздел механики) лежат три закона Ньютона, сформулированные

им в «Математических началах натуральной философии» (1687). Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются обобщением огромного числа опытных данных. Правильность этих законов (для обширно-

го, но все же ограниченного круга явлений) подтверждается согласием с опытом получаемых с их помощью результатов.

**Первый закон Ньютона:** всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока *воздействие* со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние. Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются **инерциальными системами отсчета**. Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, *свободная от внешних воздействий*, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. **Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.**

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела

неодинаково изменяют скорость своего движения, т. е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

**Масса тела** — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (**инертная масса**) и гравитационные (**гравитационная масса**) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей  $10^{-12}$  их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т. е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил).

В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, **сила** — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

## § 6. Второй закон Ньютона

**Второй закон Ньютона** — основной закон динамики поступательного движения — отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое

телом, всегда пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$a \sim F \quad (m = \text{const}). \quad (6.1)$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными, а именно

$$a \sim \frac{1}{m} \quad (F = \text{const}). \quad (6.2)$$

Используя выражения (6.1) и (6.2) и учитывая, что сила и ускорение — величины векторные, можем записать

$$\vec{a} \sim \frac{k\vec{F}}{m}. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) выражает **второй закон Ньютона**: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ коэффициент пропорциональности  $k = 1$ . Тогда

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

или

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (6.4)$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (6.4) ее можно внести под знак производной:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}). \quad (6.5)$$

Векторная величина

$$p = mv, \quad (6.6)$$

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, назы-

вается **импульсом** {количеством движения} этой материальной точки.

Подставляя (6.6) в (6.5), получим

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (6.7)$$

Это выражение — **более общая формулировка второго закона Ньютона**: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (6.7) называется также **уравнением движения материальной точки**.

Если на тело действует несколько сил, то в формулах (6.4) и (6.7) под  $F$  подразумевается их результирующая (векторная сумма сил).

Единица силы в СИ — **ньютон** (Н): 1 Н — сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с<sup>2</sup> в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Казалось бы, первый закон Ньютона входит во второй как его частный случай. В самом деле, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение [см. (6.3)] также равно нулю. Однако **первый закон Ньютона** рассматривается как **самостоятельный закон**, так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (6.7).

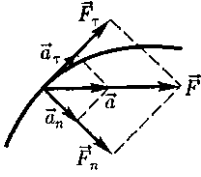
Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , то ее ускорение

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i,$$

где  $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$ .



Рис. 10



Следовательно, если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было (**принцип независимости действия сил**).

Силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Например, на рис. 10 действующая сила  $F = ma$  разложена на два компонента: тангенциальную силу  $F_\tau$  (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу  $F_n$  (направлена по нормали к центру кривизны). Используя выражения  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$  и  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , а также  $v = R\omega$ , можно записать

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt};$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

## § 7. Третий закон Ньютона

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона**: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (7.1)$$

где  $F_{12}$  — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй;  $F_{21}$  — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*.

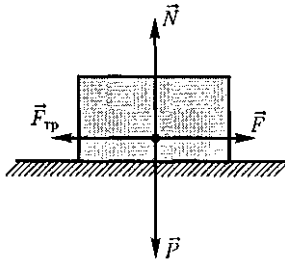
Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

Третий закон Ньютона, как впрочем и первые два, справедлив только в инерциальных системах отсчета. Отметим также, что при движении со скоростями, сравнимыми со скоростью света, наблюдаются отступления от этого закона. Однако в *рамках классической механики* он справедлив, и утверждение о его невыполнимости имеет принципиальное значение лишь для определения границ применимости механики Ньютона.

## § 8. Силы трения

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием **силы трения**, которая препятствует скольжению соприкасающихся тел относительно друг друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел,

Рис. 11



в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел, т. е. в энергию теплового движения частиц.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. Это деление, впрочем, имеет условный характер. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны относительно друг друга, говорят о **трении покоя**, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о **трении скольжения, качения** или **верчения**.

**Внутренним трением** называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят относительно друг друга и

разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки. В таком случае говорят о **гидродинамическом трении** (слой смазки достаточно толстый) и **граничном трении** (толщина смазочной прослойки составляет около 0,1 мкм и менее).

Силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества и являются по своей природе электромагнитными силами. Эти силы описываются закономерностями, полученными опытным путем.

Обсудим некоторые закономерности внешнего трения. Это трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей, а в случае очень гладких поверхностей — силами межмолекулярного притяжения.

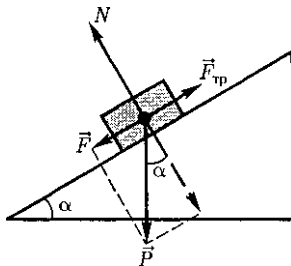
Рассмотрим лежащее на плоскости тело (рис. 11), к которому приложена горизонтальная сила  $F$ . Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила  $F$  будет больше силы трения  $F_{тр}$ . Французские физики **Г.Амонтон (1663-1705)** и **Ш. Кулон (1736-1806)** опытным путем установили следующий **закон**: сила трения скольжения  $F_{тр}$  пропорциональна силе  $N$  нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{тр} = fN,$$

где  $f$  — **коэффициент трения скольжения**, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

Найдем значение коэффициента трения. Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  (рис. 12), то оно приходит в движение только когда тангенциальная составляющая  $\vec{F}$  силы тяжести  $P$  больше силы трения  $F_{тр}$ . Следовательно, в предельном случае (начало скольжения тела)  $F = F_{тр}$ , или  $P \sin \alpha = fN = fP \cos \alpha$ , откуда

Рис. 12



$$f = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла  $\alpha_0$ , при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. Для них применяется **закон трения скольжения**

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{ист}}(N + Sp_0),$$

где  $f_{\text{ист}}$  — истинный коэффициент трения скольжения;  $S$  — площадь контакта между телами;  $p_0$  — добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами.

Трение играет большую роль в природе и технике. Благодаря трению движется транспорт, удерживается забитый в стену гвоздь и т.д. В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят относительно друг друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т.д.).

**Сила трения качения** определяется по закону, установленному Кулоном:

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{к}} N \quad (8.1)$$

где  $f_{\text{к}}$  — коэффициент трения качения, имеющий размерность  $\dim f_{\text{к}} = L$ ;  $r$  — радиус катящегося тела.

Из (8.1) следует, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела.

## § 9. Закон сохранения импульса. Центр масс

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой**.

**Силы** взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними**.

**Силы**, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними**.

Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой** (или **изолированной**).

Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  тел, масса и скорость которых соответственно равны  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и  $v_1, v_2, v_n$ . Пусть  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  — равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — равнодействующие внешних сил.

Запишем второй закон Ньютона для каждого из  $n$  тел механической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) &= \vec{F}'_1 + \vec{F}_1, \\ \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) &= \vec{F}'_2 + \vec{F}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n) &= \vec{F}'_n + \vec{F}_n. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n) &= \\ = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \end{aligned}$$

Так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n) &= \\ = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n, \quad (9.1)$$

где  $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$  — импульс системы.

Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = 0, \text{ т. е.} \\ \vec{p} &= \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i = \text{const.} \end{aligned}$$

Последнее выражение и является **законом сохранения импульса**: импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т. е. закон сохранения импульса — *фундаментальный закон природы*.

Отметим, что, согласно (9.1), импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю. Также сохраняется проекция импульса на направление, вдоль которого равнодействующая сил равна нулю.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства — его однородности. **Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс (или центром инерции)** системы материальных точек называется воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{m},$$

где  $m_i$  и  $r_i$  — соответственно масса и радиус-вектор  $i$ -й материальной точки;  $n$  — число материальных точек в системе;  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса системы.

Скорость центра масс

$$v_C = \frac{dr_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Учитывая, что  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ , а  $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$  есть импульс  $\vec{p}$  системы, можно записать

$$p = m \vec{v}_C, \quad (9.2)$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (9.2) в уравнение (9.1), получим

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (9.3)$$

т.е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе. Выражение (9.3) представляет собой **закон движения центра масс**.

В соответствии с (9.2) из закона сохранения импульса вытекает, что **центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным**.

## § 10. Уравнение движения тела переменной массы

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например масса ракеты уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива, и т. п.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движе-

ния ракеты. Если в момент времени  $t$  масса ракеты  $m$ , а ее скорость  $v$ , то по истечении времени  $dt$  ее масса уменьшится на  $dm$  и станет равной  $m - dm$ , а скорость станет равной  $v + dv$ . Изменение импульса системы за отрезок времени  $dt$

$$dp = [(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} - \vec{u})] - m\vec{v},$$

где  $u$  — скорость истечения газов относительно ракеты.

Тогда

$$dp = m d\vec{v} + u dm$$

(учли, что  $dm d\vec{v}$  — малый высшего порядка малости по сравнению с остальными). Если на систему действуют внешние силы, то  $dp = F dt$ , поэтому

$$\vec{F} dt = m d\vec{v} + \vec{u} dm,$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (10.1)$$

Второе слагаемое в правой части (10.1) называют **реактивной силой**  $F_p$ . Если  $u$  противоположен  $v$  по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с  $v$ , то тормозится.

Таким образом, мы получили **уравнение движения тела переменной массы**

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p, \quad (10.2)$$

которое впервые было выведено И. Б. Мещерским (1859-1935).

Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась в 1881 г. Н. И. Кибальчичем (1854 -1881). В 1903 г. К. Э. Циолковский (1857—1935) опубликовал статью, где предложил теорию движения ракеты и основы теории жидкостного реактивного двигателя, поэтому его считают основателем отечественной космонавтики.

Применим уравнение (10.1) к движению ракеты, на которую не действуют внешние силы. Полагая  $F = 0$  и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt},$$

откуда

$$v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования  $C$  определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее

стартовая масса  $m_0$ , то  $C = u \ln m_0$ . Следовательно,

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (10.3)$$

Это соотношение называется **формулой Циолковского**. Она показывает, что: 1) чем больше конечная масса ракеты  $m$ , тем больше должна быть стартовая масса ракеты  $m_0$ ; 2) чем больше скорость  $u$  истечения газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражения (10.2) и (10.3) получены для нерелятивистских движений, т. е. для случаев, когда скорости  $v$  и  $u$  малы по сравнению со скоростью распространения света в вакууме.

### Контрольные вопросы

- Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, неинерциальна?
- Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
- Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона Ньютона? Почему?
- В чем заключается принцип независимости действия сил?
- Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого? Какие виды внешнего (сухого) трения вы знаете?
- Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми? Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?
- В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется? Почему он является фундаментальным законом природы?
- Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения импульса?
- Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?

### ЗАДАЧИ

2.1. По наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту, равным  $30^\circ$ , скользит тело. Определите скорость тела в конце третьей секунды от начала скольжения, если коэффициент трения  $0,15$ . [10,9 м/с]

2.2. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом 80 м. Какова должна быть наименьшая скорость самолета, чтобы летчик не оторвался от сиденья в верхней части петли? [28 м/с]

2.3. Блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ . Гири равной массы ( $m_1 = m_2 = 2$  кг) соединены нитью, перекинутой через блок. Считая нить и блок невесомыми, принимая коэффициенты трения гирь о

наклонные плоскости равными  $f_1 = f_2 = \mu = 0,1$  и пренебрегая трением в блоке, определите: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) силу натяжения нити. [1]  $0,24 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $12 \text{ Н}$

2.4. На железнодорожной платформе установлена безоткатная пушка, из которой производится выстрел вдоль полотна под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Масса платформы с пушкой  $M = 20 \text{ т}$ , масса снаряда  $m = 10 \text{ кг}$ , коэффициент трения между колесами платформы и рельсами  $\mu = 0,002$ . Определите скорость снаряда, если после выстрела платформа откатилась на расстояние  $s = 3 \text{ м}$ . [ $v_0 = M \sqrt{\frac{2\mu s}{m \cos \alpha}} = 970 \text{ м/с}$ ]

2.5. На катере массой  $m = 5 \text{ т}$  находится водомет, выбрасывающий  $\mu = 25 \text{ кг/с}$  воды со скоростью  $u = 7 \text{ м/с}$  относительно катера назад. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определите: 1) скорость катера через  $t$  минут после начала движения; 2) предельно возможную скорость катера. [1]  $v = u \left( 1 - \exp\left(-\frac{\mu t}{m}\right) \right) = 4,15 \text{ м/с}$ ; 2)  $7 \text{ м/с}$

## Глава 3 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

### § 11. Энергия, работа, мощность

*Энергия* — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других — переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **работы силы**.

Если тело движется *прямолинейно* и на него действует постоянная сила  $F$ ,

которая составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы  $F_s$  на направление перемещения ( $F_s = F \cos \alpha$ ), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F s \cos \alpha. \quad (11.1)$$

Сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому в общем случае формулой (11.1) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение  $d\vec{r}$ , то силу  $F$  можно считать постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным. **Элементарной работой** силы  $F$  на перемещении  $d\vec{r}$  называется **скалярная** величина

$$dA = F d\vec{r} = F \cos \alpha ds = F_s ds,$$

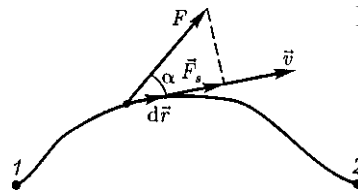


Рис. 13

где  $\alpha$  — угол между векторами  $F$  и  $d\vec{r}$ ;  $ds = |d\vec{r}|$  — элементарный путь;  $F_s$  — проекция вектора  $F$  на вектор  $d\vec{r}$  (рис. 13).

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

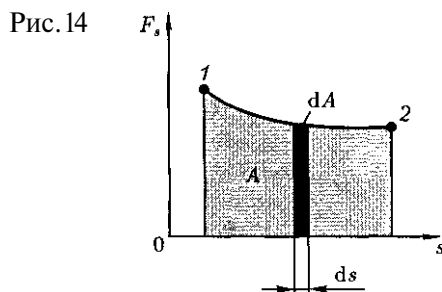
$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = \int_1^2 F_s ds. \quad (11.2)$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы  $F_s$  от пути  $s$  вдоль траектории 1—2. Пусть эта зависимость представлена графически (рис. 14), тогда искомая работа  $A$  определяется на графике площадью затонированной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила  $F = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , то получим

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F_s \cos \alpha,$$

где  $s$  — путь, пройденный телом [см. также формулу (11.1)].

Из формулы (11.1) следует, что при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  работа силы положительна, в этом случае составляющая  $F_s$  совпадает по направлению с вектором скорости движения  $\vec{v}$  (СМ. рис. 13). Если  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то работа силы отрицательна. При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (сила направлена перпендику-



лярно перемещению) работа силы равна нулю.

**Единица работы — джоуль (Дж):** 1 Дж — работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н · м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности:**

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (11.3)$$

За время  $dt$  сила  $F$  совершает работу  $Fdr$ , и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v},$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы;  $N$  — величина *скалярная*.

**Единица мощности — ватт (Вт):** 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

## § 12. Кинетическая и потенциальная энергии

**Кинетическая энергия** механической системы — энергия механического движения этой системы.

Сила  $F$ , действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа  $dA$  силы  $F$  на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до  $v$ , идет на увеличение кинетической энергии  $dT$  тела, т.е.

$$dA = dT.$$

Используя второй закон Ньютона  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  и умножая на перемещение  $d\vec{r}$ , получим



$$\vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = dA.$$

Так как  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , то  $dA = m\vec{v} d\vec{v} = mv dv = dT$ , откуда

$$T = \int_0^v mv dv = \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом, тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $v$ , обладает кинетической энергией

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (12.1)$$

Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее механического движения.

При выводе формулы (12.1) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему. Так, кинетическая энергия системы из  $n$  материальных точек равна

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

где  $v_i$  — скорость  $i$ -й материальной точки массой  $m_i$ .

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действу-

ющими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них, — **консервативными**. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является сила трения.

Тела, находясь в **потенциальном поле сил**, обладают потенциальной энергией  $\Pi$ . **Потенциальная энергия** — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Работа **консервативных сил** при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком « $\leftarrow$ » (работа совершается за счет убыли потенциальной энергии):

$$dA = -d\Pi. \quad (12.2)$$

Работа  $dA$  выражается как скалярное произведение силы  $F$  на перемещение  $d\vec{r}$  (см. § 11), и выражение (12.2) можно записать в виде

$$-d\Pi. \quad (12.3)$$

Следовательно, если известна функция  $\Pi(\vec{r})$ , то из формулы (12.3) можно найти силу  $F$  по модулю и направлению.

Согласно формуле (12.3), потенциальная энергия

$$\Pi = -\int \vec{F} d\vec{r} + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, т.е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это, однако, не суще-

ственно, так как в физические соотношения входит или разность потенциальных энергий в двух точках, или производная функции  $\Pi$  по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении условно считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а потенциальную энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Для консервативных сил

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

или в векторном виде

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi, \quad (12.4)$$

где

$$\text{grad } \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{k} \quad (12.5)$$

( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы координатных осей). Вектор, определяемый выражением (12.5), называется *градиентом скаляра*  $\Pi$ .

Для него наряду с обозначением  $\text{grad } \Pi$  применяется также обозначение  $\nabla \cdot \Pi$  («набла») означает символический вектор, называемый *оператором Гамильтона*<sup>1</sup> или «набла»-оператором:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (12.6)$$

Конкретный вид функции  $\Pi$  зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли,

$$\Pi = mgh, \quad (12.7)$$

где высота  $h$  отсчитывается от нулевого уровня, для которого  $\Pi_0 = 0$ . Выра-

<sup>1</sup> У. Гамильтон (1805 — 1865) — ирландский математик и физик.

жение (12.7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты  $h$  на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна!*). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина  $h'$ ),  $\Pi = -mgh'$ .

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x \text{ упр}} = -kx,$$

где  $F_{x \text{ упр}}$  — проекция силы упругости на ось  $x$ ;  $k$  — *коэффициент упругости* (для пружины — *жесткость*), а знак « $\leftarrow$ » указывает на то, что  $F_{x \text{ упр}}$  направлена в сторону, противоположную деформации  $x$ .

По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и направлена противоположно ей, т. е.

$$F_x = -F_{x \text{ упр}} = kx.$$

Элементарная работа  $dA$ , совершаемая силой  $F_x$  при бесконечно малой деформации  $da$ ,

$$dA = F_x dx = kx dx,$$

а полная работа

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

**Полная механическая энергия системы** — энергия механического движения и взаимодействия:

$$E = T + \Pi,$$

т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

### § 13. Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения энергии — результат обобщения многочисленных опытных данных. Идея этого закона принадлежит М.В.Ломоносову (1711 — 1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю.Майером (1814 — 1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821 — 1894).

Рассмотрим систему материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Пусть  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  — равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . При  $v \ll c$  массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 + f_1,$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 + f_2,$$

.....

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}'_n + \vec{F}_n + f_n.$$

Двигаясь под действием сил, материальные точки системы за интервал времени  $dt$  совершают перемещения, соответственно равные  $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$ . Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что  $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ , получим

$$m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 = f_1 d\vec{r}_1,$$

$$m_2(\vec{v}_2 d\vec{v}_2) - (\vec{F}'_2 + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 = f_2 d\vec{r}_2,$$

.....

$$m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}'_n + \vec{F}_n) d\vec{r}_n = f_n d\vec{r}_n.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i &= \\ &= \sum_{i=1}^n f_i d\vec{r}_i. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Первое слагаемое левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^n m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT,$$

где  $dT$  — приращение кинетической энергии системы.

Второе слагаемое  $\sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i$  равно элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком «-», т.е. равно элементарному приращению потенциальной энергии  $d\Pi$  системы [см. (12.2)].

Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA. \quad (13.2)$$

При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними не консервативными силами. Если внешние не консервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T + \Pi) = 0,$$

откуда

$$T + \Pi = E = \text{const}, \quad (13.3)$$

т.е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (13.3) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: в системе тел, между которыми действуют только *консервативные* силы, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. **Закон сохранения механической энергии** можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени. Например, при сво-

бодном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Существует еще один вид систем — **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) **энергии**. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной, что и демонстрируется на примере свободного падения тела (рис. 15) без учета сопротивления среды. Этот закон не есть просто закон *количественного* сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и *качественную* сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии — **фундаментальный закон природы**, он справедлив как для систем

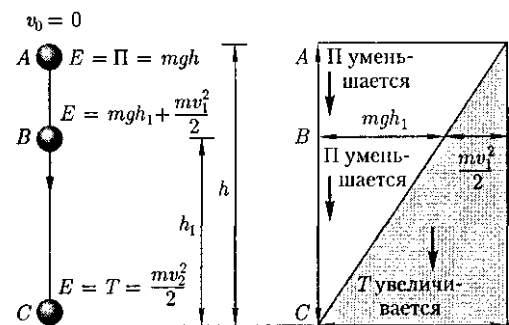


Рис. 15

макроскопических тел, так и для систем микротел.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии — сущность неуничтожимости материи и ее движения.

#### § 14. Графическое представление энергии

Во многих задачах рассматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты  $x$ ), т.е.  $\Pi = \Pi(x)$ . График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой**. Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.

Будем рассматривать только консервативные системы, т.е. системы, в которых взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (13.3). Рассмотрим графическое представление потенциальной энергии для тела в однородном поле тяжести и для упругодеформированного тела.

Потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли, согласно (12.7),  $\Pi(h) = mgh$ . Гра-

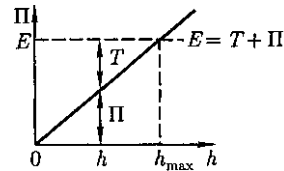


Рис. 16

фик данной зависимости  $\Pi = \Pi(h)$  — прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 16), угол наклона которой к оси  $h$  тем больше, чем больше масса тела (так как  $\operatorname{tg} \alpha = mg$ ).

Пусть полная энергия тела равна  $E$  (ее график — прямая, параллельная оси  $h$ ). На высоте  $h$  тело обладает потенциальной энергией  $\Pi$ , которая определяется отрезком вертикали, заключенным между точкой  $h$  на оси абсцисс и графиком  $\Pi(h)$ . Естественно, что кинетическая энергия  $T$  задается ординатой между графиком  $\Pi(h)$  и горизонтальной прямой  $EE$ . Из рис. 16 следует, что если  $h = h_{\max}$ , то  $T = 0$  и  $\Pi = E = mgh_{\max}$ , т.е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

Из приведенного графика можно найти скорость тела на высоте  $h$ :

$$T = E - \Pi, \text{ т.е. } \frac{mv^2}{2} = mgh_{\max} - mgh,$$

откуда

$$v = \sqrt{2g(h_{\max} - h)}.$$

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации  $\Pi = \frac{kx^2}{2}$  от деформации  $x$  имеет вид параболы (рис. 17), где график заданной полной энергии

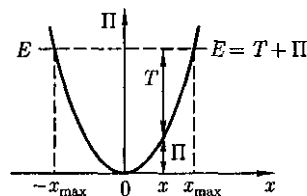


Рис. 17

тела  $E$  — прямая, параллельная оси абсцисс  $x$ , а значения  $T$  и  $\Pi$  определяются так же, как на рис. 16. Из рис. 17 следует, что с увеличением деформации  $x$  потенциальная энергия тела возрастет, а кинетическая — уменьшается. Абсцисса  $x_{\max}$  определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а  $-x_{\max}$  — максимально возможную деформацию сжатия тела. Если  $x = \pm x_{\max}$ , то  $T = 0$  и  $\Pi = E = \frac{kx_{\max}^2}{2}$ , т. е.

потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

Из анализа графика на рис. 17 вытекает, что при полной энергии тела, равной  $E$ , тело не может сместиться вправо от  $x_{\max}$  и влево от  $-x_{\max}$ , так как кинетическая энергия не может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной энергии. В таком случае говорят, что тело находится в **потенциальной яме** с координатами  $-x_{\max} \leq x \leq x_{\max}$ .

В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рис. 18). Проанализируем эту потенциальную кривую. Если  $E$  — заданная полная энергия частицы, то частица может находиться только там, где  $\Pi(x) \leq E$ , т. е. в областях I и III.

Переходить из области I в III и обратно частица не может, так как ей препятствует **потенциальный барьер**  $CDG$ , ширина которого равна интервалу зна-

чений  $x$ , при которых  $E < \Pi$ , а его высота определяется разностью  $\Pi_{\max} - E$ . Для того чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее. В области I частица с полной энергией  $E$  оказывается «запертой» в потенциальной яме  $ABC$  и совершает колебания между точками с координатами  $x_A$  и  $x_C$ .

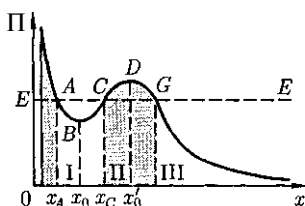
В точке  $B$  с координатой  $x_0$  (см. рис. 18) потенциальная энергия частицы минимальна. Так как действующая на частицу сила (см. § 12)  $F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$  ( $\Pi$  — функция только одной координаты), а условие минимума потенциальной энергии  $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$ , то в точке  $B$   $F_x = 0$ . При смещении частицы из положения  $x_0$  (и влево, и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение  $x_0$  является положением **устойчивого равновесия**. Указанные условия выполняются и для точки  $x'_0$  (для  $\Pi_{\max}$ ). Однако эта точка соответствует положению **неустойчивого равновесия**, так как при смещении частицы из положения  $x'_0$  появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.

## § 15. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

**Удар** (или **соударение**) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильярдных шаров) сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. д.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (**ударные** или

Рис. 18



мгновенные силы) столь велики, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приблизительно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара испытывают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется *коэффициентом восстановления*  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{v'_n}{v_n}.$$

Если для сталкивающихся тел  $\epsilon = 0$ , то такие тела называются *абсолютно неупругими*, если  $\epsilon = 1$  — *абсолютно упругими*. На практике для всех тел  $0 < \epsilon < 1$  (например, для стальных шаров  $\epsilon \approx 0,56$ , для шаров из слоновой кости  $\epsilon \approx 0,89$ , для свинца  $\epsilon \approx 0$ ). Однако в некоторых случаях тела можно с большей степенью точности рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется *линией удара*. Удар называется *центральной*, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Мы будем рас-

сматривать только *центральные* абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

**Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это *идеализированный случай*).

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости шаров массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара через  $v_1$  и  $v_2$ , после удара — через  $v'_1$  и  $v'_2$  (рис. 19). В случае прямого центрального удара векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей. Их направления учтем знаками: положительное значение припишем движению вправо, отрицательное — движению влево.

При указанных допущениях законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (15.1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (15.2)$$

Произведя соответствующие преобразования в выражениях (15.1) и (15.2), получаем

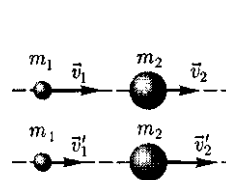


Рис. 19

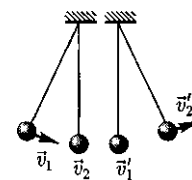


Рис. 20

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \quad (15.3)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2), \quad (15.4)$$

откуда

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'. \quad (15.5)$$

Решая уравнения (15.3) и (15.5), найдем

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.6)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (15.7)$$

Разберем несколько примеров.

1. При  $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad (15.8)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (15.9)$$

Проанализируем выражения (15.8) и (15.9) для двух шаров различных масс:

а)  $m_1 = m_2$ . Если второй шар до удара висел неподвижно ( $v_2 = 0$ ) (рис. 20), то после удара остановится первый шар ( $v_1' = 0$ ), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ( $v_2' = v_1$ );

б)  $m_1 > m_2$ . Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ( $v_1' < v_1$ ). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара ( $v_2' > v_1'$ ) (рис. 21);

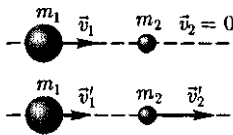


Рис. 21

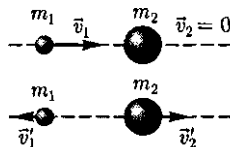


Рис. 22

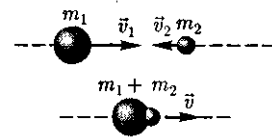


Рис. 23

в)  $m_1 < m_2$ . Направление движения первого шара при ударе изменяется — шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т.е.  $v_2' < v_1$  (рис. 22);

г)  $m_2 \gg m_1$  (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений (15.8) и (15.9) следует, что  $v_1' = -v_1, v_2' \approx \frac{2m_1v_1}{m_2} \approx 0$ .

2. При  $m_1 = m_2$  выражения (15.6) и (15.7) будут иметь вид

$$v_1' = v_2, v_2' = v_1,$$

т.е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

*Абсолютно неупругий удар* — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис. 23).

Если массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости до удара  $v_1$  и  $v_2$ , то, используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v},$$

где  $v$  — скорость движения шаров после удара. Тогда

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.10)$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы шаров равны ( $m_1 = m_2$ ), то



$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2}.$$

Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Используя (15.10), получаем

$$\Delta T = \frac{m_1 v_1}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Когда  $m_2 \gg m_1$  (масса неподвижного тела очень большая), то  $v \ll v_1$ , и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей ( $m_1 \gg m_2$ ), тогда  $v \approx v_1$  и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя, а не на остаточную деформацию стены.

Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

### Контрольные вопросы

- В чем различие между понятиями энергии и работы?
- Как найти работу переменной силы?
- Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
- Что такое мощность? Выведите ее формулу.
- Дайте определения и выведите формулы для известных видов механической энергии.
- Какова связь между силой и потенциальной энергией?
- Чем обусловлено изменение потенциальной энергии?
- Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
- В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
- В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
- Что такое потенциальная яма? потенциальный барьер?
- Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?
- Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия?
- Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
- Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?

## ЗАДАЧИ

3.1. Определите: 1) работу поднятия груза по наклонной плоскости; 2) среднюю и 3) максимальную мощность подъемного устройства, если масса груза 10 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол наклона к горизонту  $45^\circ$ , коэффициент трения 0,1 и время подъема 2 с. [1) 173 Дж; 2) 86 Вт; 3) 173 Вт]

3.2. С башни высотой 35 м горизонтально брошен камень массой 0,3 кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) скорость, с которой брошен камень, если через 1 с после начала движения его кинетическая энергия составила 60 Дж; 2) потенциальную энергию камня через 1 с после начала движения. [1) 17,4 м/с; 2) 88,6 Дж]

3.3. Пренебрегая трением, определите наименьшую высоту, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом 10 м, чтобы она сделала полную петлю и не выпала из желоба. [25 м]

3.4. Пуля массой  $m = 10$  г, летевшая горизонтально со скоростью  $v = 500$  м/с, попадает в баллистический маятник длиной  $l = 1$  м и массой  $M = 5$  кг и застревает в нем. Определите угол отклонения маятника. [ $16^\circ 30'$ ]

3.5. Зависимость потенциальной энергии частицы в центральном силовом поле от расстояния  $r$  до центра поля задается выражением  $\Pi(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$ , где  $A$  и  $B$  — положительные постоянные. Определите значение  $r_0$ , соответствующее равновесному положению частицы. Является ли это положение положением устойчивого равновесия? [ $r_0 = -$ ]

3.6. При центральном абсолютно упругом ударе движущееся тело массой  $m_1$  ударяется о покоящееся тело массой  $m_2$ , в результате чего скорость первого тела уменьшается в  $n = 1,5$  раза. Определите: 1) отношение  $\frac{m_1}{m_2}$ ; 2) кинетическую энергию  $T_2'$  второго тела, если первоначальная кинетическая энергия первого тела  $T_1 = 1000$  Дж. [1) 5; 2) 555 Дж]

3.7. Тело массой  $m_1 = 4$  кг движется со скоростью  $v_1 = 3$  м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе. [9 Дж]

## Глава 4

### МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### § 16. Момент инерции

При изучении вращения твердых тел пользуются понятием момента инерции. Момент инерции тела — мера инертности твердых тел при вращательном движении. Его роль такая же, что и массы при поступательном движении. **Моментом инерции** системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс  $n$  материальных то-

чек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

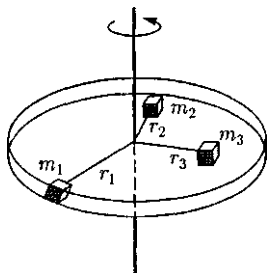
$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Суммирование производится по всем элементарным массам  $m_i$ , на которые разбивается тело (рис. 24).

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm,$$

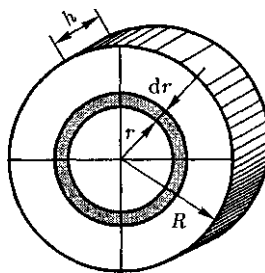
Рис. 24



где интегрирование производится по всему объему тела. Величина  $r$  в этом случае есть функция положения точки с координатами  $x, y, z$ . Момент инерции — величина *аддитивная*: момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей тела относительно той же оси.

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой  $h$  и радиусом  $R$  относительно его геометрической оси (рис. 25). Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины  $dr$  с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$ .

Рис. 25




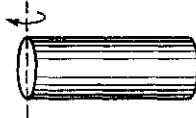



Момент инерции каждого полого цилиндра  $dJ = r^2 dm$  (так как  $dr \ll r$ , то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно  $r$ ), где  $dm$  — масса всего элементарного цилиндра; его объем  $2\pi r h dr$ . Если  $\rho$  — плотность материала, то  $dm = 2\pi r h \rho dr$  и  $dJ = 2\pi h \rho r^3 dr$ . Тогда момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho,$$

но так как  $\pi R^2 h$  — объем цилиндра, то его масса  $m = \pi R^2 h \rho$ , а момент инерции

Таблица 1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$	Ось симметрии 	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$	Ось симметрии 	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину 	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец 	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиусом $R$	Ось проходит через центр шара 	$J = \frac{2}{5} mR^2$

$$J = \frac{1}{2} mR^2.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси равен моменту его инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями:

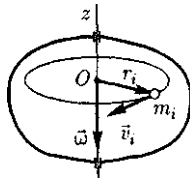
$$J = J_C + ma^2. \quad (16.1)$$

В заключение приведем значения моментов инерции (табл. 1) для некоторых тел (тела считаются однородными,  $m$  — масса тела).

## § 17. Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело (см. § 1), вращающееся около неподвижной оси  $z$ , проходящей через него. Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , находящиеся на расстоянии  $r_1, r_2, \dots, r_n$  от оси. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами  $m_i$  опишут окружности различных радиусов  $r_i$  и будут иметь различные линейные скорости  $v_i$  (рис. 26). Но так как мы рассматриваем абсолют-

Рис. 26



но твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}. \quad (17.1)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

$$\text{или } T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Используя выражение (17.1), получим

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ .

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (17.2)$$

Из сравнения формулы (17.2) с выражением (12.1) для кинетической энергии тела, движущегося поступательно ( $T = \frac{mv^2}{2}$ ), следует, что, как уже указывалось (см. § 16), момент инерции — *мера инертности тела* при вращательном движении. Формула (17.2) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где  $m$  — масса катящегося тела;  $v_C$  — скорость центра масс тела;  $J_C$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс;  $\omega$  — угловая скорость тела.

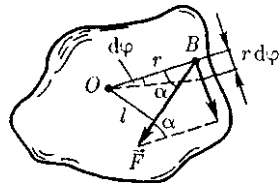


Рис. 29

### § 18. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Для характеристики вращательного эффекта силы при действии ее на твердое тело вводят понятие момента силы. *Различают моменты силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.*

**Моментом силы относительно неподвижной точки**  $O$  называется физическая величина  $M$ , определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $r$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $L$  приложения силы, на силу  $F$  (рис. 27):

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}],$$

где  $M$  — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $r$  к  $F$ .

Модуль момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (18.1)$$

где  $\alpha$  — угол между  $r$  и  $F$ ;  $r \sin \alpha = l$  — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  — **плечо силы**.

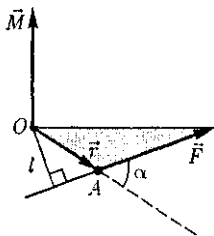


Рис. 27

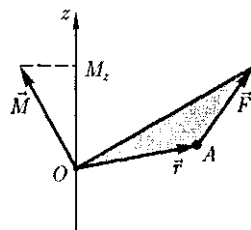


Рис. 28

**Моментом силы относительно неподвижной оси  $z$**  называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $M$ /момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$  (рис. 28). Значение момента  $M_z$  не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $z$ .

Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $M$ , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\vec{M}_z = [\vec{r} \vec{F}]_z.$$

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 29). Пусть сила  $F$  приложена в точке  $B$ , находящейся от оси  $z$  на расстоянии  $r$ , а  $\alpha$  — угол между направлением силы и радиусом-вектором  $r$ . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на бесконечно малый угол  $d\varphi$  точка приложения  $B$  проходит путь  $ds = r d\varphi$  и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi. \quad (18.2)$$

Учитывая (18.1), можем записать

$$dA = M_z d\varphi,$$

где  $F r \sin \alpha = Fl = M_z$  — момент силы относительно оси  $z$ . Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT, \text{ но } dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega,$$

поэтому  $M_z d\varphi = J_z \omega d\omega$ , или  $M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$ .

Учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , получим

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (18.3)$$

Уравнение (18.3) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**.

Можно показать, что если ось  $z$  совпадает с главной осью инерции (см. § 20), проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}, \quad (18.4)$$

где  $J$  — главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

## § 19. Момент импульса и закон его сохранения

При сравнении законов вращательного и поступательного движений просматривается аналогия между ними, только во вращательном движении вместо силы «выступает» ее момент, а роль массы «выполняет» момент инерции. Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси.

**Моментом импульса (количества движения)** материальной точки  $A$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$L = [\vec{r} \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}],$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ;  $p = mv$  — импульс

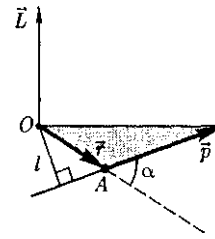


Рис. 30

материальной точки (рис. 30);  $L$  — *псевдовектор* (см. § 4), его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}$  к  $\vec{p}$ .

Модуль вектора момента импульса

$$L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = pl,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $r$  и  $p$ ;  $l$  — плечо вектора  $p$  относительно точки  $O$ .

**Моментом импульса относительно неподвижной оси  $z$**  называется скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси. Момент импульса  $L_z$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $z$ .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$ , с некоторой скоростью  $v_i$ . Скорость  $v_i$  и импульс  $m_i v_i$  перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора  $m_i \vec{v}_i$ . Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \quad (19.1)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

**Момент импульса твердого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i.$$

Используя формулу (17.1)  $v_i = \omega r_i$ , получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

т.е.

$$L_z = J_z \omega. \quad (19.2)$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Продифференцируем уравнение (19.2) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т.е.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это выражение — еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относи-

тельно оси равна моменту сил относительно той же оси.

Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (19.3)$$

В замкнутой системе момент внешних сил  $M = 0$  и  $\frac{dL}{dt} = 0$ , откуда

$$L = \text{const}. \quad (19.4)$$

Выражение (19.4) представляет собой **закон сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса — *фундаментальный закон природы*. Он связан со свойством симметрии пространства — его *изотропностью*, т.е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Таблица 2

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$M_z$ или $\vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z \omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a};$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z \varepsilon;$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z \omega^2}{2}$

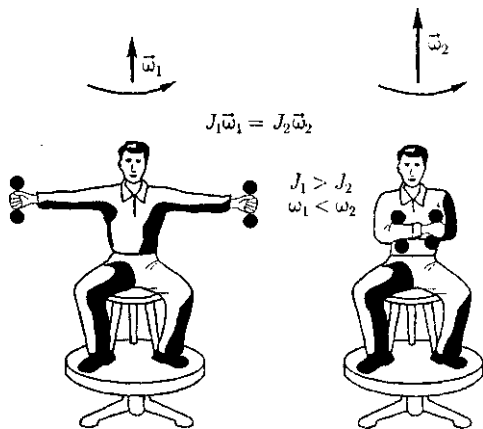


Рис. 31

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского. Пусть человек, сидящий на скамье, которая без трения вращается вокруг вертикальной оси, и держащий на вытянутых руках гантели (рис. 31), приведен во вращение с угловой скоростью  $\omega_1$ . Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется и угловая скорость вращения  $\omega_2$  возрастает. Аналогично, гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 2).

## § 20. Свободные оси. Гироскоп

Для того чтобы сохранить положение оси вращения твердого тела с течением времени неизменным, используют подшипники, в которых она удержи-

вается. Однако существуют такие оси вращения тел, которые не изменяют своей ориентации в пространстве без действия на нее внешних сил. Эти оси называются **свободными осями** (или **осями свободного вращения**).

Можно доказать, что в любом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями (они называются **главными осями инерции** тела). Например, главные оси инерции однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через центры противоположных граней (рис. 32).

Для однородного цилиндра одной из главных осей инерции является его геометрическая ось, а в качестве остальных осей могут быть две любые взаимно перпендикулярные оси, проведенные через центр масс в плоскости, перпендикулярной геометрической оси цилиндра. Главными осями инерции шара являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс.

Для устойчивости вращения большое значение имеет, какая именно из свободных осей служит осью вращения тела. Так, вращение вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции оказывается устойчивым, а вращение около оси со средним

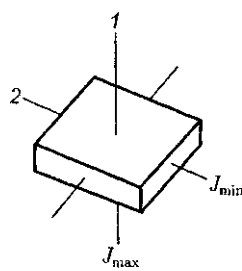


Рис. 32

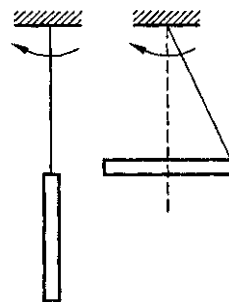


Рис. 33



моментом — неустойчивым. Так, если подбросить тело, имеющее форму параллелепипеда, приведя его одновременно во вращение, то оно, падая, будет устойчиво вращаться вокруг осей  $1$  и  $2$  (см. рис. 32).

Если, например, палочку подвесить за один конец нити, а другой конец, закрепленный к шпинделю центробежной машины, привести в быстрое вращение, то палочка будет вращаться в горизонтальной плоскости около вертикальной оси, перпендикулярной оси палочки и проходящей через ее середину (рис. 33). Это и есть ось свободного вращения (момент инерции при этом положении палочки максимальный). Если теперь палочку, вращающуюся вокруг свободной оси, освободить от внешних связей (аккуратно снять верхний конец нити с крючка шпинделя), то положение оси вращения в пространстве в течение некоторого времени сохраняется.

Свойство свободных осей сохранять свое положение в пространстве широко применяется в технике. Наиболее интересны в этом плане *гироскопы* — массивные однородные тела, вращающиеся с большой угловой скоростью около своей оси симметрии, являющейся свободной осью.

Рассмотрим одну из разновидностей гироскопов — гироскоп на кардановом подвесе (рис. 34). Дискообразное тело — гироскоп — закреплено на оси  $AA$ , которая может вращаться вокруг перпендикулярной ей оси  $BB$ , которая, в свою очередь, может поворачиваться вокруг вертикальной оси  $DD$ . Все три оси пересекаются в одной точке  $C$ , являющейся центром масс гироскопа и остающейся неподвижной, а ось гироскопа может принять любое направление в пространстве. Силами трения в подшипниках всех трех осей и моментом импульса колец пренебрегаем.

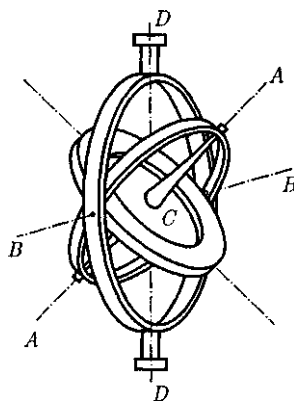


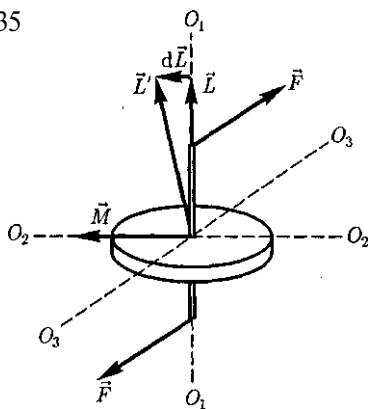
Рис. 34

Так как трение в подшипниках мало, то, пока гироскоп неподвижен, его оси можно придать любое направление. Если начать гироскоп быстро вращать (например, с помощью намотанной на ось веревочки) и поворачивать его подставку, то ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве неизменной. Это можно объяснить с помощью основного закона динамики вращательного движения.

Для свободно вращающегося гироскопа сила тяжести не может изменить ориентацию его свободной оси, так как эта сила приложена к центру масс (центр вращения совпадает с центром масс), а момент силы тяжести относительно закрепленного центра масс равен нулю. Моментом сил трения мы также пренебрегаем. Поэтому если момент внешних сил относительно его закрепленного центра масс равен нулю, то, как следует из уравнения (19.4),  $L = \text{const}$ , т.е. момент импульса гироскопа сохраняет свою величину и направление в пространстве. Следовательно, вместе с ним сохраняет свое положение в пространстве и ось гироскопа.

Чтобы ось гироскопа изменила свое направление в пространстве, необходимо, согласно (19.3), отличие от нуля момента внешних сил. Если момент

Рис. 35



внешних сил, приложенных к вращающемуся гироскопу, относительно его центра масс отличен от нуля, то наблюдается явление, получившее название **гироскопического эффекта**. Оно состоит в том, что под действием пары сил  $F$ , приложенной к оси вращающегося гироскопа, ось гироскопа  $O_1 O_1$  (рис. 35) поворачивается вокруг прямой  $O_3 O_3$ , а не вокруг прямой  $O_2 O_2$ , как это казалось бы естественным на первый взгляд ( $O_1 O_1$  и  $O_2 O_2$  лежат в плоскости чертежа, а  $O_3 O_3$  и силы  $F$  перпендикулярны ей).

Гироскопический эффект объясняется следующим образом. Момент  $M$  пары сил  $F$  направлен вдоль прямой  $O_2 O_2$ . За время  $dt$  момент импульса  $L$  гироскопа получит приращение  $dL = M dt$  (направление  $dL$  совпадает с направлением  $M$ ) и станет равным  $L' = L + dL$ . Направление вектора  $L'$  совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой  $O_3 O_3$ . Если время действия силы мало, то, хотя момент сил  $M$  и велик, изменение момента импульса  $dL$  гироскопа будет также весьма малым. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для ее изменения

следует прикладывать силы в течение длительного времени.

Если ось гироскопа закреплена подшипниками, то вследствие гироскопического эффекта возникают так называемые **гироскопические силы**, действующие на опоры, в которых вращается ось гироскопа. Их действие необходимо учитывать при конструировании устройств, содержащих быстро вращающиеся массивные составные части. Гироскопические силы имеют смысл только во вращающейся системе отсчета и являются частным случаем кориолисовой силы инерции (см. § 27).

Гироскопы применяются в различных гироскопических навигационных приборах (гироскоп, гироскоп, гироскоп и т. д.). Другое важное применение гироскопов — поддержание заданного направления движения транспортных средств, например судна (авторулевой) и самолета (автопилот) и т. д. При всяком отклонении от курса вследствие каких-то воздействий (волны, порыва ветра и т. д.) положение оси гироскопа в пространстве сохраняется. Следовательно, ось гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося устройства. Поворот рам карданова подвеса с помощью определенных приспособлений включает рули управления, которые возвращают движение к заданному курсу.

Впервые гироскоп применен французским физиком Ж. Фуко (1819 — 1868) для доказательства вращения Земли.

## § 21. Деформации твердого тела

Рассматривая механику твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого тела. Однако в приро-

де абсолютно твердых тел нет, так как все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, т.е. *деформируются*.

**Деформация** называется *упругой*, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. **Деформации**, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются *пластическими* (или *остаточными*). Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь и рассматривать упругие деформации, что мы и будем делать.

В теории упругости доказывается, что все виды деформаций (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

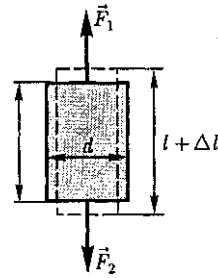
Рассмотрим однородный стержень длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  (рис. 36), к концам которого приложены направленные вдоль его оси силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  ( $F_1 = F_2 = F$ ), в результате чего длина стержня меняется на величину  $\Delta l$ . Естественно, что при растяжении  $\Delta l$  положительно, а при сжатии отрицательно.

При деформации тела возникают силы упругости. Физическая величина, определяемая модулем силы упругости, действующей на единицу площади поперечного сечения тела, называется **напряжением**:

$$\sigma = \dots \quad (21.1)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, **напряжение** называется **нормальным**, если же по касатель-

Рис. 36



ной к поверхности — **тангенциальным**.

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, испытываемой телом, является его **относительная деформация**. Так, относительное изменение длины стержня (продольная деформация)

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (21.2)$$

относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где  $d$  — диаметр стержня.

Деформации  $\epsilon$  и  $\epsilon'$  всегда имеют разные знаки (при растяжении  $\Delta l$  положительно, а  $\Delta d$  отрицательно, при сжатии  $\Delta l$  отрицательно, а  $\Delta d$  положительно). Из опыта вытекает взаимосвязь  $\epsilon$  и  $\epsilon'$ :

$$\epsilon' = -\mu\epsilon,$$

где  $\mu$  — положительный коэффициент, зависящий от свойств материала и называемый **коэффициентом Пуассона**<sup>1</sup>.

Английский физик Р. Гук (1635 — 1703) экспериментально установил, что для малых деформаций относительное удлинение  $\epsilon$  и напряжение  $\sigma$  пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (21.3)$$

<sup>1</sup> С. Пуассон (1781 — 1840) — французский ученый.

где  $E$  — коэффициент пропорциональности, называемый модулем Юнга<sup>1</sup>.

Из выражения (21.3) видно, что **модуль Юнга** определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

Из формул (21.2), (21.3) и (21.1) вытекает, что

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES},$$

или

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l, \quad (21.4)$$

где  $k$  — **коэффициент упругости**.

Выражение (21.4) также определяет **закон Гука**, согласно которому удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе.

Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, качественный ход которой мы рассмотрим для металлического образца (рис. 37). Из рисунка видно, что линейная зависимость  $\sigma(\epsilon)$ , установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до так называемого **предела пропорциональности** ( $\sigma_p$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость  $\sigma(\epsilon)$  уже нелинейна) и до **предела упругости** ( $\sigma_y$ ) остаточные деформации не возникают.

За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой  $BO$ , а прямой  $CF$ , параллельной  $OA$ . Напряжение, при котором появля-

<sup>1</sup> Т. Юнг (1773 — 1829) — английский ученый.

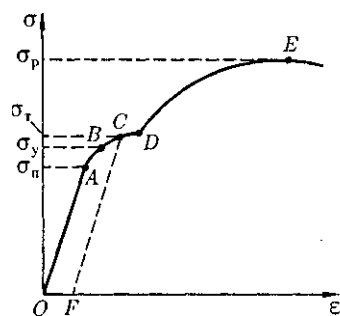


Рис. 37

ется заметная остаточная деформация ( $\approx 0,2\%$ ), называется **пределом текучести** ( $\sigma_T$ ) — точка  $C$  на кривой. В области  $CD$  деформация возрастает без увеличения напряжения, т.е. тело как бы «течет». Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**).

**Материалы**, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**, для которых же она практически отсутствует — **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за точку  $D$ ) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ( $\sigma_p$ ).

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах является текучим.

Вычислим потенциальную энергию упругорастянутого (сжатого) стержня, которая равна работе, совершаемой внешними силами при деформации:

$$\Pi = A = \int_0^{\Delta l} F dx,$$

где  $x$  — абсолютное удлинение стержня, изменяющееся в процессе деформации от  $0$  до  $\Delta l$ . Согласно закону Гука (21.4),  $F = kx = \frac{ES}{l} x$ , поэтому

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2,$$

т. е. потенциальная энергия упругорастянутого стержня пропорциональна квадрату деформации  $(\Delta l)^2$ .

Деформацию сдвига проще всего осуществить, если взять брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и приложить к нему силу  $F_\tau$  (рис. 38), касательную к его поверхности (нижняя часть бруска закреплена неподвижно). Относительная деформация сдвига определяется из формулы

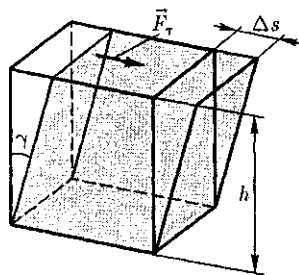


Рис. 38

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{h},$$

где  $\Delta s$  — абсолютный сдвиг параллельных слоев тела относительно друг друга;  $h$  — расстояние между слоями (для малых углов  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ ).

### Контрольные вопросы

Что такое момент инерции тела?

Какова роль момента инерции во вращательном движении?

Выведите формулу для момента инерции обруча.

Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.

Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?

Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?

В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.

Каким свойством симметрии пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса? Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

Что такое свободные оси (главные оси инерции)? Какие из них являются устойчивыми?

Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?

Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?

Дайте объяснение диаграммы напряжений  $\sigma(\epsilon)$ . Что такое пределы пропорциональности, упругости и прочности?

Каков физический смысл модуля Юнга?

### ЗАДАЧИ

4.1. С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без скольжения сплошной цилиндр и шар одинаковых масс и одинаковых радиусов. Определите: 1) отношение скоростей цилиндра и шара на данном уровне; 2) отношение скоростей в данный момент времени. [1) 14/15; 2) 14/15]

4.2. К ободу однородного сплошного диска радиусом  $R = 0,5$  м приложена постоянная касательная сила  $F = 100$  Н. При вращении диска па него действует момент сил трения  $M = 2$  Н · м. Определите массу  $m$  диска, если известно, что его угловое ускорение  $\epsilon$  ПОСТОЯННО и равно  $12$  рад/с<sup>2</sup>. [32 кг]

4.3. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой  $m = 1$  кг перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2$  кг. Пренебрегая трением в оси блока, определите: 1) ускорение грузов; 2) отношения  $\frac{T_2}{T_1}$  сил натяжения нити. [1)  $2,8$  м/с<sup>2</sup>; 2) 1,11]

4.4. Скорость вращения колеса, момент инерции которого  $2$  кг · м<sup>2</sup>, вращающегося при торможении равномерно, за время  $t = 1$  мин уменьшилась от  $n_1 = 300$  мин<sup>-1</sup> до  $n_2 = 180$  мин<sup>-1</sup>. Определите: 1) угловое ускорение  $\epsilon$  колеса; 2) момент  $M$  силы торможения; 3) работу силы торможения. [1)  $0,21$  рад/с<sup>2</sup>; 2)  $0,42$  Н · м; 3)  $630$  Дж]

4.5. Человек массой  $m = 80$  кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой  $M = 100$  кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой  $n_1 = 10$  мин<sup>-1</sup>, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определите, с какой частотой  $n_2$  будет тогда вращаться платформа. [26 мин<sup>-1</sup>]

4.6. Определите относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа  $62,1$  Дж. Длина стержня  $2$  м, площадь поперечного сечения  $1$  мм<sup>2</sup>, модуль Юнга для алюминия  $E = 69$  ГПа. [ $\frac{\Delta l}{l} = \sqrt{\frac{2A}{ESl}} = 0,03$  ]

## Глава 5

### ТЯГОТЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

#### § 22. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения

Еще в глубокой древности было замечено, что в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Птолемей (II в. н.э.), считая Землю расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила на-

звание *птолемеевой геоцентрической системы мира*.

В начале XVI в. польским астрономом Н.Коперником (1473 — 1543) обоснована *гелиоцентрическая система* (см. § 5), согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли. Теория и наблюдения Коперника воспринимались как занимательная фантазия.

К началу XVII столетия большинство ученых, однако, убедилось в справедливости гелиоцентрической системы мира. И. Кеплер (немецкий ученый, 1571 — 1630), обработав и уточнив результаты многочисленных наблюдений

датского астронома Т. Браге (1546 — 1601), эмпирически установил **законы движения планет**:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Впоследствии И.Ньютон, изучая движение небесных тел, на основании законов Кеплера и основных законов динамики установил **закон всемирного тяготения**: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними ( $r^2$ ):

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (22.1)$$

Эта сила называется **гравитационной** (или **силой всемирного тяготения**). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности  $G$  называется **гравитационной постоянной**.

Закон всемирного тяготения справедлив лишь для тел, которые можно считать материальными точками, т.е. для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Для вычисления силы взаимодействия между протяженными (не точечными) телами их следует «разбить» на элементарные массы, чтобы их можно было считать материальными точками, подсчитать по формуле (22.1) силы притяжения между всеми попарно взя-

тыми элементами, а затем геометрически их сложить (проинтегрировать), что является довольно сложной математической задачей.

Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел, а также числовое определение гравитационной постоянной  $G$  проведено английским физиком Г. Кавендишем (1731-1810).

Принципиальная схема опыта Кавендиша, применившего **крутильные весы**, представлена на рис. 39. Легкое коромысло  $A$  с двумя одинаковыми шариками массой  $m = 729$  г подвешено на упругой нити  $B$ . На коромысле  $C$  укреплены на той же высоте массивные шары массой  $M = 158$  кг. Поворачивая коромысло  $C$  вокруг вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами  $m$  и  $M$ . Под действием пары сил, приложенных к шарикам  $m$  со стороны шаров  $M$ , коромысло  $A$  поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить  $B$  до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момент сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение  $G$ .

Значение  $G$  — фундаментальная физическая постоянная, принимаемая равной  $6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{ м}^2 / \text{ кг}^2$ , т.е. два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой

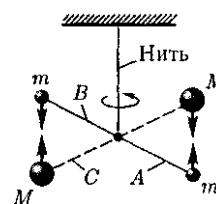


Рис. 39

$6,6720 \cdot 10^{-11}$  Н. Очень малая величина  $G$  показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае больших масс.

### § 23. Сила тяжести и вес. Невесомость

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением, которое получило название **ускорения свободного падения**  $d$ . Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$  действует сила

$$\vec{P} = m\vec{d},$$

называемая **силой тяжести**.

Согласно фундаментальному физическому закону — **обобщенному закону Галилея**, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от  $9,780 \text{ м/с}^2$  на экваторе до  $9,832 \text{ м/с}^2$  на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли — с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 и 6357 км). Так как различие значений  $d$  невелико, то ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимается равным  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P = mg = F = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $M$  — масса Земли;  $R$  — расстояние между телом и центром Земли.

Эта формула дана для случая, когда тело находится на поверхности Земли.

Если тело расположено на высоте  $h$  от поверхности Земли,  $R_0$  — радиус Земли, тогда

$$P = G \frac{mM}{(R_0 + h)^2},$$

т. е. сила тяжести с удалением от поверхности Земли уменьшается.

**Весом** тела называют силу, с которой тело действует на опору (или подвес) вследствие гравитационного притяжения к Земле. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от  $d$ , т. е. когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости**.

Таким образом, *сила тяжести действует всегда*, а *вес проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют еще другие силы*, вследствие чего тело движется с ускорением  $a$ , отличным от  $g$ . Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением  $a \neq d$ , то к этому телу приложена дополнительная сила  $N$ , удовлетворяющая условию

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}.$$

Тогда вес тела

$$\vec{P}' = -\vec{N} = \vec{P} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}),$$

т. е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то  $a = 0$  и  $P' = mg$ . Если тело *свободно движется в поле тяготения* по любой траектории и в любом направлении, то  $a = g$  и  $P' = 0$ , т. е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, на-



ходящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

## § 24. Поле тяготения и его напряженность

Закон тяготения Ньютона (22.1) определяет зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, но не показывает, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Силы тяготения не зависят от того, в какой среде находятся взаимодействующие тела. Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью *поля тяготения*, или *гравитационного поля*. Это поле порождается телами и является формой существования материи. Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой  $m$ , внесенное в это поле, действует сила тяготения, т.е.

$$\vec{F} = m\vec{g}. \quad (24.1)$$

Вектор  $\vec{g}$  не зависит от  $m$  и называется *напряженностью поля тяготения*. **Напряженность поля тяготения** определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой. Напряженность есть *силовая характеристика* поля тяготения.

Поле тяготения называется *однородным*, если его напряженность во всех точках одинакова, и *центральным*, если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке ( $A$ ), *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рис. 40).

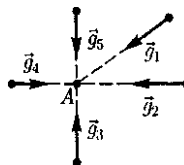


Рис. 40

Для графического изображения силового поля используются *силовые линии* (*линии напряженности*). Силовые линии выбираются так, что вектор напряженности поля направлен по касательной к силовой линии.

## § 25. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Определим работу, совершаемую силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки массой  $m$ . Вычислим, например, какую надо совершить работу для удаления тела массой  $m$  от Земли. На расстоянии  $R$  (рис. 41) на данное тело действует сила

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $M$  — масса Земли.

При перемещении этого тела на расстояние  $dR$  совершается работа

$$dA = -G \frac{mM}{R^2} dR. \quad (25.1)$$

Знак « $\rightarrow$ » появляется потому, что сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению (см. рис. 41).

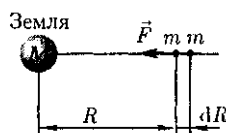


Рис.41

Если тело перемещать с расстояния  $R_1$  до  $R_2$ , то работа

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = - \int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right). \quad (25.2)$$

Из формулы (25.2) вытекает, что работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, т.е. *силы тяготения действительно консервативны, а поле тяготения является потенциальным* (см. § 12).

Согласно формуле (12.2), работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком « $\rightarrow$ », т.е.

$$A = -\Delta\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Из формулы (25.2) получим

$$\Pi_1 - \Pi_2 = -m \left( \frac{GM}{R_1} - \frac{GM}{R_2} \right). \quad (25.3)$$

Так как в формулы входит только разность потенциальных энергий в двух состояниях, то для удобства принимают потенциальную энергию при  $R_2 \rightarrow \infty$  равной нулю ( $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \Pi_2 = 0$ ). Тогда (25.3) запишется в виде  $\Pi_1 = -G \frac{mM}{R_1}$ . Так как первая точка была выбрана произвольно, то

$$\Pi = -G \frac{mM}{R}.$$

Величина

$$\varphi = \frac{\Pi}{m}$$

является *энергетической характеристикой* поля тяготения и называется по-

тенциалом. *Потенциал поля тяготения*  $\varphi$  — скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность. Таким образом, потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой  $M$ ,

$$\varphi = -\frac{GM}{R}, \quad (25.4)$$

где  $R$  — расстояние от этого тела до рассматриваемой точки.

Из формулы (25.4) вытекает, что геометрическое место точек с одинаковым потенциалом образует сферическую поверхность ( $R = \text{const}$ ). *Поверхности*, для которых потенциал постоянен, называются *эквипотенциальными*.

Рассмотрим взаимосвязь между потенциалом ( $\varphi$ ) поля тяготения  $\Pi$  его напряженностью ( $g$ ). Из выражений (25.1) и (25.4) следует, что элементарная работа  $dA$ , совершаемая силами поля при малом перемещении тела массой  $m$ ,

$$dA = -m d\varphi.$$

С другой стороны,  $dA = F dl$  ( $dl$  — элементарное перемещение). Учитывая (24. 1),  $dA = mg dl$ , т.е.  $mg dl = -m d\varphi$ , или

$$g = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Величина  $\frac{d\varphi}{dl}$  характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения. Можно показать, что

$$\vec{g} = -\text{grad} \varphi, \quad (25.5)$$

где  $\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$  — градиент скаляра  $\varphi$  [см. (12.5)]. Знак « $\rightarrow$ »

в формуле (25.5) показывает, что вектор напряженности  $\partial$  направлен в сторону убывания потенциала.

В качестве частного примера, исходя из представлений теории тяготения, рассмотрим потенциальную энергию тела, находящегося на высоте  $h$  относительно Земли:

$$\Pi = -G \frac{mM}{R_0+h} - \left( -G \frac{mM}{R_0} \right) = G \frac{mMh}{R_0(R_0+h)},$$

где  $R_0$  — радиус Земли.

Так как

$$P = G \frac{mM}{R_0^2} \text{ и } g = \frac{P}{m} = G \frac{M}{R_0^2},$$

то, учитывая условие  $h \ll R_0$ , получаем

$$\Pi = G \frac{mMh}{R_0^2} = mgh.$$

Таким образом, мы вывели формулу, совпадающую с (12.7), которая постулировалась раньше.

## § 26. Космические скорости

Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости, называемые *космическими*.

*Первой космической* (или *круговой*) *скоростью*  $v_1$  называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т.е. превратиться в искусственный спутник Земли. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $r$ , действует сила тяготения Земли, сообщая ему нормальное ускорение  $\frac{v_1^2}{r}$ . По второму закону Ньютона,

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r}.$$

Если спутник движется вблизи поверхности Земли, то  $r \approx R_0$  (радиус Земли) и  $\partial = \frac{GM}{R_0^2}$  [см. (25.6)], поэтому у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Первой космической скорости недостаточно для того чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения. Необходимая для этого скорость называется второй космической. *Второй космической* (или *параболической*) *скоростью*  $v_2$  называют ту наименьшую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т.е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической.

Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, необходимо, чтобы его кинетическая энергия была равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = - \int_{R_0}^{\infty} G \frac{mM}{r^2} dr = G \frac{mM}{R_0},$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11,2 \text{ км/с.}$$

*Третьей космической скоростью*  $v_3$  называют скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца. Третья космическая скорость  $v_3 = 16,7$  км/с. Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Ее первое теоретическое осмысление начато К. Э. Ци-

олковским, им была выведена уже рассмотренная нами формула (10.3), позволяющая рассчитывать скорость ракет.

Первые космические скорости были достигнуты в СССР: первая — при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 г., вторая — при запуске ракеты в 1959 г. После исторического полета Ю.А.Гагарина в 1961 г. начинается бурное развитие космонавтики.

## § 27. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Как уже отмечалось (см. § 5, 6), законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. *Системы отсчета*, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются *неинерциальными*. В неинерциальных системах законы Ньютона, вообще говоря, уже несправедливы. Однако законы динамики можно применять и для них, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода — так называемые *силы инерции*.

Если учесть силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчета: произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчета равно сумме всех сил, действующих на данное тело (включая и силы инерции). Силы инерции  $F_{ин}$  при этом должны быть такими, чтобы вместе с силами  $F$ , обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение  $\vec{a}'$  каким оно обладает в неинерциальных системах отсчета, т. е.

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} \quad (27.1)$$

Так как  $F = ma$  ( $a$  — ускорение тела в инерциальной системе отсчета), то

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{ин}.$$

Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил: 1) силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета; 2) силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета; 3) силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

Рассмотрим эти случаи.

**1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.** Пусть на тележке к штативу на нити подвешен шарик массой  $m$  (рис. 42). Пока тележка покоится или движется равномерно и прямолинейно, нить, удерживающая шарик, занимает вертикальное положение и сила тяжести  $P$  уравновешивается силой реакции нити  $T$ .

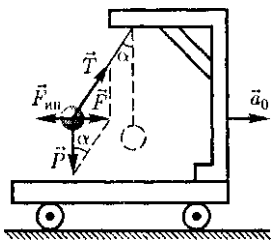
Если тележку привести в поступательное движение с ускорением  $a_0$ , то нить начнет отклоняться от вертикали назад до такого угла  $\alpha$ , пока результирующая сила  $F = -P + T$  не обеспечит ускорение шарика, равное  $a_0$ . Таким образом, результирующая сила  $F$  направлена в сторону ускорения тележки  $a_0$  и для установившегося движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением  $a_0$ ) равна  $F = mg \operatorname{tg} \alpha = -ma_0$ , откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g},$$

т. е. угол отклонения нити от вертикали тем больше, чем больше ускорение тележки.

Относительно системы отсчета, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила  $F$  уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой  $F'_{ин}$ , которая является не чем иным, как силой инерции, так

Рис. 42



как на шарик никакие другие силы не действуют. Таким образом,

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0. \quad (27.2)$$

Проявление сил инерции при поступательном движении наблюдается в повседневных явлениях. Например, когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к спинке сиденья. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону и пассажир удаляется от спинки сиденья. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в перегрузках, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

**2. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета.** Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  ( $\omega = \text{const}$ ) вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске, на разных расстояниях от оси вращения, установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой  $g$ ). При вращении маятников вместе с диском шарики отклоняются от вертикали на некоторый угол (рис. 43).

В инерциальной системе отсчета, связанной, например, с помещением, где установлен диск, шарик равномерно вращается по

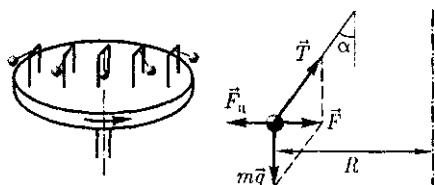


Рис. 43

окружности радиусом  $R$ . (расстояние от центра вращающегося шарика до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная  $F = m\omega^2 R$  и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является равнодействующей силы тяжести  $P$  и силы натяжения нити  $T$ :  $F = P + T$ . Когда движение шарика установится, то  $F = mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 R$ , откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R}{g},$$

т.е. углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем больше расстояние  $R$  от центра шарика до оси вращения диска и чем больше угловая скорость вращения  $\omega$ .

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится, что возможно, если сила  $F$  уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой  $F_{ц}$ , которая является не чем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила  $F_{ц}$ , называемая *центробежной силой инерции*, направлена по горизонтали от оси вращения диска и равна

$$F_{ц} = -m\omega^2 R. \quad (27.3)$$

Действию центробежных сил инерции подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспорте на поворотах, летчики при выполнении фигур высшего пилотажа; центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах и т. д., где они достигают огромных значений. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (роторов, винтов самолетов и т. д.) принимаются специальные меры для уравновешивания центробежных сил инерции.

Из формулы (27.3) вытекает, что центробежная сила инерции, действующая на тела во вращающихся системах отсчета в направлении радиуса от оси вращения, зависит от угловой скорости вращения  $\omega$  системы отсчета и радиуса  $R$ , но не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчета. Следовательно, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, по-

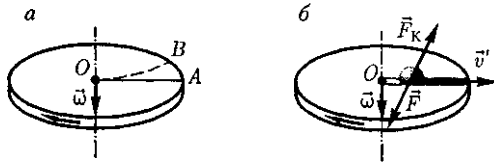


Рис. 44

коятся ли они в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движутся относительно нее с какой-то скоростью.

**3. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.** Пусть шарик массой  $m$  движется с постоянной скоростью  $v'$  вдоль радиуса равномерно вращающегося диска ( $v' = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $v' \perp \omega$  из). ЕСЛИ ДИСК не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, движется по радиальной прямой и попадает в точку  $A$ , если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик катится по кривой  $OB$  (рис. 44,  $a$ ), причем его скорость  $v'$  относительно диска изменяет свое направление. Это возможно лишь тогда, если на шарик действует сила, перпендикулярная скорости  $v'$ .

Для того чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиуса, используем жестко укрепленный вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью  $v'$  (рис. 44,  $b$ ). При отклонении шарика стержень действует на него с некоторой силой  $\vec{F}$ . Относительно диска (вращающейся системы отсчета) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила  $\vec{F}$  уравновешивается приложенной к шарiku силой инерции  $\vec{F}_K$ , перпендикулярной скорости  $v'$ . Эта сила называется **кориолисовой силой инерции**.

Можно показать, что сила Кориолиса<sup>1</sup>

$$\vec{F}_K = 2m[v' \vec{\omega}]. \quad (27.4)$$

Вектор  $F_K$  перпендикулярен векторам скорости  $v'$  тела и угловой скорости вращения  $\omega$  системы отсчета в соответствии с правилом правого винта.

<sup>1</sup> Г.Кориолис (1792— 1843) — французский физик и инженер.

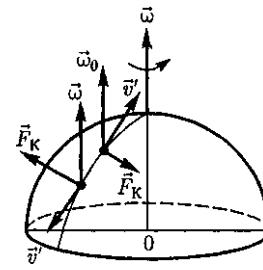


Рис. 45

Сила Кориолиса действует только на тела, движущиеся относительно вращающейся системы отсчета, например относительно Земли. Поэтому действием этих сил объясняется ряд наблюдаемых на Земле явлений. Так, если тело движется в Северном полушарии на север (рис. 45), то действующая на него сила Кориолиса, как это следует из выражения (27.4), будет направлена вправо по отношению к направлению движения, т. е. тело несколько отклонится на восток. Если тело движется на юг, то сила Кориолиса также действует вправо, если смотреть по направлению движения, т.е. тело отклонится на запад. Поэтому в Северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек; правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрее, чем левые, и т.д. Аналогично можно показать, что в Южном полушарии сила Кориолиса, действующая на движущиеся тела, будет направлена влево по отношению к направлению движения.

Благодаря силе Кориолиса падающие на поверхность Земли тела отклоняются к востоку (на широте  $60^\circ$  это отклонение должно составлять 1 см при падении с высоты 100 м). С силой Кориолиса связано поведение маятника Фуко, явившееся в свое время одним из доказательств вращения Земли. Если бы этой силы не было, то плоскость колебаний качающегося вблизи поверхности Земли маятника оставалась бы неизменной (относительно Земли). Действие же сил Кориолиса приводит к вращению плоскости колебаний вокруг вертикального направления.

Раскрывая содержание  $F_{ин}$  в формуле (27.1), получим **основной закон ди-**

### **намики для неинерциальных систем отсчета:**

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{ц} + \vec{F}_{К},$$

где силы инерции задаются формулами (27.2)-(27.4).

Обратим еще раз внимание на то, что *силы инерции вызываются* не взаимодействием тел, а *ускоренным движением системы отсчета*. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу. Два основных положения механики, согласно которым ускорение всегда вызывается силой, а сила всегда обусловлена взаимодействием между телами, в системах отсчета, движущихся с ускорением, одновременно не выполняются.

Для любого из тел, находящихся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними, следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. Таким образом, *силы инерции действуют только в неинерциальных системах*. В инерциальных системах отсчета таких сил не существует.

Возникает вопрос о «реальности» или «фиктивности» сил инерции. В ньютоновской механике, согласно которой сила есть результат взаимодействия тел, на силы инерции можно смотреть как на «фиктивные», «исчезающие» в инерциальных системах отсчета. Однако возможна и другая их интерпретация. Так как взаимодействия тел

осуществляются посредством силовых полей, то силы инерции рассматриваются как воздействия, которым подвергаются тела со стороны каких-то реальных силовых полей, и тогда их можно считать «реальными». Независимо от того, рассматриваются ли силы инерции в качестве «фиктивных» или «реальных», многие явления, о которых упоминалось в настоящем параграфе, объясняются с помощью сил инерции.

Силы инерции, действующие на тела в иеинерциальной системе отсчета, пропорциональны их массам и при прочих равных условиях сообщают этим телам одинаковые ускорения. Поэтому в «поле сил инерции» эти тела движутся совершенно одинаково, если только одинаковы начальные условия. Тем же свойством обладают тела, находящиеся под действием сил поля тяготения.

При некоторых условиях силы инерции и силы тяготения невозможно различить. Например, движение тел в равноускоренном лифте происходит точно так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакой эксперимент, выполненный внутри лифта, не может разделить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Аналогия между силами тяготения и силами инерции лежит в основе принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (**принципа эквивалентности Эйнштейна**): все физические явления в поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой общей теории относительности.

### Контрольные вопросы

Как определяется гравитационная постоянная и каков ее физический смысл?

На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?

- Что такое вес тела?
- В чем отличие веса тела от силы тяжести?
- Как объяснить возникновение невесомости при свободном падении?
- Что такое напряженность поля тяготения?
- Какое поле тяготения называется однородным? центральным?
- Какие величины вводятся для характеристики поля тяготения и какова связь между ними?
- Покажите, что силы тяготения консервативны.
- Чему равно максимальное значение потенциальной энергии системы из двух тел, находящихся в поле тяготения?
- Какие траектории движения имеют спутники, получившие первую и вторую космические скорости?
- Как вычисляются первая и вторая космические скорости?
- Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?
- Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?
- Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются?
- В Северном полушарии производится выстрел вдоль меридиана на север. Как скажется на движении снаряда суточное вращение Земли?
- Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности Эйнштейна.

## ЗАДАЧИ

5.1. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определите, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в 4 раза. [Возрастет в 6,35 раза]

5.2. Плотность вещества некоторой шарообразной планеты составляет  $3 \text{ г/см}^3$ . Каким должен быть период обращения планеты вокруг собственной оси, чтобы на экваторе тела были невесомыми? [ $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 1,9 \text{ ч}$ ]

5.3. Определите, в какой точке (считая от Земли) на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, напряженность поля тяготения равна нулю. Расстояние между центрами Земли и Луны равно  $R$ , масса Земли в 31 раз больше массы Луны. [ $0,9R$ ]

5.4. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала соприкасаются друг с другом. Определите, как изменится потенциальная энергия их гравитационного взаимодействия, если массу шаров увеличить в четыре раза. [Возрастет в 14,6 раза]

5.5. Два спутника одинаковой массы движутся вокруг Земли по круговым орбитам радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Определите: 1) отношение полных энергий спутников ( $\frac{E_1}{E_2}$ ); 2) отношение их моментов импульса ( $\frac{L_1}{L_2}$ ). [1)  $\frac{R_2}{R_1}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ ]

5.6. Вагон катится вдоль горизонтального участка дороги. Сила трения составляет 20 % от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой 10 г. Определите: 1) силу, действующую на нить; 2) угол отклонения нити от вертикали. [1) 0,1 Н; 2)  $11^\circ 35'$ ]

5.7. Тело массой 1,5 кг, падая свободно в течение 5 с, попадает на Землю в точку с географической широтой  $\varphi = 45^\circ$ . Учитывая вращение Земли, нарисуйте и определите все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю. [1) 14,7 Н; 2) 35,7 Н; 3) 7,57 мН]



# Глава 6

## ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

### § 28. Давление жидкости и газа

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Жидкость же, имея определенный объем, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Свойства жидкостей и газов во многом отличаются, однако в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому *гидроаэромеханика* — раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами, — использует *единый подход* к изучению жидкостей и газов.

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как *сплошные* непрерывно распределенные в занятой ими части про-

странства. Плотность же газов от давления зависит существенно. Сжимаемостью жидкости и газа во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием *несжимаемой жидкости* — жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент  $\Delta S$  с силами  $\Delta F$ , которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке  $\Delta S$ , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение (рис. 46).

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением*  $p$  жидкости:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Единица давления — *паскаль* (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м<sup>2</sup> (1 Па = 1 Н/м<sup>2</sup>).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется *закону Паскаля*<sup>1</sup>: давление на поверхности жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри

Рис. 46



<sup>1</sup> Б.Паскаль (1623—1662) — французский ученый.

покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес  $P = \rho g S h$ , а давление на нижнее основание

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h, \quad (28.1)$$

т.е. давление изменяется линейно с высотой. Давление  $\rho g h$  называется **гидростатическим давлением**.

Согласно формуле (28.1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $V$  — объем погруженного в жидкость тела.

## §29. Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется **течением**, а совокупность частиц движущейся жидкости — **поток**. Графически движение жидкостей изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 47). Линии

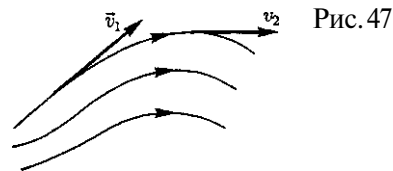


Рис. 47

тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т.е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока**. Течение жидкости называется **установившимся** (или **стационарным**), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения  $S_1$  и  $S_2$ , перпендикулярные направлению скорости (рис. 48).

За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  проходит объем жидкости  $Sv\Delta t$ ; следовательно, за 1 с через  $S_1$  пройдет объем жидкости  $S_1 v_1$ , где  $v_1$  — скорость течения жидкости в месте сечения  $S_1$ . Через сечение  $S_2$  за 1 с пройдет объем жидкости

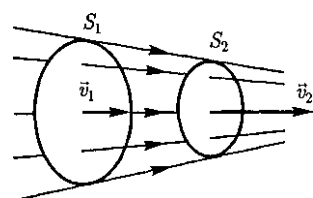


Рис. 48

$S_2 v_2$ , где  $v_2$  — скорость течения жидкости в месте сечения  $S_2$ . Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ), то через сечение  $S_2$  пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение  $S_1$ , т. е.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}. \quad (29.1)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (29.1) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

### § 30. Уравнение Бернулли и следствия из него

В реальных жидкостях между отдельными слоями потока возникают силы внутреннего трения, тормозящие относительное смещение слоев. Однако в ряде случаев ими можно пренебречь. Поэтому для вывода ряда закономерностей пользуются *физической моделью идеальной жидкости* — воображаемой жидкости, у которой внутреннее трение полностью отсутствует.

Выделим в стационарно текущей несжимаемой идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , по которой жидкость течет слева направо (рис. 49). Пусть в месте сечения  $S_1$  скорость течения  $v_1$ , давление  $p_1$  и высота, на которой это сечение расположено,  $h_1$ . Аналогично, в месте сечения  $S_2$  скорость течения  $v_2$ , давление  $p_2$ , высота сечения  $h_2$ . За малый промежуток времени  $\Delta t$  жидкость перемещается от сечения  $S_1$  к сечению  $S'_1$ , от  $S_2$  к  $S'_2$ .

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии  $E_2 - E_1$

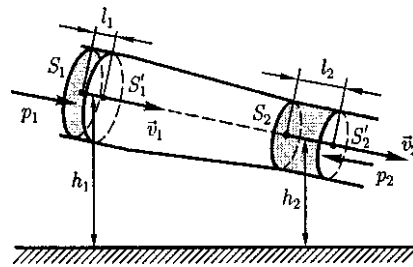


Рис. 49

идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе  $A$  внешних сил по перемещению массы  $m$  жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (30.1)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — полные энергии жидкости массой  $m$  в местах сечений  $S_1$  и  $S_2$  соответственно.

С другой стороны,  $A$  — это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , за рассматриваемый малый промежуток времени  $\Delta t$ . Для перенесения массы  $m$  от  $S_1$  до  $S'_1$  жидкость должна переместиться на расстояние  $l_1 = v_1 \Delta t$ ; и от  $S_2$  до  $S'_2$  — на расстояние  $l_2 = v_2 \Delta t$ .

Отметим, что  $l_1$  и  $l_2$  настолько малы, что всем точкам объемов, закрасенных на рис. 49, приписывают постоянные значения скорости, давления и высоты. Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (30.2)$$

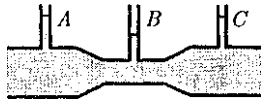
где  $F_1 = p_1 S_1$  и  $F_2 = -p_2 S_2$  (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; см. рис. 49).

Полные энергии  $E_1$  и  $E_2$  будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы  $m$  жидкости:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad (30.3)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (30.4)$$

Рис. 50



Подставляя (30.3) и (30.4) в (30.1) и приравнявая (30.1) и (30.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t &= \\ = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \end{aligned} \quad (30.5)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (29.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т.е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (30.5) на  $\Delta V$ , получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости.

Так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}. \quad (30.6)$$

Выражение (30.6) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли (1700 — 1782; опубликовано в 1738 г.) и называется **уравнением Бернулли**. Уравнение Бернулли — *выражение закона со-*

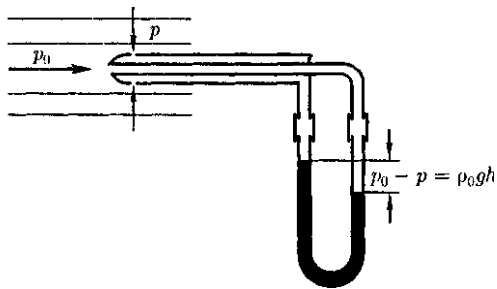


Рис. 51

*хранения энергии* применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина  $p$  в формуле (30.6) называется **статическим давлением** (давление жидкости на поверхности обтекаемого ею тела), величина  $\frac{\rho v^2}{2}$  — **динамическим давлением**. Как уже указывалось выше (см. § 28), величина  $\rho gh$  представляет собой **гидростатическое давление**.

Для горизонтальной трубки тока ( $h_1 = h_2$ ) выражение (30.6) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \quad (30.7)$$

где  $p + \frac{\rho v^2}{2}$  называется **полным давлением**.

Из уравнения Бернулли (30.7) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (29.1) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т.е. там, где скорость меньше. Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд **манометров** (рис. 50). В соответствии с уравнением Бернулли опыт показывает, что в манометрической трубке **В**, прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках **А** и **С**, прикрепленных к широкой части трубы.

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется **трубка Пито — Прандтля** (рис. 51). Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых

присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление ( $p_0$ ), с помощью другой — статическое ( $p$ ). Манометром измеряют разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 gh, \quad (30.8)$$

где  $\rho_0$  — плотность жидкости в манометре. С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Из формул (30.8) и (30.9) получаем искомую скорость потока жидкости:

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0 gh}{\rho}}$$

Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы **водоструйного насоса** (рис. 52). Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Это давление устанавливается и в откачанном сосуде, который связан с трубкой через разрыв, имеющийся в ее узкой части. Воздух увлекается вытекающей с большой скоростью водой из узкого конца. Таким образом можно откачивать воздух из сосуда до давления 100 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,32 Па).

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис. 53).

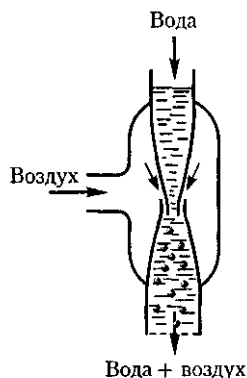


Рис. 52

Рассмотрим два сечения (на уровне  $h_1$  свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне  $h_2$  выхода ее из отверстия) и запишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2.$$

Так как давления  $p_1$  и  $p_2$  в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т.е.  $p_1 = p_2$ , то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Из уравнения неразрывности (29.1) следует, что  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если  $S_1 \gg S_2$ , то слагаемым  $\frac{v_1^2}{2}$  можно пренебречь. Тогда

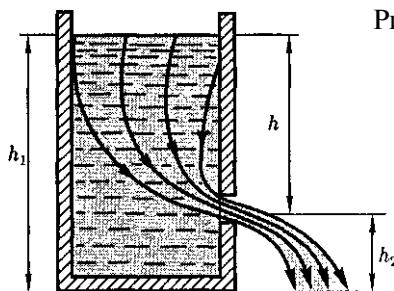


Рис. 53

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название **формулы Торричелли**<sup>1</sup>.

### §31. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Рассмотренная ранее (см. § 30) идеальная жидкость — воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, есть *физическая абстракция*. Всем реальным жидкостям и газам присуща *вязкость* {*внутреннее трение*).

**Вязкость {внутреннее трение}** — это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Сила внутреннего трения  $F$  тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя  $S$  (рис. 54), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\Delta x$  и движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . При этом

$v_1 - v_2 = \Delta \vec{v}$ . Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, *перпендикулярно* скорости течения слоев. Величина  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$  показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев, и называется *градиентом скорости*. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \quad (31.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $\eta$ , зависящий от природы жидкости, называется *динамической вязкостью* (или просто *вязкостью*).

**Единица вязкости — паскаль-секунда** (Па · с): 1 Па · с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м<sup>2</sup> поверхности касания слоев (1 Па · с = 1 Н · с/м<sup>2</sup>).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от тем-

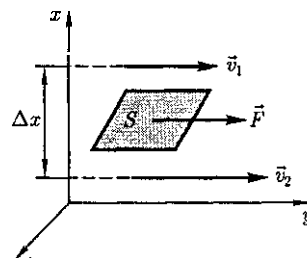


Рис. 54

<sup>1</sup> Э. Торричелли (1608—1647) — итальянский физик и математик.

пературы зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18 — 40 °С падает в четыре раза. Российский физик П.Л.Капица (1894 — 1984; Нобелевская премия 1978 г.) открыл, что при температуре 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется *ламинарным (слоистым)*, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и *турбулентным (вихревым)*, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Профиль усредненной скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 55) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более бы-

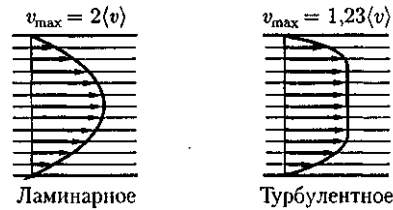


Рис. 55

стрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения. Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой *числом Рейнольдса*<sup>1</sup>:

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $\langle v \rangle$  — средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $d$  — характерный линейный размер, например диаметр трубы ( $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  — *кинематическая вязкость*).

При малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \leq 1000$ ) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области  $1000 \leq Re \leq 2000$ , а при  $Re = 2300$  (для гладких труб) течение турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

## § 32. Методы определения вязкости

**1. Метод Стокса**<sup>2</sup>. Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в

<sup>1</sup> О.Рейнольдс (1842—1912) — английский ученый.

<sup>2</sup> Дж. Стоке (1819 —1903) — английский физик и математик.

жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести  $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$  ( $\rho$  — плотность шарика), сила Архимеда  $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$  ( $\rho'$  — плотность жидкости) и сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом:  $F = 6\pi\eta r v$  ( $r$  — радиус шарика,  $v$  — его скорость). При равномерном движении шарика

$$P = F_A + F$$

$$\text{или } \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v,$$

откуда

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}.$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

2. Метод Пуазейля<sup>1</sup>. Пуазейль, изучая ламинарное течение жидкости в круглой трубе, нашел закон изменения скорости с расстоянием от оси трубы. В жидкости мысленно выделим цилиндрический объем радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 56). Сила внутреннего трения [см. (31.1)], действующая на боковую поверхность этого объема,

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr},$$

где  $dS$  — боковая поверхность цилиндрического слоя; знак « $\leftarrow$ » означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается.

Для установившегося течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность ци-

<sup>1</sup> Ж. Пуазейль (1799 — 1868) — французский физиолог и физик.

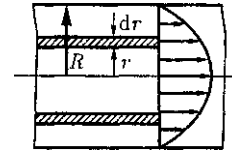


Рис. 56

линдра, уравнивается силой давления, действующей на его основание:

$$-\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2, \quad dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

После интегрирования, полагая, что у стенок имеет место прилипание жидкости, т. е. скорость на расстоянии  $R$  от оси равна нулю, получаем

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону, причем вершина параболы лежит на оси трубы (см. также рис. 55). За время  $t$  из трубы вытечет жидкость, объем которой

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R v t \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi t \Delta p}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \\ &= \frac{\pi t \Delta p}{2\eta l} \left[ \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4 t \Delta p}{8\eta l}, \end{aligned}$$

откуда вязкость

$$\eta = \frac{\pi R^4 t \Delta p}{8Vl}.$$

Эта формула называется **формулой Пуазейля**.

### § 33. Движение тел в жидкостях и газах

Одной из важнейших задач аэро- и гидродинамики является исследование движения твердых тел в газе и жидко-



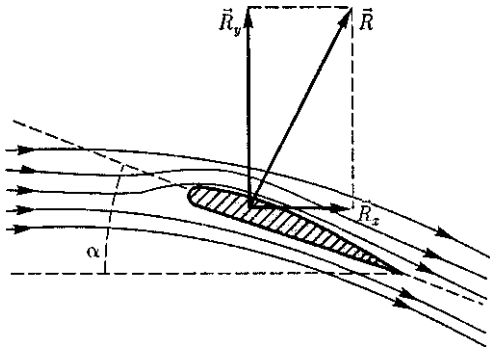


Рис. 57

сти, в частности изучение тех сил, с которыми среда действует на движущееся тело. Эта проблема приобрела особенно большое значение в связи с бурным развитием авиации и увеличением скорости движения морских судов.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (их равнодействующую обозначим  $R$ ), одна из которых ( $R_x$ ) направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), — **лобовое сопротивление**, а вторая ( $R_y$ ) перпендикулярна этому направлению — **подъемная сила** (рис. 57).

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю. Можно доказать, что в *идеальной жидкости* равномерное движение происходит без лобового сопротивления. Если рассмотреть движение цилиндра в такой жидкости (рис. 58), то картина линий тока

Рис. 58

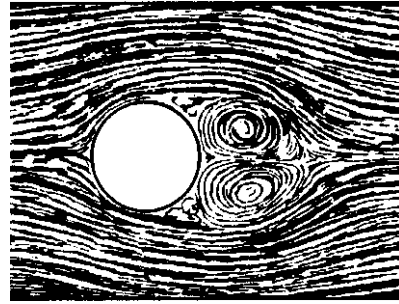
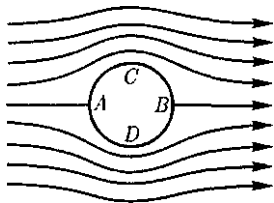


Рис. 59

симметрична как относительно прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , так и относительно прямой, проходящей через точки  $C$  и  $D$ , т. е. результирующая сила давления на поверхность цилиндра будет равна нулю.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания). Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы (нет плавно утончающейся хвостовой части), то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны (рис. 59).

Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным коэффициентом сопротивления  $C_x$ , определяемым экспериментально:

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (33.1)$$

где  $\rho$  — плотность среды;  $v$  — скорость движения тела;  $S$  — наибольшее поперечное сечение тела.

Составляющую  $R_x$  можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.

Подъемная сила может быть определена формулой, аналогичной (33.1):

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где  $C_y$  — безразмерный коэффициент подъемной силы.

Для крыла самолета требуется большая подъемная сила при малом лобовом сопротивлении [это условие выполняется при малых углах атаки  $\alpha$  (угол к потоку); см. рис. 57].

Крыло тем лучше удовлетворяет этому условию, чем больше величина

$K = \frac{C_y}{C_x}$ , называемая *качеством крыла*.

Большие заслуги в конструировании требуемого профиля крыла и изучении влияния геометрической формы тела на коэффициент подъемной силы принадлежат «отцу русской авиации» Н.Е.Жуковскому (1847-1921).

### Контрольные вопросы

Что такое давление в жидкости? Давление — величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?

Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.

Что называют линией тока? трубкой тока?

Что характерно для установившегося течения жидкости?

Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?

Выведите уравнение Бернулли.

Как в потоке жидкости измерить статическое давление? динамическое давление? полное давление?

Что такое градиент скорости?

Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости?

Какое течение жидкости называется ламинарным? турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?

Поясните (с выводом) практическое применение методов Стокса и Пуазейля.

Каковы причины возникновения лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости? Может ли оно быть равным нулю?

Как объяснить возникновение подъемной силы (см. рис. 57)?

### ЗАДАЧИ

6.1. Полый железный шар ( $\rho = 7,87 \text{ г/см}^3$ ) весит в воздухе 5 Н, а в воде ( $\rho' = 1 \text{ г/см}^3$ ) — 3 Н. Пренебрегая выталкивающей силой воздуха, определите объем внутренней полости шара. [139 см<sup>3</sup>]

6.2. Бак цилиндрической формы площадью основания  $S = 1 \text{ м}^2$  и объемом  $V = 3 \text{ м}^3$  заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определите время  $t$ , необходимое для опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью  $S_1 = 10 \text{ см}^2$ .

$$\left[ t = \frac{1}{S_1} \sqrt{\frac{2SV}{g}} = 13 \text{ мин} \right]$$

6.3. Сопло фонтана, дающего вертикальную струю высотой  $H = 5$  м, имеет форму усеченного конуса, сужающегося вверх. Диаметр нижнего сечения  $d_1 = 6$  см, верхнего —  $d_2 = 2$  см. Высота сопла  $l = 1$  м. Пренебрегая сопротивлением воздуха в струе и сопротивлением в сопле, определите: 1) расход воды в 1 с, подаваемой фонтаном; 2) разность  $\Delta p$  давления в нижнем сечении и атмосферного давления. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. [1)  $\sqrt{2gH} = 3,1 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/с; 2)  $\Delta p = \rho gh \left[ 1 - \frac{d_2^4}{d_1^4} \right] = 58,3$  кПа]

6.4. На горизонтальной поверхности стоит цилиндрический сосуд, в боковой поверхности которого имеется отверстие. Поперечное сечение отверстия значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии  $h_1 = 64$  см ниже уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии  $h_2 = 25$  см от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определите, на каком расстоянии по горизонтали от сосуда падает на поверхность струя, вытекающая из отверстия. [80 см]

6.5. В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность  $\rho = 1,2$  г/см<sup>3</sup>), падает с установившейся скоростью 5 см/с стеклянный шарик ( $\rho' = 2,7$  г/см<sup>3</sup>) диаметром 1 мм. Определите динамическую вязкость глицерина. [16 Па · с]

6.6. В боковую поверхность цилиндрического сосуда, установленного на столе, вставлен на высоте  $h_1 = 5$  см от его дна капилляр внутренним диаметром  $d = 2$  мм и длиной  $l = 1$  см. В сосуде поддерживается постоянный уровень машинного масла (плотность  $\rho = 0,9$  г/см<sup>3</sup> и динамическая вязкость  $\eta = 0,1$  Па · с) на высоте  $h_2 = 80$  см выше капилляра. Определите, на каком расстоянии по горизонтали от конца капилляра падает на поверхность стола струя масла, вытекающая из отверстия. [ $s = d^2 \rho h^2 \sqrt{\dots} = 8,9$  см]

6.7. Определите наибольшую скорость, которую может приобрести свободно падающий в воздухе ( $\rho = 1,29$  г/см<sup>3</sup>) стальной шарик ( $\rho' = 9$  г/см<sup>3</sup>) массой  $m = 20$  г. Коэффициент  $C_x$  принять равным 0,5. [94 см/с]

## Глава 7

### ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ (ЧАСТНОЙ) ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### § 34. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

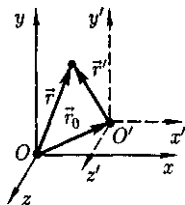
Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему  $K$  (с координатами  $x, y, z$ ), которую условно будем считать неподвижной, и систему  $K'$  (с координатами  $x', y', z'$ ), движущуюся относительно  $K$  равномерно и прямолинейно со скоростью  $u$  ( $\vec{u} = \text{const}$ ). Отсчет времени начнем с момента, ког-

да начала координат обеих систем совпадают. Пусть в произвольный момент времени  $t$  расположение этих систем относительно друг друга имеет вид, изображенный на рис. 60. Скорость  $u$  направлена вдоль  $OO'$ ; радиус-вектор, проведенный из  $O$  в  $O'$ ,  $\vec{r}_0 = \vec{u}t$ .

Найдем связь между координатами произвольной точки  $A$  в обеих системах. Из рис. 60 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t. \quad (34.1)$$

Рис. 60



Уравнение (34.1) можно записать в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned}x &= x' + u_x t, & y &= y' + u_y t, \\z &= z' + u_z t.\end{aligned}\quad (34.2)$$

Уравнения (34.1) и (34.2) носят название *преобразований координат Галилея*.

В частном случае, когда система  $K'$  движется со скоростью  $v$  вдоль положительного направления оси  $x$  системы  $K$  (в начальный момент времени оси координат совпадают), преобразования координат Галилея имеют вид

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z'.$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, т.е. к преобразованиям (34.2) можно добавить еще одно уравнение:

$$t = t'. \quad (34.3)$$

Записанные соотношения справедливы лишь в случае классической механики ( $u \ll c$ ), а при скоростях, сравнимых со скоростью света, преобразования Галилея заменяются более общими преобразованиями Лоренца<sup>1</sup> (см. § 36).

Продифференцировав выражение (34.1) по времени [с учетом (34.3)], получим уравнение

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad (34.4)$$

которое представляет собой *правило сложения скоростей в классической механике*.

<sup>1</sup> Х.Лоренц (1853—1928) — нидерландский физик-теоретик.

Ускорение в системе отсчета  $K$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'.$$

Таким образом, ускорение точки  $A$  в системах отсчета  $K$  и  $K'$ , движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаково:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (34.5)$$

Следовательно, если на точку  $A$  другие тела не действуют ( $a = 0$ ), то, согласно (34.5), и  $\vec{a}' = 0$ , т.е. система  $K'$  является инерциальной (точка движется относительно нее равномерно и прямолинейно или покоится).

Из уравнения (34.5) следует, что если выполняется равенство  $F = ma$ , то выполняется и равенство  $F' = ma'$  (масса имеет одинаковое числовое значение во всех системах отсчета). Поскольку системы  $K$  и  $K'$  были выбраны произвольно, то полученный результат означает, что *уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой формулируются одинаково*. Это утверждение и есть *механический принцип относительности (принцип относительности Галилея)*. Галилей первым обратил внимание на то, что никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Например, сидя в каюте корабля, движущегося равномерно и прямолинейно, мы не можем определить, покоится корабль или движется, не выглянув в окно.

## § 35. Постулаты специальной (частной) теории относительности

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями

( $v \ll c$ ). Однако в конце XIX в. выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным, в частности при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам классической механики. Далее возникли затруднения при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то, согласно классической механике, измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения.

Американский физик А. Майкельсон (1852-1913) в 1881 г., а затем в 1887 г. совместно с Е. Морли (американский физик, 1838—1923) пытался обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер) — *опыт Майкельсона — Морли*, применяя интерферометр, названный впоследствии интерферометром Майкельсона (см. § 175). Обнаружить эфирный ветер Майкельсону не удалось, как, впрочем, не удалось его обнаружить и в других многочисленных опытах. Опыты «упрямо» показывали, что скорости света в двух движущихся относительно друг друга системах равны. Это противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями (см. § 139) Дж. К. Максвелла (английский физик, 1831 — 1879), лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую теорию, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ( $v \ll c$ ).

Это и удалось сделать А. Эйнштейну, который пришел к выводу о том, что мирового эфира — особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы, — не существует. Наличие постоянной скорости распространения света в вакууме находилось в согласии с уравнениями Максвелла.

Таким образом, А. Эйнштейн заложил основы *специальной теории относительности*. Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно (см. § 13), а пространство однородно (см. § 9) и изотропно (см. § 19). Специальная теория относительности часто называется также *релятивистской теорией*, а специфические явления, описываемые этой теорией, — *релятивистскими эффектами*.

В основе специальной теории относительности лежат *постулаты Эйнштейна*, сформулированные им в 1905 г.

**I. Принцип относительности:** никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны*<sup>1</sup> по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

**II. Принцип инвариантности скорости света:** скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и *одинакова во всех инерциальных системах отсчета*.

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического прин-

<sup>1</sup> Инвариантные величины — величины, имеющие одно и то же числовое значение во всех системах отсчета.

ципа относительности (принципа относительности Галилея) на любые физические процессы, утверждает, таким образом, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, а уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т.е. явления (механические, электродинамические, оптические и др.) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, *постоянство скорости света — фундаментальное свойство природы*, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием постулатов Эйнштейна — обоснованием специальной теории относительности.

### § 36. Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных

им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

Для иллюстрации этого вывода рассмотрим две инерциальные системы отсчета:  $K$  (с координатами  $x, y, z$ ) и  $K'$  (с координатами  $x', y', z'$ ), движущуюся относительно  $K$  (вдоль оси  $x$ ) со скоростью  $v = \text{const}$  (рис. 61). Пусть в начальный момент времени  $t = t' = 0$ , когда начала координат  $O$  и  $O'$  совпадают, излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна  $c$ . Поэтому если за время  $t$  в системе  $K$  сигнал дойдет до некоторой точки  $A$  (см. рис. 61), пройдя расстояние

$$x = ct, \quad (36.1)$$

то в системе  $K'$  координата светового импульса в момент достижения точки  $A$

$$x' = ct', \quad (36.2)$$

где  $t'$  — время прохождения светового импульса от начала координат до точки  $A$  в системе  $K'$ . Вычитая (36.1) из (36.2), получим

$$x' - x = c(t' - t).$$

Так как  $x' \neq x$  (система  $K'$  перемещается по отношению к системе  $K$ ), то

$$t' \neq t,$$

т.е. отсчет времени в системах  $K$  и  $K'$  различен — *отсчет времени имеет относительный характер* (в классической

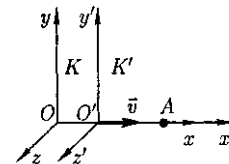


Рис. 61

физике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета течет одинаково, т.е.  $t = t'$ ).

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования Галилея, описывающие переход из одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$\begin{array}{l} K \rightarrow K' \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{array} \right. \end{array}$$

заменяются преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна (формулы представлены для случая, когда  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ ).

Эти преобразования предложены Лоренцем в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла (см. § 139) инвариантны.

*Преобразования Лоренца* имеют вид

$$\begin{array}{l} K \rightarrow K' \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right. \end{array} \quad (36.3)$$

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Из сравнения приведенных уравнений вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при  $v$ . Это очевидно, так как если скорость движения системы  $K'$  относительно системы  $K$  равна  $v$ , то скорость движения  $K$  относительно  $K'$  равна  $-v$ .

Из преобразований Лоренца вытекает также, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью  $c$ ), т.е. когда  $\beta \ll 1$ , они переходят в классические преобразования Галилея (в этом заключается суть *принципа соответствия*), которые являются, следовательно, предельным случаем преобразований Лоренца. При  $v > c$  выражения (36.3) для  $x, t, x', t'$  теряют физический смысл (становятся мнимыми). Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, большей скорости распространения света в вакууме, невозможно.

Из преобразований Лоренца следует очень важный вывод о том, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе.

Кроме того, как пространственные, так и временные преобразования [см. (36.3)] не являются независимыми, поскольку в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени — пространственные координаты, т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

## § 37. Следствия из преобразований Лоренца

### 1. Одновременность событий в разных системах отсчета. Пусть в систе-

ме  $K$  в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  происходят два события. В системе  $K'$  им соответствуют координаты  $x'_1$  и  $x'_2$  и моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ . Если события в системе  $K$  происходят в одной точке ( $x_1 = x_2$ ) и являются одновременными ( $t_1 = t_2$ ), то, согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе  $K$  пространственно разобщены ( $x_1 \neq x_2$ ), но одновременны ( $t_1 = t_2$ ), то в системе  $K'$ , согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} & x'_2 &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ t'_1 &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t'_2 &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ x'_1 &\neq x'_2, & t'_1 &\neq t'_2. \end{aligned}$$

Таким образом, в системе  $K'$  эти события, оставаясь пространственно разобщенными, оказываются неодновременными. Знак разности  $t'_2 - t'_1$  определяется знаком выражения  $v(x_1 - x_2)$ , поэтому в различных точках системы отсчета  $K'$  (при разных  $v$ ) разность  $t'_2 - t'_1$  будет различной по величине и может отличаться по знаку. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Сказанное, однако, не относится к причинно-следственным событиям, так как можно показать, что порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

**2. Длительность событий в разных системах отсчета.** Пусть в некоторой точке (с координатой  $x$ ), покоящейся относительно системы  $K$ , происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события)  $\tau = t_2 - t_1$ , где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе  $K'$

$$\tau' = t'_2 - t'_1, \quad (37.1)$$

причем началу и концу события, согласно (36.3), соответствуют

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (37.2)$$

Подставляя (37.2) в (37.1), получим

$$\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

или

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (37.3)$$

Из соотношения (37.3) вытекает, что  $\tau < \tau'$ , т.е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени  $m'$ , отсчитанный по часам в системе  $K'$ , с точки зрения наблюдателя в системе  $K$ , продолжительнее интервала  $\tau$ , отсчитанного по его часам. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов, т.е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся.

На основании относительности понятий «неподвижная» и «движущаяся»



системы соотношения для  $\tau$  и  $\tau'$  обратимы. Из (37.3) следует, что замедленные хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости распространения света в вакууме.

В связи с обнаружением релятивистского эффекта замедления хода часов в свое время возникла проблема «парадокса часов» (иногда рассматривается как «парадокс близнецов»), вызвавшая многочисленные дискуссии. Представим себе, что осуществляется космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, на которое свет от звезды до Земли доходит за 500 лет), со скоростью, близкой к скорости света ( $\sqrt{1 - \beta^2} = 0,001$ ). По земным часам полет до звезды и обратно продлится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, космонавт возвратится на Землю в  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  раз более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле.

Это явление, получившее название **парадокса близнецов**, в действительности парадокса не содержит. Дело в том, что принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а только инерциальных. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами, не эквивалентны: земная система инерциальна, а корабельная — неинерциальна, поэтому к ним принцип относительности неприменим.

Релятивистский эффект замедления хода часов является совершенно реальным и получил экспериментальное подтверждение при изучении нестабильных, самопроизвольно распадающихся элементарных частиц в опытах с  $\pi$ -мезонами. Среднее время жизни покоящихся  $\pi$ -мезонов (по часам, движущим-

ся вместе с ними)  $t \approx 2,2 \cdot 10^{-8}$  с. Следовательно,  $\pi$ -мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте  $\approx 30$  км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости  $c$ , должны были бы проходить расстояния  $ct \approx 6,6$  м, т.е. не могли бы достигать земной поверхности, что противоречит действительности. Объясняется это релятивистским эффектом замедления хода времени: для земного наблюдателя срок жизни  $\pi$ -мезона

$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , а путь этих частиц в атмосфере  $vt' = \beta c \tau' = \frac{\beta c \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ . Так как  $\beta \approx 1$ , то  $vt' \gg ct$ .

3. Длина тел в разных системах отсчета. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси  $x'$  и покоящийся относительно системы  $K'$ . Длина стержня в системе  $K'$  будет  $l'_0 = x'_2 - x'_1$ , где  $x'_1$  и  $x'_2$  — не изменяющиеся со временем  $t'$  координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета  $K'$  стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе  $K$ , относительно которой он движется со скоростью  $v$ . Для этого необходимо измерить координаты его концов  $x_1$  и  $x_2$  в системе  $K$  в один и тот же момент времени  $t$ . Их разность  $l = x_2 - x_1$  определит длину стержня в системе  $K$ . Используя преобразования Лоренца (36.3), получим

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т.е.

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (37.4)$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно ко-

торой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Если стержень покоится в системе  $K$ , то, определяя его длину в системе  $K'$ , опять-таки приходим к выражению (37.4).

Из выражения (37.4) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в  $\sqrt{1-\beta^2}$  раз, т.е. так называемое *лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения*. Из второго и третьего уравнений преобразований Лоренца (36.3) следует, что

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 \text{ и } z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1,$$

т.е. *поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*. Таким образом, *линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится*.

4. Релятивистский закон сложения скоростей. Рассмотрим движение материальной точки в системе  $K'$ , в свою очередь движущейся относительно системы  $K$  со скоростью  $v$ . Определим скорость этой же точки в системе  $K$ . Если в системе  $K$  движение точки в каждый момент времени  $t$  определяется координатами  $x, y, z$ , а в системе  $K'$  в момент времени  $t'$  — координатами  $x', y', z'$ , то

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{и}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

представляют собой соответственно проекции на оси  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем  $K$  и  $K'$ . Согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Произведя соответствующие преобразования, получаем **релятивистский закон сложения скоростей** специальной теории относительности:

$$\begin{array}{cc} K \rightarrow K' & K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \end{array} \right. \end{array} \quad (37.5)$$

Если материальная точка движется параллельно оси  $x$ , то скорость  $u$  относительно системы  $K$  совпадает с  $u_x$ , а скорость  $u'$  относительно  $K'$  — с  $u'_x$ . Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}, \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}. \quad (37.6)$$

Легко убедиться в том, что если скорости  $v, u'$  и  $u$  малы по сравнению со скоростью  $c$ , то формулы (37.5) и (37.6) переходят в закон сложения скоростей в классической механике [см. (34.4)]. Таким образом, законы релятивистской механики в предельном случае для малых скоростей (по сравнению со скоростью распространения света в вакууме) переходят в законы классической физики, которая, следовательно, является

частным случаем механики Эйнштейна для малых скоростей.

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна (см. § 35). Действительно, если  $u' = c$ , то формула (37.6) примет вид  $u = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = c$  (аналогич-

но можно показать, что при  $u = c$  скорость  $u'$  также равна  $c$ ). Этот результат свидетельствует о том, что релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна.

Докажем также, что если складываемые скорости сколь угодно близки к скорости  $c$ , то их результирующая скорость всегда меньше или равна  $c$ . В качестве примера рассмотрим предельный случай  $u' = v = c$ . После подстановки в формулу (37.6) получим  $u = c$ . Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света  $c$  в вакууме. *Скорость света в вакууме есть предельная скорость*, которую невозможно превысить. Скорость света в какой-либо среде, равная  $(n - абсолютный показатель преломления среды)$ , предельной величиной не является (подробнее см. § 189).

### § 38. Интервал между событиями

Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значение которых в различных системах отсчета разное. В то же время относительный характер длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т. е. являющейся *инва-*

*риантной* по отношению к преобразованиям координат.

В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами  $\{x, y, z, t\}$ , такой физической величиной является *интервал* между двумя событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (38.1)$$

где  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l_{12}$  — расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли. Введя обозначение  $t_{12} = t_2 - t_1$ , получим

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}.$$

Покажем, что интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Обозначив  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  и  $\Delta z = z_2 - z_1$ , выражение (38.1) можно записать в виде

$$s_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Интервал между теми же событиями в системе  $K'$  равен

$$(s'_{12})^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \quad (38.2)$$

Согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Подставив эти значения в (38.2), после элементарных преобразований получим, что  $(s'_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ , т. е.

$$(s'_{12})^2 = s_{12}^2.$$

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод, что интервал, определяя пространственно-временные соотношения между событиями, является *инвариантом* при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Теория относительности, таким образом, сформулировала новое представление о пространстве и времени. Пространственно-временные отношения являются не абсолютными величинами, как утверждалось в механике Галилея — Ньютона, а относительными. Следовательно, представления об абсолютном пространстве и времени являются несостоятельными. Кроме того, инвариантность интервала между двумя событиями свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи — «пространство — время». Пространство и время не существуют вне материи и независимо от нее.

Дальнейшее развитие теории относительности *{общая теория относительности, или теория тяготения}* показало, что свойства пространства-времени в данной области определяются действующими в ней полями тяготения. При переходе к космическим масштабам геометрия пространства-времени не является евклидовой (т.е. не зависящей от размеров области «пространство — время»), а изменяется от одной области к другой в зависимости от концентрации масс в этих областях и их движения.

### § 39. Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Из принципа относительности Эйнштейна (см. § 35), утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Основной закон динамики Ньютона  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная по времени от релятивистского импульса.

*Основной закон релятивистской динамики* материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right), \quad (39.1)$$

или

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (39.2)$$

где

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (39.3)$$

— *релятивистский импульс* материальной точки ( $m$  — масса материальной точки).

Отметим, что уравнение (39.2) внешне совпадает с основным уравнением ньютоновской механики (6.7). Однако физический смысл его другой: справа стоит производная по времени от релятивистского импульса, определяемого формулой (39.3). Таким образом, уравнение (39.1) инвариантно по

отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

Анализ формул (39.3) и (39.1) показывает, что при скоростях, значительно меньших скорости  $c$ , уравнение (39.1) переходит в основной закон [см. (6.5)] классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической (ньютоновской) механики является условие  $v \ll c$ . Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая  $v \ll c$  ( $\Phi^{\circ}P$ -мально переход осуществляется при  $c \rightarrow \infty$ ). Таким образом, *классическая механика — это механика макротел, движущихся с малыми скоростями* (по сравнению со скоростью света в вакууме).

#### § 40. Энергия в релятивистской механике

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы. Элементарная работа силы  $F$  на малом перемещении  $d\vec{r}$  равна  $dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt = \vec{v} d\vec{p}$  [учли основной закон релятивистской динамики (39.2)]. Тогда

$$dA = \frac{mv dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

(этот результат можно проверить дифференцированием).

Приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно элементарной ра-

боте на том же перемещении (см. § 12):  $dT = dA$ . Тогда

$$dT = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Интегрируя это выражение, получим

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + C.$$

Поскольку кинетическая энергия при  $v = 0$  должна обращаться в нуль, то постоянная интегрирования  $C = -mc^2$ . Следовательно, кинетическая энергия релятивистской частицы

$$T = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (40.1)$$

Выражение (40.1) при скоростях  $v \ll c$  переходит в классическое:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (40.2)$$

(разлагая в ряд  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$  при  $v \ll c$ , пренебречь слагаемыми второго порядка малости).

Полная энергия свободной частицы, т.е. частицы, на которую не действуют силы,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (40.3)$$

Отметим, что в полную энергию  $E$  не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле. Полная энергия частицы в разных системах отсчета различна.

В случае покоящейся частицы ( $v = 0$ ) из формулы (40.3) найдем, что

$$E_0 = mc^2. \quad (40.4)$$

Величина, определяемая выражением (40.4), называется *энергией покоя*. Значения  $m$  и  $E_0$  не зависят от выбора инерциальной системы отсчета. В энергию покоя, как и в полную энергию (40.3), не входит энергия тела во внешнем силовом поле. В классической механике энергия покоя  $E_0$  не учитывается, считая, что при  $v = 0$  энергия покоящегося тела равна нулю.

Как энергия  $E$ , так и импульс  $p$  релятивистской частицы имеют различные значения в разных системах отсчета. Но существует величина  $E^2 - p^2c^2 = \text{inv}$ , являющаяся *инвариантной* (имеющей одно и то же значение в разных системах отсчета):

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \\ &= \frac{m^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2v^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4 = E_0^2 \end{aligned} \quad (40.5)$$

[учли формулы (39.3), (40.3) и (40.4)].

Согласно формуле (40.5), получим  $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ , откуда связь между энергией и импульсом

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

или

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2. \quad (40.6)$$

Из выражений (40.3), (40.1) и (40.4) следует, что полная энергия системы

$$E = T + E_0 = T + mc^2, \quad (40.7)$$

т.е. складывается из ее кинетической энергии и энергии покоя. Подставив (40.7) в (40.6), получим

$$pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}, \quad (40.8)$$

откуда следует, что при  $T \ll mc^2$  выражение (40.8) переходит в ньютоновское ( $p = \sqrt{2mT}$ ), а при  $T \gg mc^2$  приобретает вид  $p = \frac{T}{c}$ .

Согласно формуле (40.4), масса тела и его энергия покоя связаны соотношением  $E_0 = mc^2$ . Это означает, что всякое изменение массы тела  $\Delta m$  сопровождается изменением энергии покоя  $\Delta E_0$ , и эти изменения пропорциональны друг другу, т.е.

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m. \quad (40.9)$$

Выражение (40.9) носит название закона *взаимосвязи массы и энергии покоя*.

Чтобы охарактеризовать прочность связи и устойчивость системы каких-либо частиц (например, атомного ядра как системы из протонов и нейтронов), вводят понятие энергии связи. *Энергия связи системы* равна работе, которую необходимо затратить, чтобы разложить эту систему на составные части (например, атомное ядро — на протоны и нейтроны). Энергия связи системы

$$E_{\text{св}} = \sum_{i=1}^n m_i c^2 - Mc^2, \quad (40.10)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы в свободном состоянии;  $M$  — масса системы.

Закон взаимосвязи массы и энергии покоя (иногда говорят просто энергии) подтвержден экспериментами о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

Выводы специальной теории относительности, как, впрочем, и любые крупные открытия, потребовали пересмотра многих установившихся и ставших привычными представлений. Так, длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер, масса и энергия покоя оказались связанными друг с другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.

Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи «пространство — время». Только поэтому пространственно-временной интервал между двумя событиями является абсолютным,

в то время как пространственные и временные промежутки между этими событиями относительны. Следовательно, вытекающие из преобразований Лоренца следствия являются выражением объективно существующих пространственно-временных соотношений движущейся материи.

### Контрольные вопросы

- В чем физическая сущность механического принципа относительности?  
 В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?  
 Каковы причины возникновения специальной теории относительности?  
 В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?  
 Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? скорость света?  
 Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?  
 Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?  
 Одновременны ли события в системе  $K'$ , если в системе  $K$  они происходят в одной точке и одновременны? в системе  $K$  события разобщены, но одновременны? Обоснуйте ответ.  
 Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Обоснуйте ответ.  
 При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?  
 В чем состоит «парадокс близнецов» и как его разрешить?  
 В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?  
 Как определяется интервал между событиями? Докажите, что он является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.  
 Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?  
 В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?  
 Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу? Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.

### ЗАДАЧИ

7.1. Определите собственную длину стержня (длину, измеренную в системе, относительно которой стержень покоится), если в лабораторной системе (системе отсчета, связанной с измерительными приборами) его скорость  $v = 0,8 c$ , длина  $l = 1$  м и угол между ним и направлением движения  $\theta = 30^\circ$ . [ $l_0 = l \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = 1,53$  м ]

7.2. Собственное время жизни частицы отличается на 1,5 % от времени жизни по неподвижным часам. Определите  $\beta = \frac{v}{c}$ . [0,172]

7.3. Тело массой 2 кг движется со скоростью 200 Мм/с в системе  $K'$ , движущейся относительно системы  $K$  со скоростью 200 Мм/с. Определите: 1) скорость тела относительно системы  $K$ ; 2) массу в этой системе. [1) 277 Мм/с; 2) 5,2 кг]

7.4. Воспользовавшись тем, что интервал — инвариантная величина по отношению к преобразованиям координат, определите расстояние, которое пролетел  $\pi$ -мезон с момента рождения до распада, если время его жизни в этой системе отсчета  $\Delta t = 5$  мкс, а собственное время жизни (время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом)  $\Delta t_0 = 2,2$  мкс. [1,35 км]

7.5. Определите скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в пять раз. [0,98 с]

7.6. Определите скорость, полученную электроном, если он прошел ускоряющую разность потенциалов 1,2 МэВ. [2,86 Мм/с]

7.7. Определите релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого 1 ГэВ. [ $5,34 \cdot 10^{-19}$  Н · с]



# ЧАСТЬ 2

## ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

### Глава 8

#### МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

##### § 41. Статистический и термодинамический методы. Опытные законы идеального газа

**Статистический и термодинамический методы исследования.** Молекулярная физика и термодинамика — разделы физики, в которых изучаются *макроскопические процессы* в телах, связанные с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул. Для исследования этих процессов применяют два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: *статистический (молекулярно-кинетический)* и *термодинамический*. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй — термодинамики.

**Молекулярная физика** — раздел физики, в котором изучаются строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Идея об атомном строении вещества высказана древнегреческим философом Демокритом (460 — 370 до п. э.). Атомистика возрождается вновь лишь в XVII в. и развивается в работах М.В.Ломоносова, взгляды которого на строение ве-

щества и тепловые явления были близки к современным. Строгое развитие молекулярной теории относится к середине XIX в. и связано с работами немецкого физика Р.Клаузиуса (1822 — 1888), Дж. Максвелла и Л.Больцмана.

Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Законы поведения огромного числа молекул, являясь статистическими закономерностями, изучаются с помощью *статистического метода*.

Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы в конечном счете определяются свойствами частиц системы, особенностями их движения и *усредненными* значениями динамических характеристик этих частиц (скорости, энергии и т.д.) Например, температура тела определяется скоростью хаотического движения его молекул, но так как в любой момент времени разные молекулы имеют различные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы. Таким образом, макроскопические характеристики тел имеют физический смысл лишь в случае большого числа молекул.

**Термодинамика** — раздел физики, в котором изучаются общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Термодинамика не рассматривает микропроцессы, которые лежат в основе этих превращений. Этим **термодинамический метод** отличается от статистического. Термодинамика базируется на двух началах — фундаментальных законах, установленных в результате обобщения опыта.

Область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории, ибо нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться термодинамическим методом. Однако с другой стороны, термодинамический метод несколько ограничен: термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими свойствами вещества. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, но отличаясь различными методами исследования.

Термодинамика имеет дело с **термодинамической системой** — совокупностью макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами (внешней средой). Основа термодинамического метода — *определение состояния термодинамической системы*. Состояние системы задается **термодинамическими параметрами (параметрами состояния)** — совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и удельный объем.

Температура — одно из основных понятий, играющих важную роль не только в термодинамике, но и в физике в целом. **Температура** — физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы.

В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960) в настоящее время можно применять только две температурные шкалы — **термодинамическую** и **Международную практическую**, градуированные соответственно в Кельвинах (К) и в градусах Цельсия (°С). В **Международной практической шкале** температура замерзания и кипения воды при давлении  $1,013 \cdot 10^5$  Па соответственно 0 и 100 °С (**реперные точки**).

**Термодинамическая температурная шкала** определяется по одной реперной точке, в качестве которой взята **тройная точка воды** (температура, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии). Температура этой точки по термодинамической шкале равна 273,16 К (точно). Градус Цельсия равен кельвину. В термодинамической шкале температура замерзания воды равна 273,15 К (*при том же давлении, что и в Международной практической шкале*), поэтому, по определению, термодинамическая температура и температура по Международной практической шкале связаны соотношением

$$T = 273,15 + t$$

Температура  $T = 0$  К называется **нулем кельвин**. Анализ различных процессов показывает, что 0 К недостижим, хотя приближение к нему сколь угодно близко возможно.

**Удельный объем**  $v$  — это объем единицы массы. Когда тело однородно, т. е.

его плотность  $\rho = \text{const}$ , то  $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ .

Так как при постоянной массе удельный объем пропорционален общему объему, то макроскопические свойства однородного тела можно характеризовать объемом тела.

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров, называется **термодинамическим процессом**. Макроскопическая система находится в **термодинамическом равновесии**, если ее состояние с течением времени не меняется (предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы при этом не изменяются).

В молекулярно-кинетической теории пользуются *идеализированной моделью идеального газа*, согласно которой считают, что:

- 1) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Наиболее близко свойствам идеального газа соответствуют достаточно разреженные газы. Модель идеального газа можно использовать также при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным (например, водород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

Рассмотрим законы, описывающие поведение идеальных газов.

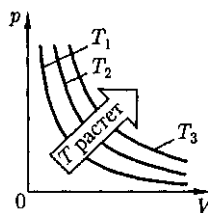


Рис. 62

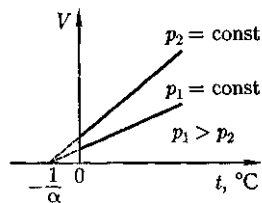


Рис. 63

**Закон Бойля — Мариотта<sup>1</sup>**: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const} \quad (41.1)$$

при  $T = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ .

График зависимости между параметрами состояния газа при постоянной температуре называется *изотермой*. Изотермы в координатах  $p$ ,  $V$  представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс (рис. 62).

**Законы Гей-Люссака<sup>2</sup>**: 1) объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad (41.2)$$

при  $p = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ .

2) давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad (41.3)$$

при  $V = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ .

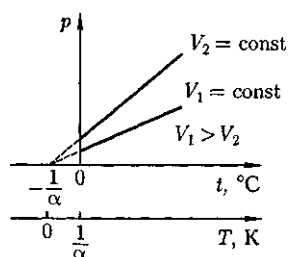
В этих уравнениях  $t$  — температура по шкале Цельсия,  $p_0$  и  $V_0$  — давление и объем при  $0^\circ\text{C}$ , коэффициент  $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$ .

*Процесс*, протекающий при постоянном давлении, называется *изобар-*

<sup>1</sup> Р. Бойль (1627 — 1691) — английский ученый; Э. Мариотт (1620 — 1684) — французский физик.

<sup>2</sup> Ж. Гей-Люссак (1778 — 1850) — французский ученый.

Рис. 64



**ном.** На диаграмме в координатах  $V, t$  (рис. 63) этот процесс изображается прямой, называемой **изобарой**. Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется **изохорным**. На диаграмме в координатах  $p, t$  (рис. 64) он изображается прямой, называемой **изохорой**.

Из (41.2) и (41.3) следует, что изобары и изохоры пересекают ось температур в точке  $t = -273,15^\circ\text{C}$ ,

а

определяемой из условия  $1 + \alpha t = 0$ . Если перенести начало отсчета в эту точку, то происходит переход к шкале Кельвина (см. рис. 64), откуда

$$T = t + \frac{1}{\alpha}.$$

Вводя в формулы (41.2) и (41.3) термодинамическую температуру, законам Гей-Люссака можно придать более удобный вид:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = V_0 \alpha T,$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) = p_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = p_0 \alpha T,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (41.4)$$

при  $p = \text{const}, m = \text{const}$ ,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (41.5)$$

при  $V = \text{const}, m = \text{const}$ ,

где индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изобаре или изохоре.

**Закон:** 1 моль любого газа при одинаковых температуре и давлении занимает одинаковый объем. При нормальных условиях этот объем равен  $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

По определению, 1 моль различных веществ содержит одно и то же число молекул, называемое **постоянной Авогадро**:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

**Закон Дальтона**<sup>2</sup>: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $p_1, p_2, \dots, p_n$  входящих в нее газов:

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

**Парциальное давление** — давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

## § 42. Уравнение Клапейрона—Менделеева

Как уже указывалось, состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением  $p$ , объемом  $V$  и температурой  $T$ . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая **уравнением состояния**, которое в общем виде задается выражением

$$f(p, V, T) = 0,$$

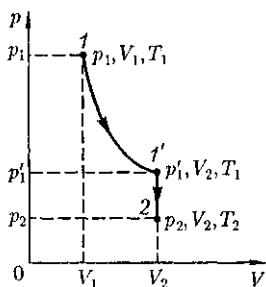
где каждая из переменных является функцией двух других.

Французский физик и инженер Б. Клапейрон (1799 — 1864) вывел уравнение состояния идеального газа, объе-

<sup>1</sup> А. Авогадро (1776—1856) — итальянский физик и химик.

<sup>2</sup> Дж. Дальтон (1766—1844) — английский химик и физик.

Рис. 65



динив законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Пусть некоторая масса газа занимает объем  $V_1$ , имеет давление  $p_1$  и находится при температуре  $T_1$ . Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами  $p_2, V_2, T_2$  (рис. 65).

Переход из состояния 1 в состояние 2 осуществляется в виде двух процессов: 1) изотермического (изотерма 1—1'), 2) изохорного (изохора 1'—2).

В соответствии с законами Бойля — Мариотта (41.1) и Гей-Люссака (41.5) запишем:

$$p_1 V_1 = p_1' V_2, \quad (42.1)$$

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (42.2)$$

Исключив из уравнений (42.1) и (42.2)  $p_1'$ , получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Так как состояния 1 и 2 были выбраны произвольно, то для данной массы газа величина  $\frac{pV}{T}$  остается постоянной, т.е.

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const.} \quad (42.3)$$

Выражение (42.3) является **уравнением Клапейрона**, в котором  $B$  — газовая постоянная, различная для разных газов.

Русский ученый Д.И. Менделеев (1834—1907) объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение (42.3) к 1 моль газа, используя молярный объем  $V_m$ . Согласно закону Авогадро, при одинаковых  $p$  и  $T$  молярные объемы  $V_m$  различных газов одинаковы, поэтому постоянная  $B$  будет одинаковой для всех газов. Эта общая для всех газов постоянная обозначается  $R$  и называется **молярной газовой постоянной**. Уравнению

$$p V_m = RT \quad (42.4)$$

удовлетворяет лишь идеальный газ, и оно является **уравнением состояния идеального газа**, называемым также **уравнением Клапейрона—Менделеева**.

Числовое значение молярной газовой постоянной определим из формулы (42.4), полагая, что 1 моль газа находится при нормальных условиях ( $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Па,  $T_0 = 273,15$  К,  $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль):

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

От уравнения (42.4) для 1 моль газа можно перейти к уравнению Клапейрона—Менделеева для **произвольной массы газа**. Если при некоторых заданных давлении и температуре 1 моль газа занимает молярный объем  $V_m$ , то при тех же условиях масса  $m$  газа займет объем  $V = \frac{m}{M} V_m$ , где  $M$  — **молярная масса** (масса 1 моль вещества). Единица молярной массы — килограмм на моль (кг/моль). Уравнение Клапейрона — Менделеева для массы  $m$  газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (42.5)$$

где  $\nu = \frac{m}{M}$  — количество вещества.

Часто пользуются несколько иной формой записи уравнения состояния идеального газа, вводя **постоянную Больцмана**:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Исходя из этого уравнение состояния (42.4) запишем в виде

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_A T}{V_m} = nkT,$$

где  $\frac{N_A}{V_m} = n$  — концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Таким образом, из уравнения

$$p = nkT \quad (42.6)$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа). При одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул, содержащихся в  $1 \text{ м}^3$  газа при *нормальных условиях*, называется *числом Лошмидта*<sup>1</sup>:

$$N_L = \frac{p_0}{kT_0} = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

### § 43. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим одноатомный идеальный газ. Молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку  $\Delta S$  (рис. 66) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку. При каждом соударении молекула, дви-

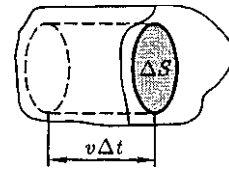


Рис. 66

жущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс  $m_0v - (-m_0v) = 2m_0v$ , где  $m_0$  — масса молекулы,  $v$  — ее скорость. За время  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $v\Delta t$  (см. рис. 66). Число этих молекул равно  $n\Delta S v\Delta t$  ( $n$  — концентрация молекул).

Необходимо, однако, учитывать, что реально молекулы движутся к площадке  $\Delta S$  под разными углами, имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется  $1/3$  молекул, причем из них половина ( $1/6$ ) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина — в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку  $\Delta S$  будет  $\frac{1}{6}n\Delta S v\Delta t$ . При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0v \frac{1}{6}n\Delta S v\Delta t = \frac{1}{3}nm_0v^2\Delta S\Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда,

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3}nm_0v^2. \quad (43.1)$$

Если газ в объеме  $V$  содержит  $N$  молекул, движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , то целесообразно рассматривать *среднюю квадратичную скорость*

<sup>1</sup> И. Лошмидт (1821 — 1895) — австрийский химик и физик.

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}, \quad (43.2)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа. Уравнение (43.1) с учетом (43.2) примет вид

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2. \quad (43.3)$$

Выражение (43.3) называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов*. Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям дает ту же формулу.

Учитывая, что  $n = \frac{N}{V}$ , получим

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \quad (43.4)$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \quad (43.5)$$

где  $E$  — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Так как масса газа  $m = N m_0$ , то уравнение (43.4) можно переписать в виде

$$pV = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Для 1 моль газа  $m = M$  ( $M$  — молярная масса), поэтому

$$pV_m = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где  $V_m$  — молярный объем.

С другой стороны, по уравнению Клапейрона — Менделеева,  $pV_m = RT$ . Таким образом,

$$RT = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

откуда

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (43.6)$$

Так как  $M = m_0 N_A$ , где  $m_0$  — масса одной молекулы, а  $N_A$  — постоянная Авогадро, то из уравнения (43.6) следует, что

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (43.7)$$

где  $k = \frac{R}{N_A}$  — постоянная Больцмана.

Отсюда найдем, что при комнатной температуре молекулы кислорода имеют среднюю квадратичную скорость 480 м/с, водорода — 1900 м/с. При температуре жидкого гелия те же скорости будут соответственно 40 и 160 м/с.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \epsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (43.8)$$

[использовали формулы (43.5) и (43.7)] пропорциональна термодинамической температуре и зависит только от нее. При предельно низких температурах (близких к 0 К) выражение (43.8) не справедливо, т. е. средняя кинетическая энергия молекул не пропорциональна температуре. Поэтому утверждение о том, что при 0 К прекращается движение молекул газа, некорректно. В настоящее время доказано, что даже при 0 К частицы вещества совершают так называемые *нулевые колебания*.

Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа, и формула (43.8) раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

#### § 44. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения

Молекулы газа совершают хаотическое движение. В результате многократных соударений скорость каждой моле-

кулы изменяется как по модулю, так и по направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул. По молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой  $m_0$  в газе, находящемся в *состоянии равновесия* при ( $T = \text{const}$ ), *остается* постоянной и равной  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$ .

Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом (1859).

При выводе закона распределения молекул по скоростям считалось, что газ состоит из очень большого числа  $N$  тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией  $f(v)$ , называемой **функцией распределения молекул по скоростям**. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные  $dv$ , то на каждый интервал скорос-

ти будет приходиться некоторое число молекул  $dN(v)$ , имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция  $f(v)$  определяет относительное число (долю) молекул  $\frac{dN(v)}{N}$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , т.е.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv,$$

откуда

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}.$$

Применяя методы теории вероятностей, Максвелл нашел функцию  $f(v)$  — **закон распределения молекул идеального газа по скоростям**:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (44.1)$$

Из (44.1) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры  $T$ ).

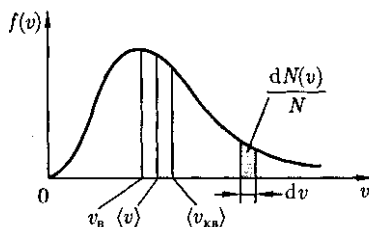
График функции (44.1) приведен на рис. 67. Так как при возрастании  $v$  множитель  $e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$  уменьшается быстрее, чем растет множитель  $v^2$ , то функция  $f(v)$ , начинаясь от нуля, достигает максимума при  $v_{\text{н}}$  и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно  $v_{\text{н}}$ .

Относительное число молекул  $\frac{dN(v)}{N}$

скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , находится как площадь тонированной полоски на рис. 67. Смысл этого интеграла в следующем: если просуммировать все доли молекул, имеющих всевозможные значения скоростей, то получим единицу. Функция  $f(v)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

Рис. 67





Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью**. Значение наиболее вероятной скорости можно найти, продифференцировав выражение (44.1) (постоянные множители опускаем) по аргументу  $v$ , приравняв результат нулю и используя условие для максимума выражения  $f(v)$ :

$$\frac{d}{dv} \left( v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) = 2v \left( 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0.$$

Значения  $v = 0$  и  $v = \infty$  соответствуют минимумам выражения (44.1), а значение  $v$ , при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость  $v_B$ :

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (44.2)$$

Из формулы (44.2) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рис. 68) сместится вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

**Средняя скорость молекулы ( $v$ ) (средняя арифметическая скорость)** определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Подставляя сюда  $f(v)$  и интегрируя, получим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (44.3)$$

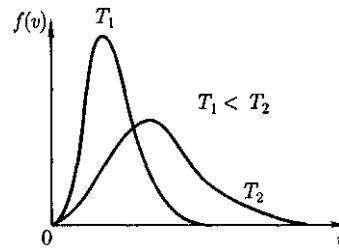


Рис. 68

Скорости, характеризующие состояние газа: 1) наиболее вероятная  $v_B = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ ; 2) средняя  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1,13v_B$ ; 3) средняя квадратичная  $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,22v_B$  (см. рис. 67). Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv, \quad (44.4)$$

можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии  $\epsilon$ . Для этого перейдем от переменной  $v$  к переменной  $\epsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$ . Подставив в (44.4)  $v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_0}}$  и  $dv = (2m_0\epsilon)^{-1/2} d\epsilon$ , получим

$$dN(\epsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{-1/2} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon = Nf(\epsilon)d\epsilon,$$

где  $dN(\epsilon)$  — число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ .

Таким образом, **функция распределения молекул по энергиям теплового движения**

$$f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\frac{\epsilon}{kT}}.$$

Средняя кинетическая энергия  $\langle \epsilon \rangle$  молекулы идеального газа

$$\langle \epsilon \rangle = \int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^3 e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon = \frac{3}{2} kT,$$

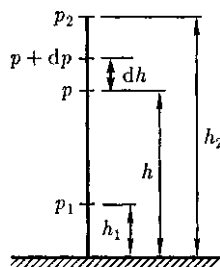
т. е. получили результат, совпадающий с формулой (43.8).

## § 45. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов и максвелловского распределения молекул по скоростям предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Тяготение, с одной стороны, и тепловое движение молекул — с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает.

Выведем закон изменения давления с высотой, предполагая, что поле тяготения однородно, температура постоянна и масса всех молекул одинакова. Если атмосферное давление на высоте  $h$  равно  $p$  (рис. 69), то на высоте  $h + dh$  оно равно  $p + dp$  (при  $dh > 0$   $dp < 0$ , так как давление с высотой убывает). Разность давлений  $p$  и  $p + dp$  равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра

Рис. 69



высотой  $dh$  с основанием площадью  $1 \text{ м}^2$ :

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

где  $\rho$  — плотность газа на высоте  $h$  ( $dh$  настолько мало, что при изменении высоты в этом пределе плотность газа можно считать постоянной).

Следовательно,

$$dp = -\rho g dh. \quad (45.1)$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа  $pV = \frac{m}{M} RT$  ( $m$  — масса газа,  $M$  — молярная масса газа), находим, что

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставив это выражение в (45.1), получим

$$dp = -\frac{Mg}{RT} p dh, \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

С изменением высоты от  $h_1$  до  $h_2$  давление изменяется от  $p_1$  до  $p_2$  (см. рис. 69), т. е.

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh, \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT} (h_2 - h_1)$$

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{Mg(h_2 - h_1)}{RT}}. \quad (45.2)$$

Выражение (45.2) называется **барометрической формулой**. Она позволяет найти атмосферное давление в зависимости от высоты или, измерив давление, найти высоту. Так как высоты обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным, то выражение (45.2) может быть записано в виде

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (45.3)$$

где  $p$  — давление на высоте  $h$ .

Прибор для определения высоты над земной поверхностью называется *высотомером* (или *альтиметром*). Его работа основана на использовании формулы (45.3). Из этой формулы следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ.

Барометрическую формулу (45.3) можно преобразовать, если воспользоваться выражением (42.6)  $p = nkT$ :

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{kT}},$$

где  $n$  — концентрация молекул на высоте  $h$ ,  $n_0$  — то же, на высоте  $h = 0$ .

Так как  $M = m_0 N_A$  ( $N_A$  — постоянная Авогадро,  $m_0$  — масса одной молекулы), а  $R = kN_A$ , то

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}, \quad (45.4)$$

где  $m_0 gh$  —  $\Pi$  — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения, т. е.

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}. \quad (45.5)$$

Выражение (45.5) называется *распределением Больцмана* для внешнего потенциального поля. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана (45.5) справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

#### § 46. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, совершая хаотическое движение, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя пос-

ледовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь  $l$ , который называется *длиной свободного пробега*. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с огромным числом хаотически движущихся молекул, то можно говорить о *средней длине свободного пробега молекул*  $\langle l \rangle$ .

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром молекулы*  $d$  (рис. 70). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости ( $v$ ), и если ( $z$ ) — среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{z}.$$

Для определения ( $z$ ) представим себе молекулу в виде шарика диаметром  $d$ , которая движется среди других «застывших» молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших  $d$ , т. е. лежат внутри «ломаного» цилиндра радиусом  $d$  (рис. 71).

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

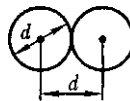


Рис. 70

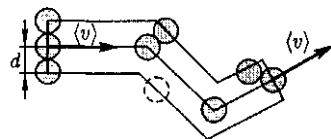


Рис. 71

$$\langle z \rangle = nV,$$

где  $n$  — концентрация молекул;  $V = = \pi d^2 \langle v \rangle$  ( $\langle v \rangle$  — средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с).

Таким образом, *среднее число столкновений*

$$\langle z \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle.$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n\pi d^2 \langle v \rangle.$$

Тогда средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n\pi d^2},$$

т.е.  $\langle l \rangle$  обратно пропорциональна концентрации  $n$  молекул. С другой стороны, из (42.6) следует, что при постоянной температуре  $n$  пропорциональна давлению  $p$ . Следовательно,

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

## § 47. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим некоторые явления, экспериментально подтверждающие основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории.

**1. Броуновские движение.** Это явление открыто (1827) Броуном<sup>1</sup>, который, наблюдая с помощью сильной лупы за взвесью цветочной пыльцы в воде, обнаружил, что частицы пыльцы оживленно и беспорядочно двигались, то вращаясь, то перемещаясь с места на

<sup>1</sup> Р. Броун (1773-- 1858) — шотландский ботаник.

место, подобно пылинкам в солнечном луче. Впоследствии оказалось, что подобное сложное зигзагообразное движение характерно для любых частиц малых размеров ( $\approx 1$  мкм), взвешенных в газе или жидкости. Интенсивность этого *движения*, названного *броуновским*, повышается с ростом температуры среды, с уменьшением вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы).

Причина броуновского движения долго оставалась неясной. Лишь через 80 лет после обнаружения этого эффекта ему было дано объяснение: броуновское движение взвешенных частиц вызывается ударами молекул среды, в которой частицы взвешены. Так как молекулы движутся хаотически, то броуновские частицы получают толчки с разных сторон, поэтому и совершают движение столь причудливой формы. Таким образом, броуновское движение является подтверждением выводов молекулярно-кинетической теории о хаотическом (тепловом) движении атомов и молекул.

**2. Опыт Штерна.** Первое экспериментальное определение скоростей молекул выполнено немецким физиком О. Штерном (1888-1970). Его опыты позволили также оценить распределение молекул по скоростям.

Схема установки Штерна представлена на рис. 72. Вдоль оси внутреннего цилиндра с щелью натянута платиновая проволока, покрытая слоем серебра, которая нагревается током при от-

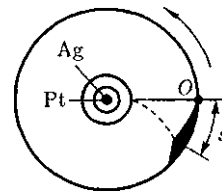


Рис. 72

качанном воздухе. При нагревании серебро испаряется. Атомы серебра вылетая через щель, попадают на внутреннюю поверхность второго цилиндра, давая изображение щели  $O$ . Если прибор привести во вращение вокруг общей оси цилиндров, то атомы серебра осядут не против щели, а сместятся от точки  $O$  на некоторое расстояние  $s$ . Изображение щели получается размытым. Исследуя толщину осажденного слоя, можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует максвелловскому распределению.

Зная радиусы цилиндров, их угловую скорость вращения, а также измеряя  $s$ , можно вычислить скорость движения атомов серебра при данной температуре проволоки. Результаты опыта показали, что средняя скорость атомов серебра близка к той, которая следует из максвелловского распределения молекул по скоростям.

**3. Опыт Ламмерг.** Этот опыт позволяет более точно определить закон распределения молекул по скоростям. Схема вакуумной установки приведена на рис. 73. Молекулярный пучок, сформированный источником, проходя через щель, попадает в приемник. Между источником и приемником помещают два диска с прорезями, закрепленных на общей оси.

При неподвижных дисках молекулы достигают приемника, проходя через прорези в обоих дисках. Если ось привести во вращение, то приемника достигнут только те прошедшие прорезь в первом диске молекулы, которые затрачивают для пробега между дисками время, равное или кратное времени оборота диска. Другие же молекулы задерживаются вторым диском. Меняя угловую скорость вращения дисков и измеряя число молекул, попадающих в при-

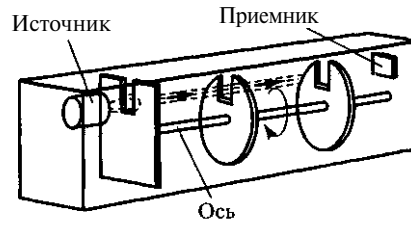


Рис. 73

емник, можно выявить закон распределения молекул по скоростям. Этот опыт также подтвердил справедливость максвелловского распределения молекул по скоростям.

**4. Опытное определение постоянной Авогадро.** Воспользовавшись идеей распределения молекул по высоте [см. формулу (45.4)], французский ученый Ж.Перрен (1870—1942) экспериментально определил значение постоянной Авогадро. Исследуя в микроскоп броуновское движение, он убедился, что броуновские частицы распределяются по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения. Применив к ним больцмановское распределение, можно записать

$$n = n_0 e^{-\frac{(m-m_1)gh}{kT}},$$

где  $m$  — масса частицы,  $m_1$  — масса вытесненной ею жидкости;  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ,  $m_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$  ( $r$  — радиус частицы,  $\rho$  — плотность частицы,  $\rho_1$  — плотность жидкости).

Если  $n_1$  и  $n_2$  — концентрации частиц на уровнях  $h_1$  и  $h_2$ ,  $k = \frac{R}{N_A}$ , то

$$N_A = \frac{3RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{4\pi r^3 (\rho - \rho_1) g (h_2 - h_1)}.$$

Значение  $N_A$ , получаемое из работ Ж. Перрена, соответствовало значениям, полученным в других опытах, что

подтверждает применимость к броуновским частицам распределения (45.4).

## § 48. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

В термодинамически неравновесных системах возникают особые *необратимые* процессы, называемые **явлениями переноса**, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся **теплопроводность** (обусловлена переносом энергии), **диффузия** (обусловлена переносом массы) и **внутреннее трение** (обусловлено переносом импульса). Для простоты ограничимся *одномерными* явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось  $x$  была ориентирована в направлении переноса.

**1. Теплопроводность.** Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т.е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется **закону Фурье**:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (48.1)$$

где  $j_E$  — **плотность теплового потока** — величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;  $\lambda$  — **теплопроводность**;  $\frac{dT}{dx}$  — градиент тем-

пературы, равный скорости изменения температуры на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак « $\rightarrow$ » показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки у  $j_E$  и  $\frac{dT}{dx}$  противоположны).

Теплопроводность  $\lambda$  численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице. Можно показать, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \quad (48.2)$$

где  $c_V$  — **удельная теплоемкость газа при постоянном объеме** (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме);  $\rho$  — плотность газа;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега.

**2. Диффузия.** Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности.

Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется довольно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется **закону Фика**:

$$j_m = -D \frac{dp}{dx}; \quad (48.3)$$

где  $j_m$  — **плотность потока массы** — величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;  $D$  — **диффузия (коэффициент диффузии)**;  $\frac{dp}{dx}$  — гра-

диент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак « $\leftarrow$ » показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки у  $j_m$  и  $\frac{dp}{dx}$  противоположны). Диффузия  $D$  численно равна плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (48.4)$$

### 3. Внутреннее трение (вязкость).

Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее — увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Согласно формуле (31.1), сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется **закону Ньютона**:

$$\frac{dv}{dx} S, \quad (48.5)$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость (вязкость);  $\frac{dv}{dx}$  — градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев;  $S$  — площадь, на которую действует сила  $F$ .

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (48.5) можно представить в виде

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (48.6)$$

где  $j_p$  — **плотность потока импульса** — величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;  $\frac{dv}{dx}$  — градиент

$\frac{dv}{dx}$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Из сопоставления формул (48.1), (48.3) и (48.6), описывающих явления переноса, следует, что закономерности переноса сходны между собой. Эти законы были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внут-

ренного трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов  $X$ ,  $D$  и  $\eta$ . Выражения для коэффициентов переноса выводятся на основе кинетической теории. Они записаны без вывода, так как строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное — не имеет смысла. Формулы (48.2), (48.4) и (48.7) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между  $X$ ,  $D$  и  $\eta$ :

$$\eta = \rho D, \quad \frac{\lambda}{\eta c_V} = 1.$$

$$\eta = \rho D$$

Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

#### § 49. Вакуум и методы его получения. Свойства ультраразреженных газов

Если из сосуда откачивать газ, то по мере понижения давления число столкновений молекул друг с другом уменьшается, что приводит к увеличению их длины свободного пробега. При достаточно большом разрежении столкновения между молекулами относительно редки, поэтому основную роль играют столкновения молекул со стенками сосуда. *Вакуумом* называется состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега ( $l$ ) сравнима или больше характерного линейного размера  $d$  сосуда, в котором газ находится. В зависимости от соотношения ( $l$ ) и  $d$  раз-

личают *низкий* ( $\langle l \rangle \ll d$ ), *средний* ( $\langle l \rangle \leq d$ ), *высокий* ( $\langle l \rangle > d$ ) и *сверхвысокий* ( $\langle l \rangle \gg d$ ) вакуум. Газ в состоянии высокого вакуума называется *ультраразреженным*.

Вопросы создания вакуума имеют большое значение в технике, так как, например, во многих современных электронных приборах используются электронные пучки, формирование которых возможно лишь в условиях вакуума. Для получения различных степеней разрежения применяются *вакуумные насосы*. В настоящее время используются вакуумные насосы, позволяющие получить предварительное разрежение (форвакуум)  $\approx 0,13$  Па, а также вакуумные насосы и лабораторные приспособления, позволяющие достичь давление до 13,3 мкПа — 1,33 нПа ( $10^{-7}$ – $10^{-11}$  мм рт. ст.).

Принцип работы форвакуумного насоса представлен на рис. 74. Внутри цилиндрической полости корпуса вращается эксцентрично насаженный цилиндр. Две лопасти  $I$  и  $I'$ , вставленные в разрез цилиндра и раздвигаемые пружиной 2, разделяют пространство между цилиндром и стенкой полости на две части. Газ из откачиваемого сосуда поступает в область 3, по мере поворачивания цилиндра лопасть  $I$  отходит, пространство 3 увеличивается и газ засасывается через трубку 4. При дальнейшем вращении лопасть  $I'$  отключает пространство 3 от трубки 4 и начинает вытеснять газ через клапан 5 наружу. Весь процесс непрерывно повторяется.

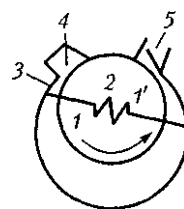


Рис. 74



Для получения высокого вакуума применяются *диффузионные насосы* (рабочее вещество — ртуть или масло), которые не способны откачивать газ из сосудов начиная с атмосферного давления, но способны создавать добавочную разность давлений, поэтому их используют вместе с форвакуумными насосами.

Рассмотрим схему действия диффузионного насоса (рис. 75). В колбе нагревается ртуть и ее пары, поднимаясь по трубке 1, вырываются из сопла 2 с большой скоростью, увлекая за собой молекулы газа из откачиваемого сосуда (в нем создан предварительный вакуум). Эти пары, попадая затем в «водяную рубашку», конденсируются и стекают обратно в резервуар, а захваченный газ выходит в пространство (через трубку 3), в котором уже создан форвакуум. Если применять многоступенчатые насосы (несколько сопл расположены последовательно), то реально при хороших уплотнениях можно с их помощью получить разрежение до  $10^{-7}$  мм рт. ст.

Для дальнейшего понижения давления применяются так называемые «ловушки». Между диффузионным насосом и откачиваемым объектом располагают специально изогнутое колено (1 или 2) соединительной трубки (ловушку), которую охлаждают жидким

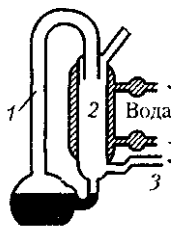


Рис. 75

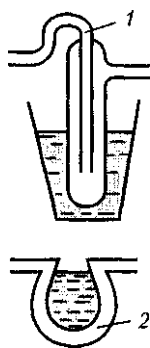


Рис. 76

азотом (рис. 76). При такой температуре пары ртути (масла) вымораживаются и давление в откачиваемом сосуде понижается приблизительно на 1—2 порядка. Описанные ловушки называются *охлаждаемыми*.

Можно применять также *неохлаждаемые ловушки*. Специальное рабочее вещество (например, алюмогель) помещают в один из отрезков соединительной трубки вблизи откачиваемого объекта, которое поддерживается при температуре  $300^\circ\text{C}$ . При достижении высокого вакуума алюмогель охлаждается до комнатной температуры, при которой он начинает поглощать имеющиеся в системе пары. Преимущество этих ловушек состоит в том, что с их помощью в откачиваемых объектах можно поддерживать высокий вакуум уже после непосредственной откачки в течение даже нескольких суток.

Остановимся на некоторых свойствах ультраразреженных газов. Так как в состоянии ультраразрежения молекулы практически друг с другом не сталкиваются, то газ в этом состоянии не обладает внутренним трением. Отсутствие соударений между молекулами разреженного газа отражается также на механизме теплопроводности. Если при обычных давлениях перенос энергии молекулами производится «эстафетой», то при ультраразрежении каждая молекула *сама* должна перенести энергию от одной стенки сосуда к другой. Явление уменьшения теплопроводности вакуума при понижении давления используется на практике для создания тепловой изоляции. Например, для уменьшения теплообмена между телом и окружающей средой тело помещают в *сосуд Дьюара*<sup>1</sup>, имеющий

<sup>1</sup> Д. Дьюар (1842 — 1923) — английский химик и физик.

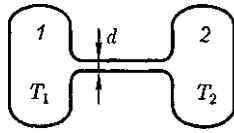


Рис. 77

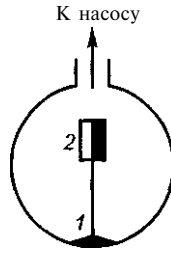


Рис. 78

двойные стенки, между которыми находится разреженный воздух (теплопроводность воздуха очень мала).

Рассмотрим два сосуда 1 и 2, поддерживаемых соответственно при температурах  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 77) и соединенных между собой трубкой. Если длина свободного пробега молекул гораздо меньше диаметра соединительной трубки ( $\langle l \rangle \ll d$ ), то стационарное состояние газа характеризуется равенством давлений в обоих сосудах ( $p_1 = p_2$ ). Стационарное же состояние ультраразреженного газа ( $\langle l \rangle \gg d$ ), находящегося в двух сосудах, соединенных трубкой, возможно лишь в том случае, когда встречные потоки частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой, одинаковы, т. е.

$$n_1 \langle v_1 \rangle = n_2 \langle v_2 \rangle, \quad (49.1)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — концентрации молекул в обоих сосудах,  $\langle v_1 \rangle$  и  $\langle v_2 \rangle$  — средние скорости молекул. Учитывая, что  $n = \frac{p}{kT}$  и  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ , из условия (49.1) получаем

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}, \quad (49.2)$$

т.е. в условиях высокого вакуума выравнивания давлений не происходит.

Если в откачанный стеклянный баллон (рис. 78) на пружину 1 насадить слюдяной листочек 2, одна сторона которого зачернена, и освещать его, то возникнет разность температур между светлой и зачерненной поверхностями листочка. Из выражения (49.2) следует, что в данном случае разным будет и давление, т.е. молекулы от зачерненной поверхности будут отталкиваться с большей силой, чем от светлой, в результате чего листочек отклонится. Это явление называется **радиометрическим эффектом**. На радиометрическом эффекте основано **действие радиометрического манометра**.

### Контрольные вопросы

Почему термодинамический и статистический (молекулярно-кинетический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?

Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры вам известны?

Как объяснить закон Бойля — Мариотта с точки зрения молекулярно-кинетической теории?

Какими законами описываются изобарные и изохорные процессы?

Каков физический смысл постоянной Авогадро? числа Лошмидта?

При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества 1 моль занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?

В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? термодинамической температуры?

В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?

Каков физический смысл распределения молекул по скоростям? по энергиям?

- Как, зная функцию распределения молекул по скоростям, перейти к функции распределения по энергиям?
- Как определяется наиболее вероятная скорость? средняя скорость?
- Во сколько раз и как изменится средняя скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?
- В чем суть распределения Больцмана?
- Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
- Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?
- В чем сущность явлений переноса? Каковы они и при каких условиях возникают?
- Объясните физическую сущность законов Фурье, Фика, Ньютона.
- Каков механизм теплопроводности ультраразреженных газов?

## ЗАДАЧИ

8.1. Начертите и объясните графики изотермического и изобарного процессов в координатах  $p$  и  $V$ ,  $p$  и  $T$ ,  $T$  и  $V$ .

8.2. В сосуде при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$  и давлении  $p = 0,2$  МПа содержится смесь газов — кислорода массой  $m_1 = 16$  г и азота массой  $m_2 = 21$  г. Определите плотность смеси. [2,5 кг/м<sup>3</sup>]

8.3. Определите наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м<sup>3</sup>. [478 м/с]

8.4. Используя закон о распределении молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям  $u$  ( $u = \frac{v}{v_{\text{ср}}}$ ). [ $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ ]

8.5. Воспользовавшись законом распределения идеального газа по относительным скоростям (см. задачу 8.4), определите, какая доля молекул кислорода, находящегося при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ , имеет скорости от 100 до 1000 м/с. [0,4]

8.6. На какой высоте плотность воздуха в два раза меньше, чем его плотность на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна 273 К. [55 км]

8.7. Определите среднюю продолжительность свободного пробега молекул водорода при температуре 300 К и давлении 5 кПа. Эффективный диаметр молекул принять равным 0,28 нм. [170 нс]

8.8. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения при некоторых условиях равны соответственно  $1,42 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с и  $8,5$  мкПа · с. Определите концентрацию молекул воздуха при этих условиях. [ $1,25 \cdot 10^{24}$  м<sup>-3</sup>]

## Глава 9

### ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

#### §50. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул

Важной характеристикой термодинамической системы является ее *внут-*

*ренняя энергия*  $U$  — энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т. д.) и энергия взаимодействия этих частиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия

движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия — *однозначная функция* термодинамического состояния системы, т.е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода.

В § 1 было введено понятие числа степеней свободы: это число независимых величин, полностью определяющих положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис. 79, а) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. При этом энергию вращательного движения можно не учитывать ( $r \rightarrow 0, J = mr^2 \rightarrow 0, T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2} \rightarrow 0$ ).

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис. 79, б). Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси (оси, проходящей через оба

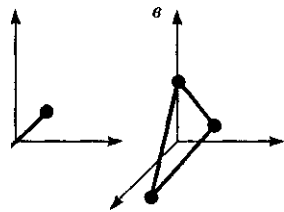


Рис. 79

атома) лишено смысла. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ( $i = 5$ ).

Трехатомная (рис. 79, в) и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Естественно, что жесткой связи между атомами не существует. Поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимуществ перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная  $1/3$  значения  $\langle \varepsilon_0 \rangle$  в (43.8):

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике выводится **закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул**: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная  $kT$ , а на каждую колебательную степень свободы — в среднем энергия, равная  $kT$ .

Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Таким образом, средняя энергия молекулы

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где  $i$  — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью между атомами; для них  $i$  совпадает с числом степеней свободы молекулы.

Следует отметить, что закон Больцмана является приближенным (получен на основе классических представлений о характере движения молекул) и пересмотрен в квантовой статистике.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия, отнесенная к 1 моль газа, будет равна сумме кинетических энергий  $N_A$  молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT. \quad (50.1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы  $m$  газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT,$$

где  $M$  — молярная масса;  $\nu = \frac{m}{M}$  — количество вещества.

## § 51. Первое начало термодинамики

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия постоянна, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энергия системы может изменяться в результате различных процессов, на-

пример совершения над системой работы или сообщения ей теплоты. Так, вдвигая поршень в цилиндр, в котором находится газ, мы сжимаем этот газ, в результате чего его температура повышается, т. е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа. С другой стороны, температуру газа и его внутреннюю энергию можно увеличить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты — энергии, переданной системе внешними телами путем теплообмена (процесс обмена внутренними энергиями при контакте тел с разными температурами).

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения, и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией  $U_1$ , получила некоторое количество теплоты  $Q$  и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией  $U_2$ , совершила работу  $A$  над внешней средой, т. е. против внешних сил. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа — положительной, когда система совершает ее против внешних сил. *В соответствии с законом сохранения энергии* при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет одинаковым и равным разности между количеством теп-

лоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A,$$

или

$$Q = \Delta U + A. \quad (51.1)$$

Уравнение (51.1) выражает **первое начало термодинамики**: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.

Выражение (51.1) для элементарного процесса можно записать в виде

$$dQ = dU + dA,$$

или в более корректной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (51.2)$$

где  $\delta Q$  — бесконечно малое количество теплоты;  $dU$  — бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;  $\delta A$  — элементарная работа. В этом выражении  $dU$  является полным дифференциалом, а  $\delta A$  и  $\delta Q$  таковыми не являются. В дальнейшем будем использовать запись первого начала термодинамики в форме (51.2).

Из формулы (51.1) следует, что в СИ количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т. е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики,

$$A = Q,$$

т. е. **вечный двигатель первого рода** — периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

## § 52. Работа газа при изменении его объема

Для рассмотрения конкретных процессов найдем в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим, например, газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 80). Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние  $dl$ , то производит над ним работу

$$\delta A = F dl = p S dl = p dV,$$

где  $S$  — площадь поршня;  $S dl$  —  $dV$  — изменение объема системы.

Таким образом,

$$\delta A = p dV. \quad (52.1)$$

Полную работу  $A$ , совершаемую газом при изменении его объема от  $V_1$  до  $V_2$ , найдем интегрированием формулы (52.1):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (52.2)$$

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное для работы выражение (52.2) справедливо при **любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел**.

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах  $p, V$ . Пусть изменение давления

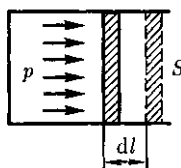


Рис. 80

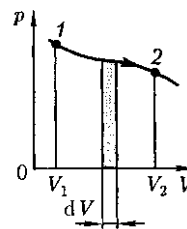


Рис. 81

газа при его расширении изображается кривой на рис. 81. При увеличении объема на  $dV$  совершаемая газом работа равна  $p dV$ , т.е. определяется площадью полоски с основанием  $dV$ , тонированной на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой  $p = f(V)$  и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ .

Графически можно изображать только **равновесные процессы** — процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний. Они протекают так, что изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало. *Все реальные процессы неравновесны* (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее протекает процесс, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

## § 53. Теплоемкость

**Удельная теплоемкость вещества** — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = m dT$$

Единицей удельной теплоемкости является **джоуль на килограмм-кельвин** [Дж/(кг · К)].

**Молярная теплоемкость** — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (53.1)$$

где  $\nu = \frac{m}{M}$  — количество вещества.

Единица молярной теплоемкости — **джоуль на моль-кельвин** [Дж/Дмоль · К]. Удельная теплоемкость  $c$  связана с молярной  $C_m$  соотношением

$$C_m = cM, \quad (53.2)$$

где  $M$  — молярная масса вещества.

Различают **теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении**, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

Запишем выражение первого начала термодинамики (51.2) для 1 моль газа с учетом формул (52.1) и (53.1):

$$C_m dT = dU_m + p dV_m. \quad (53.3)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю [см. (52.1)] и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}, \quad (53.4)$$

т.е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_V$  равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле (50.1),  $dU_m = -RdT$ , тогда

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (53.5)$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (53.3) можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dV_m}{dT}.$$

Учитывая, что  $\frac{dU_m}{dT}$  не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от  $p$ , ни от  $V$ , а определяется лишь температу-

рой  $T$  и всегда равна  $C_V$  [см. (53.4)], и дифференцируя уравнение Клапейрона—Менделеева  $pV_m = RT$  [см. (42.4)] по  $T$  ( $p = \text{const}$ ), получаем

$$C_p = C_V + R. \quad (53.6)$$

Выражение (53.6) называется **уравнением Майера**; оно показывает, что  $C_p$  всегда больше  $C_V$  на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа *при постоянном давлении* требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа. Используя (53.5), выражение (53.6) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (53.7)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение  $C_p$  к  $C_V$ :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (53.8)$$

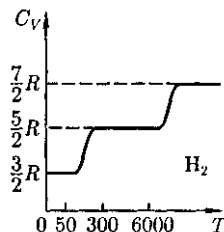
Из формул (53.5) и (53.7) следует, что молярные теплоемкости определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь *для одноатомных газов*. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от тем-

пературы. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы.

По закону равномерного распределения энергии по степеням свободы (см. § 50), для комнатных температур  $C_V = 7/2 R$ . Из качественной экспериментальной зависимости молярной теплоемкости  $C_V$  водорода (рис. 82) следует, что  $C_V$  зависит от температуры: при низкой температуре ( $\approx 50$  К)  $C_V = 3/2 R$ , при комнатной —  $C_V = 5/2 R$  (вместо расчетных  $7/2 R$ !) и при очень высокой —  $C_V = 7/2 R$ . Это можно объяснить, предположив, что при низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при комнатных — добавляется их вращение, а при высоких — к этим двум видам движения добавляются еще колебания молекул.

Расхождение теории и эксперимента нетрудно объяснить. Дело в том, что при вычислении теплоемкости надо учитывать квантование энергии вращения и колебаний молекул (возможны не любые вращательные и колебательные энергии, а лишь определенный дискретный ряд значений энергий). Если энергия теплового движения недостаточна, например, для возбуждения колебаний, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоемкость (соответствующая степень свободы «замораживается» — к ней неприменим закон равнораспределения энергии). Этим объясняется, что теплоемкость 1 моль двухатомного газа — водорода — при комнатной температуре равна  $5/2 R$  вместо  $7/2 R$ . Аналогично можно объяснить уменьшение теплоемкости при низкой температуре («замораживаются» вращательные степени свободы) и увеличение при высокой («возбуждаются» колебательные степени свободы).

Рис. 82





## § 54. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Среди равновесных процессов, происходящих с термодинамическими системами, выделяются *изопроцессы*, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

**Изохорный процесс** ( $V = \text{const}$ ). График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $V = \text{const}$  называется *изохорой*. Изохора в координатах  $p, V$  изображается прямой, параллельной оси ординат (рис. 83), где процесс 1—2 есть изохорное нагревание, а 3—4 — изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, т. е.

$$\delta A = p dV = 0.$$

Как уже указывалось в § 53, из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) для изохорного процесса следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\delta Q = dU.$$

Согласно формуле (53.4),

$$dU_m = C_V dT.$$

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (54.1)$$

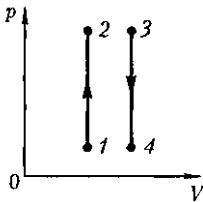


Рис. 83

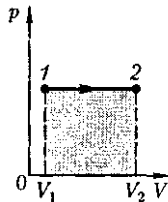


Рис. 84

**Изобарный процесс** ( $p = \text{const}$ ). График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $p = \text{const}$  называется *изобарой*. Изобара в координатах  $p, V$  изображается прямой, параллельной оси  $V$ . При изобарном процессе работа газа [см. (52.2)] при увеличении объема от  $V_1$  до  $V_2$  равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (54.2)$$

и определяется площадью тонированного прямоугольника (рис. 84). Если использовать уравнение Клапейрона — Менделеева (42.5) для выбранных нами двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M} \frac{R}{p} (T_2 - T_1).$$

Тогда выражение (54.2) для работы изобарного расширения примет вид

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (54.3)$$

Из этого выражения вытекает *физический смысл молярной газовой постоянной*  $R$ : если  $T_2 - T_1 = 1$  К, то для 1 моль газа  $R = A$ , т. е.  $R$  численно равна работе *изобарного расширения* 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой  $m$  количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину [согласно формуле (53.4)]

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT.$$

При этом газ совершит работу, определенную выражением (54.3).

**Изотермический процесс** ( $T = \text{const}$ ). Как уже указывалось в § 41, изотермический процесс описывается законом Бойля— Мариотта:

$$pV = \text{const}.$$

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $T = \text{const}$  называется **изотермой**. Изотерма в координатах  $p$ ,  $V$  представляет собой гиперболу (см. рис. 62), расположенную на диаграмме тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс.

Исходя из выражений (52.2) и (42.5), найдем работу изотермического расширения газа:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \end{aligned}$$

Так как при  $T = \text{const}$  внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0,$$

то из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) следует, что для изотермического процесса

$$\delta Q = \delta A,$$

т.е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (54.4)$$

Следовательно, для того чтобы при расширении газа температура не понижалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить

количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

## § 55. Адиабатный процесс. Полиτροпный процесс

**Адиабатным** называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой ( $\delta Q = 0$ ). К адиабатным процессам можно отнести все быстропротекающие процессы. Адиабатным процессом, например, можно считать процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны настолько велика, что обмен энергией между волной и средой произойти не успевает. Адиабатные процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т.д. Из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) для адиабатного процесса следует, что

$$\delta A = -dU, \quad (55.1)$$

т.е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Используя выражения (52.1) и (53.4), для произвольной массы газа перепишем уравнение (55.1) в виде

$$p dV = -\frac{m}{M} C_V dT. \quad (55.2)$$

Продифференцировав уравнение состояния для идеального газа  $pV = \frac{m}{M} RT$ , получим

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (55.3)$$

Исключим из (55.2) и (55.3) температуру  $T$ :

$$\frac{p dV + V dp}{p dV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V}.$$

Разделив переменные и учитывая, что  $\frac{C}{C_V} = \gamma$  [см. (53.8)], найдем

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от  $p_1, V_1$  до  $p_2, V_2$  и соответственно от  $V_1$  до  $V_2$ , а затем потенцируя, придем к выражению

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \quad \text{или} \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Так как состояния **1** и **2** выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (55.4)$$

Полученное выражение есть *уравнение адиабатного процесса*, называемое также *уравнением Пуассона*.

Для перехода к переменным  $T, V$  или  $p, T$  исключим из (55.4) с помощью уравнения Клапейрона — Менделеева  $pV = \frac{m}{M}RT$  соответственно давление или объем:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}, \quad (55.5)$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const.} \quad (55.6)$$

Выражения (55.4) — (55.6) представляют собой уравнения адиабатного процесса. В этих уравнениях безразмерная величина [см. (53.8) и (53.2)]

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i} \quad (55.7)$$

называется **показателем адиабаты (или коэффициентом Пуассона)**. Для одноатомных газов (Ne, He и др.), достаточно хорошо удовлетворяющих условию идеальности,  $i = 3$ ,  $\gamma = 1,67$ . Для двухатомных газов ( $H_2, N_2, O_2$  и др.)  $i = 5$ ,  $\gamma = 1,4$ . Значения  $\gamma$ , вычисленные по формуле (55.7), хорошо подтверждаются экспериментом.

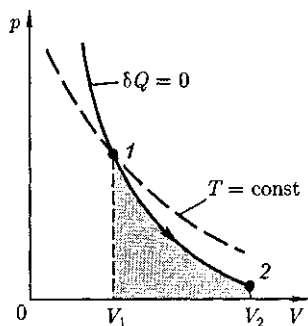


Рис. 85

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $\delta Q = 0$  называется *адиабатой*. Адиабата в координатах  $p, V$  изображается гиперболой (рис. 85). На рисунке видно, что адиабата ( $pV^\gamma = \text{const}$ ) более крута, чем изотерма ( $pV = \text{const}$ ). Это объясняется тем, что при адиабатном сжатии увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.

Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатном процессе. Запишем уравнение (55.1) в виде

$$\delta A = -\frac{m}{M} C_V dT.$$

Если газ адиабатно расширяется от объема  $V_1$  до  $V_2$ , то его температура уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$  и работа расширения идеального газа

$$A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (55.8)$$

Применяя те же приемы, что и при выводе формулы (55.5), выражение (55.8) для работы при адиабатном расширении можно преобразовать к виду

$$A = \frac{1}{\gamma-1} \left[ \frac{RT_1 m}{V_1} - \frac{RT_2 m}{V_2} \right] = \frac{m}{\gamma-1} \frac{RT_1 - RT_2}{M}$$

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении 1—2 (определяется тонированной площадью на рис. 85), меньше, чем при изотермическом расширении. Это объясняется тем, что при адиабатном расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатный процессы имеют общую особенность — они происходят при постоянной теплоемкости. В первых двух процессах теплоемкости соответственно равны  $C_V$  и  $C_p$ , в изотермическом процессе ( $dT=0$ ) теплоемкость равна  $\pm\infty$ , в адиабатном ( $\delta Q=0$ ) теплоемкость равна нулю. Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной, называется *политропным*.

Исходя из первого начала термодинамики при условии постоянства теплоемкости  $C = \text{const}$ , можно вывести уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const}, \quad (55.9)$$

где  $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$  — показатель политропы. График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $C = \text{const}$  называется *политропой*. Политропа в координатах  $p, V$  — гипербола, занимающая промежуточное положение между изотермой и адиабатой.

Очевидно, что при  $C = 0$ ,  $n = \gamma$  из (55.9) получается уравнение адиабаты; при  $C = \infty$ ,  $n = 1$  — уравнение изотермы; при  $C = C_p$ ,  $n = 0$  — уравнение изобары, при  $C = C_V$ ,  $n = \pm\infty$  — уравнение изохоры. Таким образом, все рассмотренные процессы являются частными случаями политропного процесса.

## §56. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл)

*Термодинамический процесс* называется *обратимым*, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, будет *необратимым*.

Любой обратимый процесс является *равновесным*. Обратимость равновесного процесса, происходящего в системе, следует из того, что ее любое промежуточное состояние есть состояние термодинамического равновесия; для него «безразлично», идет процесс в прямом или обратном направлении.

Реальные процессы сопровождаются диссипацией энергии (из-за трения, теплопроводности и т.д.), которая нами не обсуждается. *Обратимые процессы — это идеализация реальных процессов*. Их рассмотрение важно по двум причинам: 1) многие процессы в природе и технике близки к обратимым; 2) для обратимых процессов термический коэффициент полезного действия максимален, что позволяет указать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

*Круговым процессом (или циклом)* называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На диаграмме  $p-V$  равновесный круговой процесс изображается замкнутой кривой (рис. 86). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (1—2) и сжатия (2—1) газа.

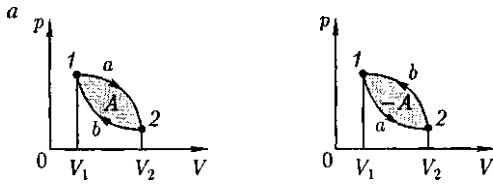


Рис. 86

Работа расширения (определяется площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ ) положительна ( $dV > 0$ ), работа сжатия (определяется площадью фигуры  $2b1V_1V_22$ ) отрицательна ( $dV < 0$ ). Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за *цикл* совершается положительная работа  $A = \oint p dV > 0$  (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется *прямым* (рис. 86, а), если за цикл совершается отрицательная работа  $A = \oint p dV < 0$  (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется *обратным* (рис. 86, б).

Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* — периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в *холодильных машинах* — периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики (51.1) для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A, \quad (56.1)$$

т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

где  $Q_1$  — количество теплоты, полученное системой;  $Q_2$  — количество теплоты, отданное системой.

Поэтому *термический коэффициент полезного действия для кругового процесса*

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (56.2)$$

## § 57. Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью

Понятие энтропии введено в 1865 г. Р. Клаузиусом. Для выяснения физического содержания этого понятия рассматривают отношение теплоты  $Q$ , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре  $T$  теплоотдающего тела, называемое *приведенным количеством теплоты*.

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно  $\frac{\delta Q}{T}$ . Строгий теоретический анализ показывает, что приведенное количество теплоты, сообщаемое телу *в любом обратимом круговом процессе*, равно

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (57.1)$$

Из равенства нулю интеграла (57.1), взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение — есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Таким образом,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (57.2)$$

Функция состояния, дифференциалом которой является  $\frac{\delta Q}{T}$ , называется **энтропией** и обозначается  $S$ .

Из формулы (57.1) следует, что для обратимых процессов изменение энтропии

$$\Delta S = 0. \quad (57.3)$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей **необратимый цикл**, возрастает:

$$\Delta S > 0. \quad (57.4)$$

Выражения (57.3) и (57.4) относятся только к **замкнутым системам**, если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (57.3) и (57.4) можно представить в виде **неравенства Клаузиуса**

$$\Delta S \geq 0, \quad (57.5)$$

т.е. **энтропия замкнутой системы может либо возрасть** (в случае необратимых процессов), **либо оставаться постоянной** (в случае обратимых процессов).

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то, согласно (57.2), изменение энтропии

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 &= \\ &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}, \end{aligned} \quad (57.6)$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования определяются через величины, характеризующие исследуемый процесс. Энтропия определяется с точностью до **аддитивной постоянной**. Значение постоянной, с которой

определяется энтропия, не играет роли, так как физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий.

Исходя из выражения (57.6), найдем изменение энтропии в процессах идеального газа. Поскольку  $dU = \frac{m}{M} C_V dT$ ,

$$\begin{aligned} \delta A = p dV = \frac{m}{M} R T \frac{dV}{V}, \text{ то} \\ \Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \\ = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \\ = \frac{m}{M} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right), \end{aligned} \quad (57.7)$$

т.е. изменение энтропии  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 **не зависит от вида процесса перехода**  $1 \rightarrow 2$ .

Так как для адиабатного процесса  $\delta Q = 0$ , то  $\Delta S = 0$  и, следовательно,  $S = \text{const}$ , т.е. **адиабатный обратимый процесс протекает при постоянной энтропии**. Поэтому его часто называют **изоэнтропийным процессом**. Из формулы (57.7) следует, что при изотермическом процессе ( $T_1 = T_2$ )

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1};$$

при изохорном процессе ( $V_1 = V_2$ )

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Энтропия обладает свойством **аддитивности**: **энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему**. Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

Более глубокий смысл энтропии вскрывают в статистической физике: энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы. **Термодинамическая вероятность**  $W$  состояния системы — это *число способов*, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние [по определению,  $W \geq 1$ , т.е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле (последняя  $\leq 1$ )].

Согласно Больцману (1872), *энтропия* системы и *термодинамическая вероятность* связаны между собой следующим образом:

$$S = k \ln W, \quad (57.8)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться как *мера вероятности* состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (57.8) позволяет дать энтропии следующее *статистическое* толкование: *энтропия является мерой неупорядоченности системы*. В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия — наиболее вероятного состояния системы — число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии — **принцип возрастания энтропии**. При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой систе-

ме идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, *от менее вероятных состояний к более вероятным* — до тех пор, пока вероятность состояния не станет максимальной.

Сопоставляя выражения (57.5) и (57.8), видим, что энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы могут либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

Отметим, однако, что эти утверждения имеют место для систем, состоящих из очень большого числа частиц, но могут нарушаться в системах с малым числом частиц. Для «малых» систем могут наблюдаться флуктуации, т.е. энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы на определенном отрезке времени могут убывать, а не возрастать, или оставаться постоянными.

## § 58. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить процессы, не противоречащие первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не происходят. Появление второго начала термодинамики связано с необходимостью дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет. Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов.

Используя понятие энтропии и равенство Клаузиуса (см. § 57), **второе начало термодинамики** можно сфор-

мулировать как **закон возрастания энтропии** замкнутой системы при необратимых процессах: *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.*

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.* Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрастать, оставаться постоянной). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Формула Больцмана (57.8) позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: *возрастание энтропии означает переход системы из менее вероятных более вероятных состояний.* Таким образом, формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Оно, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

**1) по Кельвину:** *невозможен круговой прогресс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;*

**2) по Клаузиусу:** *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теп-*

*лоты от менее нагретого тела к более нагретому.*

Можно довольно просто доказать (предоставим это читателю) эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса. Кроме того, показано, что если в замкнутой системе провести воображаемый процесс, противоречащий второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса, то он сопровождается уменьшением энтропии. Это же доказывает эквивалентность формулировки Клаузиуса (а следовательно, и Кельвина) и статистической формулировки, согласно которой энтропия замкнутой системы не может убывать.

В середине XIX в. возникла проблема так называемой **тепловой смерти Вселенной**. Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, Клаузиус свел сто содержание к утверждению, что энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что со временем все формы движения должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, т. е. наступит полное тепловое равновесие и все процессы во Вселенной прекратятся — наступит тепловая смерть Вселенной. Ошибочность вывода о тепловой смерти заключается в том, что бессмысленно применять второе начало термодинамики к незамкнутым системам, например к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, как Вселенная.

Первое и второе начала термодинамики дополняются **третьим началом термодинамики**, или **теоремой Нернста**<sup>1</sup> — **Планка:** *энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю кельвин:*

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

<sup>1</sup> В.Ф.Г.Нернст (1864-1941) - немецкий физик и химик.



Поскольку энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то эту постоянную удобно взять равной нулю. Отметим, однако, что это произвольное допущение, так как энтропия по своей *сущности* всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной. Из теоремы Нернста — Планка следует, что теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  при О К равны нулю.

## § 59. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД для идеального газа

Из формулировки второго начала термодинамики по Кельвину следует, что *вечный двигатель второго рода* — периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты, — невозможен. Для иллюстрации этого положения рассмотрим работу *теплового двигателя* (исторически второе начало термодинамики и возникло из анализа работы тепловых двигателей).

Принцип действия теплового двигателя приведен на рис. 87. От термостата<sup>1</sup> с более высокой температурой  $T_1$ , называемого *нагревателем*, за цикл отбирается количество теплоты  $Q_1$ , а термостату с более низкой температурой  $T_2$ , называемому *холодильником*, за цикл передается количество теплоты  $Q_2$ , при этом совершается работа  $A = Q_1 - Q_2$ .

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя (56.2) был равен 1, необходимо выполнение условия  $Q_2 = 0$ , т. е. тепловой двигатель должен был бы иметь один

<sup>1</sup> Термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры.

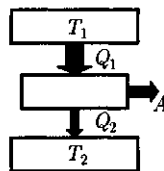


Рис. 87

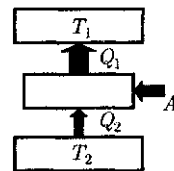


Рис. 88

источник теплоты. Однако, согласно Карно<sup>1</sup>, для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами, иначе это противоречило бы второму началу термодинамики.

Двигатель второго рода, будь он возможен, был бы практически вечным. Охлаждение, например, воды океанов на  $1^\circ$  дало бы огромную энергию. Масса воды в Мировом океане составляет примерно  $10^{18}$  т, при охлаждении которой на  $1^\circ$  выделилось бы примерно  $10^{24}$  Дж теплоты, что эквивалентно полному сжиганию  $10^{14}$  т угля. Железнодорожный состав, нагруженный таким количеством угля, растянулся бы на расстояние  $10^{10}$  км, что приблизительно совпадает с размерами Солнечной системы!

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в *холодильной машине*, принцип действия которой представлен на рис. 88. Системой за цикл от термостата с более низкой температурой  $T_2$  отбирается количество теплоты  $Q_2$  и отдается за цикл термостату с более высокой температурой  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$ . Для кругового процесса, согласно (56.1),  $Q = A$ , но, по условию,  $Q = Q_2 - Q_1 < 0$ , поэтому  $A < 0$  и  $Q_2 - Q_1 = -A$  или  $Q_1 = Q_2 + A$ , т. е. количество теплоты  $Q_1$ , отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре  $T_1$ , больше количества теплоты  $Q_2$ , полученного от источника теплоты при более низкой температуре  $T_2$ , на величину

<sup>1</sup> Н. Л. С. Карно (1796-1832) — французский физик и инженер.

ну работы, совершенной над системой. Следовательно, *без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому*. Это утверждение есть не что иное, как второе начало термодинамики в *формулировке Клаузиуса*.

Однако второе начало термодинамики не следует представлять так, что оно совсем запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Ведь именно такой переход осуществляется в холодильной машине. Но при этом надо помнить, что внешние силы совершают работу над системой, т. е. этот переход не является единственным результатом процесса.

Из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим КПД обладают обратимые машины; при этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами), а определяются только температурами нагревателя и холодильника. Это утверждение носит название *теоремы Карно*.

Из всевозможных круговых процессов важное значение в термодинамике имеет *цикл Карно* — цикл, состоящий из четырех последовательных обратимых процессов: изотермического расширения, адиабатного расширения, изотермического сжатия и адиабатного сжатия.

*Прямой цикл Карно* изображен на рис. 89, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми 1—2 и 3—4, а адиабатные расширение и сжатие — кривыми 2—3 и 4—1. При изотермическом процессе  $U = \text{const}$ ,

поэтому, согласно (54.4), количество теплоты  $Q_1$ , полученное газом от нагревателя, равно работе расширения  $A_{12}$ , совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (59.1)$$

При адиабатном расширении 2—3 теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения  $A_{23}$  совершается **за счет** изменения внутренней энергии [см. (55.1) и (55.8)]:

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

Количество теплоты  $Q_2$ , отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии, равно работе сжатия  $A_{34}$ :

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \quad (59.2)$$

Работа адиабатного сжатия

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

Работа, совершаемая в результате кругового процесса,

$$\begin{aligned} A &= A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = \\ &= Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2 \end{aligned}$$

и определяется площадью, тонированной на рис. 89.

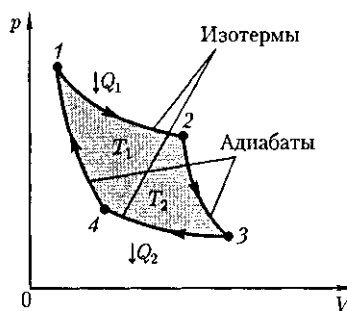


Рис. 89

Термический КПД цикла Карно, согласно (56.2),

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Применив уравнение (55.5) для адиабат 2—3 и 4—1, получим

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (59.3)$$

Подставляя (59.1) и (59.2) в формулу (56.2) и учитывая (59.3), получаем

$$\begin{aligned} \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} &= \frac{\frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \\ &= \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \end{aligned} \quad (59.4)$$

т. е. для цикла Карно КПД действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника (доказательство теоремы Карно). Для повышения КПД необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. Например, при  $T_1 = 400$  К и  $T_2 = 300$  К  $\eta = 0,25$ . Если же температуру нагревателя повысить на 100 К, а температуру холодильника понизить на 50 К, то  $\eta = 0,5$ . КПД всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше вычисленного для цикла Карно.

*Обратный цикл Карно* положен в основу действия **тепловых насосов**. В отличие от холодильных машин тепловые насосы должны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например системе отопления. Часть этой энергии отбирается от окружающей среды с более низкой температурой, а часть получается за счет механической работы, производимой, например, компрессором.

Теорема Карно послужила основанием для установления **термодинамической шкалы температур**. Сравнив левую и правую части формулы (59.4), получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (59.5)$$

т. е. для сравнения температур  $T_1$  и  $T_2$  двух тел необходимо осуществить цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое — как холодильник. Из равенства (59.5) видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определенного термометрического тела. Отметим, что практически таким образом сравнивать температуры трудно, так как реальные термодинамические процессы, как уже указывалось, являются необратимыми.

### Контрольные вопросы

В чем суть закона Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул?

Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?

Что такое внутренняя энергия идеального газа? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?

- Что такое теплоемкость газа? Какая из теплоемкостей —  $C_V$  или  $C_p$  — больше и почему?
- Как объяснить температурную зависимость молярной теплоемкости водорода?
- Чему равна работа изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании на 1 К?
- Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется при постоянном давлении?
- Температура газа в цилиндре постоянна. Запишите на основе первого начала термодинамики соотношение между сообщенным количеством теплоты и совершенной работой.
- Газ переходит из одного и того же начального состояния 1 в одно и то же конечное состояние 2 в результате следующих процессов: а) изотермического; б) изобарного; в) изохорного. Рассмотрев эти процессы графически, покажите: 1) в каком процессе работа расширения максимальна; 2) когда газу сообщается максимальное количество теплоты.
- Газ переходит из одного и того же начального состояния 1 в одно и то же конечное состояние 2 в результате следующих процессов: а) изобарного процесса; б) последовательных изохорного и изотермического процессов. Рассмотрите эти переходы графически. Одинаковы или различны в обоих случаях: 1) изменение внутренней энергии; 2) затраченное количество теплоты?
- Почему адиабата более крутая, чем изотерма?
- Как изменится температура газа при его адиабатном сжатии?
- Показатель политропы  $n > 1$ . Нагревается или охлаждается идеальный газ при сжатии?
- Проанализируйте прямой и обратный циклы.
- Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?
- Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
- В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы? незамкнутой системы?
- Дайте понятие энтропии (определение, размерность и математическое выражение энтропии для различных процессов).
- Изобразите в системе координат  $T, S$  изотермический и адиабатный процессы.
- Представив цикл Карно на диаграмме  $p, V$  графически, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
- Представьте графически цикл Карно в переменных  $T, S$ .

## ЗАДАЧИ

9.1. Азот массой 1 кг находится при температуре 280 К. Определите: 1) внутреннюю энергию молекул азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул азота. Газ считать идеальным. [1) 208 кДж; 2) 83,1 кДж]

9.2. Определите удельные теплоемкости  $c_V$  и  $c_p$  некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях  $1,43 \text{ кг/м}^3$ . [ $c_V = 650 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $c_p = 910 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ]

9.3. Водород массой  $m = 20 \text{ г}$  был нагрет на  $\Delta T = 100 \text{ К}$  при постоянном давлении. Определите: 1) количество теплоты  $Q$ , переданное газу; 2) приращение  $\Delta U$  внутренней энергии газа; 3) работу  $A$  расширения. [1) 29,3 кДж; 2) 20,9 кДж; 3) 8,4 кДж]

9.4. Кислород объемом 2 л находится под давлением 1 МПа. Определите, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. [5 кДж]

9.5. Некоторый газ массой 2 кг находится при температуре 300 К и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в три раза. Ра-

бота, затраченная па сжатие,  $A = -1,37$  кДж. Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа. [1) гелий; 2)  $1,25$  м<sup>3</sup>/кг].

9.6. Двухатомный идеальный газ занимает объем  $V_1 = 1$  л и находится под давлением  $p_1 = 0,1$  МПа. После адиабатного сжатия газ характеризуется объемом  $V_2$  и давлением  $p_2$ . В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление  $p_3 = 0,2$  МПа. Определите: 1) объем  $V_2$ ; 2) давление  $p_2$ . Представьте эти процессы графически. [1) 0,5 л; 2) 0,26 МПа]

9.7. Идеальный газ количеством вещества  $\nu = 2$  моль сначала изобарно нагрели так, что его объем увеличился в  $n = 2$  раза, а затем изохорно охладили так, что давление газа уменьшилось в  $n = 2$  раза. Определите приращение энтропии в ходе указанных процессов. [11,5 Дж/К]

9.8. Тепловая машина, совершая обратный цикл Карно, за один цикл совершает работу 1 кДж. Температура нагревателя 400 К, а холодильника 300 К. Определите: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за цикл; 3) количество теплоты, отдаваемое холодильнику за цикл. [1) 25 %; 2) 4 кДж; 3) 3 кДж]

9.9. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,3. Определите работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 300 Дж. [−210 Дж]

## Глава 10

### РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

#### § 60. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия

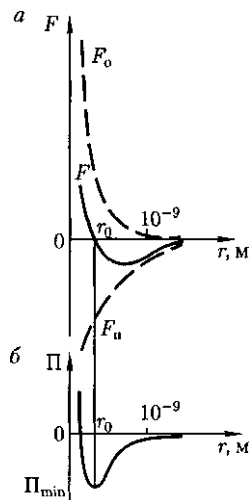
Модель идеального газа (см. § 41), используемая в молекулярно-кинетической теории газов, позволяет довольно хорошо описывать поведение разреженных реальных газов. При выводе уравнения состояния идеального газа размерами молекул и их взаимодействием друг с другом пренебрегают. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому необходимо учитывать объем молекул и взаимодействие между ними. Так, в 1 м<sup>3</sup> газа при нормальных условиях содержится  $2,68 \cdot 10^{25}$  молекул, занимающих объем примерно  $10^{-4}$  м<sup>3</sup> (радиус молекулы примерно  $10^{-10}$  м), которым по сравнению с объемом газа (1 м<sup>3</sup>) можно пренебречь. При давлении 500 МПа (1 атм = 101,3 кПа)

объем молекул составит уже половину всего объема газа. Таким образом, при высоких давлениях указанная модель идеального газа непригодна.

При рассмотрении *реальных газов* — газов, свойства которых зависят от взаимодействия молекул, надо учитывать *силы межмолекулярного взаимодействия*. Они проявляются на расстояниях  $\leq 10^{-9}$  м и быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами. Такие *силы* называются *короткодействующими*.

В XX в., по мере развития представлений о строении атома и квантовой механики, было выяснено, что между молекулами вещества одновременно действуют *силы притяжения и силы отталкивания*. На рис. 90, а приведена качественная зависимость сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния  $r$  между молекулами, где  $F_o$  и  $F_n$  — соответственно силы отталкива-

Рис. 90



ния и притяжения, а  $F$  — их результирующая.

Силы отталкивания считаются *положительными*, а силы взаимного притяжения — *отрицательными*.

На расстоянии  $r = r_0$  результирующая сила  $F = 0$ , т. е. силы притяжения и отталкивания уравниваются друг друга. Таким образом, расстояние  $r_0$  соответствует равновесному расстоянию между молекулами, на котором бы они находились в отсутствие теплового движения. При  $r < r_0$  преобладают силы отталкивания ( $F > 0$ ), при  $r > r_0$  — силы притяжения ( $F < 0$ ). На расстояниях  $r > 10^{-9}$  м межмолекулярные силы взаимодействия практически отсутствуют ( $F \rightarrow 0$ ).

Элементарная работа  $\delta A$  силы  $F$  при увеличении расстояния между молекулами на  $dr$  совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул, т. е.

$$\delta A = F dr = -d\Pi. \quad (60.1)$$

Из анализа качественной зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними (рис. 90, б) следует, что если мо-

лекулы находятся друг от друга на расстоянии, на котором межмолекулярные силы взаимодействия не действуют ( $r \rightarrow \infty$ ), то  $\Pi = 0$ . При постепенном сближении молекул между ними появляются силы притяжения ( $F < 0$ ), которые совершают положительную работу ( $\delta A = F dr > 0$ ). Тогда, согласно (60.1), потенциальная энергия взаимодействия уменьшается, достигая минимума при  $r = r_0$ .

При  $r < r_0$  с уменьшением  $r$  силы отталкивания ( $F > 0$ ) резко возрастают и совершаемая против них работа отрицательна ( $\delta A = F dr < 0$ ). Потенциальная энергия начинает также резко возрастать и становится положительной. Из данной потенциальной кривой следует, что система из двух взаимодействующих молекул в состоянии устойчивого равновесия ( $r = r_0$ ) обладает минимальной потенциальной энергией.

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение между величинами  $\Pi_{\min}$  и  $\kappa T$ .  $\Pi_{\min}$  — наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул — определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ( $r = r_0$ );  $\kappa T$  определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического (теплового) движения молекул.

Если  $\Pi_{\min} \ll \kappa T$ , то вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизившихся до расстояния  $r_0$ , т. е. вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала.

Если  $\Pi_{\min} \gg \kappa T$ , то вещество находится в твердом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг к другу, не могут удалиться на значительные расстояния

и колеблются около положений равновесия, определяемого расстоянием  $r_0$ .

Если  $P_{\min} \approx kT$ , то вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее  $r_0$ .

Таким образом, любое вещество в зависимости от температуры может находиться в газообразном, жидком или твердом агрегатном состоянии, причем температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от значения  $P_{\min}$  для данного вещества. Например, у инертных газов  $P_{\min}$  мало, а у металлов велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твердом состояниях.

## § 61. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Как указывалось в § 60, для реальных газов необходимо учитывать размеры молекул и их взаимодействие друг с другом, поэтому модель идеального газа и уравнение Клапейрона — Менделеева (42.4)  $pV_m = RT$  (для 1 моль газа), описывающее идеальный газ, для реальных газов непригодны.

Учитывая собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия, голландский физик И. Ван-дер-Ваальс (1837 — 1923) вывел уравнение состояния реального газа. Ван-дер-Ваальсом в уравнение Клапейрона — Менделеева введены две поправки.

**1. Учет собственного объема молекул.** Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет

не  $V_m$ , а  $V_m - b$ , где  $b$  — объем, занимаемый самими молекулами. Объем  $b$  равен *четверенному собственному объему молекул*. Если, например, в сосуде находятся две молекулы, то центр любой из них не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра  $d$  молекулы. Это означает, что для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса  $d$ , т. е. объем, равный восьми объемам молекулы или четверенному объему молекулы в расчете на одну молекулу.

**2. Учет притяжения молекул.** Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого *внутренним давлением*. По вычислениям Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема:

$$p' = \frac{a}{V_m^2}, \quad (61.1)$$

где  $a$  — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения;  $V_m$  — молярный объем.

Вводя эти поправки, получим **уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль газа {уравнение состояния реальных газов}**:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT. \quad (61.2)$$

Для произвольного количества вещества  $\nu$  газа ( $\nu = \frac{m}{M}$ ) с учетом того, что  $V = \nu V_m$ , уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

или

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где поправки  $a$  и  $b$  — постоянные для каждого газа величины, определяемые опытным путем (записываются уравнения Ван-дер-Ваальса для двух известных из опыта состояний газа и решаются относительно  $a$  и  $b$ ).

При выводе уравнения Ван-дер-Ваальса сделан целый ряд упрощений, поэтому оно также весьма приближенное, хотя и лучше (особенно для не сильно сжатых газов) согласуется с опытом, чем уравнение состояния идеального газа.

## § 62. Изотермы Ван-дер-Ваальса и их анализ

Для исследования поведения реального газа рассмотрим *изотермы Ван-дер-Ваальса* — кривые зависимости  $p$  от  $V_m$  при заданных  $T$ , определяемые уравнением Ван-дер-Ваальса (61.2) для 1 моль газа. Эти кривые (рассматриваются для четырех различных температур; рис. 91) имеют довольно своеобразный характер. При высоких температурах ( $T > T_k$ ) изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением ее формы, оставаясь монотонно спадающей кривой. При некоторой температуре  $T_k$  на изотерме имеется лишь одна точка перегиба  $K$ . Эта *изотерма* называется *критической*, соответствующая

ей температура  $T_k$  — *критической температурой*; точка перегиба  $K$  называется *критической точкой*; в этой точке касательная к ней параллельна оси абсцисс. Соответствующие этой точке *объем*  $V_k$  и *давление*  $p_k$  называются также *критическими*.

Состояние с критическими параметрами ( $p_k, V_k, T_k$ ) называется *критическим состоянием*. При низких температурах ( $T < T_k$ ) изотермы имеют волнообразный участок, сначала монотонно опускаясь вниз, затем монотонно поднимаясь вверх и снова монотонно опускаясь.

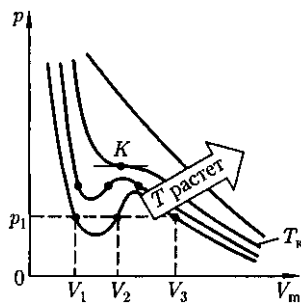
Для пояснения характера изотерм преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса (61.2) к виду

$$pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (62.1)$$

Уравнение (62.1) при заданных  $p$  и  $T$  является уравнением третьей степени относительно  $V_m$ ; следовательно, оно может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный и два мнимых, причем физический смысл имеют лишь вещественные положительные корни. Поэтому первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах (три значения объема газа  $V_1, V_2$  и  $V_3$  отвечают (индекс «т» для простоты опускаем) одному значению давления  $p_1$ ), второму случаю — изотермы при высоких температурах.

Рассматривая различные участки изотермы при  $T < T_k$  (рис. 92), видим, что на участках 1—3 и 5—7 при уменьшении объема  $V_m$  давление  $p$  растет, что естественно. На участке 3—5 сжатие вещества приводит к уменьшению давления; практика же показывает, что такие состояния в природе не осуществляются. Наличие участка 3—5 означает, что при постепенном изменении объема вещество не может оставаться все время в виде однородной среды; в некото-

Рис. 91





рыи момент должно наступить скачкообразное изменение состояния и распад вещества на две фазы. Таким образом, истинная изотерма будет иметь вид ломаной линии 7—6—2—1.

Часть 6—7 отвечает газообразному состоянию, а часть 2—1 — жидкому. В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы 6—2, наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз вещества. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется *паром*, а *пар*, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным*.

Данные выводы, следующие из анализа уравнения Ван-дер-Ваальса, были подтверждены опытами ирландского ученого Т. Эндрюса (1813— 1885), изучавшего изотермическое сжатие углекислого газа. Отличие экспериментальных (Эндрюс) и теоретических (Ван-дер-Ваальс) изотерм заключается в том, что превращению газа в жидкость в первом случае соответствуют горизонтальные участки, а во втором — волнообразные.

Для нахождения критических параметров подставим их значения в уравнение (62.1) и запишем

$$p_k V_k^3 - (RT_k + p_k b)V_k^2 + aV_k - ab = 0 \quad (62.2)$$

(индекс «т» для простоты опускаем). Поскольку в критической точке все три корня совпадают и равны  $V_k$ , уравнение приводится к виду

$$p_k(V - V_k)^3 = 0,$$

или

$$p_k V^3 - 3p_k V_k V^2 + 3p_k V_k^2 V - p_k V_k^3 = 0. \quad (62.3)$$

Так как уравнения (62.2) и (62.3) тождественны, то в них должны быть равны и коэффициенты при неизвест-

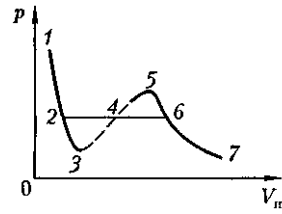


Рис. 92

ных соответствующих степеней. Поэтому можно записать

$$p_k V_k = ab, \quad 3p_k V_k^2 = a, \quad 3p_k V_k = RT_k + p_k b.$$

Решая полученные уравнения, найдем

$$V_k = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}. \quad (62.4)$$

Если через крайние точки горизонтальных участков семейства изотерм (см. рис. 92) провести линию, то получится колоколообразная кривая (рис. 93), ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Эта кривая и критическая изотерма делят диаграмму  $p, V_m$  под изотермой на три области: под колоколообразной кривой располагается область двухфазных состояний (жидкость и насыщенный пар), слева от нее находится область жидкого состояния, а справа — область пара.

Пар отличается от остальных газообразных состояний тем, что при изотермическом сжатии претерпевает процесс сжижения. Газ же при температуре выше критической не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

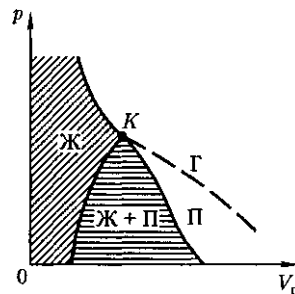
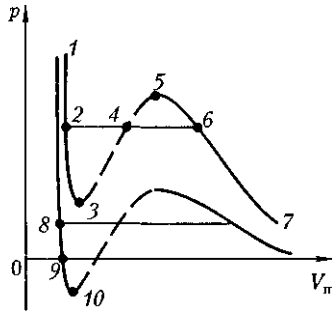


Рис. 93

Рис. 94



Сравнивая изотерму Ван-дер-Ваальса с изотермой Эндриуса (верхняя кривая на рис. 94), видим, что последняя имеет прямолинейный участок 2—3, соответствующий двухфазным состояниям вещества. Правда, при некоторых условиях могут быть реализованы состояния, изображаемые участками ван-дер-ваальсовой изотермы 5—6 и 2—3. Эти неустойчивые *состояния* называются *метастабильными*. Участок 2—3 изображает *перегретую жидкость*, 5—6 — *пересыщенный пар*. Обе фазы ограничено устойчивы.

При достаточно низких температурах изотерма пересекает ось  $V_m$ , переходя в область отрицательных давлений (нижняя кривая на рис. 94). Вещество под отрицательным давлением находится в состоянии растяжения. При некоторых условиях такие состояния также реализуются. Участок 8—9 на нижней изотерме соответствует *перегретой жидкости*, участок 9—10 — *растянутой жидкости*.

### § 63. Внутренняя энергия реального газа

Внутренняя энергия реального газа складывается из кинетической энергии теплового движения его молекул (определяет внутреннюю энергию идеального газа, равную  $C_V T$ ; см. § 53) и по-

тенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия. Потенциальная энергия реального газа обусловлена только силами притяжения между молекулами. Наличие сил притяжения приводит к возникновению внутреннего давления на газ [см. (61.1)]:

$$p' = \frac{a}{V_m^2}.$$

Работа, которая затрачивается для преодоления сил притяжения, действующих между молекулами газа, как известно из механики, идет на увеличение потенциальной энергии системы, т.е.  $\delta A = p' dV_m = \delta \Pi$ , или  $\delta \Pi = \frac{a}{V_m^2} dV_m$ , откуда

$$\Pi = -\frac{a}{V_m}$$

(постоянная интегрирования принята равной нулю). Знак « $\leftrightarrow$ » означает, что молекулярные силы, создающие внутреннее давление  $p'$ , являются силами притяжения (см. § 60). Учитывая оба слагаемых, получим, что внутренняя энергия 1 моль реального газа

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m} \quad (63.1)$$

растет с повышением температуры и увеличением объема.

Если газ расширяется без теплообмена с окружающей средой (адиабатный процесс, т.е.  $\delta Q = 0$ ) и не совершает внешней работы (расширение газа в вакуум, т.е.  $\delta A = 0$ ), то на основании первого начала термодинамики [ $\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A$ ] получим, что

$$U_1 = U_2. \quad (63.2)$$

Следовательно, при адиабатном расширении без совершения внешней работы внутренняя энергия газа не изменяется.

Равенство (63.2) формально справедливо как для идеального, так и для реального газов, но его физический смысл для обоих случаев совершенно различен. Для идеального газа равенство  $U_1 = U_2$  означает равенство температур ( $T_1 = T_2$ ), т.е. при адиабатном расширении идеального газа в вакуум его температура не изменяется. Для реального газа из равенства (63.2), учитывая, что для 1 моль газа

$$U_1 = C_V T_1 - \frac{a}{V_1}, U_2 = C_V T_2 - \frac{a}{V_2}, \quad (63.3)$$

получим

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Так как  $V_2 > V_1$ , то  $T_1 > T_2$ , т.е. реальный газ при адиабатном расширении в вакуум охлаждается. При адиабатном сжатии в вакуум реальный газ нагревается.

## §64. Эффект Джоуля—Томсона

Если идеальный газ адиабатно расширяется и совершает при этом работу, то он охлаждается, так как работа в данном случае совершается за счет его внутренней энергии (см. § 55). Подобный процесс, но с реальным газом — адиабатное расширение реального газа с совершением внешними силами положительной работы — осуществили английские физики Дж. Джоуль (1818—1889) и У. Томсон (лорд Кельвин, 1824-1907).

Рассмотрим эффект Джоуля — Томсона. На рис. 95 представлена схема их опыта. В теплоизолированной трубке с пористой перегородкой находятся два поршня, которые могут перемещаться без трения. Пусть сначала слева от пе-

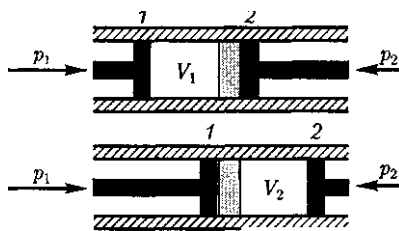


Рис. 95

регородки газ под поршнем 1 находится под давлением  $p_1$  и занимает объем  $V_1$  при температуре  $T_1$ , а справа газ отсутствует (поршень 2 придвинут к перегородке). После прохождения газа через пористую перегородку в правой части газ характеризуется параметрами  $p_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ . Давления  $p_1$  и  $p_2$  поддерживаются постоянными ( $p_1 > p_2$ ).

Так как расширение газа происходит без теплообмена с окружающей средой (адиабатно), то на основании первого начала термодинамики

$$\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A = 0. \quad (64.1)$$

Внешняя работа, совершаемая газом, состоит из положительной работы при движении поршня 2 ( $A_2 = p_2 V_2$ ) и отрицательной при движении поршня 1 ( $A_1 = p_1 V_1$ ), т.е.  $\delta A = A_2 - A_1$ . Подставляя выражения для работ в формулу (64.1), получим

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \quad (64.2)$$

Таким образом, в опыте Джоуля — Томсона сохраняется (остается неизменной) величина  $U + pV$ . Она является функцией состояния и называется *энтальпией*.

Ради простоты рассмотрим 1 моль газа. Подставляя в формулу (64.2) выражение (63.3) и рассчитанные из уравнения Ван-дер-Ваальса (61.2) значения  $p_1 V_1$  и  $p_2 V_2$  (индекс «т» опять опускаем) и производя элементарные преобразования, получаем

$$T_2 - T_1 = \frac{2a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) - b(p_2 - p_1)}{C_V + R} - \frac{ab\left(\frac{1}{V_2^2} - \frac{1}{V_1^2}\right)}{C_V + R}. \quad (64.3)$$

Из выражения (64.3) следует, что знак разности ( $T_2 - T_1$ ) зависит от того, какая из поправок Ван-дер-Ваальса играет большую роль. Проанализируем данное выражение, сделав допущение, что  $p_2 \ll p_1$  и  $V_2 \gg V_1$ :

1)  $a \approx 0$  — не учитываем силы притяжения между молекулами, а учитываем лишь размеры самих молекул. Тогда

$$T_2 - T_1 \approx \frac{-b(p_2 - p_1)}{C_V + R} > 0,$$

т.е. газ в данном случае нагревается;

2)  $b \approx 0$  — не учитываем размеров молекул, а учитываем лишь силы притяжения между молекулами. Тогда

$$T_2 - T_1 \approx \frac{2a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}{C_V + R} < 0,$$

т.е. газ в данном случае охлаждается;

3) учитываем обе поправки. Подставив в выражение (64.3) вычисленное из уравнения Ван-дер-Ваальса (61.2) значение  $p_1$ , имеем

$$T_2 - T_1 \approx \frac{-\frac{2a}{V_1} + \frac{bRT_1}{V_1 - b}}{C_V + R} + \frac{\frac{ba}{V_1^2} - \frac{ab}{V_1^2}}{C_V + R} = \frac{\frac{bRT_1}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1}}{C_V + R}, \quad (64.4)$$

т.е. знак разности температур зависит от значений начального объема  $V_1$  и начальной температуры  $T_1$ .

Изменение температуры реального газа в результате его адиабатного рас-

ширения, или, как говорят, **адиабатного дросселирования** — медленного прохождения газа под действием перепада давления сквозь **дроссель** (например, пористую перегородку), называется **эффектом Джоуля — Томсона**. Эффект Джоуля — Томсона принято называть **положительным**, если газ в процессе дросселирования охлаждается ( $\Delta T < 0$ ), и **отрицательным**, если газ нагревается ( $\Delta T > 0$ ).

В зависимости от условий дросселирования для одного и того же газа эффект Джоуля — Томсона может быть как положительным, так и отрицательным. Температура, при которой (для данного давления) происходит изменение знака эффекта Джоуля — Томсона, называется **температурой инверсии**. Ее зависимость от объема получим, приравняв выражение (64.4) нулю:

$$T = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V}\right). \quad (64.5)$$

Кривая, определяемая уравнением (64.5), — **кривая инверсии** — приведена на рис. 96. Область выше этой кривой соответствует отрицательному эффекту Джоуля — Томсона, ниже — положительному. Отметим, что при больших перепадах давления на дросселе температура газа изменяется значительно. Так, при дросселировании от 20 до 0,1 МПа и начальной температуре 17 °С воздух охлаждается на 35 °С.

Эффект Джоуля — Томсона обусловлен отклонением газа от идеальности.

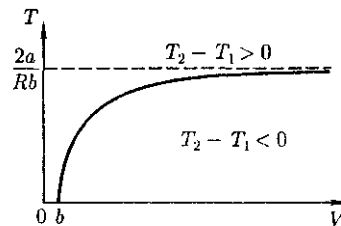


Рис. 96

сти. В самом деле, для 1 моль идеального газа  $p V_m = RT$ , поэтому выражение (64.2) примет вид

$$C_V T_1 + RT_1 = C_V T_2 + RT_2,$$

откуда следует, что  $T_1 = T_2$ .

## § 65. Сжижение газов

Превращение любого газа в жидкость — *сжижение газа* — возможно лишь при температуре ниже критической (см. § 62). При ранних попытках сжижения газов оказалось, что некоторые газы ( $\text{Cl}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{NH}_3$ ) легко сжижались изотермическим сжатием, а целый ряд газов ( $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{He}$ ) сжижению не поддавался. Подобные неудачные попытки объяснил Д. И. Менделеев, показав, что сжижение этих газов производилось при температуре, большей критической, и поэтому заранее было обречено на неудачу. Впоследствии удалось получить жидкие кислород, азот и водород (их критические температуры равны соответственно 154,4, 126,1 и 33 К), а в 1908 г. нидерландский физик Г. Камерлинг-Оннес (1853—1926) добился сжижения гелия, имеющего самую низкую критическую температуру (5,3 К).

Для сжижения газов чаще применяются два промышленных метода, в основе которых используется либо эффект Джоуля — Томсона, либо охлаждение газа при совершении им работы.

Схема одной из установок, в которой используется эффект Джоуля — Томсона, — *машины Линде*<sup>1</sup> — представлена на рис. 97. Воздух в компрессоре (К) сжимается до давления в десятки мегапаскалей и охлаждается в холодиль-

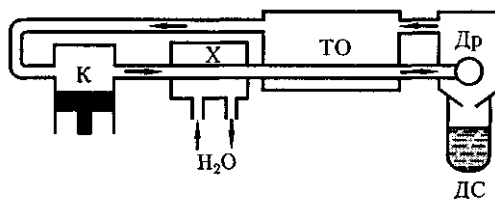


Рис. 97

нике (Х) до температуры ниже температуры инверсии, в результате чего при дальнейшем расширении газа наблюдается положительный эффект Джоуля — Томсона (охлаждение газа при его расширении). Затем сжатый воздух проходит по внутренней трубе теплообменника (ТО) и пропускается через дроссель (Др), при этом он сильно расширяется и охлаждается. Расширившийся воздух вновь засасывается по внешней трубе теплообменника, охлаждая вторую порцию сжатого воздуха, текущего по внутренней трубе.

Так как каждая следующая порция воздуха предварительно охлаждается, а затем пропускается через дроссель, то температура понижается все больше. В результате 6—8-часового цикла часть воздуха ( $\approx 5\%$ ), охлаждаясь до температуры ниже критической, сжижается и поступает в дьюаровский сосуд (ДС) (см. § 49), а остальная его часть возвращается в теплообменник.

Второй метод сжижения газов основан на охлаждении газа при совершении им работы. Сжатый газ, поступая в поршневую машину (*детандер*), расширяется и совершает при этом работу по передвижению поршня. Так как работа совершается за счет внутренней энергии газа, то его температура при этом понижается.

Академик П.Л. Капица предложил вместо детандера применять *турбодетандер*, в котором газ, сжатый всего лишь до 500—600 кПа, охлаждается,

<sup>1</sup> К. Линде (1842—1934) — немецкий физик и инженер.

совершает работу по вращению турбины. Этот метод успешно применен Капицей для сжижения гелия, предварительное охлаждение которого производилось жидким азотом. Современные мощные холодильные установки работают по принципу турбодетандера.

## § 66. Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение

Жидкость является агрегатным состоянием вещества, промежуточным между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкости, подобно твердым телам, имеют определенный объем, а подобно газам, принимают форму сосуда, в котором они находятся (см. § 28). Молекулы газа практически не связаны между собой силами межмолекулярного взаимодействия, и в данном случае средняя энергия теплового движения молекул газа гораздо больше средней потенциальной энергии, обусловленной силами притяжения между ними (см. § 60), поэтому молекулы газа разлетаются в разные стороны и газ занимает предоставленный ему объем.

В твердых и жидких телах силы притяжения между молекулами уже существенны и удерживают молекулы на определенном расстоянии друг от друга. В этом случае средняя энергия хаотического (теплового) движения молекул меньше средней потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия, и ее недостаточно для преодоления сил притяжения между молекулами, поэтому твердые тела и жидкости имеют определенный объем.

Рентгеноструктурный анализ жидкостей показал, что характер располо-

жения частиц жидкости промежуточен между газом и твердым телом. В газах молекулы движутся хаотично, поэтому нет никакой закономерности в их взаимном расположении. Для твердых тел наблюдается так называемый *дальний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на больших расстояниях. В жидкостях имеет место так называемый *ближний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Теория жидкости до настоящего времени полностью не развита. Разработка ряда проблем в исследовании свойств жидкости принадлежит Я. И. Френкелю (1894 — 1952). Тепловое движение в жидкости он объяснял тем, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии порядка межатомного. Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости и диффузия происходит гораздо медленнее, чем в газах. С повышением температуры жидкости частота колебательного движения резко увеличивается, возрастает подвижность молекул, что, в свою очередь, является причиной уменьшения вязкости жидкости.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием (см. рис. 90); следовательно, начиная с некоторого минимального расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка  $10^{-9}$  м) называется *радиусом молекулярного действия*  $r$ , а сфера радиуса  $r$  — *сферой молекулярного действия*.

Выделим внутри жидкости какую-либо молекулу  $A$  (рис. 98) и проведем вокруг нее сферу радиусом  $r$ . Достаточно, согласно определению, учесть действие на данную молекулу только тех молекул, которые находятся внутри сферы молекулярного действия. Силы, с которыми эти молекулы действуют на молекулу  $A$ , направлены в разные стороны и в среднем скомпенсированы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, равна нулю.

Иначе обстоит дело, если молекула, например молекула  $B$ , расположена от поверхности на расстоянии, меньшем  $r$ . В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично расположена внутри жидкости. Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сил  $F$ , приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости. Таким образом, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость давление, называемое **молекулярным** (или **внутренним**). Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости.

Суммарная энергия частиц жидкости складывается из энергии их хаотического (теплого) движения и потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их

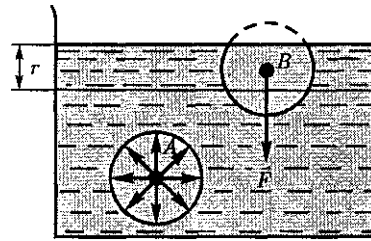


Рис. 98

потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости. Эта дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости, называемая **поверхностной энергией**, пропорциональна площади слоя  $AS$ :

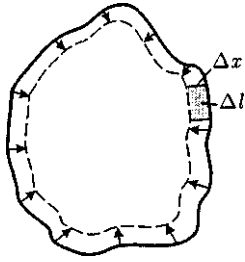
$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (66.1)$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т.е. форму шара. Наблюдая мельчайшие капельки, взвешенные в воздухе, можем видеть, что они действительно имеют форму шариков, но несколько искаженную из-за действия сил земного тяготения. В условиях невесомости капля любой жидкости (независимо от ее размеров) имеет сферическую форму, что доказано экспериментально на космических кораблях.

Итак, условием устойчивого равновесия жидкости является минимум поверхностной энергии. Это означает, что жидкость при заданном объеме должна иметь наименьшую площадь поверхности, т.е. жидкость стремится сократить площадь свободной поверхности. В этом случае поверхностный слой

Рис. 99



жидкости можно уподобить растянутой упругой пленке, в которой действуют силы натяжения.

Рассмотрим поверхность жидкости (рис. 99), ограниченную замкнутым контуром. Под действием сил поверхностного натяжения (направлены по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно участку контура, на который они действуют) поверхность жидкости сократилась и рассматриваемый контур переместился в новое положение, отмеченное на рисунке стрелками. Силы, действующие со стороны выделенного участка на граничащие с ним участки, совершают работу

$$\Delta A = f \Delta l \Delta x,$$

где  $f$  — сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поверхности жидкости.

Из рис. 99 видно, что  $\Delta l \Delta x = \Delta S$ , т.е.

$$\Delta A = f \Delta S. \quad (66.2)$$

Эта работа совершается за счет уменьшения поверхностной энергии, т.е.

$$\Delta A = \Delta E. \quad (66.3)$$

Из сравнения выражений (66.1) — (66.3) видно, что

$$\sigma = f, \quad (66.4)$$

т.е. *поверхностное натяжение* равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность. Едини-

ца поверхностного натяжения — *ньютоннаметр* (Н/м) или *джоульнаквадратный метр* (Дж/м<sup>2</sup>) [см. (66.4) и (66.1)]. Большинство жидкостей при температуре 300 К имеет поверхностное натяжение порядка  $\text{КГ}^2 - 10^{-1} \text{Н/м}$ . Поверхностное натяжение с повышением температуры уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости.

Поверхностное натяжение существенным образом зависит от примесей, имеющих в жидкостях. **Вещества**, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются **поверхностно-активными**. Наиболее известным поверхностно-активным веществом по отношению к воде является мыло. Оно сильно уменьшает ее поверхностное натяжение (примерно с  $7,5 \cdot 10^{-2}$  до  $4,5 \cdot 10^{-2} \text{Н/м}$ ). Поверхностно-активными веществами, понижающими поверхностное натяжение воды, являются также спирты, эфиры, нефть и др.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренной технике мыло «высаливается» этим способом из раствора.

## §67. Смачивание

Из повседневной практики известно, что капля воды растекается на стекле и принимает форму, изображенную на рис. 100, в то время как ртуть на той же поверхности превращается в несколько сплюснутую каплю (рис. 101).



В первом случае говорят, что жидкость *смачивает* твердую поверхность, во втором — *не смачивает ее*.

Смачивание зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

К линии соприкосновения трех сред (точка  $O$  есть ее пересечение с плоскостью чертежа) приложены три силы поверхностного натяжения, которые направлены по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред (см. рис. 100 и 101). Эти силы, отнесенные к *единице длины* линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным натяжениям  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ . Угол  $\theta$  между касательными к поверхностям жидкости и твердого тела называется **краевым углом**. Условием равновесия капли (см. рис. 100) является равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т. е.

$$-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta = 0,$$

откуда

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}. \quad (67.1)$$

Из условия (67.1) вытекает, что краевой угол может быть острым или тупым в зависимости от значений  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{12}$ .

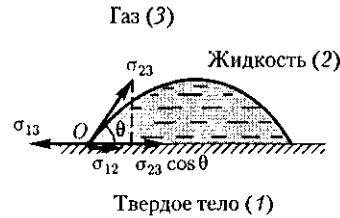


Рис. 100

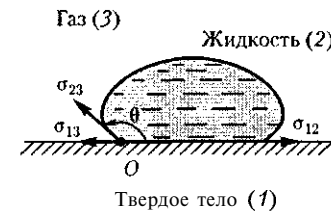


Рис. 101

Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta > 0$  и угол  $\theta$  — острый (см. рис. 100), т. е. жидкость смачивает твердую поверхность. Если  $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta < 0$  и угол  $\theta$  — тупой (рис. 101), т. е. жидкость не смачивает твердую поверхность. Краевой угол удовлетворяет условию (67.1), если

$$\frac{|\sigma_{13} - \sigma_{12}|}{\sigma_{23}} \leq 1. \quad (67.2)$$

Если условие (67.2) не выполняется, то капля жидкости (2) ни при каких значениях  $\theta$  не может находиться в равновесии. Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$ , то жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла), — имеет место *полное смачивание* (в данном случае  $\theta = 0$ ). Если  $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$ , то жидкость стягивается в шаровую каплю, в пределе имея с ней лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина), — имеет место *полное несмачивание* (в данном случае  $\theta = \pi$ ).

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными, т. е. жидкость, смачивающая одну твердую поверхность, не смачивает другую. Например, вода смачивает стекло, но не

смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике. Например, в методе флотационного обогащения руды (отделение руды от пустой породы) ее, мелко раздробленную, взбалтывают в жидкости, смачивающей пустую породу и не смачивающей руду. Через эту смесь продувается воздух, а затем она отстаивается. При этом смоченные жидкостью частицы породы опускаются на дно, а крупинки минералов «прилипают» к пузырькам воздуха и всплывают на поверхность жидкости. При механической обработке металлов их смачивают специальными жидкостями, что облегчает и ускоряет обработку.

### § 68. Давление под искривленной поверхностью жидкости

Если поверхность жидкости не плоская, а искривленная, то она оказывает на жидкость *избыточное (добавочное) давление*. Это давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, для выпуклой поверхности положительно, а для вогнутой — отрицательно.

Для расчета избыточного давления предположим, что свободная поверхность жидкости имеет форму сферы радиусом  $R$ , от которой мысленно отсечен шаровой сегмент, опирающийся на окружность радиусом  $r = R \sin \alpha$

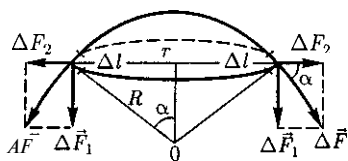


Рис. 102

(рис. 102). На каждый бесконечно малый элемент длины  $\Delta l$  этого контура действует сила поверхностного натяжения  $\Delta F = \sigma \Delta l$ , касательная к поверхности сферы.

Разложив  $\Delta \vec{F}$  на два компонента ( $\Delta \vec{F}_1$  и  $\Delta \vec{F}_2$ ), видим, что геометрическая сумма сил  $\Delta \vec{F}_2$  равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в обратные стороны и взаимно уравновешиваются. Поэтому равнодействующая сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент, направлена перпендикулярно плоскости сечения внутрь жидкости и равна алгебраической сумме составляющих  $\Delta F_1$ :

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \alpha = \sum \sigma \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\sigma r}{R} \sum \Delta l = \frac{\sigma r}{R} 2\pi r.$$

Разделив эту силу на площадь основания сегмента  $\pi r^2$ , вычислим избыточное давление на жидкость, создаваемое силами поверхностного натяжения и обусловленное кривизной поверхности:

$$S = \frac{2\sigma}{R}. \quad (68.1)$$

Если поверхность жидкости вогнутая, то можно доказать, что результирующая сила поверхностного натяжения направлена из жидкости и равна

$$Ap = -—. \quad (68.2)$$

Следовательно, давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе, на величину  $Ap$ .

Формулы (68.1) и (68.2) являются частным случаем *формулы Лапласа*<sup>1</sup>, определяющей избыточное давление

П. Лаплас (1749—1827) — французский ученый.

для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (68.3)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных поверхности жидкости в данной точке.

Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости.

Для сферической искривленной поверхности ( $R_1 = R_2 = R$ ) выражение (68.3) переходит в (68.1), для цилиндрической ( $R_1 = R$  и  $R_2 = \infty$ ) — избыточное давление

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\sigma}{R}.$$

В случае плоской поверхности ( $R_1 = R_2 = \infty$ ) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

## § 69. Капиллярные явления

Если поместить один конец узкой трубки (*капилляр*) в широкий сосуд, наполненный жидкостью, то вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости в капилляре становится значительной. Если жидкость смачивает материал трубки, то внутри ее поверхность жидкости — *мениск* — имеет вогнутую форму, если не смачивает, — выпуклую (рис. 103).

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление, определяемое по формуле (68.2). Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре

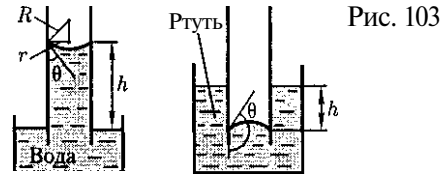


Рис. 103

поднимается, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если же жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах называется *капиллярностью*. Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту  $h$ , при которой давление столба жидкости (*гидростатическое давление*)  $\rho gh$  уравновешивается избыточным давлением  $\Delta p$ , т. е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения.

Если  $r$  — радиус капилляра,  $\theta$  — краевой угол, то из рис. 103 следует, что  $\frac{2\sigma \cos \theta}{r} = \rho gh$ , откуда

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho gr}. \quad (69.1)$$

В соответствии с тем, что смачивающая жидкость по капилляру поднимается, а несмачивающая опускается, из формулы (69.1) при  $\theta < \frac{\pi}{2}$  ( $\cos \theta > 0$ ) получим положительные значения  $h$ , а при  $\theta > \frac{\pi}{2}$  ( $\cos \theta < 0$ ) — отрицательные. Из выражения (69.1) также видно, что высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу. В тонких капиллярах жидкость поднимается достаточно высоко. Так, при полном смачивании ( $\theta = 0$ )

вода ( $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$ ) в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту  $h \approx 3 \text{ м}$ .

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Например, влагообмен в почве и растениях осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам.

На капиллярности основано действие фитилей, впитывание влаги бетоном и т. д.

## § 70. Твердые тела. Моно- и поликристаллы

Твердые тела (кристаллы) характеризуются наличием значительных сил межмолекулярного взаимодействия и сохраняют постоянными не только свой объем, но и форму. Кристаллы имеют правильную геометрическую форму, которая, как показали рентгенографические исследования немецкого физика-теоретика М. Лауэ (1879 — 1960), является результатом упорядоченного расположения частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих кристалл.

Структура, для которой характерно регулярное расположение частиц с периодической повторяемостью в трех измерениях, называется **кристаллической решеткой**. Точки, в которых расположены частицы, а точнее — средние равновесные положения, около которых частицы совершают колебания, называются **узлами кристаллической решетки**.

Кристаллические тела можно разделить на две группы: монокристаллы и поликристаллы. **Монокристаллы** — твердые тела, частицы которых образуют единую кристаллическую решетку. Кристаллическая структура монокристаллов обнаруживается по их внешней форме. Хотя внешняя форма монокри-

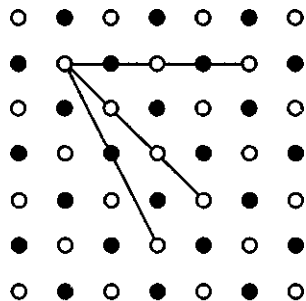
сталлов одного типа может быть различной, но углы между соответствующими гранями у них остаются постоянными. Это **закон постоянства углов**, сформулированный М. В. Ломоносовым. Он сделал важный вывод о том, что правильная форма кристаллов связана с закономерным размещением частиц, образующих кристалл.

Монокристаллами является большинство минералов. Однако крупные природные монокристаллы встречаются довольно редко (например, лед, поваренная соль, исландский шпат). В настоящее время многие монокристаллы выращиваются искусственно. Условия роста крупных монокристаллов (чистый раствор, медленное охлаждение и т. д.) часто не выдерживаются, поэтому большинство твердых тел имеет мелкокристаллическую структуру, т. е. состоит из множества беспорядочно ориентированных мелких кристаллических зерен. Такие твердые тела называются **поликристаллами** (многие горные породы, металлы и сплавы).

Характерной особенностью монокристаллов является их **анизотропность**, т. е. зависимость физических свойств — упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических — от направления.

Анизотропия монокристаллов объясняется тем, что в кристаллической решетке различно число частиц, приходящихся на одинаковые по длине, но разные по направлению отрезки (рис. 104), т. е. плотность расположения частиц кристаллической решетки по разным направлениям неодинакова, что и приводит к различию свойств кристалла вдоль этих направлений. В поликристаллах анизотропия наблюдается только для отдельных мелких кристалликов, но их неодинаковая ориентация приводит к тому, что свойства поликри-

Рис. 104



сталла по всем направлениям в среднем одинаковы.

### § 71. Типы кристаллических твердых тел

Существует два признака для классификации кристаллов: 1) кристаллографический; 2) физический (природа частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характер сил взаимодействия между ними).

**1. Кристаллографический признак кристаллов.** В данном случае важна только пространственная периодичность в расположении частиц, поэтому можно отвлечься от их внутренней структуры, рассматривая частицы как геометрические точки.

Кристаллическая решетка может обладать различными видами симметрии. *Симметрия кристаллической решетки* — ее свойство совмещаться с собой при некоторых пространственных перемещениях, например параллельных переносах, поворотах, отражениях или их комбинациях и т.д. Кристаллической решетке, как доказал русский кристаллограф Е. С. Федоров (1853-1919), присущи 230 комбинаций элементов симметрии, или 230 различных *пространственных групп*.

С переносной симметрией в трехмерном пространстве связывают поня-

тие трехмерной периодической структуры — *пространственной решетки*, или *решетки Бравэ*, представление о которой введено французским кристаллографом О. Бравэ (1811-1863). Всякая пространственная решетка может быть составлена повторением в трех различных направлениях одного и того же

Таблица 3

Кристаллографическая система	Характеристика элементарной ячейки	Форма элементарной ячейки
Триклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	
Моноклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta =$ $= 90^\circ \neq \gamma$	
Ромбическая	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma = 90^\circ$	
Тетрагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma = 90^\circ$	
Ромбоэдрическая (тригональная)	$a = b = c,$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma \neq 90^\circ$	
Гексагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ,$ $\gamma = 120^\circ$	
Кубическая	$a = b = c,$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma = 90^\circ$	

структурного элемента — **элементарной ячейки**. Всего существует 14 типов решеток Бравэ, отличающихся по виду переносной симметрии. Они распределяются по семи **кристаллографическим системам**, или **сингониям**, представленным в порядке возрастающей симметрии в табл. 3.

Для описания элементарных ячеек используются кристаллографическими осями координат, которые проводят параллельно ребрам элементарной ячейки, а начало координат выбирают в левом углу передней грани элементарной ячейки. Элементарная кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на ребрах  $a$ ,  $b$ ,  $c$  с углами  $\alpha$ , ( $\beta$  и  $\gamma$  между ребрами (табл. 3). Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  и  $\alpha$ , ( $\beta$  и  $\gamma$  называются **параметрами элементарной ячейки** и однозначно ее определяют.

**2. Физический признак кристаллов.** В зависимости от рода частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характера сил взаимодействия между ними кристаллы разделяются на четыре типа: ионные, атомные, металлические, молекулярные.

**Ионные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются поочередно ионы противоположного знака. Типичными ионными кристаллами является большинство галоидных соединений щелочных металлов (NaCl, CsCl, KBr и т.д.), а также оксидов различных элементов (MgO, CaO и т.д.).

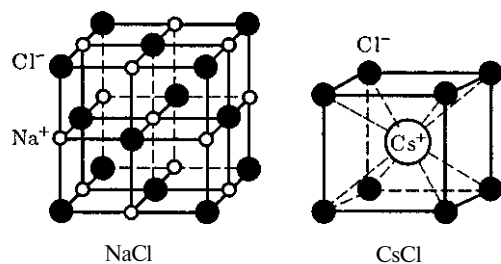


Рис. 105

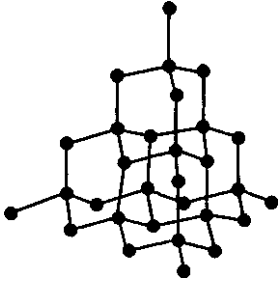
Структуры решеток двух наиболее характерных ионных кристаллов — NaCl (решетка представляет собой две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные друг в друга; в узлах одной из этих решеток находятся ионы Na<sup>+</sup>, в узлах другой — ионы Cl<sup>-</sup>) и CsCl (кубическая объемно центрированная решетка — в центре каждой элементарной решетки находится ион) — показаны на рис. 105. Силы взаимодействия между ионами являются в основном электростатическими (кулоновскими).

**Связь**, обусловленная кулоновскими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется **ионной** (или **гетерополярной**). В ионной решетке нельзя выделить отдельные молекулы: кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу.

**Атомные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные атомы, удерживающиеся в узлах решетки **гомополярными**, или **ковалентными, связями** квантово-механического происхождения (у соседних атомов обобществлены валентные электроны, наименее связанные с атомом). Атомными кристаллами являются алмаз и графит (два различных состояния углерода), некоторые неорганические соединения (ZnS, BeO и т.д.), а также типичные полупроводники — германий Ge и кремний Si. Структура решетки алмаза приведена на рис. 106, где каждый атом углерода окружен четырьмя такими же атомами, которые располагаются на одинаковых расстояниях от него в вершинах тетраэдров.

Валентные связи осуществляются парами электронов, движущихся по орбитам, охватывающим оба атома, и носят направленный характер: ковалентные силы направлены от центрального

Рис. 106



атома к вершинам тетраэдра. В отличие от графита решетка алмаза не содержит плоских слоев, что не позволяет сдвигать отдельные участки кристалла, поэтому алмаз является прочным соединением.

**Металлические кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла. При образовании кристаллической решетки валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомами, отделяются от атомов и коллективизируются: они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как в случае гомеоплярной связи, а всему кристаллу в целом. Таким образом, в металлах между положительными ионами хаотически, подобно молекулам газа, движутся «свободные» электроны, наличие которых обеспечивает хорошую электропроводность металлов. Так как металлическая связь не имеет направленного действия и положительные ионы решетки одинаковы по свойствам, то металлы должны иметь симметрию высокого порядка. Действительно, большинство металлов имеет кубическую объемно центрированную (Li, Na, K, Rb, Cs) и кубическую гранецентрированную (Cu, Ag, Pt, Au) решетки. Чаще всего металлы встречаются в виде поликристаллов.

**Молекулярные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располага-

ются нейтральные молекулы вещества, силы взаимодействия между которыми обусловлены незначительным взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти силы называют **ван-дер-ваальсовыми**, так как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящими к отклонению газов от идеальности.

Молекулярными кристаллами является, например, большинство органических соединений (парафин, спирт, резина и т.д.), инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe) и газы  $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  в твердом состоянии, лед, а также кристаллы брома  $\text{Br}_2$  и иода  $\text{I}_2$ . Ван-дер-ваальсовы силы довольно слабые, поэтому молекулярные кристаллы легко деформируются.

В некоторых твердых телах одновременно может осуществляться несколько видов связи. Примером может служить графит (гексагональная решетка). Решетка графита (рис. 107) состоит из ряда параллельных плоскостей, в которых атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников. Расстояние между плоскостями более чем в два раза превышает расстояние между атомами шестиугольника. Плоские слои связаны друг с другом ван-дер-ваальсовыми силами. В пределах слоя три валентных электрона каждого атома углерода образуют ковален-

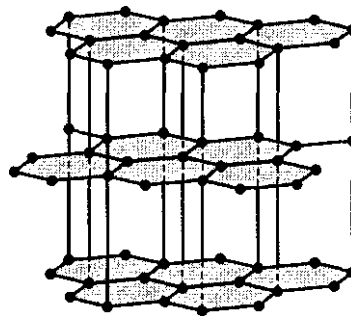


Рис. 107

тную связь с соседними атомами углерода, а четвертый электрон, оставаясь «свободным», коллективизируется, но не во всей решетке, как в случае металлов, а в пределах одного слоя. Таким образом, в данном случае осуществляются три вида связи: гомеополлярная и металлическая — в пределах одного слоя; ван-дер-ваальсова — между слоями. Этим объясняется мягкость графита, так как его слои могут скользить относительно друг друга.

Различие в строении кристаллических решеток двух разновидностей углерода — графита и алмаза — объясняет различие в их физических свойствах: мягкость графита и твердость алмаза; графит — проводник электричества, алмаз — диэлектрик (нет свободных электронов) и т.д.

Расположение атомов в кристаллах характеризуется также **координационным числом** — числом ближайших однотипных с данным атомом соседних атомов в кристаллической решетке или молекул в молекулярных кристаллах. Для модельного изображения кристаллических структур из атомов и ионов используются системой плотной упаковки шаров.

Рассматривая простейший случай плотной упаковки шаров одинакового радиуса на плоскости, приходим к двум способам их расположения (рис. 108, а, б). Правая упаковка является более плотной, так как при равном числе шаров площадь ромба со стороной, равной стороне квадрата, меньше площади квадрата. Как видно из рисунка, различие в упаковках сводится к различию координационных чисел: в левой упаковке координационное число равно 4, в правой — 6, т. е. чем плотнее упаковка, тем больше координационное число.

Рассмотрим, при каких условиях плотная упаковка шаров в пространстве

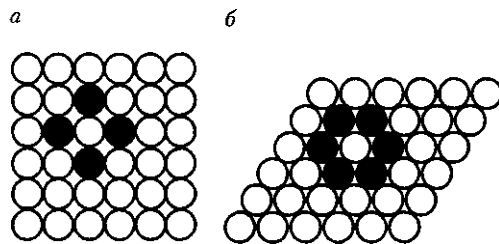


Рис. 108

может соответствовать той или иной кристаллической структуре, приводимой ранее. Начнем строить решетку со слоя шаров, представленных на рис. 108, б. Для упрощения дальнейших рассуждений спроецируем центры шаров на плоскость, на которой они лежат, обозначив их белыми кружками (рис. 109). На эту же плоскость спроецируем центры просветов между шарами, которые обозначены на рис. 109 соответственно черными кружками и крестиками.

Любой плотноупакованный слой будем называть слоем *A*, если центры его шаров расположены над светлыми кружками, слоем *B* — если над темными кружками, слоем *C* — если над крестиками. Над слоем *A* уложим второй плотноупакованный слой так, чтобы каждый шар этого слоя лежал на трех шарах первого слоя. Это можно сделать двояко: взять в качестве второго слоя либо *B*, либо *C*. Третий слой можно опять уложить двояко и т. д. Итак, плотную упаковку можно описать как последовательность *ABCBCA...*, в которой не могут стоять рядом слои, обозначенные одинаковыми буквами.

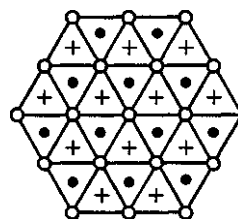
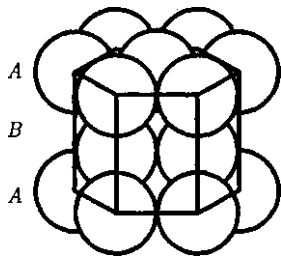


Рис. 109



Рис.110



Из множества возможных комбинаций в кристаллографии реальное значение имеют два типа упаковки: 1) двухслойная упаковка  $ABABAB\dots$  — гексагональная плотноупакованная структура (рис. 110); 2) трехслойная упаковка  $ABCABC\dots$  — кубическая гранецентрированная структура (рис. 111). В обеих решетках координационное число равно 12 и плотность упаковки одинакова — атомы занимают 74 % общего объема кристалла. Координационное число, соответствующее кубической объемноцентрированной решетке, равно 8, решетке алмаза (см. рис. 106) равно 4.

Кроме двух- и трехслойных упаковок можно построить многослойные упаковки с большим периодом повторяемости одинаковых слоев, например  $ABCBCACBCBCAC\dots$  - шестислойная упаковка. Существует модификация карбида SiC с периодом повторяемости 6, 15 и 243 слоя.

Если кристалл построен из атомов различных элементов, то его можно представить в виде плотной упаковки шаров разных размеров. На рис. 112

Рис.111

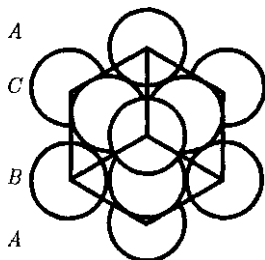
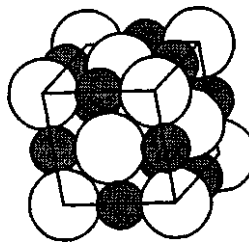


Рис. 112



приведено модельное изображение кристалла поваренной соли. Крупные ионы хлора ( $r = 181$  пм) образуют плотную трехслойную упаковку, у которой большие пустоты заполнены меньшими по размеру ионами натрия ( $r = 98$  пм). Каждый ион Na окружен шестью ионами Cl и, наоборот, каждый ион Cl — шестью ионами Na.

## § 72. Дефекты в кристаллах

Рассмотренные в § 71 идеальные кристаллические структуры существуют лишь в очень малых объемах реальных кристаллов, в которых всегда имеются отклонения от упорядоченного расположения частиц в узлах решетки, называемые **дефектами кристаллической решетки**. Дефекты делятся на **макроскопические**, возникающие в процессе образования и роста кристаллов (например, трещины, поры, инородные макроскопические включения), и **микроскопические**, обусловленные микроскопическими отклонениями от периодичности.

**Микродефекты** делятся на **точечные** и **линейные**. Точечные дефекты бывают трех типов: 1) **вакансия** — отсутствие атома в узле кристаллической решетки (рис. 113, а); 2) **междоузельный атом** — атом, внедрившийся в междоузельное пространство (рис. 113, б); 3) **примесный атом** — атом примеси, либо замещающий атом основного

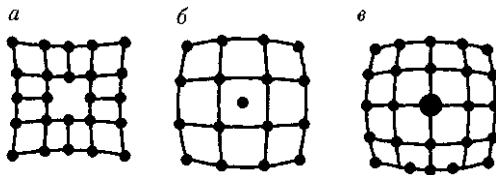


Рис.113

вещества в кристаллической решетке (*примесь замещения*, рис. 113, б), либо внедрившийся в междоузельное пространство (*примесь внедрения*, рис. 113, в; только в междоузлии вместо атома основного вещества располагается атом примеси). Точечные дефекты нарушают лишь ближний порядок в кристаллах, не затрагивая дальнего порядка, — в этом состоит их характерная особенность.

Линейные дефекты нарушают дальний порядок. Как следует из опытов, механические свойства кристаллов в значительной степени определяются дефектами особого вида — дислокациями. *Дислокации* — линейные дефекты, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей.

*Дислокации* бывают *краевые* и *винтовые*. Если одна из атомных плоскостей обрывается внутри кристалла, то край этой плоскости образует краевую дислокацию (рис. 114, а). В случае винтовой дислокации (рис. 114, б) ни одна из атомных плоскостей внутри кристалла не обрывается, а сами плоскости лишь приблизительно параллельны и смыкаются друг с другом так, что фактически кристалл состоит из одной атомной плоскости, изогнутой по винтовой поверхности.

*Плотность дислокаций* (число дислокаций, приходящихся на единицу площади поверхности кристалла) для совершенных монокристаллов составляет  $10^2$ – $10^3$  см<sup>-2</sup>, для деформированных кристаллов —  $10^{10}$ – $10^{12}$  см<sup>-2</sup>. Дис-

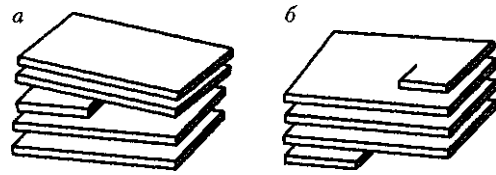


Рис.114

локации никогда не обрываются, они либо выходят на поверхность, либо разветвляются, поэтому в реальном кристалле образуются плоские или пространственные сетки дислокаций. Дислокации и их движение можно наблюдать с помощью электронного микроскопа, а также методом избирательного травления — в местах выхода дислокации на поверхность возникают ямки травления (интенсивное разрушение кристалла под действием реагента), «проявляющие» дислокации.

Наличие дефектов в кристаллической структуре влияет на свойства кристаллов, анализ которых проведем ниже.

### § 73. Теплоемкость твердых тел

В качестве *модели* твердого тела рассмотрим правильно построенную кристаллическую решетку, в узлах которой частицы (атомы, ионы, молекулы), принимаемые за материальные точки, колеблются около своих положений равновесия — *узлов решетки* — в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Таким образом, каждой составляющей кристаллическую решетку частице приписывается три колебательных степени свободы, каждая из которых, согласно закону равномерного распределения энергии по степеням свободы (см. § 50), обладает энергией  $kT$ .

Внутренняя энергия 1 моль твердого тела

$$U_m = 3N_A kT = 3RT,$$

где  $N_A$  — постоянная Авогадро;  $N_A k = R$  ( $R$  — молярная газовая постоянная).

Молярная теплоемкость твердого тела

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = 3R = 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \quad (73.1)$$

т.е. молярная (атомная) теплоемкость *химически простых тел* в кристаллическом состоянии одинакова (равна  $3R$ ) и не зависит от температуры. Этот закон был эмпирически получен французскими учеными П. Дюлонгом (1785 — 1838) и Л. Пти (1791 — 1820) и носит название **закона Дюлонга и Пти**.

Если твердое тело является химическим соединением (например, NaCl), то число частиц в 1 моль не равно постоянной Авогадро, а равно  $nN_A$ , где  $n$  — число атомов в молекуле (для NaCl число частиц в 1 моль равно  $2N_A$ , так, в 1 моль NaCl содержится  $N_A$  атомов Na и  $N_A$  атомов Cl). Таким образом, молярная теплоемкость **твердых химических соединений**

$$C_V = 3nR \approx 25n \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}),$$

т.е. равна сумме атомных теплоемкостей элементов, составляющих это соединение.

Таблица 4

Вещество	$C_V$ , Дж/(моль · К)	
	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
Алюминий Al	25	25,5
Алмаз С	25	5,9
Бериллий Be	25	15,6
Бор В	25	13,5
Железо Fe	25	26,8
Серебро Ag	25	25,6
NaCl	50	50,6
AgCl	50	50,9
CaCl <sub>2</sub>	75	76,2

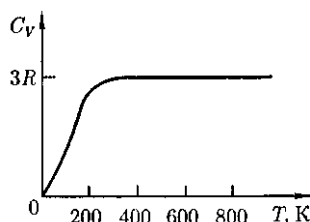


Рис.115

Как показывают опытные данные (табл. 4), для многих веществ закон Дюлонга и Пти выполняется с довольно хорошим приближением, хотя некоторые вещества (С, Ве, В) имеют большие отклонения от вычисленных значений теплоемкостей. Кроме того, так же как и в случае газов (см. § 53), опыты по измерению теплоемкости твердых тел при низких температурах показали, что она зависит от температуры (рис. 115). Вблизи нуля кельвин теплоемкость тел пропорциональна  $T^3$ , и только при достаточно высоких температурах, характерных для каждого вещества, выполняется условие (73.1). Алмаз, например, имеет теплоемкость, равную  $3R$  при 1800 К! Однако для большинства твердых тел комнатная температура является уже достаточно высокой.

Расхождение опытных и теоретических значений теплоемкостей, вычисленных на основе классической теории, объяснили, исходя из квантовой теории теплоемкостей, А. Эйнштейн и П. Дебай.

## § 74. Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела

Как в жидкостях, так и в твердых телах всегда имеется некоторое число молекул, энергия которых достаточна для преодоления притяжения к другим молекулам и которые способны оторваться от поверхности жидкости или

твердого тела и перейти в окружающее их пространство. Этот процесс для жидкости называется *испарением* (или *парообразованием*), для твердых тел — *сублимацией* (или *возгонкой*).

Испарение жидкостей идет при любой температуре, но его интенсивность с повышением температуры возрастает. Наряду с процессом испарения происходит компенсирующий его процесс *конденсации* пара в жидкость. Если число молекул, покидающих жидкость за единицу времени через единицу поверхности, равно числу молекул, переходящих из пара в жидкость, то наступает *динамическое равновесие* между процессами испарения и конденсации. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным* (см. § 62).

Для большинства твердых тел процесс сублимации при обычных температурах незначителен и давление пара над поверхностью твердого тела мало; оно увеличивается с повышением температуры. Интенсивно сублимируют такие вещества, как нафталин, камфора, что обнаруживается по резкому, свойственному им запаху. Особенно интенсивно сублимация происходит в вакууме, что используется для изготовления зеркал. Известный пример сублимации — превращение льда в пар — мокрое белье высыхает на морозе.

Если, твердое тело нагревать, то его *внутренняя энергия* (складывается из энергии колебаний частиц в узлах решетки и энергии взаимодействия этих частиц) возрастает. При повышении температуры амплитуда колебаний частиц увеличивается до тех пор, пока кристаллическая решетка не разрушится, — твердое тело плавится. На рис. 116, а изображена примерная зависимость  $T(Q)$ , где  $Q$  — количество теплоты, получаемое телом при плавлении.

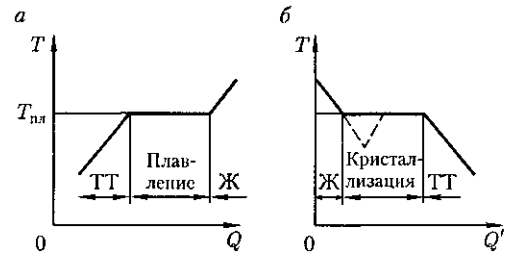


Рис.116

По мере сообщения твердому телу теплоты его температура повышается, а при температуре плавления  $T_{пл}$  начинается переход тела из твердого состояния в жидкое. Температура  $T_{пл}$  остается постоянной до тех пор, пока весь кристалл не расплавится, и только тогда температура жидкости вновь начнет повышаться.

Нагревание твердого тела до  $T_{пл}$  еще не переводит его в жидкое состояние, поскольку энергия частиц вещества должна быть достаточной для разрушения кристаллической решетки. В процессе плавления теплота, сообщаемая веществу, идет на совершение работы по разрушению кристаллической решетки, а поэтому  $T_{пл} = \text{const}$  до расплавления всего кристалла. Затем подводимая теплота опять пойдет на увеличение энергии частиц жидкости и ее температура начнет повышаться. Количество теплоты, необходимое для расплавления 1 кг вещества, называется *удельной теплотой плавления*.

Если жидкость охлаждать, то процесс протекает в обратном направлении (рис. 116, б;  $Q'$  — количество теплоты, отдаваемое телом при кристаллизации): сначала температура жидкости понижается, затем при постоянной температуре, равной  $T_{пл}$ , начинается *кристаллизация*, после ее завершения температура кристалла начнет понижаться.

Для кристаллизации вещества необходимо наличие так называемых *цен-*

**трое кристаллизации** — кристаллических зародышей, которыми могут быть не только кристаллики образующегося вещества, но и примеси, а также пыль, сажа и т.д. Отсутствие центров кристаллизации в чистой жидкости затрудняет образование микроскопических кристалликов, и вещество, оставаясь в жидком состоянии, охлаждается до температуры, меньшей температуры кристаллизации, при этом образуется **переохлажденная жидкость** (на рис. 116, б ей соответствует штриховая кривая). При сильном переохлаждении начинается спонтанное образование центров кристаллизации и вещество кристаллизуется довольно быстро.

Обычно переохлаждение расплава происходит от долей до десятков градусов, но для ряда веществ может достигать сотен градусов. Из-за большой вязкости сильно переохлажденные жидкости теряют текучесть, сохраняя, как и твердые тела, свою форму. Эти тела получили название **аморфных твердых тел**; к ним относятся смолы, воск, сургуч, стекло. Аморфные тела, являясь, таким образом, переохлажденными жидкостями, **изотропны**, т.е. их свойства во всех направлениях одинаковы; для них, как и для жидкостей, характерен **ближний порядок** в расположении частиц; в них в отличие от жидкостей подвижность частиц довольно мала.

Особенностью аморфных тел является отсутствие у них определенной точки плавления, т.е. невозможно указать определенную температуру, выше которой можно было бы констатировать жидкое состояние, а ниже — твердое. Из опыта известно, что в аморфных телах со временем может наблюдаться процесс кристаллизации, например в стекле появляются кристаллики; оно, теряя прозрачность, начинает мутнеть

и превращаться в поликристаллическое тело.

Широкое распространение получили **полимеры** — органические аморфные тела, молекулы которых состоят из большого числа одинаковых длинных молекулярных цепочек, соединенных химическими (валентными) связями. К полимерам относятся как естественные (крахмал, белок, каучук, клетчатка и др.), так и искусственные (пластмасса, резина, полистирол, лавсан, капрон и др.) органические вещества.

Полимерам присущи прочность и эластичность; некоторые полимеры выдерживают растяжение, в 5 — 10 раз превышающее их первоначальную длину. Это объясняется тем, что длинные молекулярные цепочки могут при деформации либо сворачиваться в плотные клубки, либо вытягиваться в прямые линии. Эластичность полимеров проявляется только в определенном интервале температур, ниже которого они становятся твердыми и хрупкими, а выше — пластичными. Хотя синтетических полимерных материалов создано очень много (искусственные волокна, заменители кожи, строительные материалы, заменители металлов и др.), но теория полимеров до настоящего времени полностью не разработана. Ее развитие определяется запросами современной техники, требующей синтеза полимеров с заранее заданными свойствами.

## § 75. Фазовые переходы I и II рода

**Фазой** называется термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества. Если, например, в закрытом сосуде находит-

ся вода, то эта система является *двухфазной*: жидкая фаза — вода, газообразная фаза — смесь воздуха с водяными парами. Если в воду бросить кусочек льда, то эта система станет трехфазной, в которой лед является твердой фазой.

Часто понятие «фаза» употребляется в смысле агрегатного состояния, однако надо учитывать, что оно шире, чем понятие «агрегатное состояние». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению (лед, например, встречается в пяти различных модификациях — фазах).

Переход вещества из одной фазы в другую — *фазовый переход* — всегда связан с качественными изменениями свойств вещества. Примером фазового перехода могут служить изменения агрегатного состояния вещества или переходы, связанные с изменениями в составе, строении и свойствах вещества (например, переход кристаллического вещества из одной модификации в другую).

Различают фазовые переходы двух родов. *Фазовый переход I рода* (например, плавление, кристаллизация) сопровождается поглощением или выделением теплоты, называемой *теплотой фазового перехода*. Фазовые переходы I рода характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема. Объяснение этому можно дать следующим образом. Например, при плавлении телу нужно сообщить некоторое количество теплоты, чтобы вызвать разрушение кристаллической решетки. Подводимая при плавлении теплота идет не на нагрев тела, а на разрыв межатомных связей, поэтому плавление протекает при постоянной температуре. В подобных переходах — из более упорядоченного кри-

сталлического состояния в менее упорядоченное жидкое состояние — степень беспорядка увеличивается, т. е., согласно второму началу термодинамики, этот процесс связан с возрастанием энтропии системы. Если переход происходит в обратном направлении (кристаллизация), то система выделяет теплоту.

Фазовые переходы, не связанные с поглощением или выделением теплоты и изменением объема, называются *фазовыми переходами II рода*. Эти переходы характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости. Общая трактовка фазовых переходов II рода предложена академиком Л.Д.Ландау (1908—1968). Согласно этой трактовке, фазовые переходы II рода связаны с изменением симметрии: выше точки перехода система, как правило, обладает более высокой симметрией, чем ниже точки перехода. Примерами фазовых переходов II рода являются: переход ферромагнитных веществ (железа, никеля) при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход металлов и некоторых сплавов при температуре, близкой к 0 К, в сверхпроводящее состояние, характеризующее скачкообразным уменьшением электрического сопротивления до нуля; превращение обыкновенного жидкого гелия (гелия I) при  $T = 2,9$  К в другую жидкую модификацию (гелий II), обладающую свойствами сверхтекучести.

## § 76. Диаграмма состояния. Тройная точка

Если система является однокомпонентной, т.е. состоящей из химически однородного вещества или его соединения, то понятие фазы совпадает с поня-

тием агрегатного состояния. Согласно § 60, одно и то же вещество в зависимости от соотношения между удвоенной средней энергией, приходящейся на одну степень свободы хаотического (теплового) движения молекул, и наименьшей потенциальной энергией взаимодействия молекул может находиться в одном из трех агрегатных состояний: твердом, жидком или газообразном. Это соотношение, в свою очередь, определяется внешними условиями — температурой и давлением. Следовательно, фазовые превращения также определяются изменениями температуры и давления.

Для наглядного изображения фазовых превращений используется **диаграмма состояния** (рис. 117), на которой в координатах  $p$ ,  $T$  задается зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения (КИ), плавления (КП) и сублимации (КС), разделяющих поле диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой (ТТ), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз. Кривые на диаграмме называются **кривыми фазового равновесия**, каждая точка на них соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз: КП — твердого тела и жидкости, КИ — жидкости и газа, КС — твердого тела и газа.

Точка, в которой пересекаются эти кривые и которая, следовательно, определяет условия (температуру  $T_{тр}$  и соответствующее ей равновесное давление  $p_{тр}$ ) одновременного равновесного сосуществования трех фаз вещества, называется **тройной точкой**. Каждое вещество имеет только одну тройную точку. Тройная точка воды соответствует температуре 273,16 К (или температуре 0,01 °С) и является основной реперной точкой для постро-

ения термодинамической температурной шкалы.

Термодинамика дает метод расчета кривой равновесия двух фаз одного и того же вещества. Согласно **уравнению Клапейрона — Клаузиуса**, производная от равновесного давления по температуре равна

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \quad (76.1)$$

где  $L$  — теплота фазового перехода;  $T$  — температура перехода (процесс изотермический);  $(V_2 - V_1)$  — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую.

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса позволяет определить наклоны кривых равновесия. Поскольку  $L$  и  $T$  положительны, наклон задается знаком  $(V_2 - V_1)$ . При испарении жидкостей и сублимации твердых тел объем вещества всегда возрастает, поэтому согласно (76.1),  $\frac{dp}{dT} > 0$ ; следовательно в этих процессах повышение температуры приводит к увеличению давления, и наоборот. При плавлении большинства веществ объем, как правило, возрастает, т.е.  $\frac{dp}{dT} > 0$ ; следовательно, увеличение давления приводит к повышению температуры плавления (сплошная линия КП на рис. 117). Для некоторых же веществ ( $H_2O$ , Ge, чугун и др.) объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы,

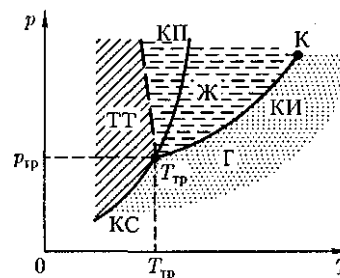
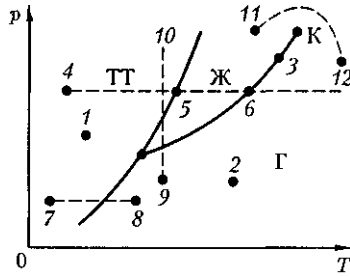


Рис.117

Рис. 118



т.е.  $\frac{dp}{dT} < 0$ ; следовательно, увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления (штриховая линия на рис. 117).

Диаграмма состояния, строящаяся на основе экспериментальных данных, позволяет судить, в каком состоянии находится данное вещество при определенных  $p$  и  $T$ , а также какие фазовые переходы будут происходить при том или ином процессе. Например, при условиях, соответствующих точке 1 (рис. 118), вещество находится в твердом состоянии, точке 2 — в газообразном, а точке 3 — одновременно в жидком и газообразном состояниях.

Допустим, что вещество в твердом состоянии, соответствующем точке 4, подвергается изобарному нагреванию, изображенному на диаграмме состояния горизонтальной штриховой прямой 4—5—6. Из рисунка видно, что при температуре, соответствующей точке 5, вещество плавится, при более высокой температуре, соответствующей точке 6, начинает превращаться в газ.

Если же вещество находится в твердом состоянии, соответствующем точке 7, то при изобарном нагревании (штриховая прямая 7—8) кристалл превращается в газ, минуя жидкую фазу. Если вещество находится в состоянии, соответствующем точке 9, то при изотермическом сжатии (штриховая прямая 9—10) оно пройдет следующие три состояния: газообразное — жидкое — кристаллическое.

На диаграмме состояний (см. рис. 117 и 118) видно, что кривая испарения заканчивается в критической точке К. Поэтому возможен *непрерывный* переход вещества из жидкого состояния в газообразное и обратно в обход критической точки без пересечения кривой испарения (переход 11—12 на рис. 118), т.е. такой переход, который не сопровождается фазовыми превращениями. Это возможно благодаря тому, что различие между газом и жидкостью является чисто количественным (оба эти состояния, например, являются изотропными).

Переход же кристаллического состояния (характеризуется анизотропией) в жидкое или газообразное может быть только скачкообразным (в результате фазового перехода), поэтому кривые плавления и сублимации не могут обрываться, как это имеет место для кривой испарения в критической точке. Кривая плавления уходит в бесконечность, а кривая сублимации идет в точку, где  $p = 0$  и  $T = 0$  К.

### Контрольные вопросы

- Каков критерий различных агрегатных состояний вещества?
- Запишите и проанализируйте уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль газа; для произвольного количества вещества.
- Чем отличаются реальные газы от идеальных?
- Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?
- Почему перегретая жидкость и пересыщенный пар являются метастабильными состояниями?



- При адиабатном расширении газа в вакуум его внутренняя энергия не изменяется. Как изменится температура, если газ идеальный? реальный?
- Какова суть эффекта Джоуля — Томсона? Когда он положителен? отрицателен?
- Почему у всех веществ поверхностное натяжение уменьшается с температурой?
- Что представляют собой поверхностно-активные вещества?
- При каком условии жидкость смачивает твердое тело? не смачивает?
- От чего зависит высота поднятия смачивающей жидкости в капилляре?
- Что такое узлы кристаллической решетки?
- В чем заключается анизотропность монокристаллов?
- Что такое капиллярность?
- Чем отличаются монокристаллы от поликристаллов?
- Как можно классифицировать кристаллы?
- Что такое ионная связь? ковалентная связь?
- Какие типы кристаллографических систем вам известны?
- Как получить закон Дюлонга и Пти, исходя из классической теории теплоемкости?
- Что такое насыщенный пар?
- Некоторое количество твердого вещества смешано с тем же веществом в жидком состоянии. Почему при нагревании этой смеси ее температура не поднимается?
- Что такое фаза? фазовый переход?
- Чем отличается фазовый переход I рода от фазового перехода II рода?
- Что можно «вычитать» из диаграммы состояния, используемой для изображения фазовых превращений?

## ЗАДАЧИ

10.1. Углекислый газ массой  $m = 1$  кг находится при температуре 290 К в сосуде вместимостью 20 л. Определите давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Объясните различие в результатах. Поправки  $a$  и  $b$  принять равными соответственно  $0,365 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $4,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ . [1) 2,44 МПа; 2) 2,76 МПа]

10.2. Кислород, содержащий количество вещества  $\nu = 2$  моль, занимает объем  $V_1 = 1$  л. Определите изменение  $\Delta T$  температуры кислорода, если он адиабатно расширяется в вакуум до объема  $V_2 = 10$  л. Поправку  $a$  принять равной  $0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$ . [—11,8 К]

10.3. Покажите, что эффект Джоуля — Томсона всегда отрицателен, если дросселируется газ, силами притяжения молекул которого можно пренебречь.

10.4. Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определите работу  $A$ , которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от  $d_1 = 2$  см до  $d_2 = 6$  см. Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным  $40 \text{ мН/м}$ . [0,8 мДж]

10.5. Воздушный пузырек диаметром  $d = 0,02$  мм находится на глубине  $h = 20$  см под поверхностью воды. Определите давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73 \text{ мН/м}$ , а ее плотность  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . [118 кПа]

10.6. Вертикальный открытый капилляр внутренним диаметром  $d = 3$  мм опущен в сосуд с ртутью. Определите радиус кривизны ртутного мениска в капилляре, если разность уровней ртути в сосуде и в капилляре  $A/g = 3,7$  мм. Плотность ртути  $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$ , а поверхностное натяжение  $\sigma = 0,5 \text{ Н/м}$ . [2 мм]

10.7. Для нагревания металлического шарика массой 25 г от 10 до 30 °С затратили количество теплоты, равное 117 Дж. Определите теплоемкость шарика согласно закону Дюлонга и Пти и материал шарика. [ $M \approx 0,107 \text{ кг/моль}$ ; серебро]

# ЧАСТЬ 3

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### Глава 11

#### ЭЛЕКТРОСТАТИКА

##### § 77. Закон сохранения электрического заряда

Еще в глубокой древности было известно, что янтарь, потертый о шерсть, притягивает легкие предметы. Английский врач Джильберт (конец XVI в.) назвал тела, способные после натирания притягивать легкие предметы, наэлектризованными. Сейчас мы говорим, что тела при этом приобретают электрические заряды.

Несмотря на огромное разнообразие веществ, в природе существует только *два типа электрических зарядов*: заряды, подобные возникающим на стекле, потертом о кожу (их назвали *положительными*), и заряды, подобные возникающим на эбоните, потертом о мех (их назвали *отрицательными*); одноименные заряды друг от друга отталкиваются, разноименные — притягиваются.

Опытным путем (1910—1914) американский физик Р. Милликен (1868—1953) показал, что электрический заряд *дискретен*, т.е. заряд любого тела составляет целое кратное от *элементарного электрического заряда  $e$*  ( $e$  —  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл). *Электрон* ( $m_e$  —  $9,11 \cdot 10^{-31}$  кг) и *протон* ( $m_p$  —  $1,67 \cdot 10^{-27}$  кг) являются соответствен-

но носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Все тела в природе способны электризоваться, т.е. приобретать электрический заряд. Электризация тел может осуществляться различными способами: соприкосновением (трением), электростатической индукцией (см. § 92) и др. Всякий процесс заряджения сводится к разделению зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительного заряда, а на другом (или другой части тела) — избыток отрицательного заряда. Общее количество зарядов обоих знаков, содержащихся в телах, не изменяется: эти заряды только перераспределяются между телами.

Из обобщения опытных данных был установлен *фундаментальный закон природы*, экспериментально подтвержденный в 1843 г. английским физиком М. Фарадеем (1791—1867), — *закон сохранения заряда*: *алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы* (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) *остаётся неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы*.

Электрический заряд — величина *релятивистски инвариантная*, т.е. не

зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

**Проводники** — тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объему. Проводники делятся на две группы: 1) **проводники первого рода** (металлы) — перенос в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями; 2) **проводники второго рода** (например, расплавленные соли, растворы кислот) — перенос в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям.

**Диэлектрики** (например, стекло, пластмассы) — тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды.

**Полупроводники** (например, германий, кремний) занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Указанное деление тел является весьма условным, однако большое различие в их концентраций свободных зарядов обуславливает огромные качественные различия в их поведении и поэтому оправдывает деление тел на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Единица электрического заряда (производная единица, так как определяется через единицу силы тока) — **кулон** (Кл): 1 Кл — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

## § 78. Закон Кулона

Закон взаимодействия *неподвижных точечных* электрических зарядов экспериментально установлен в 1785 г. Ш. Кулоном с помощью крутильных весов,

подобных тем, которые (см. § 22) использовались Г. Кавендишем для определения гравитационной постоянной (ранее этот закон был открыт Г. Кавендишем, однако его работа оставалась неизвестной более 100 лет).

**Точечным** называется *заряд*, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует. Понятие точечного заряда, как и материальной точки, является *физической абстракцией*.

**Закон Кулона:** сила взаимодействия  $F$  между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися *в вакууме*, пропорциональна зарядам  $Q_1$  и  $Q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Сила  $F$  направлена **по** прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т.е. является *центральной*, и соответствует притяжению ( $F < 0$ ) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ( $F > 0$ ) в случае одноименных. Эта сила называется **кулоновской силой**. В векторной форме закон Кулона имеет вид

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

где  $F_{12}$  — сила, действующая на заряд  $Q_1$  со стороны заряда  $Q_2$ ;  $r_{12}$  — радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_2$  с зарядом  $Q_1$ ,  $r = |\vec{r}_{12}|$  (рис. 119). На заряд  $Q_2$

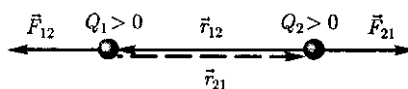


Рис.119

со стороны заряда  $Q_1$  действует сила  $\vec{F}_{21} = -F_{12}$ .

В СИ коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Тогда закон Кулона в СИ запишет-ся в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Величина  $\epsilon_0$  называется *электрической постоянной*; она относится к числу *фундаментальных физических постоянных* и равна

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2) \text{ или} \\ \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \quad (78.3)\end{aligned}$$

[где *фарад* (Ф) — единица емкости (см. § 93)].

Тогда

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

Точность выполнения закона Кулона на больших расстояниях, вплоть до  $10^7$  м, установлена при исследовании магнитного поля с помощью спутников в околоземном пространстве. Точность же его выполнения на малых расстояниях, вплоть до  $10^{-17}$  м, проверена экспериментами по взаимодействию элементарных частиц.

## § 79. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать кулоновская сила, следовательно в пространстве, окружающем электрические

заряды, существует *силовое поле*. Согласно представлениям современной физики, поле реально существует и наряду с веществом является одной из форм существования материи, посредством которого осуществляются определенные взаимодействия между макроскопическими телами или частицами, входящими в состав вещества. В данном случае говорят *об электрическом поле* — поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды. В данной главе будем рассматривать электрические *поля*, которые создаются неподвижными электрическими зарядами и называются *электростатическими*.

Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется *пробный точечный положительный заряд* — такой заряд, который не искажает исследуемое поле (не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле). Если в поле, создаваемое зарядом  $Q$ , поместить пробный заряд  $Q_0$ , то на него действует сила  $F$ , различная в разных точках поля, которая, согласно закону Кулона (78.2), пропорциональна пробному заряду  $Q_0$ . Поэтому отношение  $\frac{\vec{F}}{Q_0}$  не зависит от  $Q_0$  и характеризует электростатическое поле в той точке, где пробный заряд находится. Эта величина называется *напряженностью* и является *силовой характеристикой электростатического поля*.

*Напряженность электростатического поля* в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}. \quad (79.1)$$

Как следует из формул (79.1) и (78.1), напряженность поля точечного заряда в вакууме

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \text{ или } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (79.2)$$

Направление вектора  $E$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда); если поле создается отрицательным зарядом, то вектор  $\vec{E}$  направлен к заряду (рис. 120).

Из формулы (79.1) следует, что *единица напряженности электростатического поля — ньютон на кулон* (Н/Кл): 1 Н/Кл — напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой в 1 Н; 1 Н/Кл = 1 В/м, где В (вольт) — единица потенциала электростатического поля (см. § 84).

Графически электростатическое поле изображают с помощью *линий напряженности* — линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{E}$  (рис. 121). Им приписывается направление, совпадающее с направлением вектора  $\vec{E}$  в рассматриваемой точке линии. Так как в каждой данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются.

Для *однородного поля* (когда вектор напряженности в любой точке постоянен по модулю и направлению) линии напряженности параллельны вектору напряженности. Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности — радиальные прямые, выходящие из заряда, если он положителен (рис. 121, а), и входящие в него, если заряд отрицателен (рис. 121, б).

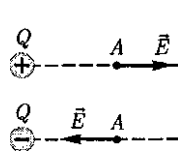


Рис. 120

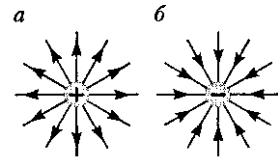


Рис. 121

Вследствие большой наглядности графический способ представления электростатического поля широко применяется в электротехнике.

Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, условились проводить их с определенной густотой (рис. 122): число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора  $E$ . Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , нормаль  $n$  к которой образует угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{E}$ , равно  $E dS \cos \alpha = E_n dS$ , где  $E_n$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$  (рис. 123). Величина

называется *поток вектора напряженности* сквозь площадку  $dS$ . Здесь  $dS = dS n$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $n$  к площадке. Выбор направления вектора  $n$  (а следовательно, и  $dS$ ) условен, так как его можно направить в любую сторону. *Единица потока вектора напряженности электростатического поля — вольт-метр* (В · м).

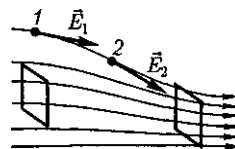


Рис. 122

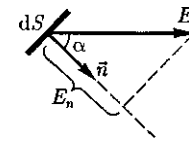


Рис. 123

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $E$  сквозь эту поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S}, \quad (79.3)$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ . Поток вектора  $E$  является *алгебраической величиной*: зависит не только от конфигурации поля  $\vec{E}$ , но и от выбора направления  $n$ . Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается *внешняя нормаль*, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

В истории развития физики имела место борьба двух теорий: дальнего действия и ближнего действия. В теории *дальнего действия* принимается, что электрические явления определяются мгновенным взаимодействием зарядов на любых расстояниях. Согласно теории *ближнего действия*, все электрические явления определяются изменениями полей зарядов, причем эти изменения распространяются в пространстве от точки к точке с конечной скоростью.

Применительно к электростатическим полям обе теории дают одинаковые результаты, хорошо согласующиеся с опытом. Переход же к явлениям, обусловленным движением электрических зарядов, приводит к несостоятельности теории дальнего действия, поэтому современной теорией взаимодействия заряженных частиц является *теория ближнего действия*.

## § 80. Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя

Рассмотрим систему неподвижных точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Экспе-

риментально установлено, что сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов. Тогда результирующая сила  $F$ , действующая со стороны поля на пробный заряд  $Q_0$ , равна векторной сумме сил  $F_i$ , приложенных к нему со стороны каждого из зарядов  $Q_i$ :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (80.1)$$

Согласно (79.1),  $F = Q_0 E$ , где  $E$  — напряженность результирующего поля, а  $E_i$  — напряженность поля, создаваемого зарядом  $Q_i$ . Подставляя последние выражения в (80.1), получаем

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (80.2)$$

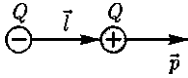
Формула (80.2) выражает *принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей*, согласно которому напряженность  $\vec{E}$  результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме* напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Отметим, что принцип суперпозиции является обобщением опытных данных и, возможно, нарушается на малых расстояниях ( $\leq 10^{-15}$  м).

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда мысленно разделить на малые части, считая каждую из них точечным зарядом.

Применим принцип суперпозиции для расчета электростатического поля электрического диполя. *Электрический диполь* — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ( $+Q, -Q$ ), расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстоя-

Рис. 124



ния до рассматриваемых точек поля. Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется *плечом диполя*  $l$ . Вектор

$$\vec{p} = |Q|\vec{l}, \quad (80.3)$$

совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда  $|Q|$  на плечо  $l$ , называется *электрическим моментом диполя или дипольным моментом* (рис. 124).

Согласно принципу суперпозиции (80.2), напряженность  $\vec{E}$  поля диполя в произвольной точке

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где  $E_+$  и  $E_-$  — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Воспользовавшись этой формулой, рассчитаем напряженность поля в произвольной точке на продолжении оси диполя и на перпендикуляре к середине его оси.

1. Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке  $A$  (рис. 125, а). Как видно из рисунка (рисунок не в масштабе), напряженность поля дипо-

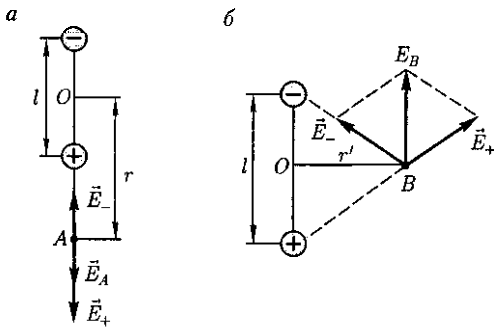


Рис. 125

ля в точке  $A$  направлена по оси диполя и по модулю равна

$$E_A = E_+ - E_-.$$

Обозначив расстояние от точки  $A$  до середины оси диполя через  $r$ , на основании формулы (79.2) для случая вакуума можно записать

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{Q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Согласно определению диполя,  $\frac{l}{2} \ll r$ , поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}.$$

2. Напряженность поля на перпендикуляре, восстановленном к оси из его середины, в точке  $B$  [рис. 125, б (рисунок не в масштабе)]. Точка  $B$  равноудалена от зарядов, поэтому

$$\begin{aligned} E_+ = E_- &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2}, \quad (80.4) \end{aligned}$$

где  $r'$  — расстояние от точки  $B$  до середины плеча диполя.

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор  $E_B$ , получим

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{(r')^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r'},$$

откуда

$$E_B = \frac{E_+ l}{r'^2}. \quad (80.5)$$

Подставив в выражение (80.5) значение (80.4), получим

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(r')^3}.$$

Вектор  $\vec{E}_B$  имеет направление, противоположное вектору электрического момента диполя (вектор  $p$  направлен от отрицательного заряда к положительному).

### § 81. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым К. Гауссом (1777 — 1855) теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

В соответствии с формулой (79.3) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса  $r$ , охватывающую точечный заряд  $Q$ , находящийся в ее центре (рис. 126), равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу (рис. 126) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

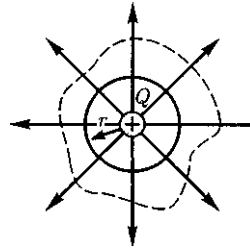


Рис. 126

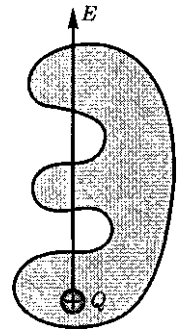


Рис. 127

Если замкнутая поверхность произвольной формы охватывает заряд (рис. 127), то при пересечении любой выбранной линии напряженности с поверхностью она то входит в нее, то выходит из нее. Нечетное число пересечений при вычислении потока в конечном счете сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линии напряженности выходят из поверхности, и отрицательным для линий, входящих в поверхность. Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Таким образом, для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд  $Q$ , поток вектора  $E$  будет равен —, т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (81.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда  $Q$ .

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей  $n$  зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции (80.2) напряженность  $\vec{E}$



поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей  $E_i$  полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ . Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}.$$

Согласно (81.1), каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен  $\frac{Q_i}{\epsilon_0}$ . Следовательно,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (81.2)$$

Формула (81.2) выражает *теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме*: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ . Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М. В. Остроградским (1801-1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю — К. Гауссом.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой *объемной плотностью*  $\rho = \frac{dQ}{dV}$ , различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей некоторый объем  $V$ , равен  $\int_V \rho dV$ . Используя этот результат, теорему Гаусса (81.2) можно записать так:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

## § 82. Применение теоремы Гаусса к расчету некоторых электростатических полей в вакууме

**1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.** Бесконечная плоскость (рис. 128) заряжена с постоянной *поверхностной плотностью*  $+\sigma$  ( $\sigma = \frac{dQ}{dS}$  — заряд, приходящийся на единицу поверхности). Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны.

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей. Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности ( $\cos \alpha = 0$ ), то поток вектора напряженности сквозь боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания (площади оснований равны и для основания  $E_n$  совпадает с  $E$ ), т.е. равен  $2ES$ . Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен  $\sigma S$ . Согласно теореме Гаусса (81.2),  $2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ , откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (82.1)$$

Следует отметить, что это формула справедлива только для малых (по сравнению с размерами плоскости) расстояний от плоскости, так как только тогда плоскость можно считать бесконечной. Из формулы (82.1) следует, что поле равномерно заряженной плоскости *однородно*.

**2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей** (рис. 129). Пусть плоскости заряжены рав-

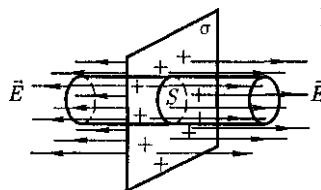
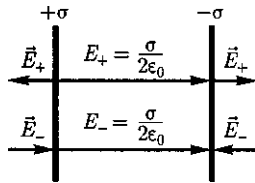


Рис. 128

Рис. 129



номерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Поле таких плоскостей найдем как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательно заряженной. Слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля  $E = 0$ . В области между плоскостями  $E = E_+ + E_-$  [ $E_+$  и  $E_-$  определяются по формуле (82.1)]. Поэтому результирующая напряженность

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (82.2)$$

Таким образом, результирующая напряженность поля в области между плоскостями описывается формулой (82.2), а вне объема, ограниченного плоскостями, равна нулю.

**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности.** Сферическая поверхность радиусом  $R$  с общим зарядом  $Q$  заряжена равномерно с *поверхностной плотностью*  $+\sigma$ . Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально (рис. 130). Построим мысленно сферу радиусом  $r$ , имеющую об-

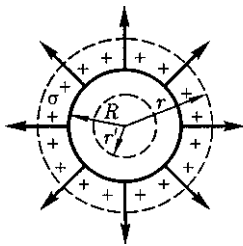


Рис. 130

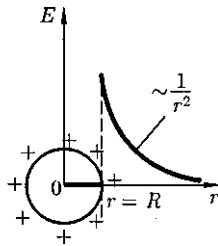


Рис. 131

щий центр с заряженной сферой. Если  $r > R$ , то внутрь поверхности попадает весь заряд  $Q$ , создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса (81.2),  $4\pi r^2 E = \dots$ , откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (82.3)$$

При  $r > R$  поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как у точечного заряда. График зависимости  $E$  от  $r$  приведен на рис. 131. Если  $r' < R$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ( $E = 0$ ).

**4. Поле объемно заряженного шара.** Шар радиусом  $R$  с общим зарядом  $Q$  заряжен равномерно с *объемной плотностью*  $\rho$  ( $\rho = \frac{dq}{dV}$  — заряд, приходящийся на единицу объема). Учитывая соображения симметрии (см. п. 3), можно показать, что для напряженности поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем случае [см. (82.3)].

Внутри шара напряженность поля будет другая. Сфера радиусом  $r' < R$  охватывает заряд  $Q' = \frac{4}{3}\pi(r')^3\rho$ . Поэтому, согласно теореме Гаусса (81.2),  $4\pi(r')^2 E = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi(r')^3 \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Учитывая, что  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' \quad (r' \leq R). \quad (82.4)$$

Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного шара описывается формулой (82.3), а внутри него изменяется линейно с расстоянием  $r'$  согласно выражению (82.4). График зависимости  $E$  от  $r$  для рассмотренного случая приведен на рис. 132.

**5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).** Бесконечный цилиндр радиусом  $R$  (рис. 133) заряжен равно-

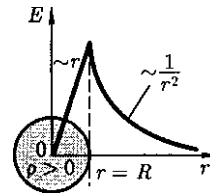
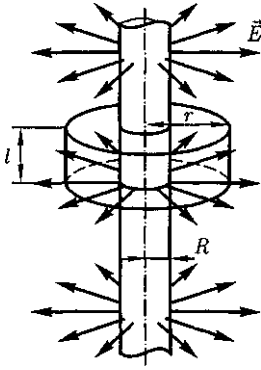


Рис. 132

Рис. 133



мерно с *линейной плотностью*  $\tau$  ( $\tau = \frac{dQ}{dl}$  — заряд, приходящийся на единицу длины). Из соображений симметрии следует, что линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра.

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный цилиндр радиусом  $r$  и высотой  $l$  (см. рис. 133). Поток вектора  $E$  сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность равен  $2\pi r l E$ . По теореме Гаусса (81.2), при  $r > R$   $2\pi r l E = \frac{\tau l}{\epsilon_0}$ , откуда

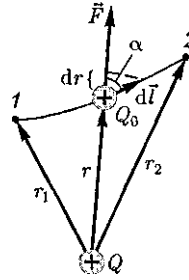
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (r \geq R). \quad (82.5)$$

Если  $r < R$ , то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области  $E = 0$ . Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением (82.5), внутри же его поле отсутствует.

### § 83. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Если в электростатическом поле точечного заряда  $Q$  из точки  $1$  в точку  $2$

Рис. 134



вдоль произвольной траектории (рис. 134) перемещается другой точечный заряд  $Q_0$ , то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы  $F$  на элементарном перемещении  $dl$  равна

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} dl \cos \alpha.$$

Так как  $dl \cos \alpha = dr$ , то

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} dr.$$

Работа при перемещении заряда  $Q_0$  из точки  $1$  в точку  $2$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 dA = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (83.1)$$

не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной  $1$  и конечной  $2$  точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а электростатические силы — **консервативными** (см. § 12).

Из формулы (83.1) следует, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути  $L$ , равна нулю, т. е.

$$(83.2)$$

Если в качестве заряда, переносимого в электростатическом поле, взять единичный точечный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на пути  $dl$  равна  $E dl = E_l dl$ , где  $E_l = E \cos \alpha$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление элементарного перемещения. Тогда формулу (83.2) можно записать в виде

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0. \quad (83.3)$$

Интеграл  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl$  называется *циркуляцией вектора напряженности*. Таким образом, циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Силовое поле, обладающее свойством (83.3), называется *потенциальным*. Из обращения в нуль циркуляции вектора  $E$  следует, что линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются и кончаются на зарядах (соответственно на положительных или отрицательных) или же уходят в бесконечность.

Формула (83.3) справедлива только для электростатического поля. В дальнейшем будет показано, что для поля движущихся зарядов (поля, изменяющегося со временем) условие (83.3) не выполняется (для него циркуляция вектора напряженности отлична от нуля).

## § 84. Потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в потенциальном поле сил (а электростатическое поле является потенциальным), обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа

(см. § 12). Работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии [см. (12.2)]. Тогда работу (83.1) сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд  $Q_0$  в начальной и конечной точках поля заряда  $Q$ :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_2} = U_1 - U_2, \quad (84.1)$$

откуда следует, что потенциальная энергия заряда  $Q_0$  в поле заряда  $Q$  равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r} + C.$$

Потенциальная энергия  $U$  определяется с точностью до постоянной  $C$ . Значение постоянной обычно выбирается так, чтобы при удалении заряда на бесконечность ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия обращается в нуль ( $U=0$ ), тогда  $C=0$  и потенциальная энергия заряда  $Q_0$ , находящегося в поле заряда  $Q$  на расстоянии  $r$  от него, равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0Q}{r}. \quad (84.2)$$

Для одноименных зарядов  $Q_0Q > 0$  и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов  $Q_0Q < 0$  и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна.

Если поле создается системой  $n$  точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом  $Q_0$ , равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия  $U$  заряда  $Q_0$ , находящегося в этом поле, равна сумме потенциальных энергий  $U_i$  каждого из зарядов:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = Q_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (84.3)$$

Из формул (84.2) и (84.3) вытекает, что отношение  $\frac{U}{Q_0}$  не зависит от  $Q_0$  и

является *энергетической характеристикой электростатического поля*, называемой *потенциалом*:

$$\varphi = \frac{U}{Q_0}. \quad (84.4)$$

*Потенциал*  $\varphi$  в какой-либо точке электростатического поля есть физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Из формул (84.4) и (84.2) следует, что потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (84.5)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки 1 в точку 2 [см. (84.1), (84.4), (84.5)], может быть представлена как

$$A_{12} = U_1 - U_2 = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (84.6)$$

т. е. равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

**Разность потенциалов** двух точек 1 в 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

При решении конкретных задач *физический смысл* имеет разность потенциалов между двумя точками электростатического поля.

Работа сил поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки 1 в точку 2 может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 Q_0 \vec{E} d\vec{l}. \quad (84.7)$$

Приравняв (84.6) и (84.7), придем к выражению для разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl, \quad (84.8)$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Если перемещать заряд  $Q_0$  из произвольной точки **за** пределы поля, т. е. на бесконечность, где, **по** условию, потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля, согласно (84.6),  $A_\infty = Q_0\varphi$ , откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}. \quad (84.9)$$

Таким образом, **потенциал** — физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки поля на бесконечность. Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Из выражения (84.4) и (84.6) следует, что *единица потенциала и разности потенциалов — вольт (В)*: 1 В — потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/Кл). Учитывая размерность вольта, можно показать, что введенная в § 79 единица напряженности электростатического поля действительно равна 1 В/м: 1 Н/Кл = 1 Н • м / (Кл • м) = 1 Дж / (Кл • м) = 1 В/м.

Из формул (84.3) и (84.4) вытекает, что если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической* сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}.$$

### § 85. Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности

Найдем взаимосвязь между напряженностью электростатического поля — *силовой характеристикой поля*, и потенциалом — *энергетической характеристикой поля*.

Работа по перемещению *единичного* точечного положительного заряда из одной точки поля в другую вдоль оси  $x$  при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и  $x_1 - x_2 = dx$ , равна  $E_x dx$ . Та же работа равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$ . Приравняв оба выражения, можем записать

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (85.1)$$

где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производится только по  $x$ . Повторив аналогичные рассуждения для осей  $y$  и  $z$ , можем найти вектор  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы координатных осей  $x, y, z$ .

Из определения градиента (12.4) и (12.6) следует, что

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \text{ или } \vec{E} = -\nabla\varphi, \quad (85.2)$$

т. е. напряженность  $\vec{E}$  поля равна градиенту потенциала со знаком «—». Знак «—» определяется тем, что вектор напряженности  $E$  поля направлен в *сторону убывания* потенциала.

Для графического изображения распределения потенциала электростатического поля, как и в случае поля тяготения (см. § 25), пользуются *эквипотенциальными поверхностями* — поверхностями, во всех точках которых потенциал  $\varphi$  имеет одно и то же значение.

Если поле создается точечным зарядом, то его потенциал, согласно (84.5),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Таким образом, эквипотенциальные поверхности в данном случае — концентрические сферы.

С другой стороны, линии напряженности в случае точечного заряда — радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности в случае точечного заряда *перпендикулярны* эквипотенциальным поверхностям.

Линии напряженности *всегда нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т. е. электростатические силы, действующие на заряд, *всегда* направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям. Следовательно, вектор  $\vec{E}$  *всегда нормален* к эквипотенциальным поверхностям, а поэтому линии вектора  $\vec{E}$  ортогональны этим поверхностям.

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были

Сравниваемые характеристики	Виды полей	
	Гравитационное	Электростатическое
Сила	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$
Напряженность	$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$
Работа по перемещению тела или заряда	$A = m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right) = m(\varphi_1 - \varphi_2)$	$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right) = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$
Работа по замкнутому контуру	$\oint_L dA = 0$	$\oint_L dA = 0$
Потенциал	$\varphi = \frac{\Pi}{m}$	$\varphi = \frac{U}{Q_0}$
Связь между напряженностью и потенциалом	$\vec{g} = -\text{grad} \varphi$	$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$

одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

Итак, зная расположение линий напряженности электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно определить в каждой точке поля модуль и направление напряженности поля. На рис. 135 для

примера показан вид линии напряженности (штриховые линии) и сечений эквипотенциальных поверхностей (сплошные линии) полей положительного точечного заряда (рис. 135, а) и заряженного металлического цилиндра, имеющего на одном конце выступ, а на другом — впадину (рис. 135, б).

В табл. 5 приведено сопоставление характеристик гравитационного и электростатического полей.

### § 86. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля

Установленная в § 85 связь между напряженностью поля и потенциалом позволяет по известной напряженности поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

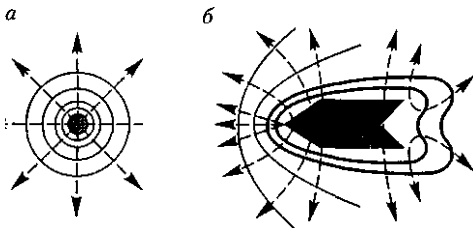


Рис. 135

**1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости** определяется по формуле (82.1):  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна [используем формулу (85.1)]

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

**2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей** определяется формулой (82.2):  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно  $d$  [см. формулу (85.1)], равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (86.1)$$

**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности радиусом  $R$**  с общим зарядом  $Q$  вне сферы ( $r > R$ ) вычисляется по (82.3):  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ . Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы ( $r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$ ), равна

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (86.2)$$

Если принять  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ , то потенциал поля вне сферической поверхности, согласно формуле (86.2), задается выражением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

[ср. с формулой (84.5)]. Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

График зависимости  $\varphi$  от  $r$  приведен на рис. 136.

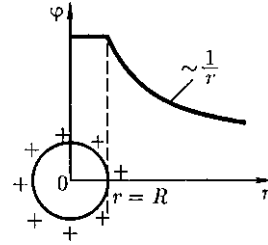


Рис. 136

**4. Поле объемно заряженного шара** радиусом  $R$  с общим зарядом  $Q$  вне шара ( $r > R$ ) вычисляется по формуле (82.3), поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара ( $r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$ ), определяется формулой (86.2). В любой точке, лежащей *внутри* шара на расстоянии  $r'$  от его центра ( $r' < R$ ), напряженность определяется выражением (82.4):  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r'$ .

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r'_1$  и  $r'_2$  от центра шара ( $r'_1 < R, r'_2 < R, r'_2 > r'_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r'_1}^{r'_2} E dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} [(r'_2)^2 - (r'_1)^2].$$

**5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиусом  $R$** , заряженного с линейной плотностью  $\tau$ , вне цилиндра ( $r > R$ ) определяется по формуле (82.5):  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}$ . Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси заряженного цилиндра ( $r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$ ), равна

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned} \quad (86.3)$$

## §87. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

Диэлектрик (как и всякое вещество) состоит из атомов и молекул. Так как



положительный заряд всех ядер молекулы равен суммарному заряду электронов, то молекула в целом электрически нейтральна.

Если заменить положительные заряды ядер молекул суммарным зарядом  $+Q$ , находящимся в центре «тяжести» положительных зарядов, а заряд всех электронов — суммарным отрицательным зарядом  $-Q$ , находящимся в центре «тяжести» отрицательных зарядов, то молекулу можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом, определяемым формулой (80.3).

Первую группу диэлектриков ( $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ , ...) составляют вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и, следовательно, дипольный момент  $p$  молекулы равен нулю. *Молекулы* таких диэлектриков называются *неполярными*. Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные по полю, отрицательные против поля) и молекула приобретает дипольный момент.

Вторую группу диэлектриков ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ , ...) составляют вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т.е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Таким образом, эти молекулы в отсутствие внешнего электрического поля обладают дипольным моментом. *Молекулы* таких диэлектриков называются *полярными*. При отсутствии внешнего поля, однако, дипольные моменты полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во

внешнее поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля и в результате возникнет отличный от нуля результирующий момент.

Третью группу диэлектриков ( $NaCl$ ,  $KCl$ ,  $KBr$ , ...) составляют вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух ввиннутых одна в другую ионных подрешеток. При наложении на ионный кристалл электрического поля происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, приводящее к возникновению дипольных моментов.

Таким образом, внесение всех трех групп диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика или, иными словами, к поляризации диэлектрика.

*Поляризацией* диэлектрика называется процесс ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

Соответственно трем группам диэлектриков различают три вида поляризации:

*электронная*, или *деформационная*, *поляризация* диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит;

*ориентационная*, или *дипольная*, *поляризация* диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющихся дипольных моментов молекул по полю. Естественно, что

тепловое движение препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (электрическое поле и тепловое движение) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура;

**ионная поляризация** диэлектриков с ионными кристаллическими решетками, заключающаяся в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных — против поля, приводящем к возникновению дипольных моментов.

### § 88. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике

При помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле он поляризуется, т. е. приобретает отличный от нуля дипольный момент  $\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i$ , где  $p_i$  — дипольный момент  $i$ -й молекулы. Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной — *поляризованностью*, определяемой как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}. \quad (88.1)$$

Из опыта следует, что для большого класса диэлектриков (за исключением сегнетоэлектриков, см. § 91) поляризованность  $P$  линейно зависит от напряженности поля  $\vec{E}$ . Если диэлектрик изотропный и  $\vec{E}$  не слишком велико, то

$$\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (88.2)$$

где  $\varepsilon$  — *диэлектрическая восприимчивость вещества*, характеризующая

свойства диэлектрика;  $\varepsilon$  — величина безразмерная, причем всегда  $\varepsilon > 0$  и для большинства диэлектриков (твердых и жидких) составляет несколько единиц (хотя, например, для спирта за  $\approx 25$ , для воды  $\varepsilon = 80$ ).

Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в однородное внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$  (создается двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями) пластинку из однородного диэлектрика, расположив ее так, как показано на рис. 137. Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит смещение зарядов: положительные смещаются по полю, отрицательные — против поля. В результате этого на правой грани диэлектрика, обращенного к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью  $+\sigma'$ , на левой — отрицательного заряда с поверхностной плотностью  $-\sigma'$ . Эти нескомпенсированные *заряды*, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются *связанными*.

Поверхностная плотность  $\sigma'$  меньше плотности  $\sigma$  свободных зарядов плоскостей, поэтому не все поле  $\vec{E}$  компенсируется полем зарядов диэлектрика: часть линий напряженности пройдет сквозь диэлектрик, другая же часть обрывается на связанных зарядах. Следовательно, поляризация диэлектрика

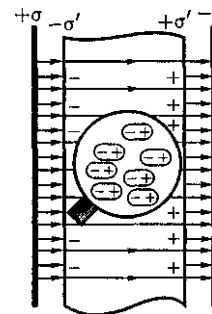


Рис. 137

вызывает уменьшение в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем. Вне диэлектрика  $E = E_0$ .

Таким образом, появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля  $E'$  (поля, создаваемого *связанными зарядами*), которое направлено против внешнего поля  $E_0$  (поля, создаваемого *свободными зарядами*) и ослабляет его. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'$$

Поле  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$  [поле, созданное двумя бесконечными заряженными плоскостями; см. формулу (82.2)], поэтому

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (88.3)$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma'$ . По (88.1) полный дипольный момент пластинки диэлектрика  $p_V = PV = PSd$ , где  $S$  — площадь грани пластинки,  $d$  — ее толщина. С другой стороны, полный дипольный момент, согласно (80.3), равен произведению связанного заряда каждой грани  $Q' = \sigma'S$  на расстояние  $d$  между ними, т.е.  $p_V = \sigma'Sd$ . Таким образом,  $PSd = \sigma'Sd$  или

$$\sigma' = P, \quad (88.4)$$

т.е. поверхностная плотность  $\sigma$  связанных зарядов равна поляризованности  $P$ .

Подставив в (88.3) выражения (88.4) и (88.2), получаем

$$E = E_0 - \alpha E,$$

откуда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (88.5)$$

Безразмерная величина

$$\epsilon = 1 + \alpha \quad (88.6)$$

называется *диэлектрической проницаемостью среды*. Сравнивая (88.5) и (88.6), видим, что  $\epsilon$  показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком, и характеризует количественно свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

### § 89. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Напряженность электростатического поля, согласно (88.5), зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля  $E$  обратно пропорциональна  $\epsilon$ . Вектор напряженности  $\vec{E}$ , переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчетах электростатических полей. Поэтому оказалось необходимым помимо вектора напряженности характеризовать поле еще *вектором электрического смещения*, который для электрически изотропной среды, по определению,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (89.1)$$

Используя формулы (88.6) и (88.2), вектор электрического смещения можно выразить как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (89.2)$$

*Единица электрического смещения — кулон на метр в квадрате* ( $\text{Кл}/\text{м}^2$ ).

Рассмотрим, с чем можно связать вектор электрического смещения. Связанные заряды появляются в диэлектрике при наличии внешнего электростатического поля, создаваемого систе-

мой свободных электрических зарядов, т. е. в диэлектрике на электростатическое поле свободных зарядов накладывается дополнительное поле связанных зарядов. *Результирующее поле* в диэлектрике описывается вектором напряженности  $E$ , и потому он зависит от свойств диэлектрика.

Вектором  $D$  описывается электростатическое поле, создаваемое *свободными зарядами*. Связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызывать, однако, перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому вектор  $\vec{D}$  характеризует электростатическое поле, создаваемое *свободными зарядами* (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при *наличии диэлектрика*.

Аналогично, как и поле  $\vec{E}$ , поле  $D$  изображается с помощью *линий электрического смещения*, направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий напряженности (см. § 79).

*Линии вектора  $\vec{E}$  могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах — свободных и связанных, в то время как линии вектора  $D$  — только на свободных зарядах.* Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $D$  проходят не прерываясь.

Для произвольной *замкнутой* поверхности  $S$  поток вектора  $D$  сквозь эту поверхность

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS,$$

где  $D_n$  — проекция вектора  $D$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$ .

**Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:**

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad (89.3)$$

т. е. поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности *свободных* электрических зарядов. В такой форме теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред.

Для вакуума  $D_n = \epsilon_0 E_n$  ( $\epsilon = 1$ ), тогда поток вектора напряженности  $E$  сквозь произвольную замкнутую поверхность [ср. с (81.2)] равен

$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Так как источниками поля  $\vec{E}$  в среде являются как свободные, так и связанные заряды, то теорему Гаусса (81.2) для поля  $\vec{E}$  в самом общем виде можно записать как

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \epsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i + \sum_{i=1}^k Q_{i\text{св}},$$

где  $\sum_{i=1}^n Q_i$  и  $\sum_{i=1}^k Q_{i\text{св}}$  — соответственно алгебраические суммы свободных и связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью  $S$ . Однако эта формула *неприемлема* для описания поля  $\vec{E}$  в диэлектрике, так как она выражает свойства неизвестного поля  $\vec{E}$  через связанные заряды, которые, в свою очередь, определяются им же. Это еще раз доказывает целесообразность введения вектора электрического смещения.

## § 90. Условия на границе раздела двухдиэлектрических сред

Рассмотрим связь между векторами  $\vec{E}$  и  $D$  на границе раздела двух однород-

ных изотропных диэлектриков (диэлектрические проницаемости которых  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) при отсутствии на границе свободных зарядов. Построим вблизи границы раздела диэлектриков 1 и 2 небольшой замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  длиной  $l$ , ориентируя его так, как показано на рис. 138. Согласно теореме (83.3) о циркуляции вектора  $E$ ,

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

откуда

$$E_{\tau 1} l - E_{\tau 2} l = 0$$

(знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам  $BC$  и  $DA$  ничтожно малы). Поэтому

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (90.1)$$

Заменяя, согласно (89.1), проекции вектора  $\vec{E}$  проекциями вектора  $D$ , деленными на  $\epsilon_0 \epsilon$ , получим

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (90.2)$$

На границе раздела двух диэлектриков (рис. 139) построим прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое — во втором. Основания  $\Delta S$  настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $D$  одинаков. Согласно теореме Гаусса (89.3),

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = 0$$

(нормали  $n$  и  $n'$  к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (90.3)$$

Заменяя, согласно (89.1), проекции вектора  $D$  проекциями вектора  $E$ , умноженными на  $\epsilon_0 \epsilon$ , получим

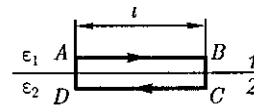


Рис. 138

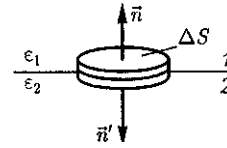


Рис. 139

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_{\tau}$ ) и нормальная составляющая вектора  $D$  ( $D_n$ ) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_n$ ) и тангенциальная составляющая вектора  $D$  ( $D_{\tau}$ ) претерпевают скачок.

Из условий (90.1) — (90.4) для составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  следует, что линии этих векторов испытывают излом (преломляются). Найдем связь между углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (на рис. 140  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ). Согласно (90.1) и (90.4),  $E_{\tau 2} = E_{\tau 1}$  и  $\epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1}$ . Разложим векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  у границы раздела на тангенциальные и нормальные составляющие. Из рис. 140 следует

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{\tau 2} / E_{n2}}{E_{\tau 1} / E_{n1}}.$$

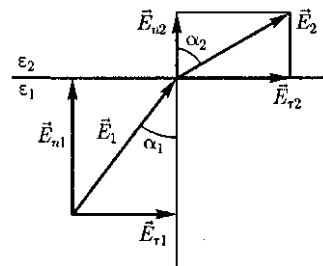


Рис. 140

Учитывая записанные выше условия, получим закон преломления линий напряженности  $E$  (а значит, и линий смещения  $D$ )

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

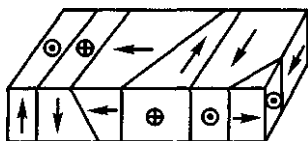
Эта формула показывает, что, входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии  $E$  и  $D$  удаляются от нормали.

## § 91. Сегнетоэлектрики

**Сегнетоэлектрики** — диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур *спонтанной* (самопроизвольной) *поляризованностью*, т. е. поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля. К сегнетоэлектрикам относятся, например, детально изученные И. В. Курчатовым (1903 — 1960) и П. П. Кобеко (1897-1954) сегнетова соль  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  (от нее и получили свое название сегнетоэлектрики) и титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ .

При отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик представляет собой как бы мозаику из **доменов** — областей с различными направлениями поляризованности. Это схематически показано на примере титаната бария (рис. 141), где стрелки и знаки  $\odot$ ,  $\oplus$  указывают направление вектора  $P$ . Так как в смежных доменах эти направления различны, то в целом дипольный момент диэлектрика равен нулю. При внесении сегнетоэлектрика во внешнее поле происходит переориентация ди-

Рис. 141



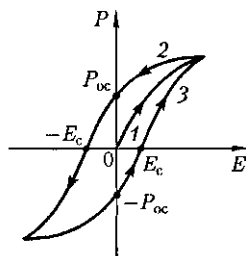
польных моментов доменов по полю, а возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля. Поэтому сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли, например,  $\varepsilon_{\max} \approx 10^4$ ).

Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура, выше которой его необычные свойства исчезают и он становится обычным диэлектриком. Эта температура называется **точкой Кюри** [в честь французского физика Пьера Кюри (1859 — 1906)]. Как правило, сегнетоэлектрики имеют только одну точку Кюри; исключение составляют лишь сегнетова соль ( $-18$  и  $+24$  °C) и изоморфные с ней соединения. В сегнетоэлектриках вблизи точки Кюри наблюдается также резкое возрастание теплоемкости вещества. Превращение сегнетоэлектриков в обычный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, сопровождается фазовым переходом II рода (см. § 75).

Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  (а следовательно, и диэлектрическая восприимчивость  $\varepsilon$ ) сегнетоэлектриков зависит от напряженности  $\vec{E}$  поля в веществе, а для других диэлектриков эти величины являются характеристиками вещества.

Для сегнетоэлектриков формула (88.2) не соблюдается; для них связь между векторами поляризованности ( $P$ ) и напряженности ( $\vec{E}$ ) *нелинейная* и зависит от значений  $E$  в предшествующие моменты времени. В сегнетоэлектриках наблюдается явление **диэлектрического гистерезиса** («запаздывания»). Как видно из рис. 142, с увеличением напряженности  $E$  внешнего электри-

Рис. 142



ческого поля поляризованность  $P$  растет, достигая насыщения (кривая 1). Уменьшение  $P$  с уменьшением  $E$  происходит по кривой 2, и при  $E = 0$  сегнетоэлектрик сохраняет **остаточную поляризованность**  $P_{0c}$ , т.е. сегнетоэлектрик остается поляризованным в отсутствие внешнего электрического поля.

Чтобы уничтожить остаточную поляризованность, надо приложить электрическое поле обратного направления ( $-E_c$ ). Величина  $E_c$  называется **коэрцитивной силой** (от лат. *coercitio* — удержание). Если далее изменять  $E$ , то  $P$  изменяется по кривой 3 **петли гистерезиса**.

Интенсивному изучению сегнетоэлектриков послужило открытие академиком Б.М.Вулом (1903—1985) аномальных диэлектрических свойств титаната бария. Титанат бария из-за его химической устойчивости и высокой механической прочности, а также из-за сохранения сегнетоэлектрических свойств в широком температурном интервале нашел большое научно-техническое применение (например, в качестве генератора и приемника ультразвуковых волн). В настоящее время известно более сотни сегнетоэлектриков, не считая их твердых растворов. Сегнетоэлектрики широко применяются также в качестве материалов, обладающих большими значениями  $\epsilon$  (например, в конденсаторах).

Следует упомянуть еще о **пьезоэлектриках** — кристаллических веществах, в ко-

торых при сжатии или растяжении в определенных направлениях возникает поляризованность даже в отсутствие внешнего электрического поля (**прямой пьезоэффект**).

Наблюдается и **обратный пьезоэффект** — появление механической деформации под действием электрического поля. У некоторых пьезоэлектриков решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов, в результате чего они оказываются поляризованными даже без внешнего электрического поля. Такие кристаллы называются **пироэлектриками**.

Еще существуют **электреты** — диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электрического поля (электрические аналоги постоянных магнитов). Эти группы веществ находят широкое применение в технике и бытовых устройствах.

## §92. Проводники в электростатическом поле

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться. Перемещение зарядов (ток) продолжается до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль. Это происходит в течение очень короткого времени. В самом деле, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии. Итак, напряженность поля во всех точках внутри проводника равна нулю:

$$\vec{E} = 0.$$

Отсутствие поля внутри проводника означает, согласно (85.2), что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен ( $\varphi = \text{const}$ ), т.е. поверхность проводника в электростатическом поле является *эквипотенциальной* (см. § 85). Отсюда же следует, что вектор напряженности поля на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей  $\vec{E}$  заряды начали бы по поверхности проводника перемещаться, что, в свою очередь, противоречило бы равновесному распределению зарядов.

Если проводнику сообщить некоторый заряд  $Q$ , то нескомпенсированные заряды располагаются *только на поверхности* проводника. Это следует непосредственно из теоремы Гаусса (89.3), согласно которой заряд  $Q$ , находящийся внутри проводника в некотором объеме, ограниченном произвольной замкнутой поверхностью,

$$Q = \oint_s \vec{D} d\vec{S} = \oint_s D_n dS = 0,$$

так как во всех точках внутри поверхности  $D = 0$ .

Найдем взаимосвязь между напряженностью  $E$  поля вблизи поверхности заряженного проводника и поверхностной плотностью  $\sigma$  зарядов на его поверхности. Для этого применим теорему Гаусса к бесконечно малому цилиндру с основаниями  $AS$ , пересекаю-

щему границу «проводник — диэлектрик». Ось цилиндра ориентирована вдоль вектора  $\vec{E}$  (рис. 143). Поток вектора электрического смещения через внутреннюю часть цилиндрической поверхности равен нулю, так как внутри проводника  $\vec{E}_1$  (а следовательно, и  $D_1$ ) равен нулю, поэтому поток вектора  $D$  сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность определяется только потоком сквозь наружное основание цилиндра. Согласно теореме Гаусса (89.3), этот поток ( $DAS$ ) равен сумме зарядов ( $Q = \sigma \Delta S$ ) охватываемых поверхностью:  $DAS = \sigma \Delta S$ , т.е.

$$D = \sigma \quad (92.1)$$

или

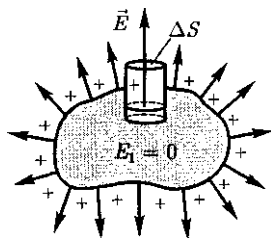
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (92.2)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Таким образом, напряженность электростатического поля у поверхности проводника определяется поверхностной плотностью зарядов. Можно показать, что соотношение (92.2) задает напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника *любой формы*.

Если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны, ионы) будут перемещаться: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рис. 144, *a*). На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, на другом — избыток отрицательного. Эти *заряды* называются *индуцированными*. Процесс будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными его поверхности

Рис. 143





(рис. 144, б). Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности; они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных. Индуцированные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется *электростатической индукцией*.

Из рис. 144, б следует, что индуцированные заряды появляются на проводнике вследствие *смещения* их под действием поля, т. е. является поверхностной плотностью смещенных зарядов. По (92.1), электрическое смещение  $D$  вблизи проводника численно равно поверхностной плотности смещенных зарядов. Поэтому вектор  $D$  получил название *вектора электрического смещения*.

Так как в состоянии равновесия внутри проводника заряды отсутствуют, то создание внутри него полости не повлияет на конфигурацию расположения зарядов и тем самым на электростатическое поле. Следовательно, внутри полости поле будет отсутствовать. Если теперь этот проводник с полостью заземлить, то потенциал во всех точках полости будет нулевым, т. е. полость полностью изолирована от влияния внешних электростатических полей. На этом основана *электростатическая защита* — экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Вместо сплошного проводника для защиты может быть использована густая металлическая сетка, которая, кстати, является эффективной при наличии не только постоянных, но и переменных электрических полей.

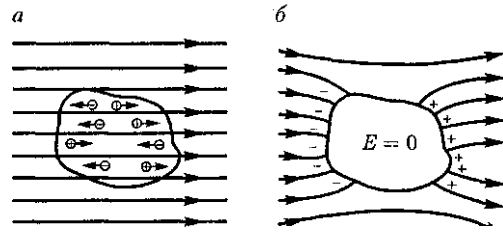


Рис. 144

Свойство зарядов располагаться на внешней поверхности проводника используется для устройства *электростатических генераторов*, предназначенных для накопления больших зарядов и достижения разности потенциалов в несколько миллионов вольт. Электростатический генератор, изобретенный американским физиком Р. Вандер-Графом (1901 — 1967), состоит из шарообразного полого проводника 1 (рис. 145), укрепленного на изоляторах 2. Движущаяся замкнутая лента 3 из прорезиненной ткани заряжается от источника напряжения с помощью системы острий 4, соединенных с одним из полюсов источника, второй полюс которого заземлен. Заземленная пластина 5 усиливает стекание зарядов с острий на ленту. Другая система острий 6 снимает заряды с ленты и передает их полую шару, и они переходят на его

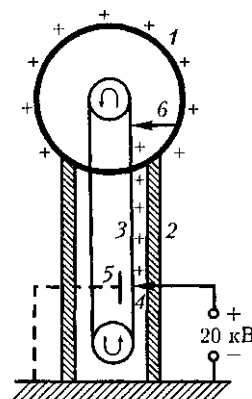


Рис. 145

внешнюю поверхность. Таким образом, сфере передается постепенно большой заряд и удаётся достичь разности потенциалов в несколько миллионов вольт. Электростатические генераторы применяются в высоковольтных ускорителях заряженных частиц, а также в слаботочной высоковольтной технике.

### § 93. Электроёмкость уединенного проводника

Рассмотрим *уединенный проводник*, т. е. проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Его потенциал, согласно (84.5), пропорционален заряду проводника.

Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют различные потенциалы. Поэтому для уединенного проводника можно записать

$$Q = C\varphi.$$

Величину

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad (93.1)$$

называют *электроёмкостью* (или просто *ёмкостью*) уединенного проводника. Ёмкость уединенного проводника определяется зарядом, сообщением которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

Ёмкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Ёмкость также не зависит от заряда проводника и его потенциала.

*Единица электроёмкости — фарад (Ф): 1 Ф — ёмкость такого уединенно-*

*го проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.*

Согласно (84.5), потенциал уединенного шара радиусом  $R$ , находящегося в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\epsilon R}.$$

Используя формулу (93.1), получим, что ёмкость шара

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (93.2)$$

Отсюда следует, что ёмкостью **1 Ф** обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус  $R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^6$  км, что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли (электроёмкость Земли  $C \approx 0,7$  мФ). Следовательно, фарад — очень большая величина, поэтому на практике используются дольные единицы — миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ). Из формулы (93.2) вытекает также, что единица электрической постоянной  $\epsilon_0$  — фарад на метр (Ф/м) [см. (78.3)].

### § 94. Конденсаторы

Чтобы проводник обладал большой электроёмкостью, он должен иметь очень большие размеры (см. § 93). На практике, однако, необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать значительные по величине заряды, иными словами, обладать большой ёмкостью. Эти устройства получили название *конденсаторов*.

Если к заряженному проводнику приближать другие тела, то на них воз-

пикают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды, причем ближайшими к наводящему заряду  $Q$  будут заряды противоположного знака. Эти заряды, естественно, ослабляют поле, создаваемое зарядом  $Q$ , т.е. понижают потенциал проводника, что приводит [см. (93.1)] к повышению его емкости.

Конденсатор состоит из двух проводников (*обкладок*), разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияния окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора. Этому условию удовлетворяют (см. § 82): 1) две плоские пластины; 2) два коаксиальных цилиндра; 3) две концентрические сферы. Поэтому в зависимости от формы обкладок *конденсаторы* делят на *плоские, цилиндрические* и *сферические*.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и кончаются на другой, поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами. Под *емкостью конденсатора* понимается физическая величина, равная отношению заряда  $Q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) между его обкладками:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (94.1)$$

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью  $S$  каждая, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга и имеющих заряды  $+Q$  и  $-Q$ . Если расстояние меж-

ду пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то краевыми эффектами можно пренебречь и поле между обкладками считать однородным. Его можно рассчитать, используя формулы (86.1) и (94.1). При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов между ними, согласно (86.1),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (94.2)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость.

Тогда из формулы (94.1), заменяя  $Q = \sigma S$ , с учетом (94.2), получим выражение для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (94.3)$$

Для определения емкости цилиндрического конденсатора, состоящего из двух коаксиальных цилиндров радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ), вставленных один в другой, опять пренебрегая краевыми эффектами, считаем поле радиально-симметричным и сосредоточенным между цилиндрическими обкладками.

Разность потенциалов между обкладками вычислим по формуле (86.3) для поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра с линейной плотностью  $\tau = \frac{Q}{l}$  — длина обкладок). При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (94.4)$$

Подставив (94.4) в (94.1), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (94.5)$$

Для определения емкости сферического конденсатора, состоящего из двух концент-

рических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика, используем формулу (86.2) для разности потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) от центра заряженной сферической поверхности. При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (94.6)$$

Подставив (94.6) в (94.1), получим

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (94.7)$$

Если  $d = r_2 - r_1 \ll r_1$ , то  $r_2 \approx r_1 \approx r$  и  $C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}{d}$ . Так как  $4\pi r^2$  — площадь сферической обкладки, то получаем формулу (94.3). Таким образом, при малой величине зазора по сравнению с радиусом сферы выражения для емкости сферического и плоского конденсаторов совпадают. Этот вывод справедлив и для цилиндрического конденсатора: при малом зазоре между цилиндрами по сравнению с их радиусами в формуле (94.5) можно разложить в ряд, ограничиваясь только членом первого порядка. В результате опять приходим к формуле (94.3).

Из формул (94.3), (94.5) и (94.7) вытекает, что емкость конденсаторов любой формы пропорциональна диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Поэтому применение в качестве прослойки сегнетоэлектриков значительно увеличивает емкость конденсаторов.

Конденсаторы характеризуются *пробивным напряжением* — разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит

*пробой* — электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи, при этом используется их параллельное и последовательное соединения.

1. **Параллельное соединение конденсаторов** (рис. 146). У параллельно соединенных конденсаторов разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова и равна  $\varphi_A - \varphi_B$ . Если емкости отдельных конденсаторов  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то, согласно (94.1), их заряды равны

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1(\varphi_A - \varphi_B), \\ Q_2 &= C_2(\varphi_A - \varphi_B), \\ &\dots \dots \dots \\ Q_n &= C_n(\varphi_A - \varphi_B), \end{aligned}$$

а заряд батареи конденсаторов

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(\varphi_A - \varphi_B).$$

Полная емкость батареи

$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i,$$

т. е. при параллельном соединении конденсаторов она равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

2. **Последовательное соединение конденсаторов** (рис. 147). У последовательно соединенных конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i,$$

где для любого из рассматриваемых конденсаторов  $\Delta\varphi_i = \frac{Q}{C_i}$ . С другой стороны,

Рис. 146

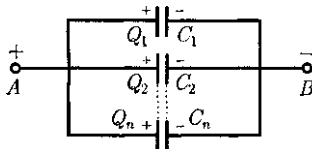
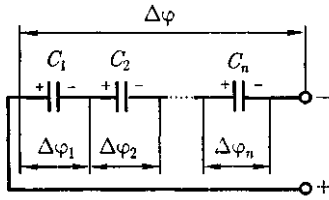


Рис. 147



$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям. Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость  $C$  всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

## § 95. Энергия системы зарядов, уединенного проводника и конденсатора. Энергия электростатического поля

**1. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.** Электростатические силы взаимодействия консервативны (см. § 83); следовательно, система зарядов обладает потенциальной энергией. Найдем потенциальную энергию системы двух неподвижных точечных зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга. Каждый из этих зарядов в поле другого обладает потенциальной энергией [см. (84.2) и (84.5)]:

$$W_1 = Q_1\varphi_{12}, \quad W_2 = Q_2\varphi_{21},$$

где  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  — соответственно потенциалы, создаваемые зарядом  $Q_2$  в точке нахождения заряда  $Q_1$  и зарядом  $Q_1$  в точке нахождения заряда  $Q_2$ .

Согласно (84.5),

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} \quad \text{и} \quad \varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r},$$

поэтому  $W_1 = W_2 = W$  и

$$W_1 = Q_1\varphi_{12} = Q_2\varphi_{21} = \frac{1}{2} (Q_1\varphi_{12} + Q_2\varphi_{21}).$$

Добавляя к системе из двух зарядов последовательно заряды  $Q_3, Q_4, \dots$ , можно убедиться в том, что в случае  $n$  неподвижных зарядов энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i\varphi_i, \quad (95.1)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд  $Q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го.

**2. Энергия заряженного уединенного проводника.** Пусть имеется уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого соответственно равны  $Q, C, \phi$ . Увеличим заряд данного проводника на  $dQ$ . Для этого необходимо перенести заряд  $dQ$  из бесконечности на уединенный проводник, затратив на это работу

$$dA = \varphi dQ = C\varphi d\varphi.$$

Чтобы зарядить тело от нулевого потенциала до  $\phi$ , необходимо совершить работу

$$A = \int_0^{\phi} C\varphi d\varphi = \frac{C\phi^2}{2}. \quad (95.2)$$

Энергия заряженного проводника равна той работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{Q\phi}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (95.3)$$

Формулу (95.3) можно получить исходя и из того, что потенциал проводника во всех его точках одинаков, так как поверхность проводника является эквипотенциальной. Полагая потенциал проводника равным  $\varphi$ , из формулы (95.1) найдем

$$W = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{Q\varphi}{2},$$

где  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$  — заряд проводника.

**3. Энергия заряженного конденсатора.** Как всякий заряженный проводник, конденсатор обладает энергией, которая в соответствии с формулой (95.3) равна

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \quad (95)$$

где  $Q$  — заряд конденсатора;  $C$  — его емкость;  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Используя выражение (95.4), можно найти *механическую (пондеромоторную) силу*, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга. Предположим, что первоначальное расстояние  $x$  между пластинами увеличиваем на  $\delta x$ . При этом приложенная к пластине сила совершает работу  $\delta A = F \delta x$  за счет уменьшения потенциальной энергии системы:  $F \delta x = -\delta W$ , откуда

$$F = -\frac{dW}{dx} \quad (95.5)$$

Подставив в (95.4) выражение (94.3), получим

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} x. \quad (95.6)$$

Производя дифференцирование при конкретном значении энергии [см. (95.5) и (95.6)], найдем искомую силу:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S},$$

где знак « $\rightarrow$ » указывает, что сила  $F$  является силой притяжения.

4. Энергия электростатического поля. Преобразуем формулу (95.4), выражающую энергию плоского конденсатора посредством зарядов и потенциалов, воспользовавшись выражением для емкости плоского конденсатора ( $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ ) и разности потенциалов между его обкладками ( $\Delta\varphi = Ed$ ). Тогда

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V, \quad (95.7)$$

где  $V = Sd$  — объем конденсатора.

Формула (95.7) показывает, что энергия конденсатора выражается через величину, характеризующую электростатическое поле, — *напряженность  $E$* .

*Объемная плотность* энергии электростатического поля (энергия единицы объема)

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} \quad (95.8)$$

Выражение (95.8) справедливо только для *изотропного диэлектрика*, для которого выполняется соотношение (88.2):  $\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ .

Формулы (95.4) и (95.7) соответственно связывают энергию конденсатора с *зарядом* на его обкладках и с *напряженностью поля*. Возникает, естественно, вопрос о локализации энергии и что является ее носителем — заряды или поле? Ответ на этот вопрос мол-сет дать только опыт. Электростатика изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, т. е. в ней поля и обусловившие их заряды неотделимы друг от друга, поэтому электростатика ответить на поставленные вопросы не может.

Дальнейшее развитие теории и эксперимента показало, что переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбуждавших их зарядов, и распространяться в пространстве в

виде электромагнитных волн, способных переносить энергию. Это убедительно подтверждает основное положение *теории близкодействия: энергия локализована в поле и носителем энергии является поле.*

### Контрольные вопросы

- В чем заключается закон сохранения заряда? Приведите примеры проявления закона.
- Запишите, сформулируйте и объясните закон Кулона.
- Какие поля называют электростатическими?
- Что такое напряженность  $E$  электростатического поля?
- Каково направление вектора напряженности  $E$ ? Единица напряженности в СИ.
- Что такое поток вектора  $E$ ? Единица его в СИ?
- Электрический диполь помещен внутрь замкнутой поверхности. Каков поток  $\Phi_E$  сквозь эту поверхность?
- Пользуясь принципом суперпозиции, найдите в поле двух точечных зарядов  $+Q$  и  $+2Q$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, точку, где напряженность поля равна нулю.
- Чему равно отношение напряженностей электростатических полей в точке  $A$ , лежащей на продолжении оси диполя, и в точке  $B$ , лежащей на перпендикуляре, проходящем через середину  $O$  оси этого диполя, если  $OA = OB$ ?
- В чем заключается физический смысл теоремы Гаусса для электростатического поля в вакууме?
- Что такое линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов?
- Как показать, что электростатическое поле является потенциальным?
- Что называется циркуляцией вектора напряженности?
- Дайте определения потенциала данной точки электростатического поля и разности потенциалов двух точек поля. Каковы их единицы?
- Приведите графики зависимостей  $E(r)$  и  $\varphi(r)$  для равномерно заряженной сферической поверхности. Дайте их объяснение и обоснование.
- Какова связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля? Выведите ее и объясните. Каков физический смысл этих понятий?
- Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?
- Что такое поляризованность?
- Что показывает диэлектрическая проницаемость среды?
- Выведите связь между диэлектрическими восприимчивостью вещества и проницаемостью среды.
- В чем различие поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами?
- Определите, чему равна диэлектрическая проницаемость при построении рис. 137.
- Как определяется вектор электрического смещения? Что он характеризует?
- Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
- Выведите и прокомментируйте условия для векторов  $E$  и  $D$  на границе раздела двух диэлектрических сред.
- Каковы напряженность и потенциал поля, а также распределение зарядов внутри и на поверхности заряженного проводника?
- На чем основана электростатическая защита?
- Три одинаковых конденсатора один раз соединены последовательно, другой — параллельно. Во сколько раз и когда емкость батареи будет больше?
- Может ли электростатика ответить на вопрос: где локализована энергия и что является ее носителем — заряды или поле? Почему?

Выведите формулы для энергии заряженного конденсатора, выражая ее через заряд па обкладках конденсатора и через напряженность поля.

## ЗАДАЧИ

11.1. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин плотностью  $0,8 \text{ г/см}^3$ . Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина  $\epsilon = 2$ . [ $1,6 \text{ г/см}^3$ ]

11.2. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью  $\sigma = 1,5 \text{ нКл/см}^2$  расположена круглая пластинка. Плоскость пластинки составляет с линиями напряженности угол  $\alpha = 45^\circ$ . Определите поток вектора напряженности через эту пластинку, если ее радиус  $r = 10 \text{ см}$ . [ $1,88 \text{ кВ} \cdot \text{м}$ ]

11.3. Кольцо радиусом  $r = 10 \text{ см}$  из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью  $\tau = 10 \text{ нКл/м}$ . Определите напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца в точке  $A$ , удаленной на расстояние  $o = 20 \text{ см}$  от центра кольца. [ $1 \text{ кВ/м}$ ]

11.4. Шар радиусом  $R = 10 \text{ см}$  заряжен равномерно с объемной плотностью  $\rho = 5 \text{ нКл/м}^3$ . Определите напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии  $r_1 = 2 \text{ см}$  от центра шара; 2) на расстоянии  $r_2 = 12 \text{ см}$  от центра шара. Постройте зависимость  $E(r)$ . [1)  $3,77 \text{ В/м}$ ; 2)  $13,1 \text{ В/м}$ ]

11.5. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью  $\tau = 1 \text{ нКл/см}$ . Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния  $r_1 = 2,5 \text{ см}$  до  $r_2 = 1,5 \text{ см}$ ? [ $18 \text{ Мм/с}$ ]

11.6. Электростатическое поле создается сферой радиусом  $R = 4 \text{ см}$ , равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$ . Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях  $r_1 = 6 \text{ см}$  и  $r_2 = 10 \text{ см}$ . [ $1,2 \text{ В}$ ]

11.7. Определите линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда  $Q = 1 \text{ нКл}$  с расстояния  $r_1 = 10 \text{ см}$  до  $r_2 = 5 \text{ см}$  в направлении, перпендикулярном нити, равна  $0,1 \text{ мДж}$ . [ $8 \text{ мкКл/м}$ ]

11.8. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено парафином ( $\epsilon = 2$ ). Расстояние между пластинами  $d = 8,85 \text{ мм}$ . Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла  $0,05 \text{ нКл/см}^2$ ? [ $500 \text{ В}$ ]

11.9. Свободные заряды с объемной плотностью  $\rho = 10 \text{ нКл/м}^3$  равномерно распределены по шару радиусом  $R = 5 \text{ см}$  из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 6$ . Определите напряженности электростатического поля на расстояниях  $r_1 = 2 \text{ см}$  и  $r_2 = 10 \text{ см}$  от центра шара. [ $E_1 = 1,25 \text{ В/м}$ ;  $E_2 = 23,5 \text{ В/м}$ ]

11.10. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ( $\epsilon = 7$ ). Расстояние между пластинами  $d = 5 \text{ мм}$ , разность потенциалов  $U = 500 \text{ В}$ . Определите энергию поляризованной стеклянной пластины, если ее площадь  $S = 50 \text{ см}^2$ . [ $6,64 \text{ мкДж}$ ]

11.11. Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C = 10 \text{ пФ}$  заряжен до разности потенциалов  $U = 1 \text{ кВ}$ . После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в два раза. Определите: 1) разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин. [1)  $2 \text{ кВ}$ ; 2)  $5 \text{ мкДж}$ ]

11.12. Разность потенциалов между пластинами конденсатора  $U = 200 \text{ В}$ . Площадь каждой пластины  $S = 100 \text{ см}^2$ , расстояние между пластинами  $d = 1 \text{ мм}$ , пространство между ними заполнено парафином ( $\epsilon = 2$ ). Определите силу притяжения пластин друг к другу. [ $3,54 \text{ мН}$ ]



## Глава 12

# ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### § 96. Электрический ток, сила и плотность тока

В *электродинамике* — разделе учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов или макроскопических заряженных тел, — важнейшим понятием является понятие электрического тока.

*Электрическим током* называется любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля  $\vec{E}$  свободные электрические заряды перемещаются: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рис. 148, а), т.е. в проводнике возникает электрический ток, называемый *током проводимости*.

Если же упорядоченное движение электрических зарядов осуществляется перемещением в пространстве заряженного макроскопического тела (рис. 148, б), то возникает так называемый *конвекционный ток*.

Для возникновения и существования электрического тока необходимо, с одной стороны, наличие свободных *носителей тока* — заряженных частиц,

способных перемещаться упорядоченно, а с другой — *наличие электрического поля*, энергия которого, каким-то образом восполняясь, расходовалась бы на их упорядоченное движение. **За** направление тока *условно* принимают направление движения *положительных зарядов*.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока  $I$**  — скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется **постоянным**. Для постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t},$$

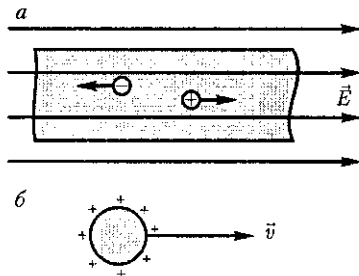
где  $Q$  — электрический заряд, проходящий за время  $t$  через поперечное сечение проводника. *Единица силы тока — ампер (А)* [см. Введение].

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется **плотностью тока**:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Выразим силу и плотность тока через скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения зарядов в проводнике. Если концентрация носителей тока равна  $n$  и

Рис. 148



каждый носитель имеет элементарный заряд  $e$  (что не обязательно для ионов), то за время  $dt$  через поперечное сечение  $S$  проводника переносится заряд  $dQ = ne(v)Sdt$ . Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = ne\langle v \rangle S,$$

а плотность тока  $j$  —  $ne(v)$ .

Плотность тока — *вектор*; направление вектора  $j$  совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов:

$$\vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle. \quad (96.1)$$

*Единица плотности тока — ампер на метр в квадрате* ( $A/m^2$ ).

Сила тока сквозь произвольную поверхность  $S$  определяется как поток вектора  $j$ , т.е.

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (96.2)$$

где  $dS = \vec{n}dS$  ( $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к площадке  $dS$ , составляющей с вектором  $j$  угол  $\alpha$ ).

## § 97. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Если в цепи на носители тока действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей (они предполагаются положительными) от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приводит к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за

счет работы сил *неэлектростатического происхождения*. Такие устройства называются *источниками тока*.

*Силы неэлектростатического происхождения*, действующие на заряды со стороны источников тока, называются *сторонними*.

Природа сторонних сил может быть различной. Например, в гальванических элементах они возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе — за счет механической энергии вращения ротора генератора и т. п. Роль источника тока в электрической цепи, образно говоря, такая же, как роль насоса, который необходим для перекачивания жидкости в гидравлической системе. Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

Сторонние силы совершают работу по перемещению электрических зарядов. Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется *электродвижущей силой* (ЭДС), действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{Q_0}. \quad (97.1)$$

Эта работа производится за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину  $\mathcal{E}$  можно также называть электродвижущей силой источника тока, включенного в цепь. Часто, вместо того чтобы сказать: «в цепи действуют сторонние силы», говорят: «в цепи действует ЭДС», т.е. термин «электродвижущая сила» употребляется

ся как характеристика сторонних сил. ЭДС, как и потенциал, выражается в вольтах [ср. (84.9) и (97.1)].

Сторонняя сила  $F_{\text{ст}}$ , действующая на заряд  $Q_0$ , может быть выражена как

$$\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}_{\text{ст}} Q_0,$$

где  $E_{\text{ст}}$  — напряженность поля сторонних сил.

Работа сторонних сил по перемещению заряда  $Q_0$  на замкнутом участке цепи

$$A = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = Q_0 \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (97.2)$$

Разделив (97.2) на  $Q_0$ , получим выражение для ЭДС, действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l},$$

т.е. ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил. ЭДС, действующая на участке  $1-2$ , равна

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (97.3)$$

На заряд  $Q_0$  помимо сторонних сил действуют также силы электростатического поля  $F_c = Q_0 E$ . Таким образом, результирующая сила, действующая в цепи на заряд  $Q_0$ , равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_c = Q_0 (\vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}).$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом  $Q_0$  на участке  $1-2$ , равна

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} + Q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Используя выражения (97.3) и (84.8), можем записать

$$A_{12} = Q_0 \mathcal{E}_{12} + Q_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (97.4)$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю (см. § 83), поэтому в данном случае  $A_{12} = Q_0 \mathcal{E}_{12}$ .

**Напряжением**  $U$  на участке  $1-2$  называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи. Таким образом, согласно (97.4),

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Понятие напряжения является обобщением понятия разности потенциалов: напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов в том случае, если на этом участке не действует ЭДС, т.е. сторонние силы отсутствуют.

## § 98. Закон Ома.

### Сопrotивление проводников

Немецкий физик Г. Ом (1787—1854) экспериментально установил, что сила тока  $I$ , текущего по *однородному* металлическому проводнику (т.е. проводнику, в котором не действуют сторонние силы), пропорциональна напряжению  $U$  на концах проводника

$$I = \frac{U}{R}, \quad (98.1)$$

где  $R$  — электрическое сопротивление проводника.

Уравнение (98.1) выражает **закон Ома для участка цепи** (не содержащего источника тока): сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника. Формула (98.1) позволяет установить *единицу сопротивления ом* (Ом): 1 Ом — сопротивление такого провод-

ника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А.

Величина

$$G = \frac{1}{R}$$

называется **электрической проводимостью** проводника. *Единица проводимости — сименс (См): 1 См — проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом. Сопротивление проводников зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен. Для однородного линейного проводника сопротивление  $R$  прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади его поперечного сечения  $S$ :*

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (98.2)$$

где  $\rho$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий материал проводника и называемый **удельным электрическим сопротивлением**.

*Единица удельного электрического сопротивления — ом-метр (Ом\*м). Наименьшим удельным сопротивлением обладают серебро ( $1,6 \cdot 10^{-8}$  Ом \* м) и медь ( $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом \* м). На практике наряду с медными применяются алюминиевые провода. Хотя алюминий и имеет большее, чем медь, удельное сопротивление ( $2,6 \cdot 10^{-8}$  Ом \* м), но зато обладает меньшей плотностью по сравнению с медью.*

Закон Ома можно представить в дифференциальной форме. Подставив выражение для сопротивления (98.2) в закон Ома (98.1), получим

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}, \quad (98.3)$$

где величина, обратная удельному сопротивлению,

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

называется **удельной электрической проводимостью** вещества проводника. Ее единица — *сименс на метр (См/м)*.

Учитывая, что  $\frac{U}{l} = E$  — напряженность электрического поля в проводнике,  $\frac{I}{S} = j$  — плотность тока, формулу (98.3) можно записать в виде

$$j = \gamma E. \quad (98.4)$$

Так как в изотропном проводнике носители тока в каждой точке движутся в направлении вектора  $\vec{E}$ , то направления  $j$  и  $E$  совпадают. Поэтому формулу (98.4) можно записать в виде

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (98.5)$$

Выражение (98.5) — *закон Ома в дифференциальной форме*, связывающий плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в этой же точке. Это соотношение справедливо и для переменных полей.

Опыт показывает, что в первом приближении изменение удельного сопротивления, а значит и сопротивления с температурой описывается линейным законом:

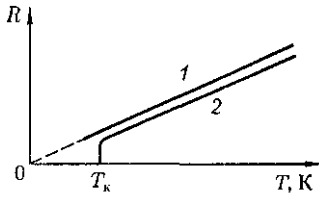
$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t),$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  — соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при  $t$  и  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  — *температурный коэффициент сопротивления*, для чистых металлов (при не очень низких температурах) близкий к  $1/273 \text{ K}^{-1}$ . Следовательно, температурная зависимость сопротивления может быть представлена в виде

$$R = \alpha R_0 T, \quad (98.6)$$

где  $T$  — термодинамическая температура.

Рис. 149



Зависимость сопротивления от температуры (98.6) представлена на рис. 149 (кривая 1). При низких температурах наблюдается отступление от этой зависимости.

Впоследствии было обнаружено, что сопротивление многих металлов (например, Al, Pb, Zn и др.) и их сплавов при очень низких температурах  $T_k$  (0,14 — 20 К), называемых *критическими*, характерных для каждого вещества, скачкообразно уменьшается до нуля (кривая 2), т.е. металл становится абсолютным проводником. Впервые это явление, названное *сверхпроводимостью*, обнаружено в 1911 г. Г. Камерлинг-Оннесом для ртути.

Явление сверхпроводимости объясняется на основе квантовой теории. Практическое использование сверхпроводящих материалов (в обмотках сверхпроводящих магнитов, в системах памяти ЭВМ и др.) затруднено из-за их низких критических температур. В настоящее время обнаружены и активно исследуются керамические материалы, обладающие сверхпроводимостью при температуре выше 140 К.

На зависимости электрического сопротивления металлов от температуры основано действие *термометров сопротивления*, которые позволяют по градуированной взаимосвязи сопротивления от температуры измерять температуру с точностью до 0,001 К. Термометры сопротивления, в которых в качестве рабочего вещества используются полупроводники, изготовленные по специальной технологии, называются

*термисторами*. Они позволяют измерять температуру с точностью до миллионных долей кельвин.

## § 99. Работа и мощность тока. Закон Джоуля—Ленца

Рассмотрим однородный проводник, к концам которого приложено напряжение  $U$ .

За время  $dt$  через сечение проводника переносится заряд  $dq = Idt$ . При этом силы электростатического поля и сторонние силы совершают работу [см. (84.6)]

$$dA = Udq = IUdt. \quad (99.1)$$

Если сопротивление проводника  $R$ , то, используя закон Ома (98.1), получим, что работа тока

$$dA = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (99.2)$$

Из (99.1) и (99.2) следует, что мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (99.3)$$

Если сила тока выражается в амперах, напряжение — в вольтах, сопротивление — в омах, то работа тока выражается в джоулях, а мощность в ваттах. На практике применяются также внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт · ч), киловатт-час (кВт · ч); 1 Вт · ч — работа тока мощностью 1 Вт в течение 1 ч; 1 Вт · ч = 3600 Вт · с =  $3,6 \cdot 10^3$  Дж; 1 кВт · ч =  $10^3$  Вт · ч =  $3,6 \cdot 10^6$  Дж.

Если ток проходит по *неподвижному* металлическому проводнику, то вся работа идет на его нагревание и, по закону сохранения энергии,

$$dQ = dA. \quad (99.4)$$

Таким образом, используя выражения (99.4), (99.1) и (99.2), получим

$$dQ = IU dt = PR dt = \frac{I^2}{R} dt. \quad (99.5)$$

Выражение (99.5) представляет собой **закон Джоуля — Ленца**, экспериментально установленный независимо друг от друга Дж. Джоулем и Э. Х. Ленцем<sup>1</sup>.

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем  $dV = dS dl$  (ось цилиндра совпадает с направлением тока), сопротивление которого  $R = \rho \frac{dl}{dS}$ . По закону Джоуля — Ленца за время  $dt$  в этом объеме выделится теплота

$$dQ = PR dt = \rho j^2 dV dt.$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется **удельной тепловой мощностью тока**. Она равна

$$w = \rho j^2. \quad (99.6)$$

Используя дифференциальную формулу закона Ома ( $j = \gamma E$ ) и соотношение  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ , получим

$$w = jE = \gamma E^2. \quad (99.7)$$

Формулы (99.6) и (99.7) являются обобщенным выражением **закона Джоуля — Ленца в дифференциальной форме**, пригодным для любого проводника.

Тепловое действие тока находит широкое применение в технике, которое началось с открытия в 1873 г. русским инженером А. Н. Лодыгиным (1847 — 1923) лампы накаливания.

На нагревании проводников электрическим током основано действие электрических муфельных печей, электрической дуги [открыта русским ин-

женером В. В. Петровым (1761 — 1834)], контактной электросварки, бытовых электронагревательных приборов и т. д.

## § 100. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Мы рассматривали закон Ома [см. (98.1)] для однородного участка цепи, т. е. такого, в котором не действует ЭДС (не действуют сторонние силы). Теперь рассмотрим **неоднородный участок цепи**, где действующую ЭДС на участке  $1-2$  обозначим через  $\mathcal{E}_{12}$ , а приложенную на концах участка разность потенциалов — через  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Если ток проходит по **неподвижным** проводникам, образующим участок  $1-2$ , то работа  $A_{12}$  всех сил (сторонних и электростатических), совершаемая над носителями тока, по закону сохранения и превращения энергии равна теплоте, выделяющейся на участке. Работа сил, совершаемая при перемещении заряда  $Q_0$  на участке  $1-2$ , согласно (97.4),

ЭДС  $\mathcal{E}_{12}$ , как и сила тока  $I$ , — величина скалярная. Ее необходимо брать либо с положительным, либо с отрицательным знаком в зависимости от знака работы, совершаемой сторонними силами. Если ЭДС способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении (в направлении  $1-2$ ), то  $\mathcal{E}_{12} > 0$ . Если ЭДС препятствует движению положительных зарядов в данном направлении, то  $\mathcal{E}_{12} < 0$ .

За время  $t$  в проводнике выделяется теплота [см. (99.5)]

$$Q = I^2 R t = IR(I t) = IR Q_0. \quad (100.2)$$

Из формул (100.1) и (100.2) получим

$$IR = \quad + \quad (100.3)$$

<sup>1</sup> Э. Х. Ленд (1804- 1865) - русский физик.

откуда

Выражение (100.3) или (100.4) представляет собой **закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме**, который является **обобщенным законом Ома**.

Если на данном участке цепи *источник тока отсутствует* ( $\mathcal{E}_{12} = 0$ ), то из (100.4) приходим к **закону Ома для однородного участка цепи** (98.1):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

[при отсутствии сторонних сил напряжение на концах участка равно разности потенциалов (см. § 97)]. Если же электрическая цепь *замкнута*, то выбранные точки 1 и 2 совпадают,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , тогда из (100.4) получаем **закон Ома для замкнутой цепи**:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где  $\mathcal{E}$  — ЭДС, действующая в цепи;  $R$  — суммарное сопротивление всей цепи.

В общем случае  $R = r + R_1$  ( $r$  — внутреннее сопротивление источника тока,  $R_1$  — сопротивление внешней цепи). Поэтому закон Ома для замкнутой цепи будет иметь вид

Если цепь *разомкнута* и, следовательно, в ней ток отсутствует ( $I = 0$ ), то из закона Ома (100.4) получим, что  $\mathcal{E}_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$ , т.е. ЭДС, действующая в разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на ее концах. Следовательно, для того чтобы найти ЭДС источника тока, надо измерить разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой цепи.

## § 101. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Обобщенный закон Ома [см. (100.3)] позволяет рассчитать практически любую сложную цепь. Однако непосредственный расчет разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров (контуров могут иметь общие участки, каждый из контуров может иметь несколько источников тока и т.д.), довольно сложен. Эта задача более просто решается с помощью *двух правил Кирхгофа*<sup>1</sup>.

Любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током, называется **узлом**. При этом ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, — отрицательным.

**Первое правило Кирхгофа**: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Например, для рис. 150 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения электрического заряда. Действительно, в случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае токи не могли бы оставаться постоянными.

**Второе правило Кирхгофа** является обобщением закона Ома для разветвленных цепей. Рассмотрим контур, состоящий из трех участков (рис. 151). Направление обхода по часовой стрел-

<sup>1</sup>Г. Кирхгоф (1824–1887) — немецкий физик.

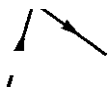


Рис. 150

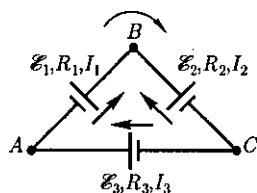


Рис. 151

ке примем за положительное, отметив, что выбор этого направления совершенно произволен. Все токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными, не совпадающие с направлением обхода — отрицательными. Источники тока считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура. Применяя к участкам закон Ома (100.3), можно записать:

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$I_1 R_1 - I_2 \quad \text{з. (101.1)}$$

Уравнение (101.1) выражает **второе правило Кирхгофа**: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивления  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $\mathcal{E}_k$ , встречающихся в этом контуре:

При расчете сложных цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать *произвольное* направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определится при решении задачи: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, отрицательным — его истинное направление противоположно выбранному.

2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение  $IR$  положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и, наоборот; ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против — отрицательными.

3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, иначе получатся уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

В качестве примера использования правил Кирхгофа рассмотрим схему (рис. 152) измерительного моста **Уитстона**<sup>1</sup>. Сопротивления  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  образуют его «плечи». Между точками  $A$  и  $B$  моста включена батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$  и сопротивлением  $r$ , между точками  $C$  и  $D$  включен гальванометр с сопротивлением  $R_G$ . Для узлов  $A, B$  и  $C$ , применяя первое правило Кирхгофа, получим

$$I_1 - I_2 - I_G = 0. \quad (101.3)$$

Для контуров  $ACBA, ACDA$  и  $CBDC$ , согласно второму правилу Кирхгофа, можно записать:

<sup>1</sup> Ч. Уитстон (1802—1875) — английский физик.



$$I_r r - I_2 R_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_G R_G = 0. \quad (101.4)$$

Если известны все сопротивления и ЭДС, то, решая полученные шесть уравнений, можно найти неизвестные токи. Изменяя известные сопротивления  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$ , можно добиться того, чтобы ток через гальванометр был равен нулю ( $I_G = 0$ ). Тогда из (101.3) найдем

из (101.4) получим

$$I_1 K_1 - I_4 K_4; \quad I_2 K_2 - I_3 K_3. \quad (101.6)$$

Из (101.5) и (101.6) вытекает, что

$$\cdot. \quad (101.7)$$

Таким образом, в случае равновесного моста ( $I_G = 0$ ) при определении искомого сопротивления  $R_1$  ЭДС батареи, сопротивления батареи и гальванометра роли не играют.

На практике обычно используется **реохордный мост Уитстона** (рис. 153), где сопротивления  $R_3$  и  $R_4$  представляют собой длинную однородную проволоку (реохорд) с большим удельным сопротивлением, так что отношение  $\frac{R_3}{R_4}$  можно заменить отноше-

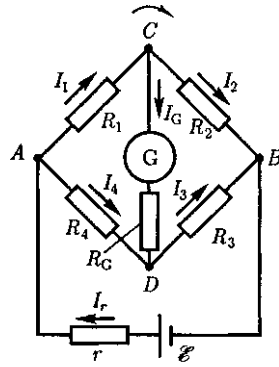


Рис. 152

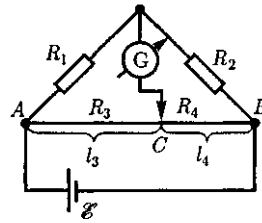


Рис. 153

нием  $\frac{l_3}{l_4}$ . Тогда, используя выражение (101.7), можно записать

$$R_1 = R_3 \frac{l_4}{l_3}. \quad (101.8)$$

Длины  $l_3$  и  $l_4$  легко измеряются по шкале, а  $R_2$  всегда известно. Поэтому уравнение (101.8) позволяет определить неизвестное сопротивление  $R_1$ .

### Контрольные вопросы

- Что называют силой тока? плотностью тока? Каковы их единицы? Дать определения.
- Назовите условия возникновения и существования электрического тока.
- Что такое сторонние силы? Какова их природа?
- В чем заключается физический смысл электродвижущей силы, действующей в цепи? напряжения? разности потенциалов?
- Почему напряжение является обобщенным понятием разности потенциалов?
- Какова связь между сопротивлением и проводимостью, удельным сопротивлением и удельной проводимостью?
- В чем заключается явление сверхпроводимости? Каковы его перспективы?
- На чем основано действие термометров сопротивления?
- Выведите законы Ома и Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.
- В чем заключается физический смысл удельной тепловой мощности тока?
- Проанализируйте обобщенный закон Ома. Какие частные законы можно из него получить?
- Поясните физический смысл электродвижущей силы, разности потенциалов и напряжения на участке электрической цепи.

- Как формулируются правила Кирхгофа? На чем они основаны?
- Как составляются уравнения, выражающие правила Кирхгофа?

## ЗАДАЧИ

12.1. По медному проводнику сечением  $1 \text{ мм}^2$  течет ток; сила тока  $1 \text{ А}$ . Определите среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди  $8,9 \text{ г/см}^3$ . [74 мкм/с]

12.2. Определите, во сколько раз возрастет сила тока, проходящего через платиновую печь, если при постоянном напряжении на зажимах ее температура повышается от  $t_1 = 20^\circ\text{С}$  до  $t_2 = 1200^\circ\text{С}$ . Температурный коэффициент сопротивления платины принять равным  $3,65 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . [В 5 раз]

12.3. По медному проводу сечением  $0,3 \text{ мм}^2$  течет ток  $0,3 \text{ А}$ . Определите силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление меди  $17 \text{ нОм} \cdot \text{м}$ . [ $2,72 \cdot 10^{-21} \text{ Н}$ ]

12.4. Сила тока в проводнике сопротивлением  $10 \text{ Ом}$  равномерно убывает от  $I_0 = 3 \text{ А}$  до  $I = 0$  за  $30 \text{ с}$ . Определите выделившееся за это время в проводнике количество теплоты. [900 Дж]

12.5. Плотность электрического тока в алюминиевом проводе равна  $5 \text{ А/см}^2$ . Определите удельную тепловую мощность тока, если удельное сопротивление алюминия  $26 \text{ нОм} \cdot \text{м}$ . [ $65 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ]

12.6. Определите внутреннее сопротивление  $r$  источника тока, если во внешней цепи при силе тока  $I_1 = 5 \text{ А}$  выделяется мощность  $P_1 = 10 \text{ Вт}$ , а при силе тока  $I_2 = 8 \text{ А}$  мощность  $P_2 = 12 \text{ Вт}$ . [0,17 Ом]

12.7. Три источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 1,8 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1,4 \text{ В}$  и  $\mathcal{E}_3 = 1,1 \text{ В}$  соединены накоротко одноименными полюсами. Внутреннее сопротивление первого источника  $r_1 = 0,4 \text{ Ом}$ , второго —  $r_2 = 0,6 \text{ Ом}$ . Определите внутреннее сопротивление третьего источника, если через первый источник идет ток  $I_1 = 1,13 \text{ А}$ . [0,2 Ом]

## Глава 13

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В МЕТАЛЛАХ, ВАКУУМЕ И ГАЗАХ

#### § 102. Элементарная классическая теория электропроводности металлов

Носителями тока в металлах являются свободные электроны, т. е. электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Это представление о природе носителей тока в металлах основывается на *элек-*

*тронной теории проводимости металлов*, созданной немецким физиком П. Друде (1863 — 1906) и разработанной впоследствии нидерландским физиком Х. Лоренцем, а также на ряде классических опытов, подтверждающих положения электронной теории.

Первый из таких опытов — *опыт Рикке*<sup>1</sup> (1901), в котором в течение года

<sup>1</sup> К. Рикке (1845— 1915) — немецкий физик.

электрический ток пропускаться через три последовательно соединенных с тщателью отшлифованными торцами металлических цилиндра (Cu, Al, Si) одинакового радиуса. Несмотря на то что общий заряд, прошедший через эти цилиндры, достигал огромного значения ( $\approx 3,5 \cdot 10^6$  Кл), никаких, даже микроскопических, следов переноса вещества не обнаружилось. Это явилось экспериментальным доказательством того, что ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, а перенос заряда в металлах осуществляется частицами, которые являются *общими* для всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. английским физиком Д.Томсоном (1856 — 1940) электроны.

Для доказательства этого предположения необходимо было определить знак и величину удельного заряда носителей (отношение заряда носителя к его массе). Идея подобных опытов заключалась в следующем: если в металле имеются подвижные, слабо связанные с решеткой носители тока, то при резком торможении проводника эти частицы должны по инерции смещаться вперед, как смещаются вперед пассажиры, стоящие в вагоне при его торможении. Результатом смещения зарядов должен быть импульс тока; по направлению тока можно определить знак носителей тока, а зная размеры и сопротивление проводника, можно вычислить удельный заряд носителей.

Идея этих опытов (1913) и их качественное воплощение принадлежат российским физикам С.Л.Мандельштаму (1879-1944) и Н.Д.Папалекси (1880-1947). Эти опыты в 1916 г. были усовершенствованы и проведены американским физиком Р.Толменом (1881 — 1948) и ранее шотландским физиком Б.Стюартом (1828—1887).

Ими экспериментально доказано, что носители тока в металлах имеют отрицательный заряд, а их удельный заряд приблизительно одинаков для всех исследованных металлов. По значению удельного заряда носителей электрического тока и по определенному ранее Р. Милликенем элементарному электрическому заряду была определена их масса. Оказалось, что значения удельного заряда и массы носителей тока и электронов, движущихся в вакууме, совпадали. Таким образом, было окончательно доказано, что носителями электрического тока в металлах являются *свободные электроны*.

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом: при образовании кристаллической решетки металла (в результате сближения изолированных атомов) валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомными ядрами, отрываются от атомов металла, становятся «свободными» и могут перемещаться по всему объему. Таким образом, в узлах кристаллической решетки располагаются ионы металла, а между ними хаотически движутся свободные электроны, образуя своеобразный электронный газ, обладающий, согласно электронной теории металлов, свойствами идеального газа.

Электроны проводимости при своем движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается термодинамическое равновесие между электронным газом и решеткой. По теории Друде — Лоренца, электроны обладают такой же энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного газа. Поэтому, применяя выводы молекулярно-кинетической теории [см. (44.3)], можно найти среднюю скорость теплового движения электронов

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}},$$

которая для  $T = 300$  К равна  $1,1 \cdot 10^5$  м/с. Тепловое движение электронов, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник кроме теплового движения электронов происходит их упорядоченное движение, т. е. возникает электрический ток. Среднюю скорость ( $v$ ) упорядоченного движения электронов можно оценить согласно формуле (96.1) для плотности тока:  $j = ne(v)$ . Выбрав допустимую плотность тока, например для медных проводов  $10^7$  А/м<sup>2</sup>, получим, что при концентрации носителей тока  $n = 8 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup> средняя скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов равна  $7,8 \cdot 10^{-4}$  м/с. Следовательно,  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , т. е. даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов, обуславливающего электрический ток, значительно меньше их скорости теплового движения. Поэтому при вычислениях результирующую скорость ( $v + \langle u \rangle$ ) можно заменять скоростью теплового движения ( $u$ ).

Казалось бы, полученный результат противоречит факту практически мгновенной передачи электрических сигналов на большие расстояния. Дело в том, что замыкание электрической цепи влечет за собой распространение электрического поля со скоростью  $c$  ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). Через время  $t = \frac{l}{c}$  ( $l$  — длина цепи) вдоль цепи установится стационарное электрическое поле и в ней начнется упорядоченное движение электронов. Поэтому электрический ток возникает в цепи практически одновременно с ее замыканием.

## § 103. Вывод основных законов электрического тока в классической теории проводимости металлов

**1. Закон Ома.** Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле напряженностью  $E = \text{const}$ . Со стороны поля заряд  $e$  испытывает действие силы  $F = eE$  и приобретает ускорение  $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$ . Таким образом, во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$v_{\text{max}} = \frac{eE\langle t \rangle}{m},$$

где  $\langle t \rangle$  — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Согласно теории Друде, в конце свободного пробега электрон, сталкиваясь с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, поэтому скорость его упорядоченного движения становится равной нулю. Следовательно, средняя скорость направленного движения электрона

$$\langle v \rangle = \frac{v_{\text{max}} + 0}{2} = \frac{eE\langle t \rangle}{2m}. \quad (103.1)$$

Классическая теория металлов не учитывает распределения электронов по скоростям, поэтому среднее время ( $t$ ) свободного пробега определяется средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки проводника, равной  $(u + v)$  ( $\langle u \rangle$  — средняя скорость теплового движения электронов). В § 102 было показано, что  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , поэтому

$$\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}.$$

Подставив значение  $\langle t \rangle$  в формулу (103.1), получим

$$\langle v \rangle = \frac{eE\langle l \rangle}{2m\langle u \rangle}.$$

Плотность тока в металлическом проводнике  $\mathbf{j}$  (96.1)

$$\mathbf{j} = ne\langle v \rangle = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle u \rangle} E,$$

откуда видно, что плотность тока пропорциональна напряженности поля, т.е. получили закон Ома в дифференциальной форме [ср. с (98.4)]. Коэффициент пропорциональности между  $\mathbf{j}$  и  $E$  есть не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle u \rangle}, \quad (103.2)$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов и средняя длина их свободного пробега.

**2. Закон Джоуля—Ленца.** К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_k \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\langle l \rangle^2}{2m\langle u \rangle^2} E^2. \quad (103.3)$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т.е. на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами решетки в среднем  $\langle z \rangle$  столкновений:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle l \rangle}. \quad (103.4)$$

Если  $n$  — концентрация электронов, то в единицу времени происходит  $n\langle z \rangle$  столкновений и решетке передается энергия

$$w = n\langle z \rangle \langle E_k \rangle, \quad (103.5)$$

которая идет на нагревание проводника. Подставив (103.3) и (103.4) в (103.5), получим энергию, передаваемую решетке в единице объема проводника за единицу времени,

$$w = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle u \rangle} E^2. \quad (103.6)$$

Величина  $w$  является удельной тепловой мощностью тока (см. § 99). Коэффициент пропорциональности между  $w$  и  $E^2$  по (103.2) есть удельная проводимость  $\gamma$  следовательно, выражение (103.6) — закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме [ср. с (99.7)].

**3. Закон Видемана—Франца.** Металлы обладают как большой электрической проводимостью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются одни и те же частицы — свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического (теплого) движения, т.е. осуществляют перенос теплоты.

Видеманом и Францем в 1853 г. экспериментально установлен закон, согласно которому отношение теплопроводности ( $X$ ) к удельной проводимости ( $\gamma$ ) для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально термодинамической температуре:

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \beta T,$$

где  $\beta$  — постоянная, не зависящая от рода металла.

Элементарная классическая теория электропроводности металлов позволила найти значение  $\beta$ :  $\beta = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Это значение хорошо согласуется с опытными данными. Однако, как оказалось впоследствии, это согласие теоретического значения с опытным случайно. Лоренц, применив к электронному газу статистику Максвелла — Больцмана, учтя тем самым распределение электронов по скоростям, получил  $\beta = 2 \left( \frac{k}{e} \right)^2$ , что привело к резкому расхождению теории с опытом.

Таким образом, классическая теория электропроводности металлов объяснила законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Однако она помимо рассмотренных противоречий в законе Видемана — Франца столкнулась еще с рядом трудностей при объяснении различных опытных данных. Рассмотрим некоторые из них.

Температурная зависимость сопротивления. Из формулы удельной проводимости (103.2) следует, что сопротивление металлов, т.е. величина, обратно пропорциональная  $\gamma$ , должна возрастать пропорционально  $\sqrt{T}$  [в (103.2)  $n$  и  $\langle l \rangle$  от температуры не зависят, а  $(u) \sim l/\Gamma$ ]. Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым  $R \sim \Gamma$  (см. § 98).

Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах. Чтобы по формуле (103.2) получить  $\gamma$ , совпадающие с опытными значениями, надо принимать  $\langle l \rangle$  значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде — Лоренца.

**Теплоемкость металлов.** Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т.е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно больше атомной теплоемкости диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти (см. § 73), теплоемкость одноатомного кристалла равна  $3R$ . Учтем, что теплоемкость одноатомного электронного газа равна  $3/2 R$ . Тогда атомная теплоемкость металлов должна быть близка к  $4,5R$ . Однако опыт доказывает, что она равна  $3R$ , т.е. для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

Указанные расхождения теории с опытом можно объяснить тем, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла — Больцмана, а квантовой статистикой. Поэтому объяснить затруднения элементарной классической теории электропроводности металлов можно лишь квантовой теорией, которая будет рассмотрена в дальнейшем. Надо, однако, отметить, что классическая электронная теория не утратила своего значения и до настоящего времени, так как во многих случаях (например, при малой концентрации электронов проводимости и высокой температуре) она дает правильные качественные результаты и является по сравнению с квантовой теорией простой и наглядной.

## § 104. Работа выхода электронов из металла

$$\Delta\varphi = \frac{A}{e},$$

Как показывает опыт, свободные электроны при обычных температурах практически не покидают металл. Следовательно, в поверхностном слое металла должно быть задерживающее электрическое поле, препятствующее выходу электронов из металла в окружающий вакуум. Работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум, называется **работой выхода**. Укажем две вероятные причины существования работы выхода.

1. Если электрон по какой-то причине удаляется из металла, то в том месте, которое электрон покинул, возникает избыточный положительный заряд и электрон притягивается к индуцированному им самим положительному заряду.

2. Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных и создают тем самым над поверхностью металла «электронное облако», плотность которого быстро убывает с расстоянием. Это облако вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует *двойной электрический слой*, поле которого подобно полю плоского конденсатора. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ( $10^{-10}$  —  $10^{-9}$  м). Он не создает электрического поля во внешнем пространстве, но препятствует выходу свободных электронов из металла.

Таким образом, электрон при вылете из металла должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Разность потенциалов  $\Delta\varphi$  в этом слое, называемая **поверхностным скачком потенциала**, определяется работой выхода ( $A$ ) электрона из металла:

где  $e$  — заряд электрона.

Так как вне двойного слоя электрическое поле отсутствует, то потенциал среды равен нулю, а внутри металла потенциал положителен и равен  $D\varphi$ . Потенциальная энергия свободного электрона внутри металла равна  $-eD\varphi$  и является относительно вакуума отрицательной. Исходя из этого можно считать, что весь объем металла для электронов проводимости представляет потенциальную яму с плоским дном, глубина которой равна работе выхода  $A$ .

Работа выхода выражается в **электрон-вольтах** (эВ): 1 эВ равен работе, совершаемой силами поля при перемещении элементарного электрического заряда (заряда, равного заряду электрона) при прохождении им разности потенциалов в 1 В. Так как заряд электрона равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности и колеблется в пределах нескольких электрон-вольт (например, у калия  $A = 2,2$  эВ, у платины  $A = 6,3$  эВ). Подобрав определенным образом покрытие поверхности, можно значительно уменьшить работу выхода. Например, если нанести на поверхность вольфрама ( $A = 4,5$  эВ) слой оксида щелочно-земельного металла (Ca, Sr, Ba), то работа выхода снижается до 2 эВ.

## § 105. Эмиссионные явления и их применение

Если сообщить электронам в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, то часть электронов может покинуть металл, в результате чего наблюдается явление ис-

пускания электронов, или *электронной эмиссии*. В зависимости от способа сообщения электронам энергии различают *термоэлектронную, фотоэлектронную, вторичную электронную и автотермоэлектронную эмиссии*.

**1. Термоэлектронная эмиссия** — это испускание электронов нагретыми металлами. Концентрация свободных электронов в металлах достаточно высока, поэтому даже при средних температурах вследствие распределения электронов по скоростям (по энергиям) некоторые электроны обладают энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металла. С повышением температуры число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода, растет и явление термоэлектронной эмиссии становится заметным.

Исследование закономерностей термоэлектронной эмиссии можно провести с помощью простейшей двухэлектродной лампы — *вакуумного диода*, представляющего собой откачанный баллон, содержащий два электрода: катод К и анод А. В простейшем случае катодом служит нить из тугоплавкого металла (например, вольфрама), накаливаемая электрическим током. Анод чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего катод. Если диод включить в цепь, как это показано на рис. 154, то при накаливании катода

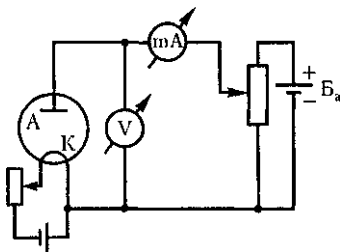


Рис. 154

и подаче на анод положительного напряжения (относительно катода) в анодной цепи диода возникает ток. Если поменять полярность батареи  $B_a$ , то ток прекращается, как бы сильно катод ни накаливали. Следовательно, катод испускает отрицательные частицы — электроны.

Если поддерживать температуру накаленного катода постоянной и снять зависимость анодного тока от анодного напряжения  $U$  — *вольт-амперную характеристику* (рис. 155), то оказывается, что она не является линейной, т. е. для вакуумного диода закон Ома не выполняется. Зависимость термоэлектронного тока  $I$  от анодного напряжения в области малых положительных значений  $U$  описывается *законом трех вторых* [установлен русским физиком С. А. Богуславским (1883 — 1923) и американским физиком И. Ленгмюром (1881-1957)]:

$$I = BU^{3/2},$$

где  $B$  — коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

При увеличении анодного напряжения ток возрастает до некоторого максимального значения  $I_{нас}$ , называемого *током насыщения*. Это означает, что почти все электроны, покидающие катод, достигают анода, поэтому дальнейшее возрастание напряженности поля не может привести к увеличению тер-

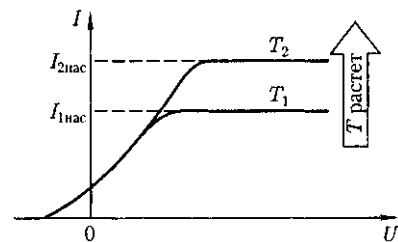


Рис. 155



моэлектронного тока. Следовательно, плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность материала катода.

Плотность тока насыщения определяется **формулой Ричардсона — Дешмана**, выведенной теоретически на основе квантовой статистики:

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

где  $A$  — работа выхода электронов из катода;  $T$  — термодинамическая температура;  $C$  — постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов (это не подтверждается экспериментом, что, по-видимому, объясняется поверхностными эффектами).

Уменьшение работы выхода приводит к резкому увеличению плотности тока насыщения. Поэтому применяются оксидные катоды (например, никель, покрытый оксидом щелочно-земельного металла), работа выхода которых равна  $1 - 1,5$  эВ.

На рис. 155 представлены вольт-амперные характеристики для двух температур катода:  $T_1$  и  $T_2$ , причем  $T_2 > T_1$ . С повышением температуры катода испускание электронов с катода интенсивнее, при этом увеличивается и ток насыщения. При  $U = 0$  наблюдается анодный ток, т. е. некоторые электроны, эмиттируемые катодом, обладают энергией, достаточной для преодоления работы выхода и достижения анода без приложения электрического поля.

Явление термоэлектронной эмиссии используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме, например в электронных лампах, рентгеновских трубках, электронных микроскопах и т.д. Электронные лампы широко применяются в электро- и радиотехнике, автоматике и телемеханике для выпрямления пере-

менных токов, усиления электрических сигналов и переменных токов, генерирования электромагнитных колебаний и т.д. В зависимости от назначения в лампах используются дополнительные управляющие электроды.

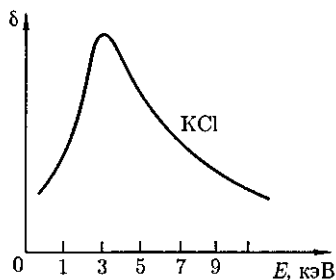
**2. Фотоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского). Основные закономерности этого явления будут рассмотрены в § 202.

**3. Вторичная электронная эмиссия** — это испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Вторичный электронный поток состоит из электронов, отраженных поверхностью (упруго и неупруго отраженные электроны), и «истинно» вторичных электронов — электронов, выбитых из металла, полупроводника или диэлектрика первичными электронами.

Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию, называется **коэффициентом вторичной электронной эмиссии**:

Коэффициент  $\delta$  зависит от природы материала поверхности, энергии бомбардирующих частиц и их угла падения на поверхность. У полупроводников и диэлектриков  $\delta$  больше, чем у металлов. Это объясняется тем, что в металлах, где концентрация электронов проводимости велика, вторичные электроны, часто сталкиваясь с ними, теряют свою энергию и не могут выйти из металла. В полупроводниках и диэлектриках из-за малой концентрации электронов проводимости столкновения вторичных электронов с ними происходят го-

Рис. 156

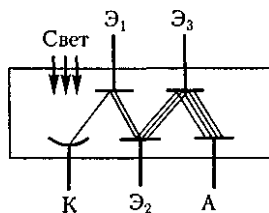


раздо реже и вероятность выхода вторичных электронов из эмиттера возрастает в несколько раз.

Для примера на рис. 156 приведена качественная зависимость коэффициента вторичной электроннои эмиссии  $\delta$  от энергии впадающих электронов для КС1. С увеличением энергии электронов  $\delta$  возрастает, так как первичные электроны все глубже проникают в кристаллическую решетку и, следовательно, выбивают больше вторичных электронов. Однако при некоторой энергии первичных электронов  $B$  начинает уменьшаться. Это связано с тем, что с увеличением глубины проникновения первичных электронов вторичным все труднее вырваться на поверхность. Значение  $\delta_{\max}$  для КС1 достигает  $\approx 12$  (для чистых металлов оно не превышает 2).

Явление вторичной электроннои эмиссии используется в *фотоэлектронных умножителях* (ФЭУ), применяемых для усиления слабых электрических токов. ФЭУ представляет собой вакуумную трубку с фотокатодом К и анодом А, между которыми расположено несколько электродов — *эмиттеров* (рис. 157). Электроны, вырванные из

Рис. 157



фотокатода под действием света, попадают на эмиттер  $\mathcal{E}_1$ , пройдя ускоряющую разность потенциалов между К и  $\mathcal{E}_1$ . Из эмиттера  $\mathcal{E}_1$  выбивается  $\delta$  электронов. Усиленный таким образом электронный поток направляется на эмиттер  $\mathcal{E}_2$ , и процесс умножения повторяется на всех последующих эмиттерах. Если ФЭУ содержит  $n$  эмиттеров, то на аноде А, называемом *коллектором*, получается усиленный в  $\delta^n$  раз фотоэлектронный ток.

**4. Автоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля. Эти явления можно наблюдать в откачанной трубке, конфигурация электродов которой (катод — острое, анод — внутренняя поверхность трубки) позволяет при напряжениях примерно  $10^3$  В получать электрические поля напряженностью примерно  $10^7$  В/м. При постепенном повышении напряжения уже при напряженности поля у поверхности катода примерно  $10^5$ — $10^6$  В/м возникает слабый ток, обусловленный электронами, испускаемыми катодом. Сила этого тока увеличивается с повышением напряжения на трубке. Токи возникают при холодном катоде, поэтому описанное явление называется *также холодной эмиссией*. Объяснение механизма этого явления возможно лишь на основе квантовой теории.

## § 106. Ионизация газов. Несамостоятельный газовый разряд

Газы при не слишком высоких температурах и при давлениях, близких к атмосферному, являются хорошими изоляторами. Если поместить в сухой атмосферный воздух заряженный электромтр с хорошей изоляцией, то его за-

ряд долго остается неизменным. Это объясняется тем, что газы при обычных условиях состоят из нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных зарядов (электронов и ионов). Газ становится проводником электричества, когда некоторая часть его молекул *ионизуется*, т.е. произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны. Для этого газ надо подвергнуть действию какого-либо *ионизатора* (например, поднеся к заряженному электроду пламя свечи, наблюдаем спад его заряда; здесь электропроводность газа вызвана нагреванием).

Таким образом, при ионизации газов под действием какого-либо ионизатора происходит вырывание из электронной оболочки атома или молекулы одного или нескольких электронов, что приводит к образованию свободных электронов и положительных ионов. Электроны могут присоединяться к нейтральным молекулам и атомам, превращая их в отрицательные ионы. Следовательно, в ионизованном газе имеются положительные и отрицательные ионы и свободные электроны. Прохождение электрического тока через газы называется *газовым разрядом*.

Ионизация газов может происходить под действием различных ионизаторов: сильный нагрев (столкновения быстрых молекул становятся настолько сильными, что они разбиваются на ионы), коротковолновое электромагнитное излучение (ультрафиолетовое, рентгеновское и  $\gamma$ -излучения), корпускулярное излучение (потoki электронов, протонов,  $\alpha$ -частиц) и т. д. Для того чтобы выбить из молекулы (атома) один электрон, необходимо затратить определенную энергию, называемую *энергией ионизации*, значения которой для атомов различных веществ лежат в пределах 4 — 25 эВ.

Одновременно с процессом ионизации газа всегда идет и обратный процесс — *процесс рекомбинации*: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул. Чем больше ионов возникает под действием ионизатора, тем интенсивнее идет и процесс рекомбинации.

Строго говоря, проводимость газа никогда не равна нулю, так как в нем всегда имеются свободные заряды, образующиеся в результате действия на газы излучения радиоактивных веществ, имеющих на поверхности Земли, а также космического излучения. Эта незначительная проводимость воздуха (интенсивность ионизации под действием указанных факторов невелика) служит причиной утечки зарядов на электризованных телах даже при хорошей их изоляции.

Характер газового разряда определяется составом газа, его температурой и давлением, размерами, конфигурацией и материалом электродов, приложенным напряжением, плотностью тока.

Рассмотрим цепь, содержащую газовый промежуток (рис. 158), подвергающийся непрерывному, постоянному по интенсивности воздействию ионизатора. В результате действия ионизатора газ приобретает некоторую проводимость и в цепи потечет ток, зависимость

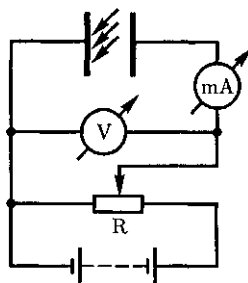
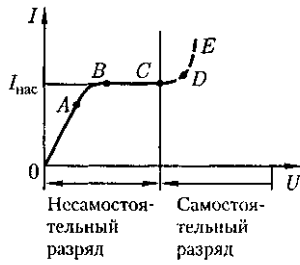


Рис. 158

Рис. 159



которого от приложенного напряжения приведена на рис. 159.

На участке кривой  $0A$  сила тока возрастает пропорционально напряжению, т. е. выполняется закон Ома. При дальнейшем увеличении напряжения закон Ома нарушается: рост силы тока замедляется (участок  $AB$ ) и наконец прекращается совсем (участок  $BC$ ). Это достигается в том случае, когда ионы и электроны, создаваемые внешним ионизатором за единицу времени, за это же время достигают электродов. В результате получаем ток насыщения ( $I_{\text{нас}}$ ), значение которого определяется мощностью ионизатора. Ток насыщения, таким образом, является мерой ионизирующего действия ионизатора. Если в режиме ОС прекратить действие ионизатора, то прекращается и разряд. **Разряды**, существующие только под действием внешних ионизаторов, называются **несамостоятельными**. При дальнейшем увеличении напряжения между электродами сила тока вначале медленно (участок  $CD$ ), а затем резко (участок  $DE$ ) возрастает. Механизм этого явления будет рассмотрен в следующем параграфе.

### § 107. Самостоятельный газовый разряд и его типы

**Разряд** в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется **самостоятельным**.

Рассмотрим условия возникновения самостоятельного разряда. Как уже указывалось в § 106, при больших напряжениях между электродами газового промежутка (см. рис. 158) ток сильно возрастает (участки  $CD$  и  $DE$  на рис. 159). При больших напряжениях возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваясь с нейтральными молекулами газа, ионизируют их, в результате чего образуются вторичные электроны и положительные ионы (процесс  $1$  на рис. 160). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны — к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения электрического тока на участке  $CD$  (см. рис. 159). Описанный процесс называется **ударной ионизацией**.

Однако ударная ионизация под действием электронов недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Для этого необходимо, чтобы электронные лавины «воспроизводились», т. е. чтобы в газе под действием каких-то процессов возникали новые электроны. Такие процессы схематически показаны на рис. 160:

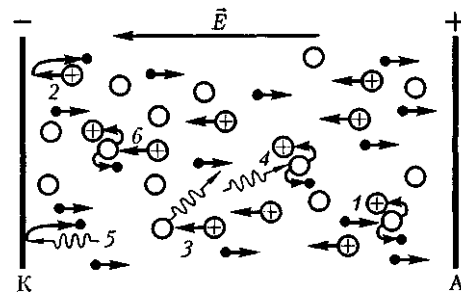


Рис. 160

1) ускоренные полем положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны (процесс 2); 2) положительные ионы, сталкиваясь с молекулами газа, переводят их в возбужденное состояние; переход таких молекул в нормальное состояние сопровождается испусканием фотона (процесс 3); 3) фотон, поглощенный нейтральной молекулой, ионизирует ее, происходит так называемый процесс фотонной ионизации молекул (процесс 4); 4) выбивание электронов из катода под действием фотонов (процесс 5).

Наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка наступает момент, когда положительные ионы, обладающие меньшей длиной свободного пробега, чем электроны, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа (процесс 6), и к отрицательной пластине устремляются ионные лавины. Когда возникают кроме электронных лавин еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения (участок *DE* на рис. 159).

В результате описанных процессов (1 — 6) число ионов и электронов в объеме газа лавинообразно возрастает и разряд становится самостоятельным, т.е. сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется **напряжением пробоя**.

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырех типах самостоятельного разряда: *тлеющем, искровом, дуговом и коронном*.

1. Тлеющий разряд возникает при низких давлениях. Если к электродам, впаянным в стеклянную трубку длиной 30 — 50 см, приложить постоянное напряжение в несколько сотен вольт, по-

степенно откачивая из трубки воздух, то при давлении  $\approx 5,3$  —  $6,7$  кПа возникает разряд в виде светящегося извилистого шнура красноватого цвета, идущего от катода к аноду. При дальнейшем понижении давления шнур утолщается, и при давлении  $\approx 13$  Па разряд имеет вид, схематически изображенный на рис. 161.

Непосредственно к катоду прилегает тонкий светящийся слой 1 — **первое катодное свечение**, или **катодная пленка**, затем следует темный слой 2 — **катодное темное пространство**, переходящее в дальнейшем в светящийся слой 3 — **тлеющее свечение**, имеющее резкую границу со стороны катода, постепенно исчезающую со стороны анода. Оно возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами. С тлеющим свечением граничит темный промежуток 4 — **фарадеево темное пространство**, за которым следует столб ионизированного светящегося газа 5 — **положительный столб**. Положительный столб в поддержании разряда существенной роли не играет. Например, при уменьшении расстояния между электродами трубки его длина сокращается, в то время как катодные части разряда по форме и величине остаются неизменными.

В тлеющем разряде особое значение для его поддержания имеют только две его части: катодное темное пространство и тлеющее свечение. В катодном темном пространстве происходит сильное ускорение электронов и положительных ионов, выбивающих электроны с катода (вторичная эмиссия). В области тлеющего свечения происходит

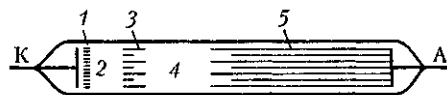


Рис. 161

ударная ионизация электронами молекул газа. Образующиеся при этом положительные ионы устремляются к катоду и выбивают из него новые электроны, которые, в свою очередь, опять ионизируют газ и т.д. Таким образом непрерывно поддерживается тлеющий разряд.

При дальнейшем откачивании трубки при давлении  $\approx 1,3$  Па свечение газа ослабевает и начинают светиться стенки трубки. Электроны, выбиваемые из катода положительными ионами, при таких разрежениях редко сталкиваются с молекулами газа и поэтому, ускоренные полем, ударяясь о стекло, вызывают его свечение, так называемую **катодолуминесценцию**. Поток этих электронов исторически получил название **катодных лучей**. Если в катоде просверлить малые отверстия, то положительные ионы, бомбардирующие катод, пройдя через отверстия, проникают в пространство за катодом и образуют резко ограниченный пучок, получивший название **каналовых** (или **положительных**) **лучей**, названных по знаку заряда, который они несут.

Тлеющий разряд широко используется в технике. Так как свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет, то его используют в газосветных трубках для светящихся надписей и реклам (например, неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые — синевато-зеленое). В лампах дневного света, более экономичных, чем лампы накаливания, излучение тлеющего разряда, происходящее в парах ртути, поглощается нанесенным на внутреннюю поверхность трубки флуоресцирующим веществом (**люминофором**), начинающим под воздействием поглощенного излучения светиться. Спектр свечения при

соответствующем подборе люминофоров близок к спектру солнечного излучения. Тлеющий разряд используется для **катодного напыления** металлов. Вещество катода в тлеющем разряде вследствие бомбардировки положительными ионами, сильно нагреваясь, переходит в парообразное состояние. Помещая вблизи катода различные предметы, их можно покрыть равномерным слоем металла.

**2. Искровой разряд** возникает при больших напряженностях электрического поля ( $\approx 3 \cdot 10^6$  В/м) в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. Искра имеет вид ярко светящегося тонкого канала, сложным образом изогнутого и разветвленного.

Объяснение искрового разряда дается на основе **стримерной теории**, согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабосветящихся скопленных ионизованного газа — **стримеров**.

Стримеры возникают не только в результате образования электронных лавин посредством ударной ионизации, но и в результате фотонной ионизации газа. Лавины, догоняя друг друга, образуют проводящие мостики из стримеров, по которым в следующие моменты времени устремляются мощные потоки электронов, образующие каналы искрового разряда. Из-за выделения при рассмотренных процессах большого количества энергии газ в искровом промежутке нагревается до очень высокой температуры (примерно  $10^4$  К), что приводит к его свечению. Быстрый нагрев газа ведет к повышению давления и возникновению ударных волн, объясняющих звуковые эффекты при искровом разряде — характерное потрескивание в слабых разрядах и мощные раскаты грома в случае молнии, являющейся примером мощного искрового разряда

между грозовым облаком и Землей или между двумя грозовыми облаками.

Искровой разряд используется для воспламенения горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания и предохранения электрических линий передачи от перенапряжений (искровые разрядники). При малой длине разрядного промежутка искровой разряд вызывает разрушение (эрозию) поверхности металла, поэтому он применяется для электроискровой точной обработки металлов (резание, сверление). Его используют в спектральном анализе для регистрации заряженных частиц (искровые счетчики).

**3. Дуговой разряд.** Если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд становится непрерывным — возникает дуговой разряд. При этом сила тока резко возрастает, достигая сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт.

Дуговой разряд можно получить от источника низкого напряжения, минуя стадию искры. Для этого электроды (например, угольные) сближают до соприкосновения, они сильно раскаляются электрическим током, потом их разводят и получают электрическую дугу (именно так она была открыта В. В. Петровым). При атмосферном давлении температура катода приблизительно равна 3900 К. По мере горения дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление — кратер, являющийся наиболее горячим местом дуги.

По современным представлениям, дуговой разряд поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии, а также термической ионизации молекул, обусловленной высокой температурой газа.

Дуговой разряд находит широкое применение для сварки и резки металлов, получения высококачественных сталей (дуговая печь) и освещения (прожекторы, проекционная аппаратура). Широко применяются также дуговые лампы с ртутными электродами в кварцевых баллонах, где дуговой разряд возникает в ртутном паре при откачанном воздухе. Дуга, возникающая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетового излучения и используется в медицине (например, кварцевые лампы). Дуговой разряд при низких давлениях в парах ртути используется в ртутных выпрямителях для выпрямления переменного тока.

**4. Коронный разряд** — высоковольтный электрический разряд при высоком (например, атмосферном) давлении в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (например, острия). Когда напряженность поля вблизи острия достигает 30 кВ/см, то вокруг него возникает свечение, имеющее вид короны, чем и вызвано название этого вида разряда.

В зависимости от знака коронирующего электрода различают отрицательную или положительную корону. В случае отрицательной короны рождение электронов, вызывающих ударную ионизацию молекул газа, происходит за счет эмиссии их из катода под действием положительных ионов, в случае положительной короны — вследствие ионизации газа вблизи анода. В естественных условиях корона возникает под влиянием атмосферного электричества у вершин мачт (на этом основано действие молниеотводов), деревьев<sup>1</sup>. Вредное действие короны вокруг про-

<sup>1</sup> Это явление получило в древности название огней святого Эльма.

видов высоковольтных линий передачи проявляется в возникновении вредных токов утечки. Для их снижения провода высоковольтных линий делаются толстыми. Коронный разряд, являясь прерывистым, становится также источником радиопомех.

Используется коронный разряд в электрофильтрах, применяемых для очистки промышленных газов от примесей. Газ, подвергаемый очистке, движется снизу вверх в вертикальном цилиндре, по оси которого расположена коронирующая проволока. Ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней части короны, оседают на частицах примеси и увлекаются полем к внешнему некоронирующему электроду и на нем оседают. Коронный разряд применяется также при нанесении порошковых и лакокрасочных покрытий.

## § 108. Плазма и ее свойства

*Плазмой* называется сильно ионизованный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Различают *высокотемпературную плазму*, возникающую при сверхвысоких температурах, и *газоразрядную плазму*, возникающую при газовом разряде. Плазма характеризуется *степенью ионизации*  $\alpha$  — отношением числа ионизованных частиц к полному их числу в единице объема плазмы. В зависимости от величины  $\alpha$  говорят о *слабо* ( $\alpha$  составляет доли процента), *умеренно* ( $\alpha$  — несколько процентов) и *полностью* ( $\alpha$  близко к 100 %) *ионизованной плазме*.

Заряженные частицы (электроны, ионы) газоразрядной плазмы, находясь в ускоряющем электрическом поле, имеют разную среднюю кинетическую

энергию. Это означает, что температура электронного  $T_e$  и ионного  $T_i$  газов различна, причем  $T_e > T_i$ . Несоответствие этих температур указывает на то, что *газоразрядная плазма* является *неравновесной*, поэтому она называется также *неизотермической*. Убыль числа заряженных частиц в процессе рекомбинации в газоразрядной плазме восполняется ударной ионизацией электронами, ускоренными электрическим полем. Прекращение действия электрического поля приводит к исчезновению газоразрядной плазмы.

*Высокотемпературная плазма* является *равновесной*, или *изотермической*, т. е. при определенной температуре убыль числа заряженных частиц восполняется в результате термической ионизации. В такой плазме соблюдается равенство средних кинетических энергий, составляющих плазму различных частиц. В состоянии подобной плазмы находятся звезды, звездные атмосферы, Солнце. Их температура достигает десятков миллионов градусов.

Условием существования плазмы является некоторая минимальная плотность заряженных частиц, начиная с которой можно говорить о плазме как таковой. Эта плотность определяется в физике плазмы из неравенства  $L \gg D$ , где  $L$  — линейный размер системы заряженных частиц,  $D$  — так называемый *дебаевский радиус экранирования*, представляющий собой то расстояние, на котором происходит экранирование кулоновского поля любого заряда плазмы.

Плазма обладает следующими основными *свойствами*: высокой степенью ионизации газа, в пределе — полной ионизацией; равенством нулю результирующего пространственного заряда (концентрация положительных и отрицательных частиц в плазме практически одинакова); большой электро-



проводностью, причем ток в плазме создается в основном электронами, как наиболее подвижными частицами; свечением; сильным взаимодействием с электрическим и магнитным полями; колебаниями электронов в плазме с большой частотой ( $\approx 10^8$  Гц), вызывающими общее вибрационное состояние плазмы; «коллективным» — одновременным взаимодействием громадного числа частиц (в обычных газах частицы взаимодействуют друг с другом парно). Эти свойства определяют качественное своеобразие плазмы, позволяющее считать ее *особым, четвертым, состоянием вещества*.

Изучение физических свойств плазмы дает возможность, с одной стороны, решать многие проблемы астрофизики, поскольку в космическом пространстве плазма — наиболее распространенное состояние вещества, а с другой — открывает принципиальные возможности

осуществления управляемого термоядерного синтеза. Основным объектом исследований по управляемому термоядерному синтезу является высокотемпературная плазма ( $\approx 10^8$  К) из дейтерия и трития (см. § 268).

Низкотемпературная плазма ( $< 10^5$  К) применяется в газовых лазерах, термоэлектронных преобразователях и магнитогидродинамических генераторах (МГД-генераторах) — установках для непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую, в плазменных ракетных двигателях, весьма перспективных для длительных космических полетов.

Низкотемпературная плазма, получаемая в плазмотронах, используется для резки и сварки металлов, для получения некоторых химических соединений (например, галогенидов инертных газов), которые не удастся получить другими способами, и т.д.

### Контрольные вопросы

- Какими опытами была выяснена природа носителей электрического тока в металлах?
- Каковы основные идеи теории Друде — Лоренца?
- Сравните порядок средних скоростей теплового и упорядоченного движения электронов в металлах (при условиях, близких к нормальным и приемлемым в электротехнике).
- Почему тепловое движение электронов не может привести к возникновению электрического тока?
- Выведите на основе классической теории электропроводности металлов дифференциальную форму законов Ома и Джоуля — Ленца.
- Как классическая теория проводимости металлов объясняет зависимость сопротивления металлов от температуры?
- В чем заключаются трудности элементарной классической теории электропроводности металлов? Каковы границы ее применения?
- Какие существуют разновидности эмиссионных явлений? Дайте их определения.
- Объясните вольт-амперную характеристику для вакуумного диода.
- Что называют работой выхода электрона?
- Можно ли изменять силу тока насыщения вакуумного диода? Если да, то как?
- Каким образом можно вырвать электроны из холодного катода? Как называется это явление?
- Дайте объяснение качественной зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии диэлектрика от энергии падающих электронов.
- К какому типу газового разряда относится молния?
- Может ли возникнуть ток насыщения при самостоятельном газовом разряде?

- Охарактеризуйте типы самостоятельного газового разряда. В чем их особенности?
- Охарактеризуйте процесс ионизации; рекомбинации.
- В чем отличие самостоятельного газового разряда от несамостоятельного? Каковы условия, необходимые для его осуществления?
- В чем отличие равновесной плазмы от неравновесной?
- Приведите основные свойства плазмы. Каковы возможности ее применения?

## ЗАДАЧИ

13.1. Концентрация электронов проводимости в металле равна  $2,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Определите среднюю скорость их упорядоченного движения при плотности тока  $1 \text{ А/мм}^2$ . [0,25 мм/с]

13.2. Работа выхода электрона из вольфрама составляет 4,5 эВ. Определите, во сколько раз увеличится плотность тока насыщения при повышении температуры от 2000 до 2500 К. [В 290 раз]

13.3. Работа выхода электрона из металла равна 2,5 эВ. Определите скорость вылетающего из металла электрона, если он обладает энергией  $10^{-18} \text{ Дж}$ . [1,15 Мм/с]

13.4. Воздух между пластинами плоского конденсатора ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока, текущего между пластинами, 10 мкА. Площадь каждой пластины конденсатора равна  $200 \text{ см}^2$ , расстояние между ними 1 см, разность потенциалов 100 В. Подвижность положительных ионов  $b_+ = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и отрицательных  $b_- = 1,9 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ; заряд каждого иона равен элементарному заряду. Определите концентрацию пар ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. [ $9,5 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ ]

13.5. Ток насыщения при несамостоятельном разряде равен 9,6 пА. Определите число пар ионов, создаваемых в 1 с внешним ионизатором. [ $3 \cdot 10^7$ ]

## Глава 14 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 109. Магнитное поле и его характеристики

Подобно тому как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое *поле*, называемое *магнитным*. Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты. Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током [это явление

впервые обнаружено датским физиком Х. Эрстедом (1777— 1851)].

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует *только на движущиеся* в нем электрические заряды. Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. Следовательно, чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определенный ток.

Подобно тому как при изучении электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля пользуются *замкнутым плоским контуром с током (рамка с током)*, линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали к контуру. Направление нормали задается **правилом правого винта**: за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рис. 162).

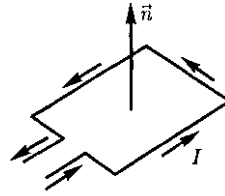


Рис. 162

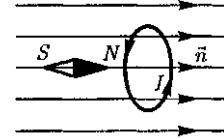


Рис. 163

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определенным образом. Этот результат используется для выбора направления магнитного поля. За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к рамке (рис. 163).

За направление магнитного поля может быть также принято направление, совпадающее с направлением силы, которая действует на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку. Так как оба полюса магнитной стрелки лежат в близких точках поля, то силы, действующие на оба полюса, равны друг другу. Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпала с направлением поля.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует пара сил. Вращаю-

щий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки и определяется по формуле

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad (109.1)$$

где  $p_m$  — **вектор магнитного момента рамки** с током;  $B$  — **вектор магнитной индукции** (количественная характеристика магнитного поля).

Для плоского контура с током  $I$

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (109.2)$$

где  $S$  — площадь поверхности контура (рамки);  $n$  — единичный вектор нормали к поверхности рамки.

Таким образом, направление  $p_m$  совпадает с направлением положительной нормали.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение  $\frac{M_{\max}}{p_m}$ . ( $M_{\max}$  — максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому *может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией*:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

**Магнитная индукция** в данной точке *однородного* магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендику-

лярна направлению поля. Следует отметить, что вектор  $B$  может быть выведен также из закона Ампера (см. § 111) и из выражения для силы Лоренца (см. § 114).

Так как магнитное поле является *силовым*, то его, по аналогии с электрическим, изображают с помощью *линий магнитной индукции* — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $B$ . Их направление задается *правилом правого винта*: головка винта, ввинчиваемого по направлению тока, вращается в направлении линий магнитной индукции.

Линии магнитной индукции можно «проявить» с помощью железных опилок, намагничивающихся в исследуемом поле и ведущих себя подобно маленьким магнитным стрелкам. На рис. 164, *а* показаны линии магнитной индукции поля кругового тока, на рис. 164, *б* — линии магнитной индукции поля соленоида (*соленоид* — равномерно намотанная на цилиндрическую поверхность проволоочная спираль, по которой течет электрический ток).

Линии магнитной индукции всегда *замкнуты* и охватывают проводники с током. Этим они отличаются от линий напряженности электростатического поля, которые являются *разомкнутыми* [начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (см. § 79)].

На рис. 165 изображены линии магнитной индукции полосового магнита; они вы-

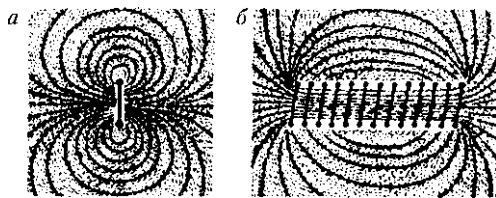


Рис. 164

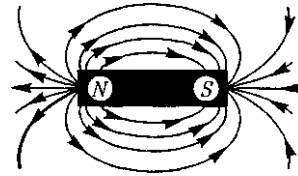


Рис. 165

ходят из северного полюса и входят в южный. Вначале казалось, что здесь наблюдается полная аналогия с линиями напряженности электростатического поля и полюсы магнитов играют роль магнитных «зарядов» (магнитных монополей). Опыт показал, что, разрезая магнит на части, его полюсы разделить нельзя, т. е. в отличие от электрических зарядов свободные магнитные заряды не существуют, поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах. В дальнейшем было установлено, что внутри полосовых магнитов имеется магнитное поле, аналогичное полю внутри соленоида, и линии магнитной индукции этого магнитного поля являются продолжением линий магнитной индукции вне магнита. Таким образом, линии магнитной индукции магнитного поля постоянных магнитов являются также замкнутыми.

До сих пор мы рассматривали макроскопические токи, текущие в проводниках. Однако, согласно предположению французского физика А. Ампера (1775—1836), в любом теле существуют *микроскопические токи*, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макроток. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микроток во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Вектор магнитной индукции  $B$  характеризует *результатирующее* магнитное поле, создаваемое всеми *макро- и микротокми*, т. е. при одном и том же токе и

прочих равных условиях вектор  $B$  в различных средах будет иметь разные значения.

Магнитное поле макроточков описывается **вектором напряженности  $H$** . Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (109.3)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\mu$  — безразмерная величина — **магнитная проницаемость среды**, показывающая, во сколько раз магнитное поле макроточков усиливается за счет поля микроточков среды.

Сравнивая векторные характеристики электростатического ( $E$  и  $D$ ) и магнитного ( $B$  и  $H$ ) полей, укажем, что аналогом вектора напряженности электростатического поля  $E$  является вектор магнитной индукции  $B$ , так как векторы  $E$  и  $B$  определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды. Аналогом вектора электрического смещения  $D$  является вектор напряженности  $H$  магнитного поля.

### § 110. Закон Био—Савара—Лапласа и его применение к расчету магнитного поля

Магнитное поле постоянных токов различной формы изучалось французскими учеными Ж. Био (1774 — 1862) и Ф. Саваром (1791-1841). Результаты этих опытов были обобщены выдающимся французским математиком и физиком П. Лапласом.

**Закон Био — Савара — Лапласа** для проводника с током  $I$ , элемент  $dl$  которого создает в некоторой точке  $A$  (рис. 166) индукцию поля  $d\vec{B}$ , записывается в виде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где  $dl$  — вектор, по модулю равный длине  $dl$  элемента проводника и совпадающий по направлению с током;  $r$  — радиус-вектор, проведенный из элемента  $dl$  проводника в точку  $A$  поля;  $r$  — модуль радиуса-вектора  $r$ .

Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $r$ , т. е. перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Это направление может быть задано по правилу нахождения линий магнитной индукции (**правилу правого винта**): направление вращения головки винта дает направление  $d\vec{B}$ , если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (110.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $dl$  и  $r$ .

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**: вектор магнитной индукции результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равен векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (110.3)$$

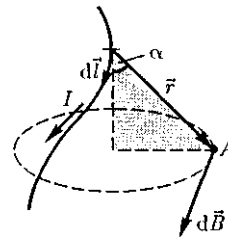
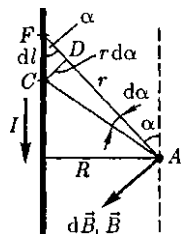


Рис. 166

Рис. 167



Расчет характеристик магнитного поля ( $B$  и  $H$ ) по приведенным формулам в общем случае сложен. Однако если распределение тока имеет определенную симметрию, то применение закона Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет просто рассчитать конкретные поля. Рассмотрим два примера.

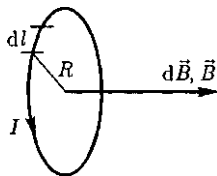
**1. Магнитное поле прямого тока** — тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 167). В произвольной точке  $A$ , удаленной от оси проводника на расстояние  $R$ , векторы  $dB$  от всех элементов тока имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа («к нам»). Поэтому сложение векторов  $dB$  можно заменить сложением их модулей.

В качестве постоянной интегрирования выберем угол  $\alpha$  (угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ ), выразив через него все остальные величины. Из рис. 167 следует, проводника

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$$

(радиус дуги  $CD$  вследствие малости  $d$  равен  $r$ , поэтому угол  $FDC$  можно считать прямым). Подставив эти выражения в (110.2), получим, что магнитная

Рис. 168



индукция, создаваемая одним элементом проводника, равна

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha. \quad (110.4)$$

Так как угол  $\alpha$  для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от  $0$  до  $\pi$ , то, согласно (110.3) и (110.4),

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu 2I}{4\pi R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu 2I}{4\pi R}. \quad (110.5)$$

**2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током** (рис. 168).

Как следует из рисунка, все элементы кругового проводника с током создают в центре магнитные поля одинакового направления — вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов  $dB$  можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ( $\sin \alpha = 1$ ) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно  $R$ , то, согласно (110.2),

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} dl.$$

Тогда

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int dl = \\ &= \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}. \end{aligned}$$

Следовательно, магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

## § 111. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов

Магнитное поле (см. § 109) оказывает на рамку с током ориентирующее действие. Следовательно, вращающий момент, испытываемый рамкой, есть результат действия сил на отдельные ее элементы. Обобщая результаты исследования действия магнитного поля на различные проводники с током, А. Ампер установил, что сила  $dF$ , с которой магнитное поле действует на элемент проводника  $dl$  с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (111.1)$$

где  $d\vec{l}$  — вектор, по модулю равный  $dl$  и совпадающий по направлению с током,  $B$  — вектор магнитной индукции.

Направление вектора  $dF$  может быть найдено, согласно (111.1), по общим правилам векторного произведения, откуда следует *правило левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $B$ , а четыре вытянутых пальца — по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток.

Модуль силы Ампера [см. (111.1)] вычисляется по формуле

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (111.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $dB$ .

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов. Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных тока  $I_1$  и  $I_2$  (на рис. 169 токи направлены перпендикулярно плоскости чертежа к нам), расстояние между которыми равно  $R$ . Каждый из проводников создает магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током.

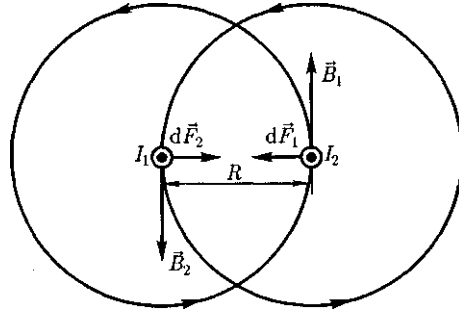


Рис. 169

Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока  $I_1$  на элемент  $dl$  второго проводника с током  $I_2$ . Ток  $I_1$  создает вокруг себя магнитное поле, линии индукции которого представляют собой концентрические окружности. Направление вектора  $B_1$  определяется правилом правого винта, его модуль по формуле (110.5) равен

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R}.$$

Направление силы  $dF_1$ , с которой поле  $B_1$  действует на участок  $dl$  второго тока, определяется по правилу левой руки и указано на рисунке. Модуль силы, согласно (111.2), с учетом того, что угол  $\alpha$  между элементами тока  $I_2$  и вектором  $B_1$  прямой, равен

$$dF_1 = I_2 B_1 dl.$$

Подставляя значение для  $B_1$ , получим

$$dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.3)$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что сила  $dF_2$ , с которой магнитное поле тока  $I_2$  действует на элемент  $dl$  первого проводника с током  $I_1$ , направлена в противоположную сторону и по модулю равна

$$dF_2 = I_1 B_2 dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.4)$$

Сравнение выражений (111.3) и (111.4) показывает, что

$$dF_1 = dF_2,$$

т. е. *два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу* с силой

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.5)$$

Если токи имеют противоположные направления, то, используя правило левой руки, можно показать, что между ними действует *сила отталкивания*, определяемая по формуле (111.5).

## § 112. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Если два параллельных проводника с током находятся в вакууме ( $\mu = 1$ ), то сила взаимодействия на единицу длины проводника, согласно (111.5), равна

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \quad (112.1)$$

Для нахождения числового значения  $\mu_0$  воспользуемся определением ампера, согласно которому  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7}$  Н/м при  $I_1 = I_2 = 1$  А и  $R = 1$  м. Подставив это значение в формулу (112.1), получим

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

*Единица индуктивности — генри (Гн) (см. § 126).*

Закон Ампера позволяет определить единицу магнитной индукции  $B$ . Предположим, что элемент проводника  $dl$  с током /перпендикулярен направлению магнитного поля. Тогда закон Ампера [см. (111.2)] запишется в виде  $dF = -IBdl$ , откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}.$$

*Единица магнитной индукции — тесла (Тл): 1 Тл — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику течет ток 1 А:*

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А} \cdot \text{м}).$$

Так как  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/А<sup>2</sup>, а в случае вакуума ( $\mu = 1$ ), согласно (109.3),  $B = \mu_0 H$ , то для данного случая

$$H = \frac{B}{\mu_0}.$$

*Единица напряженности магнитного поля — ампер на метр (А/м): 1 А/м — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Тл.*

## § 113. Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов, поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме или среде заряд создает вокруг себя магнитное поле. В результате обобщения опытных данных был установлен закон, определяющий поле  $B$  точечного заряда  $Q$ , свободно движущегося с нерелятивистской скоростью  $v$ . *Под свободным движением заряда* понимается его движение с постоянной скоростью. Этот закон выражается формулой

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v} \vec{r}]}{r^3}, \quad (113.1)$$



где  $r$  — радиус-вектор, проведенный от заряда  $Q$  к точке наблюдения  $M$  (рис. 170).

Согласно выражению (113.1), вектор  $B$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы  $v$  и  $g$ , а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $v$  к  $g$ . Вектор  $B$  представляет собой псевдовектор.

Модуль магнитной индукции (113.1) вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (113.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $r$ .

Сравнивая выражения (110.1) и (113.1), видим, что движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока.

Приведенные закономерности (113.1) и (113.2) справедливы лишь для малых скоростей ( $v \ll c$ ) движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т. е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени расположен движущийся заряд.

Формула (113.1) определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью  $v$ . Если движется отрицательный заряд, то  $Q$  надо заменить на  $-Q$ . Скорость  $v$  — относительная скорость, т. е. скорость относительно наблюдателя. Вектор  $B$  в рассматриваемой системе отсчета зависит как от времени, так и от положения точки  $M$  наблюдения. Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.

Впервые поле движущегося заряда удалось обнаружить американскому физику Г.Роуланду (1848-1901). Окончательно этот факт был установлен

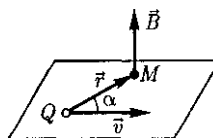


Рис. 170

профессором Московского университета А.А.Эйхенвальдом (1863—1944), изучившим магнитное поле конвекционного тока, а также магнитное поле связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Магнитное поле свободно движущихся зарядов было измерено академиком А.Ф.Иоффе, доказавшим эквивалентность, в смысле возбуждения магнитного поля, электронного пучка и тока проводимости.

## § 114. Действие магнитного поля на движущийся заряд

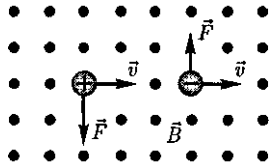
Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током (см. § 111), но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле. Сила, действующая на электрический заряд  $Q$ , движущийся в магнитном поле со скоростью  $v$ , называется **силой Лоренца** и выражается формулой

$$\vec{F} = Q[\vec{v}\vec{B}], \quad (114.1)$$

где  $B$  — индукция магнитного поля, в котором заряд движется.

Направление силы Лоренца определяется с помощью **правила левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $B$ , а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора  $v$  (для  $Q > 0$  направления  $I$  и  $v$  совпадают, для  $Q < 0$  — противоположны), то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на **положительный заряд**. На рис. 171 показана взаимная ориентация векторов  $v$ ,  $B$  (поле направлено к нам,

Рис. 171



на рисунке показано точками) и  $F$  для положительного и отрицательного зарядов. На отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении. Модуль силы Лоренца [см. (114.1)]

$$F = QvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между  $v$  и  $B$ .

Отметим еще раз (см. § 109), что магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд*. В этом существенное отличие магнитного поля от электростатического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды*.

Выражение (114.1) для силы Лоренца может быть использовано (наравне с другими, см. § 109) для определения вектора магнитной индукции  $B$ .

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не меняя ее модуля. Следовательно, *сила Лоренца работы не совершает*. Иными словами, постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с индукцией  $B$  действует и электрическое поле с напряженностью  $E$ , то результирующая сила  $F$ , приложенная к заряду, равна векторной сумме сил — силы, действующей со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{v}\vec{B}].$$

Это выражение называется *формулой Лоренца*. Скорость  $v$  в этой формуле есть скорость заряда относительно магнитного поля.

### § 115. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Выражение для силы Лоренца (114.1) позволяет найти ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле. Направление силы Лоренца и направление вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависят от знака заряда  $Q$  частицы. На этом основано определение знака заряда частиц, движущихся в магнитных полях.

Для вывода общих закономерностей будем считать, что магнитное поле *однородно* и на частицы электрические поля не действуют. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью  $v$  вдоль линий магнитной индукции, то угол  $\alpha$  между векторами  $v$  и  $B$  равен 0 или  $\pi$ . Тогда по формуле (114.1) сила Лоренца равна нулю, т.е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью  $v$ , перпендикулярной вектору  $B$ , то сила Лоренца  $F = Q[\vec{v}\vec{B}]$  постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Согласно второму закону Ньютона, эта сила создает центростремительное ускорение. Отсюда следует, что частица будет двигаться по окружности, радиус  $r$  которой определяется из условия  $QvB = \frac{mv^2}{r}$ , откуда

$$r = \frac{m v}{Q B}. \quad (115.1)$$

Период вращения частицы, т. е. время  $T$ , за которое она совершает один полный оборот,

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Подставив сюда выражение (115.1), получим

$$T = \frac{2\pi m}{B Q}, \quad (115.2)$$

т. е. период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду ( $-$ ) частицы, и магнитной индукцией поля, но не зависит от ее скорости (при  $v \ll c$ ). На этом основано действие циклических ускорителей заряженных частиц (см. § 116).

Если скорость  $v$  заряженной частицы направлена под углом  $\alpha$  к вектору  $\vec{B}$  (рис. 172), то ее движение можно представить как наложение двух движений: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ ; 2) равномерного движения со скоростью  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Радиус окружности определяется формулой (115.1) (в данном случае надо заменить  $v$  на  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ ). Поэтому траектория заряженной частицы - спираль, ось которой параллельна магнитному полю (см. рис. 172). Шаг винтовой линии

$$h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha.$$

Подставив в последнее выражение (115.2), получим

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{B Q}.$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

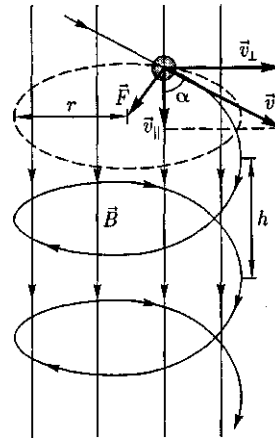


Рис. 172

Если скорость  $v$  заряженной частицы составляет угол  $\alpha$  с направлением вектора  $B$  *неоднородного* магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то  $r$  и  $h$  уменьшаются с увеличением  $B$ . На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле.

## § 116. Ускорители заряженных частиц

**Ускорителями** заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетических заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т. д.).

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, энергией, сообщаемой частицам, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка. **Ускорители** делятся на **непрерывные** (из них выходит равномерный по времени пучок) и **импульсные** (из них частицы вылетают порциями — импульсами). Последние характеризуются длительностью импульса. По форме траектории и механизму ускорения ча-

стицускорители делятся на *линейные, циклические и индукционные*. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных — траекториями частиц являются окружности или спирали.

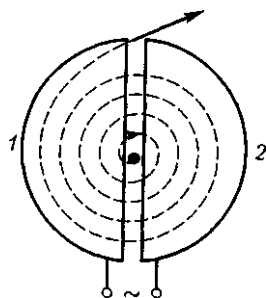
Рассмотрим некоторые типы ускорителей заряженных частиц.

**1. Линейный ускоритель.** Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым, например, высоковольтным генератором Ван-де-Графа (см. § 92). Заряженная частица проходит поле однократно: заряд  $Q$ , проходя разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , приобретает энергию  $W = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Таким способом частицы ускоряются до  $\approx 10$  МэВ. Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т.д.

**2. Линейный резонансный ускоритель.** Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, *синхронно* изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектрон-вольт, электроны — до десятков гигаэлектрон-вольт.

**3. Циклотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Его принципиальная схема приведена на рис. 173. Между полюсами сильного электромагнита

Рис. 173



помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода (1 и 2) в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов. К дуантам приложено переменное электрическое поле. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов.

Если заряженную частицу ввести в центр зазора между дуантами, то она, ускоряемая электрическим и отклоняемая магнитным полями, войдя в дуант 1, опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы [см. (115.1)]. К моменту ее выхода из дуанта 1 полярность напряжения изменяется (при соответствующем подборе изменения напряжения между дуантами), поэтому частица вновь ускоряется и, переходя в дуант 2, описывает там уже полуокружность большего радиуса и т.д.

Для непрерывного ускорения частицы в циклотроне необходимо выполнить условие *синхронизма* (условие «резонанса») — периоды вращения частицы в магнитном поле и колебаний электрического поля должны быть равны. При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом прохождении через зазор дополнительную энергию. На последнем витке, когда энергия частиц и радиус орбиты доведены до максимально допустимых значений, пучок частиц посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона.

Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 25 МэВ. В случае более высоких энергий период вращения частицы оказывается зависящим от скорости, а именно период вращения увеличивается, в результате чего нарушается условие синхронизма.

Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно, однако, осуществить, если применять предложенный в 1944 г. В.И.Векслером (1907 — 1966) и в 1945 г. американским физиком Э.Мак-Милланом (1907 — 1991) **принцип автофазировки**. Его идея заключается в том, что для компенсации увеличения периода вращения частиц, ведущего к нарушению синхронизма, изменяют либо частоту ускоряющего электрического, либо индукцию магнитного полей, либо то и другое. Принцип автофазировки используется в фазотроне, синхротроне и синхрофазотроне.

4. **Фазотрон** (синхроциклотрон) — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов,  $\alpha$ -частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий, примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, так как с возрастанием скорости частиц увеличивается радиус их орбиты).

5. **Синхротрон** — циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. Электроны в синхротроне ускоряются до энергий 5 — 10 ГэВ.

6. **Синхрофазотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона, т.е. управляющее магнитное поле и частота ускоряющего

электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. Протоны ускоряются в синхрофазотроне до энергий 500 ГэВ.

7. **Бетатрон** — циклический индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем (см. § 137), индуцируемым переменным магнитным полем, удерживающим электроны на круговой орбите. В бетатроне в отличие от рассмотренных выше ускорителей не существует проблемы синхронизации. Электроны в бетатроне ускоряются до энергий 100 МэВ. При  $W > 100$  МэВ режим ускорения в бетатроне нарушается электромагнитным излучением электронов. Особенно распространены бетатроны на энергии 20–50 МэВ.

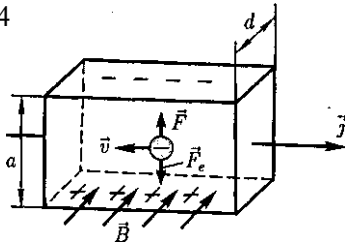
## § 117. Эффект Холла

**Эффект Холла**<sup>1</sup> (1879) — это возникновение в металле (или полупроводнике) с током плотностью  $j$ , помещенном в магнитное поле  $B$ , электрического поля в направлении, перпендикулярном  $B$  и  $j$ .

Поместим металлическую пластинку с током плотностью  $j$  в магнитное поле  $B$ , перпендикулярное  $j$  (рис. 174). При данном направлении  $j$  скорость носителей тока в металле — электронов — направлена справа налево. Электроны испытывают действие силы Лоренца (см. § 114), которая в данном случае направлена вверх. Таким образом, у верхнего края пластинки возникнет повышенная концентрация электронов (он зарядится отрицательно), а у нижнего — их недостаток (за-

<sup>1</sup>Э. Холл (1855—1938) — американский физик.

Рис. 174



рядится положительно). В результате этого между краями пластинки возникнет дополнительное поперечное электрическое поле  $E_B$ , направленное снизу вверх.

Когда напряженность  $E_B$  этого поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравновешивать силу Лоренца, то установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Тогда

$$eE_B = \frac{e\Delta\varphi}{a} = evB, \text{ или } \Delta\varphi = vBa,$$

где  $a$  — ширина пластинки;  $\Delta\varphi$  — поперечная (холловская) разность потенциалов.

Учитывая, что сила тока  $I = jS = nevS$  ( $S$  — площадь поперечного сечения пластинки толщиной  $d$ ,  $n$  — концентрация электронов,  $v$  — средняя скорость упорядоченного движения электронов), получим

$$\Delta\varphi = \frac{I}{nevad} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}, \quad (117.1)$$

т.е. холловская поперечная разность потенциалов пропорциональна магнитной индукции  $B$ , силе тока  $I$  и обратно пропорциональна толщине пластинки  $d$ .

В формуле (117.1)  $R = \frac{1}{en}$  — **постоянная Холла**, зависящая от вещества.

По измеренному значению постоянной Холла можно: 1) определить концентрацию носителей тока в проводни-

ке (при известных характере проводимости и заряде носителей); 2) судить о природе проводимости полупроводников (см. § 242, 243), так как знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда  $e$  носителей тока. Поэтому эффект Холла — наиболее эффективный метод изучения энергетического спектра носителей тока в металлах и полупроводниках. Он применяется также для умножения постоянных токов в аналоговых вычислительных машинах, в измерительной технике (датчики Холла) и т. д.

### § 118. Циркуляция вектора в магнитного поля в вакууме

Аналогично циркуляции вектора напряженности электростатического поля (см. § 83) вводят циркуляцию вектора магнитной индукции. **Циркуляцией вектора  $B$**  по заданному замкнутому контуру называется интеграл

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl,$$

где  $d\vec{l}$  — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура;  $B_l = B \cos \alpha$  — составляющая вектора  $B$  в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода);  $\alpha$  — угол между векторами  $B$  и  $d\vec{l}$ .

**Закон полного тока для магнитного поля в вакууме {теорема о циркуляции вектора  $B$ }**: циркуляция вектора  $B$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (118.1)$$

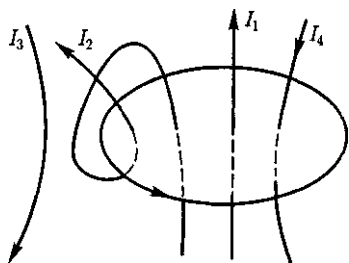


Рис. 175

где  $n$  — число проводников с токами, охватываемых контуром  $L$  произвольной формы.

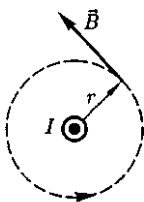
Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого образует с направлением обхода по контуру праввинтовую систему; ток противоположного направления считается отрицательным. Например, для системы токов, изображенных на рис. 175,

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + 2I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4.$$

Выражение (118.1) справедливо только для поля в вакууме, поскольку, как будет доказано ниже, для поля в веществе необходимо учитывать молекулярные токи.

Продemonстрируем справедливость теоремы о циркуляции вектора  $B$  на примере магнитного поля прямого тока  $I$ , перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 176). Представим себе замкнутый контур в виде окружности радиуса  $r$ . В каждой

Рис. 176



точке этого контура вектор  $B$  одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности (она является и линией магнитной индукции). Следовательно, циркуляция вектора  $B$  равна

$$\oint_L B_i dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r.$$

Согласно выражению (118.1), получим  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$  (в вакууме), откуда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Таким образом, исходя из теоремы о циркуляции вектора  $B$  получили выражение для магнитной индукции поля прямого тока, выведенное выше [см. (110.5)].

Сравнивая выражения (83.3) и (118.1) для циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $B$ , видим, что между ними существует принципиальное различие. Циркуляция вектора  $E$  электростатического поля всегда равна нулю, т.е. электростатическое поле является потенциальным. Циркуляция вектора  $B$  магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется **вихревым**.

Теорема о циркуляции вектора  $B$  имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике, так как позволяет находить магнитную индукцию поля без применения закона Био — Савара — Лапласа.

## § 119. Магнитные поля соленоида и тороида

Рассчитаем, применяя теорему о циркуляции, индукцию магнитного поля внутри *соленоида*. Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , имеющий  $N$  витков, по которому течет ток (рис. 177). Длину соленоида считаем во много раз боль-

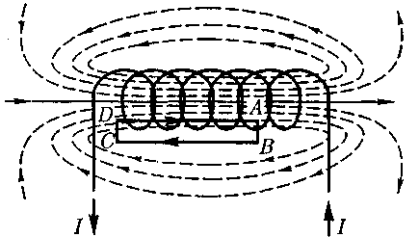


Рис. 177

ше, чем диаметр его витков, т.е. рассматриваемый соленоид бесконечно длинный. Экспериментальное изучение магнитного поля соленоида (см. рис. 164, б) показывает, что внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида — неоднородным и очень слабым.

На рис. 177 представлены линии магнитной индукции внутри и вне соленоида. Чем соленоид длиннее, тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому приближенно можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него, а полем вне соленоида можно пренебречь.

Для нахождения магнитной индукции  $B$  выберем замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$ , как показано на рис. 177. Циркуляция вектора  $B$  по замкнутому контуру  $ABCD$ , охватывающему все  $N$  витков, согласно (118.1), равна

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI.$$

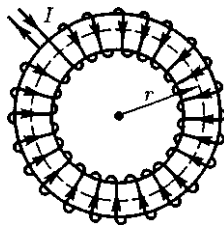


Рис. 178

Интеграл по  $ABCD$  можно представить в виде четырех интегралов: по  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и  $B_l = 0$ . На участке вне соленоида  $B = 0$ . На участке  $DA$  циркуляция вектора  $B$  равна  $B_l$  (участок контура совпадает с линией магнитной индукции); следовательно,

$$\int_{DA} B_l dl = B_l = \mu_0 NI. \quad (119.1)$$

Из (119.1) приходим к выражению для магнитной индукции поля внутри соленоида (в вакууме):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (119.2)$$

Таким образом, поле внутри соленоида однородно (краевыми эффектами в областях, прилегающих к торцам соленоида, при расчетах пренебрегают). Однако отметим, что вывод этой формулы не совсем корректен (линии магнитной индукции замкнуты, и интеграл по внешнему участку магнитного поля строго нулю не равен). Корректно рассчитать поле внутри соленоида можно, применяя закон Био—Савара—Лапласа; в результате получается та же формула (119.2).

Важное значение для практики имеет также магнитное поле **тороида** — кольцевой катушки, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 178). Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует.

Линии магнитной индукции в данном случае, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены по оси тороида. В качестве контура выберем одну такую окружность радиусом  $r$ . Тогда, по теореме о циркуляции (118.1),  $B \cdot 2\pi r =$



$= \mu_0 NI$ , откуда следует, что магнитная индукция внутри тороида (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r},$$

где  $N$  — число витков тороида.

Если контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает и  $B \cdot 2\pi r = 0$ . Это означает, что поле вне тороида отсутствует (что показывает и опыт).

## § 120. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля $B$

*Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком)* через площадку  $dS$  называется *скалярная* физическая величина, равная

$$d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS, \quad (120.1)$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  — проекция вектора  $B$  на направление нормали к площадке  $dS$  ( $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $B$ );  $d\mathbf{S} = dS \vec{n}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление его совпадает с направлением нормали  $\mathbf{n}$  к площадке.

Поток вектора  $B$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака  $\cos \alpha$  (определяется выбором положительного направления нормали  $\mathbf{n}$ ). Поток вектора  $B$  связывают с контуром, по которому течет ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено (см. § 109): оно связывается с током правилом правого винта. Следовательно, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции  $\Phi_B$  через произвольную поверхность  $S$  равен

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (120.2)$$

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору  $B$ ,  $B_n = B = \text{const}$  и

$$\Phi_B = BS.$$

Из этой формулы определяется *единица магнитного потока вебер (Вб)*:  $1 \text{ Вб}$  — магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна  $1 \text{ Тл}$  ( $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$ ).

*Теорема Гаусса для поля  $\vec{B}$* : поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS = 0. \quad (120.3)$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

Итак, для потоков векторов  $B$  и  $\vec{E}$  сквозь замкнутую поверхность в вихревом и потенциальном полях получают различные выражения [см. (120.3), (81.2)].

В качестве примера рассчитаем поток вектора  $B$  сквозь соленоид. Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью  $\mu$ , согласно (119.2), равна

$$B = \frac{\mu_0 \mu NI}{l}.$$

Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью  $S$  равен

$$\Phi_1 = BS,$$

а полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида и называемый *потокосцеплением*,

$$\Psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S. \quad (120.4)$$

### § 121. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом Ампера (см. §111). Если проводник не закреплен (например, одна из сторон контура изготовлена в виде подвижной перемычки, рис. 179), то под действием силы Ампера он будет в магнитном поле перемещаться. Следовательно, магнитное поле совершает работу по перемещению проводника с током.

Для определения этой работы рассмотрим проводник длиной  $l$  с током  $I$  (он может свободно перемещаться), помещенный в однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура. Сила, направление которой определяется по правилу левой руки, а значение — по закону Ампера [см. (111.2)], равна

$$F = IlB.$$

Под действием этой силы проводник переместится параллельно самому себе на отрезок  $dx$  из положения 1 в положение 2. Работа, совершаемая магнитным полем, равна

Рис. 179

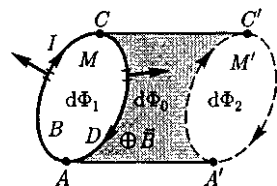
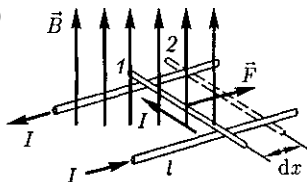


Рис. 180

$$\begin{aligned} dA &= Fdx = IBldx = \\ &= IBdS = Id\Phi, \end{aligned}$$

где  $ldx = dS$  — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $BdS = d\Phi$  — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

Таким образом,

$$dA = Id\Phi, \quad (121.1)$$

т. е. работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, *пересеченный движущимся проводником*. Полученная формула справедлива и для произвольного направления вектора  $B$ .

Вычислим работу по перемещению замкнутого контура с постоянным током  $I$  в магнитном поле. Предположим, что контур  $M$  перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение  $M'$ , изображенное на рис. 180 штриховой линией. Направление тока в контуре (по часовой стрелке) и магнитного поля (перпендикулярно плоскости чертежа — за чертеж) указано на рисунке. Контур  $M$  мысленно разобьем на два соединенных своими концами проводника:  $ABC$  и  $CD A$ .

Работа  $dA$ , совершаемая силами Ампера при рассматриваемом перемещении контура в магнитном поле, равна алгебраической сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  ( $dA_1$ ) и  $CD A$  ( $dA_2$ ), т. е.

$$dA = dA_1 + dA_2. \quad (121.2)$$

Силы, приложенные к участку  $CD A$  контура, образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому совершаемая ими работа  $dA_2 > 0$ . Согласно (121.1), эта работа равна произведению силы тока / в контуре на пересеченный проводником  $CD A$  магнитный поток. Проводник  $CD A$  пересекает при своем движении поток  $d\Phi_0$  сквозь тонированную поверхность и поток  $d\Phi_2$ , пронизывающий контур в его конечном положении. Следовательно,

$$dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2). \quad (121.3)$$

Силы, действующие на участок  $ABC$  контура, образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому совершаемая ими работа  $dA_1 < 0$ . Проводник  $ABC$  пересекает при своем движении поток  $d\Phi_0$  сквозь тонированную поверхность и поток  $d\Phi_1$ , пронизывающий контур в начальном положении. Следовательно,

$$dA_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1). \quad (121.4)$$

Подставляя (121.3) и (121.4) в (121.2), получим выражение для элементарной работы:

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

где  $d\Phi_2 - d\Phi_1 = d\Phi'$  — изменение магнитного потока сквозь площадь, ограниченную контуром с током.

Таким образом,

$$dA = Id\Phi'. \quad (121.5)$$

Проинтегрировав выражение (121.5), определим работу, совершаемую силами Ампера, при конечном произвольном перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi, \quad (121.6)$$

т.е. работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на *изменение магнитного потока, сцепленного с контуром*. Формула (121.6) остается справедливой для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

### Контрольные вопросы

- Как, пользуясь магнитной стрелкой, можно определить знаки полюсов источников постоянного тока?
- Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?
- Что называют индукцией магнитного поля? Каково направление вектора  $B$ ?
- Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока?
- Записав закон Био — Савара — Лапласа, объясните его физический смысл.
- Рассчитайте, применяя закон Био — Савара — Лапласа, магнитное поле: 1) прямого тока; 2) в центре кругового проводника с током.
- Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных одинаковых токов противоположного направления. Начертите рисунок с указанием сил.
- Назовите единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Дайте им определения.
- Определите числовое значение магнитной постоянной.
- Почему движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока?
- Чему равна и как направлена сила, действующая на отрицательный электрический заряд, движущийся в магнитном поле?
- Чему равна работа силы Лоренца при движении протона в магнитном поле? Ответ обосновать.

- Как будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле, к вектору  $B$  под углом  $\frac{\pi}{2}$ ?
- Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? Ответы подтвердите выводами формул.
- Что такое ускорители заряженных частиц? Какие они бывают и чем характеризуются?
- Почему для ускорения электронов не применяются циклотроны?
- В чем заключается принцип автофазировки? Где он используется?
- В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.
- Какие данные о проводниках и полупроводниках можно получить на основе экспериментального исследования эффекта Холла?
- В чем заключается теорема о циркуляции вектора магнитной индукции  $B$ ? Примените ее, рассчитайте магнитное поле прямого тока.
- Какой вывод можно сделать, сравнивая циркуляцию векторов  $\vec{E}$  и  $B$ ?
- Какая теорема доказывает вихревой характер магнитного поля? Как она формулируется?
- Почему магнитное поле является вихревым?
- Используя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции  $B$ , рассчитайте магнитное поле тороида.
- Что называют потоком вектора магнитной индукции? Запишите теорему Гаусса для магнитного поля, объяснив ее физический смысл.
- Какая физическая величина выражается в веберах? Дайте определение вебера.

## ЗАДАЧИ

14.1. Тонкое кольцо массой 15 г и радиусом 12 см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью 10 нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой  $8 \text{ с}^{-1}$  относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определите отношение магнитного момента кругового тока, создаваемого кольцом, к его моменту импульса. [251 нКл/кг]

14.2. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной, равной 60 см, течет постоянный ток 3 А. Определите индукцию магнитного поля в центре квадрата. [5,66 мкТл]

14.3. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми равно 25 см, текут токи 20 и 30 А в противоположных направлениях. Определите магнитную индукцию  $B$  в точке, удаленной на  $r_1 = 30$  см от первого и  $r_2 = 40$  см от второго проводника. [9,5 мкТл]

14.4. Определите магнитную индукцию на оси тонкого проволочного кольца радиусом 10 см, по которому течет ток 10 А, в точке, расположенной на расстоянии 15 см от центра кольца. [10,7 мкТл]

14.5. Два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с одинаковыми токами, текущими в одном направлении, находятся друг от друга на расстоянии  $R$ . Чтобы их раздвинуть до расстояния  $3R$ , на каждый сантиметр длины проводника затрачивается работа  $A = 220$  нДж. Определите силу тока в проводниках. [10 А]

14.6. Протон, ускоренный разностью потенциалов 0,5 кВ, влетая в однородное магнитное поле с индукцией 0,2 Тл, движется по окружности. Определите радиус этой окружности. [3,23 см]

14.7. Определите, при какой скорости пучок заряженных частиц, проходя перпендикулярно области, в которой созданы однородные поперечные электрическое и магнитное поля с  $E = 10$  кВ/м и  $B = 0,2$  Тл, не отклоняется. [50 км/с]

14.8. Циклотрон ускоряет протоны до энергии 10 МэВ. Определите радиус дуантов циклотрона при индукции магнитного поля 1 Тл. [ $>47$  см]

14.9. Через сечение медной пластинки толщиной 0,1 мм пропускается ток 5 А. Пластика помещается в однородное магнитное поле с индукцией 0,5 Тл, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определите возникающую в пластине поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди  $8,93 \text{ г/см}^3$ . [1,85 мкВ]

14.10. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 15 А. Определите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , магнитную индукцию  $B$  в точке, расположенной на расстоянии 15 см от проводника. [20 мкТл]

14.11. Определите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 300 витков, протекает ток 1 А. Внешний диаметр тороида равен 60 см, внутренний — 40 см. [0,24 мТл; 191 А/м]

14.12. Поток магнитной индукции сквозь площадь поперечного сечения соленоида (без сердечника)  $\Phi = 5 \text{ мкВб}$ . Длина соленоида  $l = 25 \text{ см}$ . Определите магнитный момент  $p_m$  этого соленоида. [1 А · м<sup>2</sup>]

14.13. Круглая рамка с током площадью  $20 \text{ см}^2$  закреплена параллельно магнитному полю ( $B = 0,2 \text{ Тл}$ ), и па неё действует вращающий момент  $0,6 \text{ мН} \cdot \text{м}$ . Рамку освободили, после поворота на  $90^\circ$  ее угловая скорость стала равна  $20 \text{ с}^{-1}$ . Определите: 1) силу тока, текущего в рамке; 2) момент инерции рамки относительно ее диаметра. [1) 1,5 А; 2)  $3 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ]

## Глава 15

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### § 122. Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея)

В гл. 14 было показано, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Связь магнитного поля с током привела к многочисленным попыткам возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Эта фундаментальная задача была блестяще решена в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем, открывшим *явление электромагнитной индукции*. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический *ток*, получивший название *индукционного*.

Рассмотрим классические опыты Фарадея, с помощью которых было обнаружено явление электромагнитной индукции.

**Опыт I** (рис. 181, а). Если в замкнутый на гальванометр соленоид вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то в моменты его вдвигания или выдвигания наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток); направления отклонений стрелки при вдвигании и выдвигании магнита противоположны. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Для получения индукционного тока магнит можно оставлять неподвижным, тогда нужно относительно магнита передвигать соленоид.

**Опыт II**. Концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к

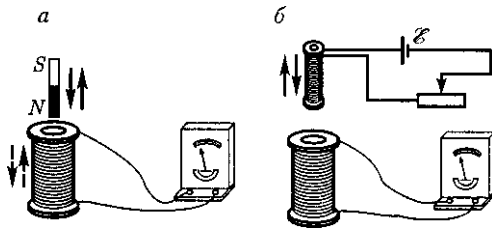


Рис. 181

гальванометру, а через другую катушку пропускается ток. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения, при перемещении катушек друг относительно друга (рис. 181, б). Направления отклонений стрелки гальванометра также противоположны при включении или выключении тока, его увеличении или уменьшении, сближении или удалении катушек.

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции.

Например, при повороте в однородном магнитном поле замкнутого проводящего контура в нем также возникает индукционный ток. В данном случае индукция магнитного поля вблизи проводника остается постоянной, а меняется только поток магнитной индукции сквозь контур.

Опытным путем было также установлено, что значение индукционного тока совершенно не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь скоростью его изменения (в опытах Фарадея также доказывалось, что отклонение стрелки гальванометра (сила тока) тем больше, чем больше скорость движения магнита, или скорость изменения силы тока, или скорость движения катушек).

Открытие явления электромагнитной индукции имело большое значение,

так как была доказана возможность получения электрического тока с помощью магнитного поля. Этим была установлена взаимосвязь между электрическими и магнитными явлениями, что послужило в дальнейшем толчком для разработки теории электромагнитного поля.

### § 123. Закон Фарадея и его вывод из закона сохранения энергии

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, М. Фарадей пришел к количественному закону электромагнитной индукции. Он показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток, что указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой *электродвижущей силой электромагнитной индукции*. Значение индукционного тока, а следовательно, и ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  определяются только скоростью изменения магнитного потока, т. е.

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{d\Phi}{dt}. \quad (123.1)$$

Теперь необходимо выяснить знак  $\mathcal{E}_i$ . В § 120 было показано, что знак магнитного потока зависит от выбора положительной нормали к контуру. В свою очередь, положительное направление нормали определяется правилом правого винта (см. § 109). Следовательно, выбирая положительное направление нормали, можно определить как знак потока магнитной индукции, так и направление тока и ЭДС в контуре.

Если величины  $\mathcal{E}_i$ ,  $\Phi$  и  $t$  выразить в водной системе единиц, то можно записать:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (123.2)$$

Формула (123.2) выражает закон электромагнитной индукции Фарадея.

Знак « $\leftrightarrow$ » показывает, что увеличение потока ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ) вызывает ЭДС  $\mathcal{E}_i < 0$ , т. е. поле индукционного тока направлено навстречу потоку; уменьшение потока ( $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ) вызывает  $\mathcal{E}_i > 0$ , т. е. направления потока и поля индукционного тока совпадают. Знак « $\leftrightarrow$ » в формуле (123.2) соответствует правилу Ленца (1833) — общему правилу для нахождения направления индукционного тока.

*Правило Ленца:* индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающему этот индукционный ток.

К формуле (123.2) можно прийти с помощью закона сохранения энергии, как это впервые сделал Г. Гельмгольц<sup>1</sup>. Рассмотрим, следуя Г. Гельмгольцу, проводник с током  $I$ , который помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура, и может свободно перемещаться (см. рис. 179). Под действием силы Ампера  $F$ , направление которой показано на рисунке, проводник перемещается на отрезок  $da$ . Таким образом, сила Ампера производит работу [см. (121.1)]  $dA = Id\Phi$ , где  $d\Phi$  — пересеченный проводником магнитный поток.

Согласно закону сохранения энергии, работа источника тока за время  $dt$  ( $\mathcal{E}Idt$ ) расходуется на джоулеву теплоту ( $I^2Rdt$ ) и работу по перемещению проводника в магнитном поле ( $Id\Phi$ ):

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + Id\Phi,$$

<sup>1</sup> Г. Гельмгольц (1821 — 1894) — немецкий естествоиспытатель.

где  $R$  — полное сопротивление контура.

Тогда

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R},$$

где  $\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_i$  — не что иное, как закон Фарадея [см. (123.2)].

*Закон Фарадея* можно сформулировать таким образом: ЭДС  $\mathcal{E}_i$  электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Этот закон является универсальным: ЭДС  $\mathcal{E}_i$  не зависит от способа изменения магнитного потока. ЭДС электромагнитной индукции выражается в вольтах. Действительно, учитывая, что единицей магнитного потока является вебер (Вб), получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] &= \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \\ &= \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}. \end{aligned}$$

Какова природа ЭДС электромагнитной индукции? Если проводник (подвижная перемычка контура на рис. 179) движется в постоянном магнитном поле, то сила Лоренца, действующая на заряды внутри проводника, движущиеся вместе с проводником, будет направлена противоположно току, т. е. она будет создавать в проводнике индукционный ток противоположного направления (за направление электрического тока принимается движение положительных зарядов). Таким образом, возбуждение ЭДС индукции при движении контура в постоянном магнитном поле объясняется действием силы Лоренца, возникающей при движении проводника.

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в *переменном* магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции. Максвелл для объяснения ЭДС индукции в *неподвижных* проводниках предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. Циркуляция вектора  $E_B$  этого поля по любому неподвижному контуру  $L$  проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции:

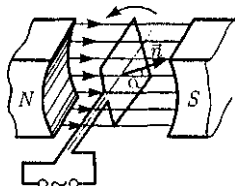
$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (123.3)$$

### § 124. Вращение рамки в магнитном поле

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются *генераторы*, принцип действия которых можно рассмотреть на примере плоской рамки, вращающейся в однородном магнитном поле (рис. 182).

Пусть рамка вращается в однородном магнитном поле ( $B = \text{const}$ ) рав-

Рис. 182



номерно с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Магнитный поток, сцепленный с рамкой площадью  $S$ , в любой момент времени  $t$ , согласно (120.1), равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где  $\alpha = \omega t$  — угол поворота рамки в момент времени  $t$  (начало отсчета выбрано так, чтобы при  $t = 0$  было  $\alpha = 0$ ).

При вращении рамки в ней будет возникать переменная ЭДС индукции [см. (123.2)]

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t, \quad (124.1)$$

изменяющаяся со временем по гармоническому закону. ЭДС  $\mathcal{E}_i$  максимальна при  $\sin \omega t = 1$ , т.е.

$$\mathcal{E}_{\text{max}} = BS\omega. \quad (124.2)$$

Учитывая (124.2), выражение (124.1) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\text{max}} \sin \omega t.$$

Таким образом, если в однородном магнитном поле равномерно вращается рамка, то в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону.

Из формулы (124.2) вытекает, что  $\mathcal{E}_{\text{max}}$  (следовательно, и ЭДС индукции) находится в прямой зависимости от величин  $\omega$ ,  $B$  и  $S$ . В России принята стандартная частота тока  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50$  Гц,

поэтому возможно лишь возрастание двух остальных величин. Для увеличения  $B$  применяют мощные постоянные магниты или в электромагнитах пропускают значительный ток, а также внутрь электромагнита помещают сердечники из материалов с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ . Если вращать не один, а ряд витков, соединенных последовательно, то тем самым увеличивается  $S$ . Переменное напряже-



ние снимается с вращающегося витка с помощью щеток, схематически изображенных на рис. 182.

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать ток, то в соответствии с (109.1) на нее будет действовать вращающий момент и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа электродвигателей, предназначенных для превращения электрической энергии в механическую.

## § 125. Вихревые токи (токи Фуко)

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти *токи* оказываются замкнутыми в толще проводника и поэтому называются *вихревыми*. Их также называют *токами Фуко* — по имени первого исследователя.

Токи Фуко, как и индукционные токи в линейных проводниках, подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Например, если между полюсами невключенного электромагнита массивный медный маятник совершает практически незатухающие колебания (рис. 183), то при включении тока он испытывает сильное торможение и очень быстро останавливается. Это объясняется тем, что возникшие токи Фуко имеют такое направление, что действующие на них со стороны магнитного поля силы тормозят движение маятника. Этот факт используется для успокоения (*демпфирования*) подвижных частей различных приборов. Если в опи-

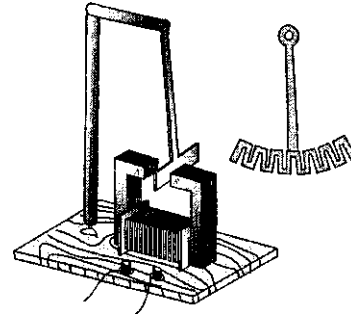


Рис. 183

санном маятнике сделать радиальные вырезы, то вихревые токи ослабляются и торможение почти отсутствует.

Вихревые токи помимо торможения (как правило, нежелательного эффекта) вызывают нагревание проводников. Поэтому для уменьшения потерь на нагревание якоря генераторов и сердечники трансформаторов делают не сплошными, а изготовляют из тонких пластин, отделенных одна от другой слоями изолятора, и устанавливают их так, чтобы вихревые токи были направлены поперек пластин.

Джоулева теплота, выделяемая токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах. Индукционная печь представляет собой тигель, помещаемый внутрь катушки, в которой пропускается ток высокой частоты. В металле возникают интенсивные вихревые токи, способные разогреть его до плавления. Такой способ позволяет плавить металлы в вакууме, в результате чего получают сверхчистые материалы.

Вихревые токи возникают и в проводах, по которым течет переменный ток. Направление этих токов можно определить по правилу Ленца. На рис. 184, *а* показано направление вихревых токов при возрастании первичного тока в проводнике, а на рис. 184, *б* — при его убывании. В обоих случаях направление вихревых токов таково, что они противодействуют изменению первич-

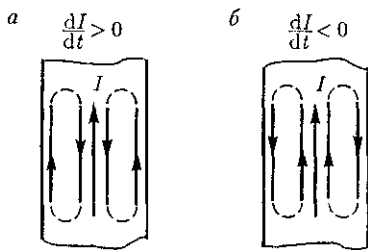


Рис. 184

ного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. Таким образом, вследствие возникновения вихревых токов быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление получило название *скин-эффекта* (от англ. skin — кожа) или *поверхностного эффекта*. Так как токи высокой частоты практически текут в тонком поверхностном слое, то провода для них делаются полыми.

Если сплошные проводники нагревать токами высокой частоты, то в результате скин-эффекта происходит нагревание только их поверхностного слоя. На этом основан метод поверхностной закалки металлов. Меняя частоту поля, он позволяет производить закалку на любой требуемой глубине.

## § 126. Индуктивность контура. Самоиндукция

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого, по закону Био — Савара — Лапласа [см. (110.2)], пропорциональна току. Сцепленный с контуром магнитный поток  $\Phi$  поэтому пропорционален току в контуре:

$$\Phi = LI, \quad (126.1)$$

где  $L$  — коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью контура*.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться также и сцепленный с ним магнитный поток; следовательно, в контуре будет индуцироваться ЭДС. Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется *самоиндукцией*.

Из выражения (126.1) определяется *единица индуктивности генри* (Гн): **1 Гн** — индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого **при** токе в **1 А** равен **1 Вб**:

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/А}.$$

Рассчитаем индуктивность бесконечно длинного соленоида. Согласно (120.4), полный магнитный поток сквозь соленоид (потокосцепление) равен  $\mu_0 k \frac{N^2 I}{l} S$ . Подставив это выражение в формулу (126.1), получим

$$L = \mu_0 k \frac{N^2 S}{l}, \quad (126.2)$$

т.е. индуктивность соленоида зависит от числа  $N$  витков соленоида, его длины  $l$ , площади  $S$  и магнитной проницаемости  $\mu$  вещества, из которого изготовлен сердечник соленоида.

Можно показать, что индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится. В этом смысле индуктивность контура — аналог электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров в диэлектрической проницаемости среды (см. § 93).

Применяя к явлению самоиндукции закон Фарадея [см. (123.2)], получим, что ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right).$$

Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется (в дальнейшем будет показано, что последнее условие выполняется не всегда), то  $L = \text{const}$  и

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}, \quad (126.3)$$

где знак « $\leftrightarrow$ » обусловлен правилом Ленца, согласно которому наличие индуктивности в контуре приводит к *замедлению изменения* тока в нем.

Если ток со временем возрастает, то  $\frac{dI}{dt} > 0$  и  $\mathcal{E}_s < 0$ , т.е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание. Если ток со временем убывает, то  $\frac{dI}{dt} < 0$  и  $\mathcal{E}_s > 0$ , т.е. индукционный ток имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание. Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую инертность, заключающуюся в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

## § 127. Токи при размыкании и замыкании цепи

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые *экстратоками самоиндукции*.

Экстратоки самоиндукции, согласно правилу Ленца, всегда направлены так, чтобы препятствовать изменениям тока

в цепи, т.е. направлены противоположно току, создаваемому источником. При выключении источника тока экстратоки имеют такое же направление, что и ослабевающий ток. Следовательно, наличие индуктивности в цепи приводит к замедлению исчезновения или установления тока в цепи.

Рассмотрим процесс выключения тока в цепи, содержащей источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ , резистор сопротивлением  $R$  и катушку индуктивностью  $L$ . Под действием внешней ЭДС в цепи течет постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

(внутренним сопротивлением источника тока пренебрегаем).

В момент времени  $t = 0$  отключим источник тока. Ток в катушке индуктивностью  $L$  начнет уменьшаться, что приведет к возникновению ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}$ , препятствующей, согласно правилу Ленца, уменьшению тока. В каждый момент времени ток в цепи определяется законом Ома  $I = \frac{\mathcal{E}_s}{R}$ , или

$$IR = -L\frac{dI}{dt}. \quad (127.1)$$

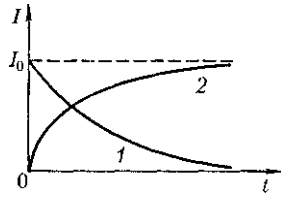
Разделив в выражении (127.1) переменные, получим  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$ . Интегрируя это уравнение  $I$  (от  $I_0$  до  $I$ ) и  $t$  (от 0 до  $t$ ), находим  $\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{Rt}{L}$ , или

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (127.2)$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  — постоянная, называемая *временем релаксации*.

Из (127.2) следует, что  $\tau$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз.

Рис. 185



Таким образом, в процессе отключения источника тока сила тока убывает по экспоненциальному закону (127.2) и определяется кривой 1 на рис. 185. Чем больше индуктивность цепи и меньше ее сопротивление, тем больше  $\tau$  и, следовательно, тем медленнее уменьшается ток в цепи при ее размыкании.

При замыкании цепи помимо внешней ЭДС  $\mathcal{E}$  возникает ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая, согласно правилу Ленца, возрастанию тока. По закону Ома,  $IR - \mathcal{E} + \mathcal{E}_s$ , или

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}.$$

Введя новую переменную  $u = IR - \mathcal{E}$ , преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau},$$

где  $\tau$  — время релаксации.

В момент замыкания ( $t = 0$ ) сила тока  $I = 0$  и  $u = -\mathcal{E}$ . Следовательно, интегрируя по  $u$  (от  $-\mathcal{E}$  до  $IR - \mathcal{E}$ ) и  $t$  (от 0 до  $t$ ), находим  $\ln \frac{IR - \mathcal{E}}{-\mathcal{E}} = -\frac{t}{\tau}$ , или

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (127.3)$$

где  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$  — установившийся ток (при  $t \rightarrow \infty$ ).

Таким образом, в процессе включения источника тока нарастание силы тока в цепи задается функцией (127.3) и определяется кривой 2 на рис. 185.

Сила тока возрастает от начального значения  $I = 0$  и асимптотически стремится к установившемуся значению  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . Скорость нарастания тока определяется тем же временем релаксации  $\tau = \frac{L}{R}$ , что и убывание тока. Установление тока происходит тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление.

Оценим значение ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , возникающей при мгновенном увеличении сопротивления цепи постоянного тока от  $R_0$  до  $R$ . Предположим, что мы размыкаем контур, когда в нем течет установившийся ток  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . При размыкании цепи ток изменяется по формуле (127.2). Подставив в нее выражение для  $I_0$  и  $\tau$ , получим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t},$$

т.е. при значительном увеличении сопротивления цепи ( $\frac{R}{R_0} \gg 1$ ), обладающей большой индуктивностью, ЭДС самоиндукции может во много раз превышать ЭДС источника тока, включенного в цепь. Таким образом, необходимо учитывать, что контур, содержащий индуктивность, нельзя резко размыкать, так как это (возникновение значительных ЭДС самоиндукции) может привести к пробое изоляции и выводу из строя измерительных приборов. Если в контур сопротивление вводить постепенно, то ЭДС самоиндукции не достигнет больших значений.

## § 128. Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура (1 и 2), расположенных достаточно близко друг от друга (рис. 186). Если в контуре 1 течет ток  $I_1$ , то магнитный поток, создаваемый этим током (поле, создающее этот поток, на рисунке изображено сплошными линиями), пропорционален  $I_1$ . Обозначим через  $\Phi_{21}$  ту часть потока, которая пронизывает контур 2. Тогда

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad (128.1)$$

где  $L_{21}$  — коэффициент пропорциональности.

Если ток  $I_1$  изменяется, то в контуре 2 индуцируется ЭДС  $\mathcal{E}_{12}$ , которая по закону Фарадея [см. (123.2)] равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_{21}$ , созданного током в первом контуре и пронизывающего второй:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогично, при протекании в контуре 2 тока  $I_2$  магнитный поток (его поле изображено на рис. 186 штриховыми линиями) пронизывает первый контур. Если  $\Phi_{12}$  — часть этого потока, пронизывающего контур 1, то

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2.$$

Если ток  $I_2$  изменяется, то в контуре 1 индуцируется ЭДС  $\mathcal{E}_{21}$ , которая равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_{12}$ , созданного током во втором контуре и пронизывающего первый:

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}.$$

Явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется *взаимной индукцией*.

Коэффициенты пропорциональности  $L_{21}$  и  $L_{12}$  называются *взаимной индуктивностью контуров*. Расчеты, подтверждаемые опытом, показывают, что

$$L_{12} = L_{21}. \quad (128.2)$$

Коэффициенты  $L_{21}$  и  $L_{12}$  зависят от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Единица взаимной индуктивности та же, что и для индуктивности, — *генри* (Гн).

Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник. Этот случай имеет большое практическое значение (рис. 187). Магнитная индукция поля, создаваемого первой катушкой с числом витков  $N_1$ , током  $I_1$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  сердечника, согласно (119.2),  $B = \mu_0\mu\frac{N_1I_1}{l}$ , где  $l$  — длина сердечника по средней линии. Магнитный поток сквозь один виток второй катушки  $\Phi_2 = BS = \mu_0\mu\frac{N_1I_1}{l}S$ .

Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую  $N_2$  витков,

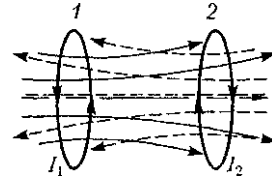


Рис. 186

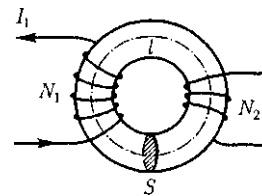


Рис. 187

$$\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Поток  $\Psi$  создается током  $I_1$ , поэтому, согласно (128.1), получаем

$$L_{21} = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (128.3)$$

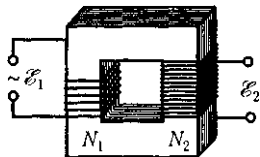
Если вычислить магнитный поток, создаваемый катушкой 2 сквозь катушку 1, то для  $L_{12}$  получим выражение в соответствии с формулой (128.3). Таким образом, взаимная индуктивность двух катушек, намотанных па общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

## § 129. Трансформаторы

Принцип действия *трансформаторов* — устройств, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока, основан на явлении взаимной индукции. Впервые трансформаторы были сконструированы русским электротехником П. Н. Яблочковым (1847—1894) и русским физиком И. Ф. Усагиным (1855—1919). Принципиальная схема трансформатора показана на рис. 188. Первичная и вторичная катушки (обмотки), имеющие соответственно  $N_1$  и  $N_2$  витков, укреплены на замкнутом железном сердечнике. Так как концы первичной обмотки присоединены к источнику переменного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ , то в пей возникает переменный ток  $I_1$ , создаго-

Рис. 188



щий в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток  $\Phi$ , который практически полностью локализован в железном сердечнике и, следовательно, почти целиком пронизывает витки вторичной обмотки. Изменение этого потока вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной — ЭДС самоиндукции.

Ток  $I_1$  первичной обмотки определяется согласно закону Ома:

$$\mathcal{E}_1 - \frac{d}{dt}(N_1 \Phi) = I_1 R_1,$$

где  $R_1$  — сопротивление первичной обмотки. Падение напряжения  $I_1 R_1$  на сопротивлении  $R_1$  при быстропеременных полях мало по сравнению с каждой из двух ЭДС, поэтому

$$\mathcal{E}_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (129.1)$$

ЭДС взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d(N_2 \Phi)}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (129.2)$$

Сравнивая выражения (129.1) и (129.2), получим, что ЭДС, возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1, \quad (129.3)$$

где знак «—» показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Отношение числа витков  $\frac{N_2}{N_1}$ , показывающее, во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной, называется *коэффициентом трансформации*.

Пренебрегая потерями энергии, которые в современных трансформаторах

не превышают 2 % и связаны в основном с выделением в обмотках джоулевой теплоты и появлением вихревых токов, и применяя закон сохранения энергии, можем записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$\mathcal{E}_2 I_2 \approx \mathcal{E}_1 I_1,$$

откуда, учитывая соотношение (129.3), найдем

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1},$$

т. е. токи в обмотках обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках.

Если  $\frac{N_2}{N_1} > 1$ , то имеем дело с **повышающим трансформатором**, увеличивающим переменную ЭДС и понижающим ток (применяются, например, для передачи электроэнергии на большие расстояния, так как в данном случае потери па джоулеву теплоту, пропорциональные квадрату силы тока, снижаются); если  $\frac{N_2}{N_1} < 1$ , то имеем дело с **понижающим трансформатором**, уменьшающим ЭДС и повышающим ток (применяются, например, при электросварке, так как для нее требуется большой ток при низком напряжении).

Мы рассматривали трансформаторы, имеющие только две обмотки. Однако трансформаторы, используемые в радиоустройствах, имеют 4—5 обмоток, обладающих разными рабочими напряжениями. Трансформатор, состоящий из одной обмотки, называется **автотрансформатором**. В случае повышающего автотрансформатора ЭДС подводится к части обмотки, а вторичная ЭДС снимается со всей обмотки. В понижающем автотрансформаторе напряжение сети подается па всю обмотку, а

вторичная ЭДС снимается с части обмотки.

### § 130. Энергия магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, создает в окружающем пространстве магнитное поле, причем магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока.

Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Естественно предположить, что энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ . С данным контуром сцеплен магнитный поток [см. (126.1)]  $\Phi = LI$ , причем при изменении тока на  $dI$  магнитный поток изменяется на  $d\Phi = L dI$ . Однако для изменения магнитного потока на величину  $d\Phi$  (см. § 121) необходимо совершить работу  $dA = I d\Phi = LI dI$ . Тогда работа по созданию магнитного потока будет

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Следовательно, энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (130.1)$$

Исследование свойств переменных магнитных полей, в частности распространения электромагнитных волн, явилось доказательством того, что энергия магнитного поля локализована в пространстве. Это соответствует представлениям теории поля.

Энергию магнитного поля можно представить как функцию величин, характеризующих это поле в окружающем пространстве. Для этого рассмот-

рим частный случай — однородное магнитное поле внутри длинного соленоида. Подставив в формулу (130.1) выражение (126.2), получим

Т а б л и ц а 6

Электрическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Точечный заряд	$Q$	Элемент проводника с током	$Idl$
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^2} dl$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	Магнитная постоянная	$\mu_0$
Силовая характеристика электрического поля	$E = \frac{F}{Q_0}$	Силовая характеристика магнитного поля	$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$
Однородное электрическое поле	$\vec{E} = \text{const}$	Однородное магнитное поле	$\vec{B} = \text{const}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$
Линии напряженности вектора $\vec{E}$	—	Линии магнитной индукции	—
Поляризованность	$P = \frac{\vec{p}_v}{V} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}$	Намагниченность	$\vec{j} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V}$
Емкость одиночного проводника	$C = \frac{Q}{\varphi}$	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I}$
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}$	Энергия катушки с током	$W = \frac{LI^2}{2}$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$	Магнитная проницаемость	$\mu$
Объемная плотность энергии	$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$	Объемная плотность энергии	$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$
Поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS$	Поток вектора $\vec{B}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS$
Циркуляция вектора $\vec{E}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_t dl$	Циркуляция вектора $\vec{B}$	$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_t dl$



$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu N^2 I^2 S.$$

Поскольку  $I = \frac{Bl}{\mu_0 \mu N}$  [см. (119.2)] и  $B = \mu_0 \mu H$  [см. (109.3)], то

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{BH}{2} V, \quad (130.2)$$

где  $V = Sl$  — объем соленоида.

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия [см. (130.2)] заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной *объемной плотностью*

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (130.3)$$

Выражение (130.3) для объемной плотности энергии магнитного поля имеет вид, аналогичный формуле (95.8) для объемной плотности энергии электростатического поля, с той разницей, что электрические величины заменены в нем магнитными. Формула (130.3) выведена для однородного поля, но она справедлива и для неоднородных полей. Выражение (130.3) справедливо только для сред, для которых зависимость  $B$  от  $H$  линейная, т.е. оно относится только к пара- и диамагнетикам (см. § 132).

В табл. 6 представлена аналогия при рассмотрении электрических и магнитных полей.

### Контрольные вопросы

- Что является причиной возникновения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре?
  - В чем заключается явление электромагнитной индукции? Проанализируйте опыты Фарадея.
  - Почему для обнаружения индукционного тока лучше использовать замкнутый проводник в виде катушки, а не в виде одного витка провода?
  - Сформулируйте правило Ленца, проиллюстрировав его примерами.
  - Как направлен индукционный ток?
  - Всегда ли при изменении магнитной индукции в проводящем контуре в нем возникает ЭДС индукции? индукционный ток?
  - Возникает ли индукционный ток в проводящей рамке, поступательно движущейся в однородном магнитном поле?
  - Покажите, что закон Фарадея есть следствие закона сохранения энергии.
  - Какова природа ЭДС электромагнитной индукции?
  - Выведите выражение для ЭДС индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. За счет чего ее можно увеличить?
  - Что такое вихревые токи? Вредны они или полезны?
  - Почему сердечники трансформаторов не делают сплошными?
  - Когда ЭДС самоиндукции больше — при замыкании или размыкании цепи постоянного тока?
  - В чем заключается физический смысл индуктивности контура? взаимной индуктивности двух контуров? От чего они зависят?
  - В чем заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции? Вычислите ЭДС индукции для обоих случаев.
- В чем заключается физический смысл времени релаксации  $\tau = -4$ ? Докажите, что  $\tau$  имеет размерность времени.
- Запишите и проанализируйте выражения для объемной плотности энергии электростатического и магнитного полей. Чему равна объемная плотность энергии электромагнитного поля?

- Напряженность магнитного поля возросла в два раза. Как изменилась объемная плотность энергии магнитного поля?
- Приведите соотношение между токами в первичной и вторичной обмотках повышающего трансформатора.

## ЗАДАЧИ

15.1. Кольцо из алюминиевого провода ( $\rho = 2 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца 20 см, диаметр провода 1 мм. Определите скорость изменения магнитного поля, если сила тока в кольце 0,5 А. [0,33 Тл/с]

15.2. В однородном магнитном поле, индукция которого 0,5 Тл, равномерно с частотой  $300 \text{ мин}^{-1}$  вращается катушка, содержащая 200 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь поперечного сечения катушки  $100 \text{ см}^2$ . Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определите максимальную ЭДС, индуцируемую в катушке. [31,4 В]

15.3. Определите, сколько витков проволоки, вплотную прилегающих друг к другу, диаметром 0,3 мм с изоляцией ничтожно малой толщины надо намотать на картонный цилиндр диаметром 1 см, чтобы получить однослойную катушку с индуктивностью 1 мГн. [3040]

15.4. Определите, через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,98 предельного значения, если источник тока замыкают на катушку сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 0,4 Гн. [0,16 с]

15.5. Два соленоида (индуктивность одного  $L_1 = 0,3 \text{ Гн}$ , другого  $L_2 = 0,64 \text{ Гн}$ ) одинаковой длины и практически равного сечения вставлены один в другой. Определите взаимную индуктивность соленоидов. [0,48 Гн]

15.6. Автотрансформатор, понижающий напряжение с  $U_1 = 5,5 \text{ кВ}$  до  $U_2 = 220 \text{ В}$ , содержит в первичной обмотке  $N_1 = 1500$  витков. Сопротивление вторичной обмотки  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ . Сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения)  $R = 13 \text{ Ом}$ . Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков во вторичной обмотке трансформатора. [68]

## Глава 16

### МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

#### § 131. Магнитные моменты электронов и атомов

Рассматривая действие магнитного поля на проводники с током и на движущиеся заряды, мы не интересовались процессами, происходящими в веществе. Свойства среды учитывались формально с помощью магнитной проницаемости  $\mu$ . Для того чтобы разобраться в магнитных свойствах сред и их влиянии на магнитную индукцию, необходимо рассмотреть действие магнитного поля на атомы и молекулы вещества.

Опыт показывает, что все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Рассмотрим причину этого явления с точки зрения строения атомов и молекул, положив в основу гипотезу Ампера (см. § 109), согласно которой в любом теле существуют микро-

Опыт показывает, что все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Рассмотрим причину этого явления с точки зрения строения атомов и молекул, положив в основу гипотезу Ампера (см. § 109), согласно которой в любом теле существуют микро-

скопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Для качественного объяснения магнитных явлений с достаточным приближением можно считать, что электрон движется в атоме по круговым орбитам. Электрон, движущийся по одной из таких орбит, эквивалентен круговому току, поэтому он обладает **орбитальным магнитным моментом** [см. (109.2)]  $p_m = IS\vec{n}$ , модуль которого

$$p_m = IS = evS, \quad (131.1)$$

где  $I = ev$  — сила тока;  $v$  — частота вращения электрона по орбите;  $S$  — площадь орбиты.

Если электрон движется по часовой стрелке (рис. 189), то ток направлен против часовой стрелки и вектор  $p_m$  (в соответствии с правилом правого винта) направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона, как указано на рисунке.

С другой стороны, движущийся по орбите электрон обладает механическим моментом импульса  $L_l$ , модуль которого, согласно (19.1),

$$L_l = mvr = 2\pi m v S, \quad (131.2)$$

где  $v = 2\pi r \nu$ ,  $\pi r^2 = S$ . Вектор  $L_l$  (его направление также определяется по правилу правого винта) называется **орбитальным механическим моментом электрона**.

Из рис. 189 следует, что направления  $p_m$  и  $L_l$  противоположны, поэтому, учитывая выражения (131.1) и (131.2), ПОЛУЧИМ

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m} \vec{L}_l = g \vec{L}_l, \quad (131.3)$$

где величина

$$g = -\frac{e}{2m} \quad (131.4)$$

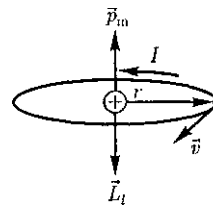


Рис. 189

называется **гиромангнитным отношением орбитальных моментов** (общепринято писать со знаком «-», указывающим на то, что направления моментов противоположны). Это отношение, определяемое универсальными постоянными, одинаково для любой орбиты, хотя для разных орбит значения  $v$  и  $r$  различны. Формула (131.4) выведена для круговой орбиты, но она справедлива и для эллиптических орбит.

Экспериментальное определение гиромангнитного отношения проведено в опытах Эйнштейна и де Гааза<sup>1</sup> (1915), которые наблюдали поворот свободно подвешенного на тончайшей кварцевой нити железного стержня при его намагничивании во внешнем магнитном поле (по обмотке соленоида пропускался переменный ток с частотой, равной частоте крутильных колебаний стержня).

При исследовании вынужденных крутильных колебаний стержня определялось гиромангнитное отношение, которое оказалось равным  $-\frac{e}{m}$ . Таким образом, знак носителей, обуславливающих молекулярные токи, совпадал со знаком заряда электрона, а гиромангнитное отношение оказалось в два раза большим, чем введенная ранее величина  $d$  [см. (131.4)]. Для объяснения этого результата, имевшего большое значение для дальнейшего развития физики, было предположено, а впоследствии

<sup>1</sup> В. И. де Гааз (1878- 1960) - нидерландский физик.

доказано, что кроме орбитальных моментов [см. (131.1) и (131.2)] электрон обладает *собственным механическим моментом импульса*  $L_{l,s}$ , называемым *спином*.

Считалось, что спин обусловлен вращением электрона вокруг своей оси, что привело к целому ряду противоречий. В настоящее время установлено, что спин является неотъемлемым свойством электрона, подобно его заряду и массе. Спи́ну электрона  $L_{l,s}$  соответствует *собственный (спиновый) магнитный момент*  $p_{m,s}$ , пропорциональный  $L_{l,s}$  и направленный в противоположную сторону:

$$\vec{p}_{m,s} = g_s \vec{L}_{l,s}. \quad (131.5)$$

Величина  $g_s$  называется *гиромагнитным отношением спиновых моментов*.

Проекция собственного магнитного момента на направление вектора  $B$  может принимать только одно из следующих двух значений:

$$p_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B,$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$  — постоянная Планка);  $\mu_B$  — *магнетон Бора*, являющийся *единицей магнитного момента электрона*.

В общем случае магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. Магнитный момент атома, следовательно, складывается из магнитных моментов входящих в его состав электронов и магнитного момента ядра (обусловлен магнитными моментами входящих в ядро протонов и нейтронов). Однако магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими пренебрегают. Таким образом, общий магнитный момент атома (молекулы)  $p_n$  равен векторной сум-

ме магнитных моментов (орбитальных и спиновых), входящих в атом (молекулу) электронов:

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_{m,i} + \sum \vec{p}_{m,s}. \quad (131.6)$$

Еще раз обратим внимание на то, что при рассмотрении магнитных моментов электронов и атомов мы пользовались классической теорией, не учитывая ограничений, накладываемых на движение электронов законами квантовой механики. Однако это не противоречит полученным результатам, так как для дальнейшего объяснения намагничивания веществ существенно лишь то, что атомы обладают магнитными моментами.

## § 132. Диа- и парамагнетизм

Всякое вещество является *магнетиком*, т.е. оно способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Для понимания механизма этого явления необходимо рассмотреть действие магнитного поля на движущиеся в атоме электроны.

Ради простоты предположим, что электрон в атоме движется по круговой орбите. Если орбита электрона ориентирована относительно вектора  $B$  произвольным образом, составляя с

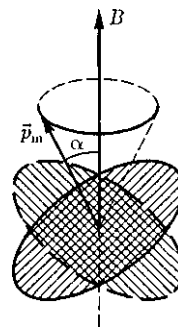


Рис. 190

ним угол  $\alpha$  (рис. 190), то можно доказать, что она приходит в такое движение вокруг  $B$ , при котором вектор магнитного момента  $p_{\text{ин}}$ , сохраняя постоянным угол  $\alpha$ , вращается вокруг вектора  $B$  с некоторой угловой скоростью. Такое движение в механике называется **прецессией**. Прецессию вокруг вертикальной оси, проходящей через точку опоры, совершает, например, диск волчка при замедлении движения.

Таким образом, электронные орбиты атома под действием внешнего магнитного поля совершают прецессионное движение, которое эквивалентно круговому току. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля, направленная противоположно внешнему полю. Наведенные составляющие магнитных полей атомов (молекул) складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название **диамагнитного эффекта**, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются **диамагнетиками**.

В отсутствие внешнего магнитного поля диамагнетик немагнитен, поскольку в данном случае магнитные моменты электронов взаимно компенсируются, и суммарный магнитный момент атома [он равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) составляющих атом электронов] равен нулю. К диамагнетикам относятся многие металлы (например, В, Аг, Аи, Си), большинство органических соединений, смолы, углерод и т.д.

Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веще-

ствам. Однако наряду с диамагнетиками существуют и **парамагнетики** — вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля.

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и атомы (молекулы) парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается **преимущественная ориентация** магнитных моментов атомов *по полю* (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот **эффект** называется **парамагнитным**.

При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается и парамагнетик размагничивается. К парамагнетикам относятся редкоземельные элементы, Pt, Al и т.д. Диамагнитный эффект наблюдается и в парамагнетиках, но он значительно слабее парамагнитного и поэтому остается незаметным.

Из рассмотрения явления парамагнетизма следует, что его объяснение совпадает с объяснением ориентационной (дипольной) поляризации диэлектриков с полярными молекулами (см. § 87), только электрический момент атомов в случае поляризации надо заменить магнитным моментом атомов в случае намагничивания.

Подводя итог качественному рассмотрению диа- и парамагнетизма, еще раз отметим, что атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств.

Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком; если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

### § 133. Намагниченность. Магнитное поле в веществе

Подобно тому, как для количественного описания поляризации диэлектриков вводилась поляризованность (см. § 88), для количественного описания намагничивания магнетиков вводят векторную величину — *намагниченность*, определяемую магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{j} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V},$$

где  $\vec{P}_m = \sum \vec{p}_a$  — магнитный момент магнетика, представляющий собой векторную сумму магнитных моментов отдельных молекул [см. (131.6)].

Рассматривая характеристики магнитного поля (см. § 109), мы вводили вектор магнитной индукции  $B$ , характеризующий результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками, и вектор напряженности  $H$ , характеризующий магнитное поле макротоков. Следовательно, магнитное поле в веществе складывается из двух полей: внешнего поля, создаваемого током, и поля, создаваемого намагниченным веществом. Тогда можем запи-

сать, что вектор магнитной индукции результирующего магнитного поля в магнетике равен векторной сумме магнитных индукций внешнего поля  $B_0$  (создаваемого намагничивающим током в *вакууме*) и поля микротоков  $B'$  (создаваемого молекулярными токами):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad (133.1)$$

где  $\vec{B}_0 = \mu_0 H$  [см. (109.3)].

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения  $S$  и длины  $l$ , внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией  $D$ . Возникающее в магнетике магнитное поле молекулярных токов будет направлено противоположно внешнему полю для диамагнетиков и совпадать с ним по направлению для парамагнетиков. Плоскости всех молекулярных токов расположатся перпендикулярно вектору  $\vec{B}_0$ , так как векторы их магнитных моментов  $p_m$  антипараллельны вектору  $\vec{B}_0$  (для диамагнетиков) и параллельны  $B_0$  (для парамагнетиков).

Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются (рис. 191). Некомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на боковую поверхность цилиндра.

Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току в соленой-

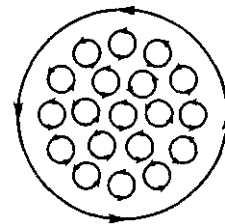


Рис. 191

де и создает внутри него поле, магнитную индукцию  $B'$  которого можно вычислить, учитывая формулу (119.2) для  $N = I$  (соленоид из одного витка):

$$B = \mu_0 \frac{I'}{l}, \quad (133.2)$$

где  $I'$  — сила молекулярного тока;  $l$  — длина рассматриваемого цилиндра;  $\mu_0 = 1$  — магнитная проницаемость.

С другой стороны, ток, проходящий на единицу длины цилиндра, или его *линейная плотность*, поэтому магнитный момент этого тока  $p_m = \frac{I'lS}{V} = \frac{I'V}{V}$ , где  $V$  — объем магнетика.

Если  $P_m$  — магнитный момент магнетика объемом  $V$ , то намагниченность магнетика

$$J = \frac{P_m}{V} = \frac{I'}{l}. \quad (133.3)$$

Сопоставляя (133.2) и (133.3), получим, что

$$B' = \mu_0 J,$$

или в векторной форме

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}.$$

Подставив выражения для  $B_0$  и  $B'$  в (133.1), получим

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}), \quad (133.4)$$

или

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{J}. \quad (133.5)$$

Как показывает опыт, в несильных полях намагниченность пропорциональна напряженности поля, вызывающего намагничивание, т.е.

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (133.6)$$

где  $\chi$  — безразмерная величина, называемая *магнитной восприимчивостью*

*вещества*. Для диамагнетиков  $\chi$  отрицательна (поле молекулярных токов противоположно внешнему), для парамагнетиков — положительна (поле молекулярных токов совпадает с внешним).

Используя формулу (133.6), выражение (133.4) можно записать в виде

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}, \quad (133.7)$$

откуда

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1 + \chi)}.$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (133.8)$$

представляет собой магнитную проницаемость вещества. Подставив (133.8) в (133.7), придем к соотношению (109.3)  $B = \mu_0 \mu H$ , которое ранее постулировалось.

Так как абсолютное значение магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков очень мало (порядка  $10^{-4} - 10^{-6}$ ), то для них  $\mu$  незначительно отличается от единицы. Это просто понять, так как магнитное поле молекулярных токов значительно слабее намагничивающего поля. Таким образом, для диамагнетиков  $\chi < 0$  и  $\mu < 1$ , для парамагнетиков  $\chi > 0$  и  $\mu > 1$ .

*Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора  $B$ )* является обобщением закона (118.1):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_i dl = \mu_0 (I + I'),$$

где  $I$  и  $I'$  соответственно алгебраические суммы макроток (токов проводимости) и микроток (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром  $L$ .

Следовательно, циркуляция вектора магнитной индукции  $B$  по произ-

вольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную.

Таким образом, вектор  $\vec{B}$  характеризует результирующее поле, созданное как макроскопическими токами в проводниках (токами проводимости), так и микроскопическими токами в магнетиках, поэтому линии вектора магнитной индукции  $B$  не имеют источников и являются замкнутыми.

Из теории известно, что циркуляция намагниченности  $J$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме молекулярных токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'$$

Тогда закон полного тока для магнитного поля в веществе можно записать также в виде

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I, \quad (133.9)$$

где  $I$ , подчеркнем это еще раз, есть алгебраическая сумма токов проводимости.

Выражение, стоящее в скобках в (133.9), согласно (133.5), есть не что иное, как введенный ранее вектор  $\vec{H}$  напряженности магнитного поля. Итак, циркуляция вектора  $H$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (133.10)$$

Выражение (133.10) представляет собой **теорему о циркуляции вектора  $H$** .

## § 134. Условия на границе раздела двух магнетиков

Установим связь для векторов  $B$  и  $H$  на границе раздела двух однородных магнетиков (магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ) при отсутствии на границе тока проводимости.

Построим вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое — во втором (рис. 192). Основания  $AS$  настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $B$  одинаков. Согласно теореме Гаусса (120.3),

$$B_{n1} \Delta S - B_{n2} \Delta S = 0$$

(нормали  $n$  и  $n'$  к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (134.1)$$

Заменив, согласно  $B = \mu_0 \mu H$ , проекции вектора  $B$  проекциями вектора  $H$ , умноженными на  $\mu_0 \mu$ , получим

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (134.2)$$

Вблизи границы раздела двух магнетиков 1 и 2 построим небольшой замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  длиной  $l$ , ориентируя его так, как показано на рис. 193. Согласно теореме (133.10) о циркуляции вектора  $H$ ,

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0$$

(токов проводимости на границе раздела нет), откуда

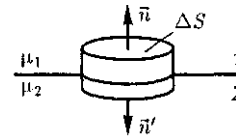


Рис. 192



Рис. 193



$$H_{\tau 1} l - H_{\tau 2} l = 0$$

(знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам  $BC$  и  $DA$  ничтожно малы). Поэтому

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (134.3)$$

Заменив, согласно  $\vec{B} = \mu_{\text{кл}} \vec{H}$ , проекции вектора  $\vec{H}$  проекциями вектора  $B$ , деленными на  $\mu_{\text{кл}}$ , получим

$$\frac{B_{\tau 1}}{H_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (134.4)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $B$  ( $B_n$ ) и тангенциальная составляющая вектора  $H$  ( $H_\tau$ ) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а тангенциальная составляющая вектора  $B$  ( $B_\tau$ ) и нормальная составляющая вектора  $H$  ( $H_n$ ) претерпевают скачок.

Из полученных условий (134.1)—(134.4) для составляющих векторов  $B$  и  $H$  следует, что линии этих векторов испытывают излом (преломляются). Как и в случае диэлектриков (см. § 90), можно найти закон преломления линий  $B$  (а значит, и линий  $H$ ):

$$\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (134.5)$$

Из этой формулы следует, что, входя в магнетик с большей магнитной проницаемостью, линии  $B$  и  $H$  удаляются от нормали.

### § 135. Ферромагнетики и их свойства

Помимо рассмотренных двух классов веществ — диа- и парамагнетиков, называемых *слабомагнитными веществами*, существуют еще *сильномагнитные*

*вещества — ферромагнетики* — вещества, обладающие спонтанной намагниченностью, т.е. они намагничены даже при отсутствии внешнего магнитного поля. К ферромагнетикам кроме основного их представителя — железа (от него и идет название «ферромагнетизм») — относятся, например, кобальт, никель, гадолиний, их сплавы и соединения.

Ферромагнетики помимо способности сильно намагничиваться обладают еще и другими свойствами, существенно отличающими их от диа- и парамагнетиков. Если для слабомагнитных веществ зависимость  $J$  от  $H$  линейна [см. (133.6) и рис. 194], то для ферромагнетиков эта зависимость, впервые изученная в 1878 г. методом баллистического гальванометра для железа русским физиком А.Г.Столетовым (1839—1896), является довольно сложной. По мере возрастания  $H$  намагниченность  $J$  сначала растет быстро, затем медленнее и, наконец, достигается так называемое *магнитное насыщение*  $J_{\text{нас}}$ , уже не зависящее от напряженности поля.

Подобный характер зависимости  $J$  от  $H$  можно объяснить тем, что по мере увеличения намагничивающего поля возрастает степень ориентации молекулярных магнитных моментов по полю. Однако этот процесс начнет замедляться, когда остается все меньше и меньше несоориентированных моментов, и, наконец, когда все моменты будут ориентированы по полю, дальнейшее увеличение  $H$  прекращается и наступает магнитное насыщение.

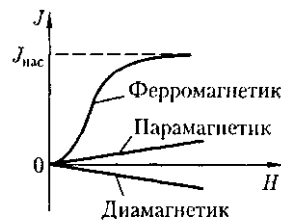


Рис. 191

Рис. 195

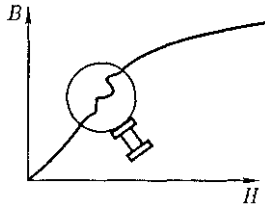
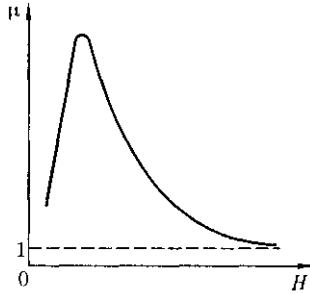


Рис. 196



Магнитная индукция  $B = \mu_0(H + J)$  [см. (133.4)] в слабых полях растет быстро с увеличением  $J$  вследствие возрастания  $J$ , а в сильных полях, поскольку второе слагаемое постоянно ( $J = J_{\text{нас}}$ ),  $B$  возрастает с увеличением  $J$  по линейному закону (рис. 195).

Существенная особенность ферромагнетиков — не только большие значения  $\mu$  (например, для железа — 5000, для сплава супермаллоя — 800 000!), но и зависимость  $\mu$  от  $J$  (рис. 196). Вначале  $\mu$  растет с увеличением  $H$ , затем, достигая максимума, начинает уменьшаться, стремясь в случае сильных полей к 1 ( $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{H}$ , поэтому при

$J = J_{\text{нас}} = \text{const}$  с ростом  $H$  отношение  $\frac{J}{H} \rightarrow 0$ , а  $\mu \rightarrow 1$ ).

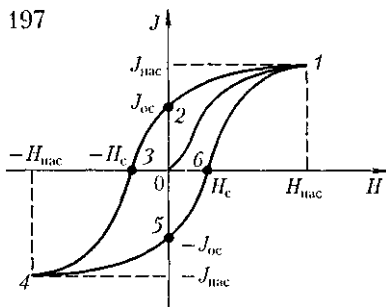
Характерная особенность ферромагнетиков состоит также в том, что для них зависимость  $J$  от  $H$  (а следовательно, и  $B$  от  $J$ ) определяется предысторией намагничивания ферромагнетика. Это явление получило название *магнитного гистерезиса*. Если намагнитить ферромагнетик до насыщения (рис. 197, точка 1), а затем начать уменьшать напряженность  $J$  намагничивающего поля, то, как показывает опыт, уменьшение описывается кривой 1—2, лежащей выше кривой 1—0. При  $H = 0$   $J$  отличается от нуля, т. е. в ферромагнетике наблюдается *остаточное намагничивание*  $J_{\text{ос}}$ .

С наличием остаточного намагничивания связано существование *постоянных магнитов*. Намагничивание обращается в нуль под действием поля  $H_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Напряженность  $H_c$  называется *коэрцитивной силой*.

При дальнейшем увеличении противоположного поля ферромагнетик перемагничивается (кривая 3—4), и при  $H = -H_{\text{нас}}$  достигается насыщение (точка 4). Затем ферромагнетик можно опять размагнитить (кривая 4—5—6) и вновь перемагнитить до насыщения (кривая 6—1).

Таким образом, при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля намагниченность  $J$  изменяется в соответствии с кривой 1—2—3—4—5—6—1, которая называется *петлей гистерезиса* (от греч. «запаздывание»). Гистерезис приводит к тому, что намагничивание ферромагнетика не является однозначной функцией  $J$ , т. е. одному и тому же значению  $J$  соответствует несколько значений  $J$ .

Рис. 197



Различные ферромагнетики дают разные гистерезисные петли. **Ферромагнетики** с малой (в пределах от нескольких тысячных до  $1 - 2$  А/см) коэрцитивной силой  $H_c$  (с узкой петлей гистерезиса) называются **мягкими**, с большой (от нескольких десятков тысяч ампер на сантиметр) коэрцитивной силой (с широкой петлей гистерезиса) — **жесткими**. Величины  $c$ ,  $J_{0c}$  и  $\mu_{\max}$  определяют применимость ферромагнетиков для тех или иных практических целей. Так, жесткие ферромагнетики (например, углеродистые и вольфрамовые стали) применяются для изготовления постоянных магнитов, а мягкие (например, мягкое железо, сплав железа с никелем) — для изготовления сердечников трансформаторов.

Ферромагнетики обладают еще одной существенной особенностью: для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри**, при которой он теряет свои магнитные свойства. При нагревании образца выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий в точке Кюри, не сопровождается поглощением или выделением теплоты, т.е. в точке Кюри происходит фазовый переход II рода (см. § 75).

Наконец, процесс намагничивания ферромагнетиков сопровождается изменением его линейных размеров и объема. Это явление получило название **магнитострикции** (открыто Д. Джоулем, 1842). Величина и знак эффекта зависят от напряженности  $Y$  намагничивающего поля, от природы ферромагнетика и ориентации кристаллографических осей по отношению к полю.

## § 136. Природа ферромагнетизма

Рассматривая магнитные свойства ферромагнетиков, мы не вскрывали физическую природу этого явления. Описательная теория ферромагнетизма была разработана французским физиком П. Вейссом (1865 — 1940). Последовательная количественная теория на основе квантовой механики развита Я. И. Френкелем и немецким физиком В. Гейзенбергом (1901 - 1976).

Согласно представлениям Вейсса, ферромагнетики при температурах ниже точки Кюри обладают спонтанной намагниченностью независимо от наличия внешнего намагничивающего поля. Спонтанное намагничивание, однако, находится в кажущемся противоречии с тем, что многие ферромагнитные материалы даже при температурах ниже точки Кюри не намагничены. Для устранения этого противоречия Вейсс ввел гипотезу, согласно которой ферромагнетик ниже точки Кюри разбивается на большое число малых макроскопических областей — **доменов**, самопроизвольно намагниченных до насыщения.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга, поэтому результирующий магнитный момент ферромагнетика равен нулю и ферромагнетик не намагничен. Внешнее магнитное поле ориентирует по полю магнитные моменты не отдельных атомов, как это имеет место в случае парамагнетиков, а целых областей спонтанной намагниченности. Поэтому с ростом  $Y$  намагниченность  $\cdot /$  (см. рис. 194) и магнитная индукция  $B$  (см. рис. 195) уже в довольно слабых полях растут очень быстро. Этим объясняется также увеличение  $\mu$  ферромагнетиков до максимального значения в слабых полях (см. рис. 196).

Эксперименты показали, что зависимость  $B$  от  $H$  не является такой плавной, а имеет ступенчатый вид, как показано на рис. 195. Это свидетельствует о том, что внутри ферромагнетика домены поворачиваются по полю скачком.

При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ферромагнетика сохраняют остаточное намагничивание, так как тепловое движение не в состоянии быстро дезориентировать магнитные моменты столь крупных образований, какими являются домены. Поэтому и наблюдается явление магнитного гистерезиса (рис. 197). Для того чтобы ферромагнетик размагнитить, необходимо приложить коэрцитивную силу; размагничиванию способствуют также встряхивание и нагревание ферромагнетика. Точка Кюри оказывается той температурой, выше которой происходит разрушение доменной структуры.

Существование доменов в ферромагнетиках доказано экспериментально. Прямым экспериментальным методом их наблюдения является метод *порошковых фигур*. На тщательно отполированную поверхность ферромагнетика наносится водная суспензия мелкого ферромагнитного порошка (например, магнетита). Частицы оседают преимущественно в местах максимальной неоднородности магнитного поля, т.е. на границах между доменами. Поэтому осевший порошок очерчивает границы доменов и подобную картину можно сфотографировать под микроскопом. Линейные размеры доменов оказались равными  $10^{-4} - 10^{-2}$  см.

Дальнейшее развитие теории ферромагнетизма Френкелем и Гейзенбергом, а также ряд экспериментальных фактов позволили выяснить природу элементарных носителей ферромагнетизма. В настоящее время установлено, что магнитные свойства ферромагнетиков

определяются *спиновыми магнитными моментами электронов* (прямым экспериментальным указанием этого служит опыт Эйнштейна и де Гааза, см. § 131).

Установлено также, что ферромагнитными свойствами могут обладать только кристаллические вещества, в атомах которых имеются недостроенные внутренние электронные оболочки с нескомпенсированными спинами. В подобных кристаллах могут возникать силы, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться *параллельно друг другу*, что и приводит к возникновению областей спонтанного намагничивания. Эти силы, называемые *обменными силами*, имеют квантовую природу — они обусловлены волновыми свойствами электронов.

Так как ферромагнетизм наблюдается только в кристаллах, а они обладают анизотропией (см. § 70), то в монокристаллах ферромагнетиков должна иметь место анизотропия магнитных свойств (их зависимость от направления в кристалле). Действительно, опыт показывает, что в одних направлениях в кристалле его намагниченность при данном значении напряженности магнитного поля наибольшая (направление легчайшего намагничивания), в других — наименьшая (направление трудного намагничивания). Из рассмотрения магнитных свойств ферромагнетиков следует, что они похожи на сегнетоэлектрики (см. §91).

Существуют вещества, в которых обменные силы вызывают *антипараллельную* ориентацию спиновых магнитных моментов электронов. Такие тела называются *антиферромагнетиками*. Их существование теоретически было предсказано Л.Д.Ландау. Антиферромагнетиками являются некоторые соединения марганца ( $MnO$ ,  $MnF_2$ ), железа ( $FeO$ ,  $FeCl_2$ ) и многих других элементов. Для

них также существует **антиферромагнитная точка Кюри (точка Нееля')**, при которой магнитное упорядочение спиновых магнитных моментов нарушается и антиферромагнетик превращается в парамагнетик, претерпевая фазовый переход II рода (см. § 75).

В последнее время большое значение приобрели полупроводниковые ферромагнетики — **ферриты**, химические соединения типа  $Me \cdot Fe_2O_3$ , где  $Me$  — ион двухвалентного металла (Mn,

Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, Fe). Они отличаются заметными ферромагнитными свойствами и большим удельным электрическим сопротивлением (в миллиарды раз большим, чем у металлов). Ферриты применяются для изготовления постоянных магнитов, ферритовых антенн, сердечников радиочастотных контуров, элементов оперативной памяти в вычислительной технике, для покрытия пленок в магнитофонах и видеоманитофонах и т.д.

### Контрольные вопросы

- Почему орбитальный магнитный и механический моменты электрона в атоме противоположно направлены?
- Что называют гиромангнитным отношением?
- Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?
- Можно ли провести аналогию между намагничиванием диамагнетика и поляризацией диэлектрика с неполярными молекулами?
- Можно ли провести аналогию между намагничиванием парамагнетика и поляризацией диэлектрика с полярными молекулами?
- Что такое диамагнетик? парамагнетик? В чем различие их магнитных свойств?
- Что такое намагниченность? Какая величина может служить ее аналогом в электростатике?
- Запишите и объясните соотношения между магнитными проницаемостью и восприимчивостью для парамагнетика; для диамагнетика.
- Выведите соотношение между векторами магнитной индукции, напряженности магнитного поля и намагниченности.
- Объясните физический смысл циркуляции по произвольному замкнутому контуру векторов: 1)  $\vec{B}$ ; 2)  $\vec{H}$ ; 3)  $\vec{J}$ .
- Выведите и прокомментируйте условия для векторов  $B$  и  $H$  на границе раздела двух магнетиков.
- Проанализируйте теорему о циркуляции вектора  $B$  в веществе.
- Получите формулу (134.5).
- Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика. Что такое магнитоstriction?
- Какие ферромагнетики являются магнитомягкими? магнитожесткими? Где их применяют?
- Каков механизм намагничивания ферромагнетиков?
- Какую температуру для ферромагнетика называют точкой Кюри?

### ЗАДАЧИ

16.1. Напряженность однородного магнитного поля в меди равна 10 А/м. Определите магнитную индукцию поля, создаваемого молекулярными токами, если диамагнитная восприимчивость меди  $|\chi| = 8,8 \cdot 10^{-6}$ . [1,11 пТл]

Л.Неель (род. 1904) — французский физик.

16.2. По круговому контуру радиусом 50 см, погруженному в жидкий кислород, течет ток 1,5 А. Определите намагниченность в центре этого контура, если магнитная восприимчивость жидкого кислорода  $3,4 \cdot 10^{-3}$ . [5,1 мЛ/м]

16.3. По обмотке соленоида индуктивностью 1 мГп, находящегося в диамагнитной среде, течет ток 2 А. Соленоид имеет длину 20 см, площадь поперечного сечения  $10 \text{ см}^2$  и 400 витков. Определите внутри соленоида: 1) магнитную индукцию; 2) намагниченность. [1) 5 мТл; 2) 20 А/м]

16.4. Алюминиевый шарик радиусом 0,5 см помещен в однородное магнитное поле ( $B_0 = 1 \text{ Тл}$ ). Определите магнитный момент, приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость алюминия  $2,1 \cdot 10^{-5}$ . [8,75 мкА · м<sup>2</sup>]

## Глава 17

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### § 137. Вихревое электрическое поле

Из закона Фарадея [см. (123.2)]  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  следует, что *любое* изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако ЭДС в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы — силы неэлектростатического происхождения (см. § 97). Поэтому в данном случае встает вопрос о природе сторонних сил.

Опыт показывает, что эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре. Их возникновение также нельзя объяснить силами Лоренца, так как они не действуют на неподвижные заряды. Максвелл высказал гипотезу, что всякое пе-

ременное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется ЭДС, играет второстепенную роль, являясь своего рода лишь «прибором», обнаруживающим это поле.

Итак, по Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле  $E_B$ , циркуляция которого, по (123.3),

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{B_l} dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (137.1)$$

где  $E_{B_l}$  — проекция вектора  $E_B$  на направление  $d\vec{l}$ .

Подставив в формулу (137.1) выражение  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  [см. (120.2)], получим

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Если поверхность и контур неподвижны, то операции дифференцирова-

ния и интегрирования можно поменять местами. Следовательно,

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (137.2)$$

где символ частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл  $\int_S \vec{B} d\vec{S}$  является функцией только времени.

Согласно (83.3), циркуляция вектора напряженности электростатического поля (обозначим его  $E_Q$ ) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_L \vec{E}_Q d\vec{l} = \oint_L E_{Qi} dl = 0. \quad (137.3)$$

Сравнивая выражения (137.1) и (137.3), видим, что между рассматриваемыми полями ( $E_B$  и  $E_Q$ ) имеется принципиальное различие: циркуляция вектора  $E_B$  в отличие от циркуляции вектора  $E_Q$  не равна нулю. Следовательно, электрическое поле  $E_B$ , возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле (см. § 118), является *вихревым*.

### § 138. Ток смещения

Согласно Максвеллу, если всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля. Для установления количественных отношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый *ток смещения*.

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 198). Между обкладками заряжающегося и

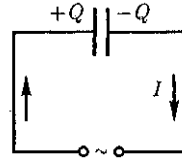


Рис. 198

разряжающегося конденсатора имеется переменное электрическое поле, поэтому, согласно Максвеллу, через конденсатор «протекают» токи смещения, причем в тех участках, где отсутствуют проводники.

Найдем количественную связь между изменяющимся электрическим и вызываемым им магнитным полями. По Максвеллу, переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток смещения, равный току в подводящих проводах. Тогда можно утверждать, что токи проводимости ( $I$ ) и смещения ( $I_{cm}$ ) равны:  $I = I_{cm}$ .

Ток проводимости вблизи обкладок конденсатора

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \\ &= \int_S \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS \quad (138.1) \end{aligned}$$

(поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на обкладках равна электрическому смещению  $D$  в конденсаторе [см. (92.1)]). Подынтегральное выражение в (138.1) можно рассматривать как частный случай скалярного произведения  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ , когда  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и  $d\vec{S}$  взаимно параллельны. Поэтому для общего случая можно записать

$$I = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Сравнивая это выражение с  $I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S}$  [см. (96.2)], имеем

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (138.2)$$

Выражение (138.2) и было названо Максвеллом *плотностью тока смещения*.

Рассмотрим, каково же направление векторов плотностей токов проводимости и смещения ( $j$  и  $j_{\text{см}}$ ). При зарядке конденсатора (рис. 199, а) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от правой обкладки к левой, поле в конденсаторе усиливается, следовательно,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$ , т. е. вектор  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  направлен в ту же сторону, что и  $D$ . Из рисунка видно, что направления векторов  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и  $\vec{j}$  совпадают.

При разрядке конденсатора (рис. 199, б) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от левой обкладки к правой, поле в конденсаторе ослабляется; следовательно,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$ , т. е. вектор  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  направлен противоположно вектору  $\vec{D}$ . Однако вектор  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  направлен опять так же, как и вектор  $\vec{j}$ .

Из разобранных примеров следует, что направление вектора  $j$ , а следова-

тельно, и вектора  $j_{\text{см}}$  совпадает с направлением вектора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , как это и следует из формулы (138.2).

Подчеркнем, что из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно — способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Таким образом, ток смещения (в вакууме или веществе) создает в окружающем пространстве магнитное поле (линии индукции магнитных полей токов смещения при зарядке и разрядке конденсатора показаны на рис. 199 штриховыми линиями).

В диэлектриках ток смещения состоит из двух слагаемых. Так как, согласно (89.2),  $D = \epsilon_0 \vec{E} + P$ , где  $\vec{E}$  — напряженность электростатического поля, а  $P$  — поляризованность (см. § 88), то плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (138.3)$$

где  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  — *плотность тока смещения в вакууме*;  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  — *плотность тока поляризации* — тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов в неполярных молекулах или поворот диполей в полярных молекулах).

Возбуждение магнитного поля токами поляризации правомерно, так как токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости. Однако то, что и другая часть плотности тока смещения ( $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ), не связанная с движением зарядов, а обусловленная *только* изменением электрического поля во времени, также возбуждает

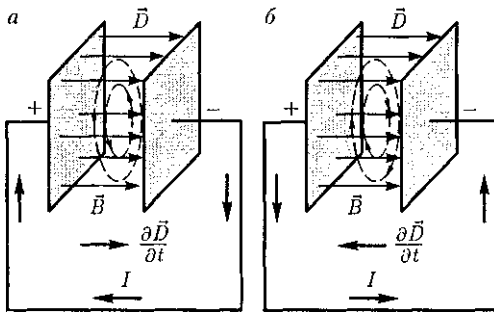


Рис. 199



магнитное поле, является *принципиально новым утверждением* Максвелла. Даже в вакууме всякое изменение во времени электрического поля приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля.

Следует отметить, что название «ток смещения» является условным, а точнее исторически сложившимся, так как ток смещения по своей сути — это изменяющееся со временем электрическое поле. Ток смещения поэтому существует не только в вакууме или диэлектриках, но и внутри проводников, по которым проходит переменный ток. Однако в данном случае он пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости. Наличие токов смещения подтверждено экспериментально А.А.Эйхенвальдом, изучавшим магнитное поле тока поляризации, который, как следует из (138.3), является частью тока смещения.

Максвелл ввел понятие *полного тока*, равного сумме токов проводимости (а также конвекционных токов) и смещения. *Плотность полного тока*

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Введя понятия тока смещения и полного тока, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей переменного тока. Полный ток в них всегда замкнут, т.е. **на** концах проводника обрывается лишь ток проводимости, **а** в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$  [см. (133.10)], введя в ее правую часть полный ток  $I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}$  сквозь поверхность  $S$ , на-

тянутую на замкнутый контур  $L$ . Тогда *обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$*  запишется в виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (138.4)$$

Выражение (138.4) справедливо всегда, свидетельством чего является полное соответствие теории и опыта.

### § 139. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Введение Максвеллом понятия тока смещения привело его к завершению созданной им макроскопической теории электромагнитного поля, позволившей с единой точки зрения не только объяснить электрические и магнитные явления, но и предсказать новые, существование которых было впоследствии подтверждено.

В основе теории Максвелла лежат рассмотренные выше четыре уравнения:

1. Электрическое поле (см. § 137) может быть как потенциальным ( $E_Q$ ), так и вихревым ( $\vec{E}_B$ ), поэтому напряженность суммарного поля  $E = E_Q + \vec{E}_B$ . Так как циркуляция вектора  $\vec{E}_Q$  равна нулю [см. (137.3)], а циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  определяется выражением (137.2), то циркуляция вектора напряженности суммарного поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $H$  [см. (138.4)]:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

3. Теорема Гаусса для поля  $D$  [см. (89.3)]:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q. \quad (139.1)$$

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ , то формула (139.1) запишется в виде

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

4. Теорема Гаусса для поля  $B$  [см. (120.3)]:

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Итак, *полная система уравнений Максвелла в интегральной форме.*

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми и между ними существует следующая связь (изотропные несегнетоэлектрические и неферромагнитные среды):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — соответственно электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $\gamma$  — удельная проводимость вещества.

Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но отсутствуют магнитные.

Для стационарных полей ( $E = \text{const}$  и  $B = \text{const}$ ) уравнения Максвелла примут вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

т.е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, а источниками магнитного — только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно *постоянные* электрическое и магнитное поля.

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV,$$

можно представить *полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме* (характеризующих поле в каждой точке пространства):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная и дифференциальная — эквивалентны. Однако если имеются *поверхностные разрывы* — поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют *граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Интегральная форма уравнений Максвелла содержит эти условия. Они были рассмотрены раньше (см. § 90, 134):

$$D_{n1} = D_{n2}; \quad E_{\tau1} = E_{\tau2}; \quad B_{n1} = B_{n2}; \quad H_{\tau1} = H_{\tau2}$$

(первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

Уравнения Максвелла — наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в *покоящихся средах*. Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике. Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля неразрыв-

но связаны друг с другом — они образуют единое *электромагнитное поле*.

Теория Максвелла, являясь обобщением основных законов электрических и магнитных явлений, не только смогла объяснить уже известные экспериментальные факты, что также является важным ее следствием, но и предсказала новые явления. Одним из важных выводов этой теории явилось существование магнитного поля токов смещения (см. § 138), что позволило Максвеллу предсказать существование *электромагнитных волн* — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью.

В дальнейшем было доказано, что скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) в вакууме равна скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Этот вывод и теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны. Электромагнитные волны на опыте были получены немецким физиком Г. Герцем (1857—1894), доказавшим, что законы их возбуждения и распространения полностью описываются уравнениями Максвелла. Таким образом, теория Максвелла была экспериментально подтверждена.

К электромагнитному полю применим только принцип относительности Эйнштейна, так как факт распространения электромагнитных волн в вакууме во всех системах отсчета с одинаковой скоростью  $c$  не совместим с принципом относительности Галилея.

Согласно *принципу относительности Эйнштейна*, механические, оптические и электромагнитные явления во всех инерциальных системах отсчета

та протекают одинаково, т. е. описываются одинаковыми уравнениями. Уравнения Максвелла *инвариантны* относительно преобразований Лоренца: их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины  $E$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $H$  в них преобразуются по определенным правилам.

Из принципа относительности вытекает, что отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл. Так, если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной инерциальной системы отсчета, движутся относительно другой и, сле-

довательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле. Аналогично, неподвижный относительно одной инерциальной системы отсчета проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем, и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.

Таким образом, теория Максвелла, ее экспериментальное подтверждение, а также принцип относительности Эйнштейна приводят к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, базирующейся на представлении об электромагнитном поле.

### Контрольные вопросы

- Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чем оно отличается от электростатического поля?
- Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
- Почему вводится понятие тока смещения? Что он собой по существу представляет?
- Выведите и объясните выражение для плотности тока смещения.
- Запишите, объяснив физический смысл, обобщенную теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля.
- Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме и объясните их физический смысл.
- Почему постоянные электрические и магнитные поля можно рассматривать обособленно друг от друга? Запишите для них уравнения Максвелла в обеих формах.
- Почему уравнения Максвелла в интегральной форме являются более общими?
- Какие основные выводы можно сделать на основе теории Максвелла?

# ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

## 1. Физические основы механики

Средняя скорость

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Среднее ускорение

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Полное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного поступательного движения

$$\begin{cases} v = v_0 \pm at, \\ s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \end{cases}$$

Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного вращательного движения

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \\ \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{cases}$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении

$$s = R\varphi, \quad v = R\omega;$$

$$a_\tau = R\varepsilon, \quad a_n = \omega^2 R.$$

Импульс (количество движения)

Второй закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Сила трения скольжения

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Работа переменной силы на участке траектории 1—2

$$A = \int_1^2 F \cos \alpha ds.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли,

$$\Pi = mgh.$$

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная механическая энергия системы

$$E = T + \Pi.$$

Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const.}$$

Скорость шаров массами  $m_1$  и  $m_2$  после абсолютно упругого центрального удара

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость шаров после абсолютного неупругого удара

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Моменты инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии

$$J = mR^2; \quad J = \frac{1}{2}mR^2.$$

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара,

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину,

$$J = \frac{1}{12}ml^2.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец,

$$J = \frac{1}{3}ml^2.$$

Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

Момент силы относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]_z.$$

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}].$$

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = J_z \omega.$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$M_z = J_z \varepsilon; \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Закон сохранения момента импульса (для замкнутой системы)

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Закон всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Сила тяжести

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{\Pi}{m} = -G \frac{M}{R}.$$

Взаимосвязь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\vec{g} = -\text{grad} \varphi.$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$Sv = \text{const.}$$

Уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.}$$

Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}.$$

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Полная энергия свободной частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Энергия покоя

$$E_0 = mc^2.$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

## 2. Основы молекулярной физики и термодинамики

Закон Бойля – Мариотта

$$pV = \text{const при } T, m = \text{const.}$$

Законы Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t) \text{ при } p = \text{const, } m = \text{const,}$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) \text{ при } V = \text{const, } m = \text{const.}$$

Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

Уравнение Клапейрона – Менделеева для произвольной массы газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT.$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Средняя квадратичная скорость молекулы

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Наиболее вероятная скорость молекулы

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Среднее число столкновений молекулы за 1 с

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Закон теплопроводности Фурье

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Теплопроводность (коэффициент)

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Закон диффузии Фика

$$j_m = -D \frac{dp}{dx}.$$

Диффузия (коэффициент)

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}.$$

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Средняя энергия молекулы

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{kT}{2}.$$

Внутренняя энергия произвольной массы газа

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT.$$

Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Работа газа при изменении его объема

$$\delta A = p dV.$$

Работа газа при изобарном расширении

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Работа газа при изотермическом расширении

$$A = Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Уравнения адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^\gamma = \text{const}, TV^{\gamma-1} = \text{const}, T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

Работа газа при адиабатном расширении

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль реального газа

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT.$$

### 3. Электричество и электромагнетизм

Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}.$$

Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}.$$

Поток вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую поверхность  $S$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS.$$

Принцип суперпозиции

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

Электрический момент диполя

$$\vec{p} = |Q| \vec{l}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i.$$



Объемная, поверхностная и линейная плотности заряда

$$\rho = \frac{dQ}{dV}; \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}; \quad \tau = \frac{dQ}{dl}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R); \quad E = 0 \quad (r < R).$$

Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R),$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' \quad (r' \leq R).$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (r \geq R), \quad E = 0 \quad (r < R).$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура  $L$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_i dl = 0.$$

Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{U}{Q_0} = \frac{A_\infty}{Q_0}.$$

Связь между потенциалом электростатического поля и его напряженностью

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\nabla \varphi.$$

Поляризованность

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i.$$

Связь между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

Связь между диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$  и диэлектрической восприимчивостью вещества  $\alpha$

$$\epsilon = 1 + \alpha.$$

Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Электрическая емкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

Электрическая емкость шара

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R.$$

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Электрическая емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Электрическая емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

Энергия заряженного уединенного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Плотность тока

$$j = \frac{I}{S}.$$

Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathcal{E} = \frac{A}{Q_0}; \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}_{ct} d\vec{l}.$$

Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Закон Джоуля — Ленца

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \gamma E^2.$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}.$$

Правила Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0; \quad \sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k.$$

Коэффициент вторичной электронной эмиссии

$$\delta = \frac{n_2}{n_1}.$$

Магнитный момент рамки с током

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}.$$

Вращательный момент, действующий на рамку с током в магнитном поле,

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Закон Био — Савара — Лапласа для элемента проводника с током

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}.$$

Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Закон Ампера

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

Магнитное поле свободно движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Сила Лоренца

$$\vec{F} = Q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}.$$

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$ )

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_i dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего  $N$  витков,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}.$$

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) сквозь произвольную поверхность

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

Теорема Гаусса для поля с магнитной индукцией  $\vec{B}$

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS = 0.$$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1).$$

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$dA = Id\Phi'.$$

Закон Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида, имеющего  $N$  витков,

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}.$$

Ток при размыкании цепи

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток при замыкании цепи

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Намагниченность

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \sum \vec{p}_a.$$

Связь между векторами  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$

$$\vec{J} = \chi \vec{H}.$$

Связь между магнитной проницаемостью среды  $\mu$  и магнитной восприимчивостью вещества  $\chi$

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$ )

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_i dl = \mu_0 (I + I').$$

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Полная система уравнений Максвелла: в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{D} = \rho;$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

#### 4. Колебания волны

Уравнение гармонического колебания

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний величины  $s$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Формула Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний величины  $s$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний величины  $s$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t.$$

Реактивное индуктивное сопротивление

$$R_L = \omega L.$$

Реактивное емкостное сопротивление

$$R_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Длина волны

$$\lambda = vT.$$

Уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0).$$

Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Волновое уравнение

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t.$$

Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{\text{нп}})\nu_0}{v \mp v_{\text{ист}}}.$$

Вектор Умова – Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

#### 5. Оптика. Квантовая природа излучения

Закон отражения света

$$i_1' = i_1.$$

Закон преломления света

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}.$$

Формула толстой линзы

$$(N-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Поток излучения

$$\Phi_e = \frac{W}{t}.$$

Энергетическая светимость

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}.$$

Энергетическая сила света

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}.$$

Энергетическая яркость

$$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}.$$

Показатель преломления среды

$$n = \frac{v}{c}.$$

Оптическая длина пути

$$L = ns.$$

Оптическая разность хода

$$\Delta = L_2 - L_1.$$

Условие интерференционных максимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Условие интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm(2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Оптическая разность хода в тонких пленках в отраженном свете

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Радиусы зон Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}.$$

Условие дифракционных максимумов от одной щели

$$a \sin \varphi = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Условие дифракционных минимумов от одной щели

$$a \sin \varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Условие главных максимумов дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Условие дополнительных минимумов дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = \pm m' \frac{\lambda}{N} \quad (m' \neq 0, N, 2N, \dots).$$

Формула Вульфа — Брэггов

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Разрешающая способность спектрально-го прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = mN.$$

Закон Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha x}.$$

Продольный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Поперечный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha.$$

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}.$$

Оптическая разность хода в эффекте Керра

$$\Delta = l(n_o - n_e) = k_2 l E^2.$$

Угол вращения плоскости поляризации в кристаллах

$$\varphi = \alpha d.$$

Угол вращения плоскости поляризации в растворах

$$\varphi = [\alpha] C d.$$

Закон Кирхгофа для теплового излучения

$$r_{\nu,T} = \frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}}.$$

Энергетическая светимость черного тела

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu.$$

Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4.$$

Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Формула Рэлея — Джинса

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Энергия фотона

$$\epsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Импульс фотона

$$p_\gamma = \frac{\epsilon_0}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Давление света при его нормальном падении на поверхность

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho).$$

Изменение длины волны при эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

## 6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

Обобщенная формула Бальмера

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Первый постулат Бора

$$m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Соотношение неопределенностей

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq h, \\ \Delta y \Delta p_y \geq h, \\ \Delta z \Delta p_z \geq h, \\ \Delta E \Delta t \geq h. \end{cases}$$

Вероятность нахождения частицы в элементе объемом  $dV$

$$dW = |\Psi|^2 dV.$$

Условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1.$$

Общее уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Собственные значения энергии частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»

$$\Delta E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} l\right).$$

Энергия квантового осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \psi = 0.$$

Нормированная волновая функция, отвечающая  $1s$ -состоянию электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}.$$

Закон Мозли

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Распределение Бозе — Эйнштейна

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1}.$$

Распределение Ферми — Дирака

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1}.$$

Уровень Ферми в собственном полупроводнике

$$E_F = \frac{\Delta E}{2}.$$

Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{\frac{-\Delta E}{2kT}}.$$

Правило Стокса для люминесцентного излучения

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + \Delta E.$$

## 7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

Радиус ядра

$$R = R_0 A^{1/3}.$$

Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2.$$

Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}.$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Ядерный магнетон

$$\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p}.$$

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Период полураспада

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

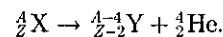
Среднее время жизни радиоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

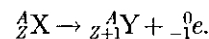
Активность нуклида

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N.$$

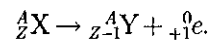
Правило смещения для  $\alpha$ -распада



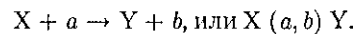
Правило смещения для  $\beta^-$ -распада



Правило смещения для  $\beta^+$ -распада



Символическая запись ядерной реакции



# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрации (погрешности) оптических систем 308
- астигматизм 310
  - дисторсия 309
  - кома 309
  - сферическая 308
  - хроматическая 309
- Автоколебания 268
- Адиабата 107
- Адроны 515, 521, 522
- Активность нуклида 484
- Акустоэлектроника 293
- Акцепторы 458
- Альфа-распад 484
- Ампер (единица силы тока) 5
- Амплитуда вероятности 404
- волны 283
  - колебаний гармонических 253
  - затухающих 265
- Анализ гармонический 262
- люминесцентный 463
  - минералогический 364
  - рентгеноструктурный 343
  - спектральный абсорбционный 353
- Анализатор 359
- Анастигматы 310
- Анизотропия оптическая искусственная 366
- Анизотропность 132
- Аннигиляция 500
- Антикварк 523
- Антинейтрино 487, 512
- Антинейтрон 517
- Антипротон 516
- Античастицы 516
- Антihadра 518
- Апланаты 310
- Апохроматы 310
- Атом водорода в квантовой механике 418
- — теории Бора 395
- Ахроматы 310
- База 473
- Барионы 522
- Барн 497
- Барьер потенциальный 30, 412
- Беккерель (единица активности) 484
- Бел 289
- Бета-распад 486-488, 499
- Бетатрон 213
- Биения 261
- Бипризма Френеля 323
- Бозе-газ 443
- Бозоны 425
- Бридер 507
- Бэр 490
- Вакуум 96
- Ватт (единица мощности) 24
- Вебер (единица магнитного потока) 217
- Вектор магнитной индукции 203
- магнитного момента рамки с током 203
  - напряженности магнитного поля 205
  - электростатического поля 148
  - перемещения 9
  - плотности потока энергии 283
  - электромагнитной 299
  - скорости мгновенной 9
  - средней 9
  - Умова 283
  - Умова — Пойнтинга 299
- ускорения 10
  - электрического смещения 163
- Векторы аксиальные (псевдовекторы) 12
- Вероятность термодинамическая 111
- Вес тела 48
- Весы крутильные 47, 147
- Вещества оптически активные 367
- лево- и правовращающие 368
  - поверхностно-активные 128
- Взаимодействие гравитационное 514
- обменное 432
  - проводников с токами 207
  - сильное 514
  - слабое 514
  - электромагнитное 514
- Волна бегущая 283
- гармоническая 282
  - де Бройля 400
  - монохроматическая электромагнитная 298
  - опорная 345
  - плоская 283
  - предметная 345
  - стоячая 287
  - сферическая 283
  - упругая поперечная 282
  - — продольная 282
  - электромагнитная 294, 297
  - —, поперечность 297
- Волны звуковые (акустические) 289
- когерентные 286
  - упругие (или механические) 282



- электромагнитные 282
- Вольт (единица потенциала) 157
- Восприимчивость вещества
  - диэлектрическая 162
  - магнитная 239
- Вращение плоскости поляризации магнитное 365
- удельное 367
- Время жизни радиоактивного ядра среднее 483
  - когерентности 319
  - реверберации 291
  - релаксации 227, 265
- Высотомер (альтиметр) 91
- Высота звука 290
- Выход энергетический 462
- Вязкость 62
  - динамическая 62
  - кинематическая 63
- Газ идеальный 83
  - реальный 83, 117
  - ультраразреженный 96
- Гамма-дефектоскопия 490
- Гамма-излучение 488
- Гармоники периодического колебания 262
- Генератор 224
  - оптический квантовый 436
  - электростатический 169
- Генри (единица индуктивности) 226
- Герц (единица частоты) 254
- Гидроаэромеханика 57
- Гипероны 518
- Гипотеза 5
  - квантовая Планка 374
- Гироскоп 41
- Голограмма 346
- Голография 345
- Градиент скаляра 26
  - скорости 62
- Градус Цельсия 82
- Граница красная фотоэффекта 380
- Грей 490
- Громкость звука 289
- Группа пространственная 133
- Давление 57
  - внутреннее 119
- гидростатическое 58, 60, 131
  - динамическое 60
  - критическое 120
  - молекулярное 127
  - парциальное 84
  - полное 60
  - света 384
  - статическое 60
- Двигатель вечный первого рода 102
  - второго рода ИЗ
  - тепловой 109, 113
- Движение аperiодическое 268
  - броуновское 92
  - заряженной частицы в магнитном поле 210
  - вращательное 8
  - поступательное 8
  - неравномерное 10
  - плоское 10
  - равномерное 10
- Двойственность корпускулярно-волновая света 318
  - частиц вещества 398
- Декремент затухания 266
  - логарифмический 266
- Детандер 125
- Дефект массы 478
- Дефекты в кристаллах 137
- Дефектоскопия люминесцентная 463
  - ультразвуковая 293
- Деформация 42
  - относительная 43
  - пластическая (остаточная) 43
  - сдвига 45
  - упругая 43
- Децибел 289
- Джоуль (единица работы, энергии) 24, 102
- Диаграмма направленности излучения диполя 300
  - напряжений 44
  - состояния 143
- Диамантики 237
- Диамнетизм 237
- Диаметр молекулы эффективный 91
- Динамика 7
- Диод вакуумный 192
  - полупроводниковый 472
  - плоскостной 472
  - точечный 472
- Диоптрия 307
- Диполь электрический 150, 299
- Дислокации 138
- Дисперсия аномальная и нормальная 350
  - вещества 350
  - волн 284
  - света 349
  - электронная теория 350
- Диссипация (рассеяние) энергии 28
- Дифракционная решетка одномерная 339
  - трехмерная (пространственная) 341
- Дифракция на пространственной решетке 342
  - рентгеновского излучения 342
  - света 332
  - Френеля на диске 336
  - на круглом отверстии 335
  - Фрауифофера (в параллельных лучах) 337
- Диффузия 94
- Дихроизм 363
- Диэлектрик изотропный 174
- Диэлектрики 147, 160
- Длина волны 282
  - когерентности 319
  - приведенная физического маятника 258
  - пути 9
  - пути оптическая 321
  - свободного пробега молекул 91
  - средняя 91
  - тел в разных системах отсчета 73
- Длительность событий 72
- Добротность колебательной системы 266
- Доза биологическая 490
  - излучения поглощенная 490

- -экспозиционная 490
- Домены 166, 243
- Доноры 458
- Дросселирование адиабатное 124
- Дроссель 124
- Дырка 454
  
- Единица физической величины 5
  - основная 5
  - производная 5
- Емкость электрическая 170
  - конденсатора 171
  - плоского 171
  - сферического 171
  - цилиндрического 171
  - -уединенного проводника 170
  - шара 170
  
- Жесткость 26, 257
- Жидкость, свойства 126
  - несжимаемая 57
  - перегретая 122
  - переохлажденная 141
  - сжимаемая 57
  - сплошная 57
  
- Зависимость сопротивления температурная 190
- Закон Авогадро 84
  - Амонтона — Кулона 18
  - Ампера 207
  - Архимеда 58
  - Био — Савара — Лапласа 205
  - Бойля — Мариотта 83
  - - Больцмана 100
  - Брюстера 360
  - Бугера 352
  - Вавилова 462
  - взаимосвязи массы и энергии покоя 78
  - Видемана — Франца 189
  - всемирного тяготения 47
  - Галилея обобщенный 48
  - Гейгера — Нэттола 485
  - Гука 44
  - Дальтона 84
  - движения центра масс 21
  - Джоуля — Ленца 182, 189
- динамики основной для неинерциальных систем отсчета 55
- для распределения молекул идеального газа по скоростям 88
- энергиям теплового движения 89
- Дюлонга и Пти 139
- инерции 15
- Кеплера первый 47
  - второй 47
  - третий 47
- Кирхгофа 371
- Кулона 147
- Малюса 358
- Мозли 431
- независимости световых пучков 302
- Ньютона (для внутреннего трения) 95
  - первый 15
  - второй 15
  - третий 17
  - тяготения 47
  - Ома 179
    - для замкнутой цепи 183
    - участка цепи 179
    - обобщенный 183
  - отражения света 302
  - Паскаля 57
  - полного тока для магнитного поля в вакууме 214
  - в веществе 239
  - постоянства углов 132
  - преломления света 303
  - прямолинейного распространения света 302
  - радиоактивного распада 483
  - релятивистской динамики основной 76
  - смещения Вина 373
  - сохранения заряда 146
    - барионного числа 522
    - лептонного числа 520
    - изотопического спина 515
    - импульса 20
    - момента импульса 39
    - странности 519
    - четности 519
- энергии 27
- механической 28
- Стефана — Больцмана 372
- Столетова 379
- трения скольжения 19
- трех вторых 192
- Фарадея 223
- Фика 95
- Фурье 94
- Законы физические 5
  - Вольта 463
  - Гей-Люссака 83
- Замедление хода времени релятивистское 73
- Заряд атомного ядра 476
  - электрический 146
  - точечный 147
  - ядра атома 476
- Заряды индуцированные 168
  - связанные 162
- Захват электронный 500
- Защита электростатическая 169
- Зеркала Френеля 322
- Значение тока действующее (эффективное) 278
  - напряжение действующее (эффективное) 278
  - энергии дискретное 410
  - собственное 408
- Зона активная 504
  - диполя волновая 299
  - энергетическая 452
  - валентная 452
  - запрещенная 452
  - проводимости 452
  - разрешенная 452
- Зоны Френеля 333 — 335
  
- Излучатель массовый 295
- Излучение Черенкова — Вавилова (эффект) 355
  - вынужденное (индуцированное) 435
  - космическое вторичное 511
  - жесткое 511
  - мягкое 511
  - первичное 511
  - лазерное 436 — 439
  - радиоактивное 482
  - рентгеновское 429 — 431

- спонтанное 435
- тепловое (температурное) 369
- равновесное 370
- Изобара 84, 105
- Изобары 477
- Изображение стигматическое 306
- Изомультиплеты 515
- Изопроцесс 105
- изобарный 105
- изотермический 106
- изохорный 105
- Изотерма 83, 106
- критическая 120
- Изотермы Ван-дер-Ваальса 120
- Изотопы 477
- Изохора 84, 105
- Импульс материальной точки 16
- релятивистский 76
- системы 20
- фотона 384
- Инверсия населенностей 436
- Индуктивность взаимная 229
- контура 226
- Индукция взаимная 229
- магнитная 203
- электростатическая 169
- Инжекция 473
- Интенсивность звука 289
- Интерференция волн 286
- многолучевая 328
- света 320
- Интерферометр 329
- лазерный 439
- Майкельсона 329
- Ионизатор 195
- Ионизация атома 396
- ударная 196
- Испарение (парообразование) 140
- Испускание (излучение) самопроизвольное 435
- Источник света тепловой 377
- тока 178
- Камера Вильсона 495
- диффузионная 495
- ионизационная импульсная 494
- интегрирующая 494
- искровая 496
- пузырьковая 496
- Кандела (единица силы света) 6, 311
- Каоны (К-мезоны) 514
- Капилляр 131
- Капиллярность 131
- Катодолюминесценция 198, 461
- Качество крыла 66
- Квазиимпульс 446
- Квант 374
- энергии звуковой волны 446
- Кварки 522
- истинные 524
- Кельвин (единица температуры) 6
- Килограмм 5
- Кинематика 7
- Когерентность 286, 318
- временная 319
- пространственная 319
- Колебания 253
- вынужденные механические 269
- электромагнитные 269
- гармонические 253
- затухающие 264
- электрического колебательного контура свободные затухающие 266
- линейно поляризованные 263
- пружинного маятника свободные затухающие 266
- эллиптически поляризованные 263
- свободные 253
- циркулярно поляризованные 263
- Количество вещества 85
- движения 16
- теплоты (теплота) 101
- приведенное 109
- Коллектор 473
- Кольца Ньютона 326
- Компаунд-ядро 497
- Комптоновское рассеяние 490
- Конверсия внутренняя 489
- Конденсатор 170
- плоский 171
- сферический 171
- цилиндрический 171
- Конденсация 140
- Контур колебательный 258
- Концентрация молекул 86
- Коэффициент восстановления 31
- вторичной электронной эмиссии 193
- диффузии 95
- затухания 265
- мощности 278
- поглощения 352
- полезного действия для кругового процесса 109
- цикла Карно 115
- прозрачности 414
- Пуассона 43
- размножения нейтронов 503
- сопротивления 184, 266
- трансформации 230
- трения скольжения 18
- упругости 26, 44, 257
- Кривая дисперсии 350
- инверсии 124
- потенциальная 29
- Кривые резонансные 271
- фазового равновесия 143
- Кристаллофосфоры 462
- Кристаллы 133
- атомные 134
- дихроичные 363
- двухосные 361
- ионные 134
- металлические 135
- молекулярные 135
- одноосные 361
- отрицательные 362
- положительные 362
- Кристаллизация 140
- Критерий Лоусона 509
- Рэля 343
- Кюри (единица активности нуклида) 484
- Кулон (единица электрического заряда) 147

- Лазер 436
- газовый 436
- жидкостный 436
- полупроводниковый 436
- твердотельный 436
- Лептоны 515, 520
- Ливень электронно-позитронно-фотонный 511
- Линза 305
- конденсорная 313
- магнитная 312
- проекционная 313
- рассеивающая 305, 307
- собирающая 305, 307
- тонкая 305
- электронная 312
- электростатическая 312
- Линии напряженности 49
- электростатического поля 151
- магнитной индукции 204
- электрического смещения 164
- Линия тока 58
- Ловушки неохлаждаемые 97
- охлаждаемые 97
- Луч необыкновенный 361
- обыкновенный 361
- Лучепреломление двойное 360
- Лучи каналовые (положительные) 198
- катодные 198
- параксиальные (приосевые) 306
- Люкс (единица освещенности) 311
- Люмен (единица светового потока) 311
- Люминесценция 461
- Люминофоры 461
  
- Магнетон Бора 236
- ядерный 479
- Магнит постоянный 242
- Магнитострикция 243, 292
- Магнетик 236
- Мазер 436
- Максимум дифракционный 338
- интерференционный 286
- Манометр 60
- радиометрический 98
- Масса критическая 504
- молярная 85
- тела 15
- фотона 384
- эффективная 455
- инертная 15
- гравитационная 15
- Масс-спектрометр 477
- Материал вязкий 44
- хрупкий 44
- Машина Линде 125
- холодильная 109, 113
- Маятник математический 258
- пружинный 257
- физический 257
- МГД-генератор 201
- Мезоны 513, 514, 522, 523
- Мениск 131
- Метод вакуумного сферического конденсатора 381
- вращающегося вектора амплитуды (векторных диаграмм) 255
- зон Френеля 333
- избирательного травления 138
- исследования статистический 81
- термодинамический 81
- порошковых фигур 244
- Пуазейля 64
- Стокса 63
- Юнга 321
- ядерного магнитного резонанса 479
- Метр 5
- Механика 7
- квантовая 7, 404
- классическая 7
- релятивистская 7
- Микроинтерферометр 329
- Микроскоп поляризационный 364
- электронный 313
- Минимум дифракционный 338
- дополнительный 339
- , условия 340
- интерференционный 287
- Модель атома ядерная (планетарная) 391
- идеального газа 83
- кварковая 523
- ядра капельная 481
- оболочечная 481
- обобщенная 481
- оптическая 481
- Модуль Юнга 44
- Молекулы неполярные 161
- полярные 161
- Моль 6
- Момент диполя электрический 151
- импульса электрона 419
- относительно неподвижной оси 38
- точки 38
- собственный механический (спин) 236, 423
- магнитный 236, 423
- твердого тела 38
- инерции системы (тела) 34
- молекулы дипольный 161
- орбитальный механический (спин) 235
- магнитный 235
- силы относительно неподвижной оси 37
- точки 37
- Монокристалл 132
- Мост Уитстона 184
- реохордный 185
- Мощность 24
- дозы излучения 490
- поглощенной 490
- экспозиционной 490
- тока удельная тепловая 182
- Мультиплеты изотопические 515
- Мюоны 512
  
- Нагреватель 113
- Намагниченность 238
- Накачка 436
- Направление тока 469
- запорное 469
- пропускное 469
- прямое 471
- Напряжение 43
- задерживающее 379
- нормальное 43

- пробивное 172
- пробоя 197
- тангенциальное 43
- электрическое 179
- Напряженность поля тяготения (гравитационного) 49
  - магнитного 205
  - электростатического 148
- Напыление катодное 198
- Насос вакуумный 96
  - водоструйный 61
  - диффузионный 97
  - тепловой 115
- Насыщение магнитное 241
- Натяжение поверхностное 128
- Начало термодинамики второе 111
  - первое 102
  - третье 112
- Невесомость 48
- Нейтрино 486
  - мюонное 512
  - таонное 515
  - электронное 512
- Нейтроннография 343
- Нейтроны 500
  - быстрые 501
  - высокоэнергетичные 501
  - деления 502
  - запаздывающие 503
  - очень холодные 501
  - мгновенные 503
  - медленные 501
  - резонансные 501
  - релятивистские 501
  - тепловые 501
  - ультрахолодные 501
  - холодные 501
- Неравенство Клаузиуса ПО
- Несмачивание полное 129
- Нуль кельвин 82
- Носители тока 177
- Нуклон 466
- Ньютон (единица силы) 16
- Обкладки конденсатора 171
- Область слышимости 289
  - текучести (область пластических деформаций) 44
- Обогащение флотационное 130
- Оболочки электронные в атоме 426
- Образование электронно-позитронных пар 489
- Объектив 313
- Объем критический 120
  - молярный 85
  - удельный 82
  - фазовый (объем элементарной ячейки) 442
- Одновременность событий 71
- Однородность времени 28
  - пространства 20
- Ом (единица сопротивления) 179
- Оператор Гамильтона (набла-оператор) 26
  - Лапласа 284
- Оптика 302
  - волоконная 304
  - геометрическая 304
  - электронная 312
- Опыт 5
  - Ламмерт 93
  - Лебедева 385
  - Майкельсона— Морли 69
  - Рикке 186
  - Штерна 92
- Опыты Резерфорда 390
  - Франка и Герца 393
  - Штерна и Герлаха 423
- Освещенность 311
  - энергетическая (облученность) 311
- Осциллятор гармонический 256
  - квантовый 415
- Ось вращения 8
  - инерции главная 40
  - оптическая 305
  - свободная (свободного вращения) 40
- Отклонение статическое 271
- Отношение гиромагнитное орбитальных моментов 235
  - спиновых моментов 236
  - ядерное 479
- Отношения пространственно-временные 76
- Отражение полное 304
- Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах 190
- Очарование 523
- Пакет волновой 285
- Пар насыщенный 121, 140
  - пересыщенный 122
- Парадокс часов (близнецов) 73
- Парамагнетизм 237
- Парамагнетики 237
- Параметр вырождения 443
- Параметры состояния системы термодинамические 82
  - элементарной ячейки 134
- Пары куперовские 449
- Паскаль (единица давления) 57
- Переход фазовый I рода 142
  - - II рода 142
  - электронно-дырочный (*p-n*-переход) 469
- Период вращения 13
  - колебаний 254
  - полураспада 483
- Переход вынужденный (индуцированный) 435
- Петля гистерезиса 167
- Пирометр оптический 376
- Пирометрия оптическая 376
- Пироэлектрики 167
- Плавление 140
- Плазма 200
  - высокотемпературная 200
  - газоразрядная 200
  - , дебаевский радиус экранирования 200
  - изотермическая 200
  - ионизованная 200
  - неизотермическая 200
  - , свойства 200
  - , степень ионизации 200
- Пластинка зонная 335
  - в полволны 365
  - четверть волны 365
- Плечо диполя 151
- Плоскость главная кристалла 361

- поляризации 358
- фокальная 307
- Плотность вероятности 405
- дислокаций 138
- линейная 155
- объемная 154
- энергии электростатического поля 174
- магнитного поля 233
- поверхностная 153
- потока импульса 95
- массы 95
- теплового потока 94
- тока 177
- поляризации 248
- смещения 248
- в вакууме 248
- энергетической светимости (излучательности) спектральная 370
- черного тела 371
- Поверхность волновая 283
- разрыва 251
- эквипотенциальная 50, 158
- Поглощение света (абсорбция) 352
- Подоболочки 426
- Позитрон 498
- Позитроний 523
- Показатель адиабаты 107
- преломления относительный 303
- абсолютный 303
- Поле вихревое 215
- магнитное 202
- движущегося заряда 208
- соленоида 215
- тороида 216
- кругового тока 206
- прямого тока 206
- потенциальное 25, 156
- самосогласованное 451
- силовое 148
- тяготения (гравитационное) 49
- однородное 49, 149
- центральное 49
- электрическое 246
- электромагнитное 251
- электростатическое 148
- потенциальное 155, 215
- Поликристалл 132
- Полимеры 141
- Полосы интерференционные равнового наклона 325
- равной толщины 325
- поглощения света 353
- Полупроводники 147
- дырочные (*p*-типа) 458
- собственные 454
- примесные 457
- электронные (*n*-типа) 458
- Поляризатор 359
- Поляризация диэлектрика 160
- электронная (деформационная) 161
- ионная 162
- ориентационная (дипольная) 161
- Поляризованность 162
- остаточная 167
- Поляриметрия (сахариметрия) 368
- Поляроиды 364
- Порог болевого ощущения 289
- Порог слышимости 289
- Порядок в расположении частиц ближний 126
- дальний 126
- интерференционного максимума 287
- минимума 287
- Постоянная Авогадро 84, 93
- аддитивная 110
- Больцмана 85
- гравитационная 47
- магнитная 205, 208
- молярная газовая 85
- дифракционной решетки 339
- Планка 374
- радиоактивного распада 483
- Ридберга 392
- Стефана — Больцмана 372
- Холла 214
- электрическая 148
- Постулат Бора второй (правило частот) 393
- первый (постулат стационарных состояний) 393
- Потенциал поля тяготения 50
- электростатического 157
- химический 443
- Поток вектора напряженности 149
- магнитной индукции (магнитный поток) 217
- световой 311
- Потокоцепление 218
- Правила Кирхгофа 183
- отбора 421
- смещения для альфа-распада 484
- бета-распада 484
- Правило правого винта 12
- левой руки 207, 209
- Ленца 223
- сложения скоростей в классической механике 68
- Стокса 462
- Предел пропорциональности 44
- прочности 44
- текучести 44
- упругости 44
- Прелесть 524
- Преобразования Галилея 68
- Лоренца 71
- Преобразователь электронно-оптический 313
- Прецессия 237
- Приближение адиабатическое 451
- Приемник излучения 311
- селективный 311
- Призма двоякопреломляющая 363
- Николя (николь) 363
- поляризационная 363
- Примесь внедрения 138
- замещения 138
- Принцип автофазировки 213
- возрастания энтропии 111
- Гюйгенса 316, 332
- Гюйгенса — Френеля 332
- детального равновесия 435
- инвариантности скорости света (постулаты Эйнштейна) 69
- независимости действия сил 17
- неразличимости тождественных частиц 424

- относительности механический (принцип относительности Галилея) 68
- Эйнштейна 251
- Паули 425
- причинности 408
- соответствия 71
- Бора 412
- суперпозиции (наложения) волн 285
- полей магнитных 205
- электромагнитных 205
- электростатических 150
- Ферма 305
- эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (Эйнштейна) 55
- Природа света 315—318
- Пробой 172
- Проводимость контактного слоя односторонняя 469
- полупроводника примесная 457
- дырочная (*p*-типа) 458
- электронная (*n*-типа) 458
- собственная 454
- *p-n*-перехода односторонняя (вентильная) 471
- электрическая 180
- удельная 180
- Проводник уединенный 170
- Проводники первого рода 147
- второго рода 147
- Проницаемость среды диэлектрическая 163
- магнитная 205
- Пространство катодное темное 197
- фазовое 441
- фарадеево темное 197
- Просветление оптики 327
- Протон 146
- Процесс волновой (волна) 282
- адиабатный 106
- изобарный 105
- изохорный 105
- изотермический 106
- изоэнтропийный НО
- круговой (цикл) 108
- политропный 108
- рекомбинации 195
- термодинамический 83
- необратимый 108
- обратимый 108
- электронно-позитронно-фотонный (каскадный) 511
- Процессы аperiodические 268
- периодические 253
- равновесные 103
- Псевдовекторы 12
- Пси-функция 405
- Пучность стоячей волны 287
- Пьезоэлектрики 167
- Пьезоэффект обратный 167
- прямой 167
- Работа выхода электрона из металла 191
- силы 23
- элементарная 23
- Равновесие динамическое 140
- неустойчивое 30
- устойчивое 30
- термодинамическое 83
- Радиан 6
- Радиоактивность 482
- естественная 482
- искусственная 482
- Радиолуминесценция 461
- Радиус боровский первый 395
- когерентности (длина пространственной когерентности) 319
- молекулярного действия 126
- Радиус-вектор точки 8
- Радиус ядра 477
- Размеры активной зоны критические 504
- Разность потенциалов 157
- контактная 463
- внешняя 464
- внутренняя 464
- хода волн 286
- оптическая 321
- Разряд газовый 195
- несамостоятельный 196
- самостоятельный 196
- дуговой 199
- искровой 198
- коронный 199
- тлеющий 197
- Распад радиоактивный 483
- Распределение Бозе—Эйнштейна 443
- Гиббса 442
- Ферми—Дирака 443
- Рассеяние света в мутной среде 341
- молекулярное 342
- частиц 498
- Расстояние линзы фокусное 306
- Расширение адиабатное 107
- изобарное 105
- изотермическое 106
- Реактор ядерный 505
- гетерогенный 506
- гомогенный 506
- на тепловых и быстрых нейтронах 506
- Реакторы-размножители 506
- Реакции термоядерные 508
- ядерные 496
- , классификация 497, 498
- экзотермические 497
- эндотермические 497
- Реакции деления 502
- развивающаяся 504
- самоподдерживающаяся 504
- цепная 504
- неуправляемая 504
- управляемая 504
- синтеза атомных ядер 507
- Ревверберация звука 290
- Резонанс 271
- механический 271
- напряжений 276
- токов 277
- электрический 271
- Резонатор оптический 437
- Рекомбинация 457
- Рентген (единица экспозиционной дозы) 490
- Рентгенолюминесценция 461
- Рефрактометр 304
- Решетка гексагональная 135

- дифракционная 339
- -одномерная 339
- -двумерная 341
- -трехмерная (пространственная) 341
- кристаллическая 132
- пространственная (Бравэ) 133
- Ряд Вольты 463
- радиоактивных превращений 484
- Самоиндукция 226
- Сверхпроводимость 181,
- Сверхтекучесть 142
- Свет естественный 357
- поляризованный 357
- плоскополяризованный (линейно поляризованный) 357
- циркулярно поляризованный 358
- частично поляризованный 357
- эллиптически поляризованный 358
- Светимость энергетическая (излучательность) 310
- -интегральная 370
- -черного тела 372
- Световоды (светопроводы) 304
- Светофильтр 353
- Свечение катодное первое 197
- тлеющее 197
- Свойство взаимозаменяемости 258
- Связь ионная 134, 431
- ковалентная 134, 431
- Сдвиг абсолютный 45
- Сегнетоэлектрики 166
- Секунда 5
- Семейства радиоактивные 484
- Серия Бальмера 392
- Брегета 392
- Лаймана 392
- Пашена 392
- Пфунда 392
- Хэмфри 392
- Сетки дислокаций 138
- плоские 138
- пространственные 138
- Сжижение газа 125
- Сила 15
- внутреннего трения 62
- выталкивающая 58
- гравитационная (всемирного тяготения) 47
- диссипативная 25
- инерции 52
- консервативная 25
- -кориолисова 54
- коэрцитивная 167, 242
- -центробежная 53
- кулоновская 147
- линзы оптическая 307
- -отрицательная 307
- -положительная 307
- Лоренца 209
- механическая (пондеромоторная) 174
- нормальная 17
- натяжения 18
- поверхностного натяжения 128
- подъемная 65
- равнодействующая (результатирующая) 16
- реактивная 21
- света энергетическая (сила излучения) 310
- тангенциальная 17
- тока 177
- трения 17
- -качения 19
- тяжести 48
- упругости 26
- электродвижущая 178
- -электромагнитной индукции 222
- Силы Ван-дер-Ваальса 135
- внешние 19
- внутренние 19
- гироскопические 42
- межмолекулярного взаимодействия 119
- обменные 244
- отталкивания 117
- притяжения 117
- сторонние 178
- ядерные 480
- Симметрия кристаллической решетки 133
- Синхротрон 213
- Синхрофазотрон 213
- Система водородоподобная 395
- вырожденная 443
- -гелиоцентрическая 46
- декартова 8
- диссипативная 28
- единиц 5
- консервативная 28
- кристаллографическая 134
- линейная 265
- механическая 19
- -замкнутая (изолированная) 19
- накачки 437
- отсчета 8,52
- -инерциальная 15
- -неинерциальная 52
- птолемея геоцентрическая 46
- термодинамическая 82
- элементов Периодическая 426
- Скачок потенциала поверхностный 191
- Скин-эффект (поверхностный эффект) 226
- Скорость волн групповая 285, 400
- -фазовая 284, 400
- космическая первая (круговая) 51
- -вторая (параболическая) 51
- третья 51
- наиболее вероятная 89
- обтекания 65
- средняя квадратичная 86
- средняя молекул 89
- точки 9
- -мгновенная 9
- -средняя 9, 10
- угловая 12
- Сложение гармонических колебаний взаимно перпендикулярных 262
- одного направления 261
- Слой контактный 465



- запирающий 467
- пропускной 469
- Смачивание 129
- Смерть Вселенной тепловая 112
- Смещение красное 354
  - фиолетовое 354
  - электрическое 163
- Соединение конденсаторов 172
- Сокращение лоренцево 74
- Соленоид 204, 215
- Соотношения неопределенностей Гейзенберга 401
- Сопrotивление лобовое 65
  - полное 275
  - реактивное 274, 275
  - емкостное 274
  - индуктивное 274
  - электрическое критическое 181
  - удельное 180
- Состояние критическое 120
  - метастабильное 122
  - системы с инверсией населенностей 436
  - энергетическое 395
  - электрона в атоме водорода 422
- Сосуд Дьюара 97
- Соударения молекул абсолютно упругие 86
- Спектр акустический 290
  - линейчатый 290
  - сплошной 290
- Спектр 421
  - атома водорода 391, 421
  - дискретный 349, 408
  - дифракционный 338
  - молекулярный 433
  - колебательный 433
  - колебательно-вращательный 433
  - электронно-колебательный 433
  - электронный 433
  - поглощения 396
  - линейчатый 353
  - сплошной 353, 408
  - призматический 349
  - рентгеновский 429
  - характеристический 430
- тормозной 429
- энергетический 419
- зонный 451
- Спектрограф призмный 350
- Спектроскопия интерференционная 327
  - рентгеновская 343
- Спин изотопический 515
  - электрона 423
  - ядра атома 479
- Спиральность 517
- Способность разрешающая дифракционной решетки 345
  - объектива 344
  - спектрального прибора 345
  - спектральная поглощательная 370
- Спутники стоксовы 434
  - антистоксовы 434
- Среда активная 436
  - диспергирующая 284
  - сплошная 281
- Статика 7
- Статистика квантовая 441
  - Бозе — Эйнштейна 425
  - Ферми — Дирака 425
- Степень ионизации плазмы 200
  - поляризации 358
  - свободы колебательного движения 100
- Стерadian 6
- Столб ионизованного газа 197
- Стопа 360
- Странность 519
- Стримеры 198
- Сублимация (возгонка) 140
- Сфера молекулярного действия 126
- Сцинтилляции 493
- Счетчик газоразрядный 494
  - Гейгера — Мюллера 494
  - пропорциональный 494
  - полупроводниковый 495
  - сцинтилляционный 493
  - черепковский 493
- Тело абсолютно твердое 8
- аморфное 141
- неупругое 31
- отсчета 8
- серое 371
- упругое 31
- черное 371
- Тембр звука 290
- Температура 82
  - вырождения 444
  - Дебая характеристическая 446
  - инверсии 124
  - критическая 120
  - радиационная 376
  - термодинамическая 180
  - цветовая 376
  - яркостная 376
- Теорема Гаусса 152, 163, 217
  - для магнитного поля 217
  - электростатического поля в вакууме 153
  - диэлектрика 164
  - Карно 114
  - Нернста — Планка 112
  - о циркуляции вектора магнитной индукции 214
  - напряженности магнитного поля 240
  - электростатического поля 156
  - Штейнера 36
- Теория близкодействия 150
  - Бора 396
  - дальнодействия 150
  - жидкости 126
  - Максвелла электромагнитная 246
  - относительности общая 76
  - — специальная (релятивистская) 7, 69
  - проводимости 186
  - релятивистская 69
  - света 315
  - волновая 315
  - корпускулярная 315
  - электромагнитная 317
  - твердых тел зонная 451
  - теплоемкости квантовая 445
  - электропроводности металлов квантовая 447
- Теплоемкость 103

- металлов 190
- молярная 103
- удельная 103
- Теплопроводность 94
- Теплота плавления удельная 140
- фазового перехода 142
- Термобатарея (термостолбики) 466
- Термодинамика 82
- Термистор 181
- Термометр сопротивления 181
- Термостат 113
- Термоэлементы 466
- Тесла (единица магнитной индукции) 208
- Течение 58
- ламинарное (слоистое) 63
- турбулентное (вихревое) 63
- установившееся (стационарное) 58
- Ток индукционный 221
- квазистационарный 273
- конвекционный 177
- насыщения 192
- переменный 273
- постоянный 177
- проводимости 177
- смещения 247
- термоэлектрический 465
- электрический 177
- Токи вихревые (Фуко) 225
- Тороид 216
- Точка критическая 120
- Кюри 166, 243
- материальная 8
- тройная 82, 143
- Точки реперные 82
- Траектория 9
- Трансформатор 230
- автотрансформатор 231
- повышающий 231
- понижающий 231
- Трение граничное 18
- гидродинамическое 18
- верчения 18
- внешнее 18
- внутреннее 18, 94
- качения 18
- покоя 18
- скольжения 18
- Триболоминесценция 461
- Триод полупроводниковый (транзистор) 473
- плоскостной 473
- точечный 473
- Турбодетандер 125
- Трубка Пито — Прандтля 60
- тока 58
- Увеличение линзы линейное 308
- Угол атаки 66
- Брюстера 360
- краевой 129
- предельный 303
- скольжения 342
- Удар (соударение) 30
- абсолютно неупругий 32
- упругий 31
- центральный 31
- Узел стоячей волны 287
- электрической цепи 183
- Узлы кристаллической решетки 132
- Ультразвук 292
- Умножитель фотоэлектронный 383
- Упаковка шаров 136
- двухслойная 137
- плотная 136
- трехслойная 137
- Уравнение адиабаты 107
- Бернулли 60
- Ван-дер-Ваальса 119
- волновое 284, 406
- волны бегущей 283
- стоячей 287
- движения материальной точки 16
- тела переменной массы 21
- изобары 105
- изотермы 106
- изохоры 105
- Клапейрона 85
- Клапейрона — Менделеева 85
- Клапейрона — Клаузиуса 143
- колебаний гармонических 254
- вынужденных 269
- свободных затухающих 265
- Майера 104
- неразрывности 59
- основное молекулярно-кинетической теории идеальных газов 87
- Пуассона 107
- состояния 84
- идеального газа 85
- Шредингера 406
- Эйнштейна для внешнего фотоэффекта 381
- Уравнения движения точки кинематические 8
- Максвелла для электромагнитного поля 250
- Уровень громкости 289
- интенсивности звука 289
- энергетический основной 396
- возбужденный 396
- Уровни энергетические акцепторные 458
- донорные 458
- примесные 457
- энергии 410
- Ускорение 10
- мгновенное 10
- нормальная составляющая 11
- полное 11
- среднее 10
- тангенциальная составляющая 11
- угловое 13
- Ускорители заряженных частиц 211
- индукционные 212
- импульсные 211
- линейные 212
- резонансные 212
- непрерывные 211
- циклические 212
- Условие интерференционного максимума 321
- минимума 321
- нормировки вероятностей 405
- Установка Штерна 92
- Участок цепи неоднородный 182

- Фаза (в термодинамике) 141  
 - волны плоской 283  
 — начальная 283  
 - колебаний 254  
 - начальная 254  
 Фазотрон 213  
 Фарад (единица электрической емкости) 148, 170  
 Ферми-газ 443  
 Фермионы 425  
 Ферриты 245  
 Ферромагнетика 241  
 Фигуры Лиссажу 263  
 Физика молекулярная 81  
 - квантовая 375  
 Флуоресценция 461  
 Фокус линзы 307  
 Фон 289  
 Фононы 446  
 Формула барометрическая 90  
 - Бальмера обобщенная 392  
 - Вульфа — Брэггов 343  
 - де Бройля 398  
 - Лапласа 130  
 - Лоренца 210  
 - Планка 374  
 - Пуазейля 64  
 - Ричардсона — Дэшмана 193  
 - Рэлея — Джинса 373  
 - Томсона 260  
 - Торричелли 62  
 - Френеля 360  
 - Циолковского 22  
 Фосфоресценция 461  
 Фотолюминесценция 461  
 Фотометрия 310  
 Фотон 380, 384, 515, 520  
 Фотопроводимость 379  
 - полупроводников 459  
 - примесная 460  
 - собственная 460  
 Фотоэлемент 383  
 - вакуумный 383  
 - вентильный 384  
 - полупроводниковый 383  
 Фотоэмульсии ядерные 496  
 Фотоэффект 378  
 - безынерционность 380  
 - вентильный 379  
 - внешний 378  
 - внутренний 379  
 - многофотонный 381  
 - ядерный 490  
 Фронт волновой 282  
 Функция волновая 403  
 - антисимметричная 425  
 - симметричная 425  
 - Кирхгофа 371  
 - распределения Максвелла 88  
 - Больцмана 91  
 - молекул по скоростям 88  
 — по энергиям теплового движения 89  
 Характеристика вольт-амперная 192, 379  
 - фотоэффекта 379  
 Хемилюминесценция 461  
 Холодильник 113  
 Цвет 523  
 Центр захвата 462  
 - качаний физического маятника 258  
 - кристаллизации 140  
 - линзы оптический 305  
 - масс (инерции) системы 20  
 Цепь переменного тока 275  
 Цикл обратный 109  
 - прямой 109  
 - Карно обратный 115  
 - прямой 114  
 - термоядерной реакции 508  
 — протонно-протонный 508  
 — углеродно-азотный 508  
 Циклотрон 212  
 Циркуляция вектора магнитной индукции 214  
 - напряженности электростатического поля 155  
 — поля сторонних сил 179  
 Цуг волновой 319  
 Чармоний 523  
 Частицы истинно нейтральные 517  
 - тождественные 424  
 - элементарные, классификация 520  
 Частота вращения 13  
 - колебаний 254  
 - контура собственная 260  
 - резонансная 271, 276  
 - собственная 265  
 Четность 519  
 Числа заполнения 442  
 Число барионное 522  
 - волновое 284  
 - зарядовое ядра 476  
 - квантовое 410  
 - -главное 396, 419  
 - магнитное 419  
 - орбитальное 419  
 - спиновое 423  
 — магнитное 423  
 - пиновое ядерное 479  
 - координационное 136  
 - лептонное 520  
 - Лошмидта 86  
 - Рейнольдса 63  
 - столкновений среднее 92  
 - степеней свободы молекул 100  
 — точки 9  
 Ширина интерференционной полосы 323  
 - энергетического уровня естественная 491  
 Шкала температурная 82  
 - международная практическая 82  
 - термодинамическая 82, 115  
 Экситоны 461  
 Экстратоки самоиндукции 227  
 Электреты 167  
 Электризация тел 146  
 Электродинамика 177  
 Электродвигатель 225  
 Электролюминесценция 461  
 Электрон 146, 520  
 Электрон конверсии 489  
 Электрон-вольт 191  
 Электронография 343  
 Эмиссия автоэлектронная 194

- вторичная электронная 193
- термоэлектронная 192
- фотоэлектронная 193
- электронная 192
- Эмиттер 473
- Энергия 23
  - активации 455
  - внутренняя 99
  - заряженного конденсатора 174
  - —единенного проводника 173
  - ионизации 195
  - кинетическая 24
  - —гармонических колебаний 256
  - механическая 23
  - нулевых колебаний 416
  - поверхностная 127
  - покоя 78
  - полная гармонических колебаний 256
  - —механическая 27
  - поля магнитного 231
  - —электростатического 174
  - потенциальная 25
  - —гармонических колебаний 256
- межмолекулярного взаимодействия 117
- упруго деформированного тела 26
- связи системы 78
- удельная 478
- ядра 477
- —удельная 478
- системы неподвижных точечных зарядов 173
- Ферми 444
- —электромагнитных волн 298
- Энтальпия 123
- Энтропия ПО
- Эффект гироскопический 42
  - Джозефсона 449
  - нестационарный 449
  - стационарный 449
  - Джоуля — Томсона 123
  - диамагнитный 237
  - Доплера в акустике 291, 354
  - для электромагнитных волн 354
  - поперечный 355
  - продольный 354
  - Зеемана 420
- Керра 366
- Комптона 385
- Мейсснера 448
- Мёссбауэра 490
- парамагнитный 237
- радиометрический 98
- релятивистский 69
- туннельный 414
- Фарадея 368
- Холла 213
- Штарка 420
- Явление Зеебска 465
  - Пельтье 466
  - Томсона 467
  - электромагнитной индукции 221
- Явление переноса 94
  - гистерезиса диэлектрического 166
  - магнитного 242
- Ядро атома дочернее 483
  - —материнское 483
- Ядра магические 478
  - —дважды 478
- Яма потенциальная 30, 410
- Яркость энергетическая 311
- Ячейка Керра 366
  - элементарная 134

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3	§ 14. Графическое представление энергии . . . . .	29
Введение . . . . .	4	§ 15. Удар абсолютно упругих и неупругих тел . . . . .	30
Предмет физики и связь с другими науками . . . . .	4	Контрольные вопросы . . . . .	33
Единицы физических величин . . . . .	5	Задачи . . . . .	34
<b>Часть I</b>			
<b>ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ</b>			
<b>Глава 1. Элементы кинематики . . . . .</b>	<b>7</b>	<b>Глава 4. Механика твердого тела . . . . .</b>	<b>34</b>
§ 1. Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения . . . . .	7	§ 16. Момент инерции . . . . .	34
§ 2. Скорость . . . . .	9	§ 17. Кинетическая энергия вращения . . . . .	36
§ 3. Ускорение и его составляющие . . . . .	10	§ 18. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела . . . . .	37
§ 4. Угловая скорость и угловое ускорение . . . . .	12	§ 19. Момент импульса и закон его сохранения . . . . .	38
Контрольные вопросы . . . . .	13	§ 20. Свободные оси. Гироскоп . . . . .	40
Задачи . . . . .	14	§ 21. Деформации твердого тела . . . . .	42
<b>Глава 2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела . . . . .</b>	<b>14</b>	Контрольные вопросы . . . . .	45
§ 5. Первый закон Ньютона. Масса. Сила . . . . .	14	Задачи . . . . .	45
§ 6. Второй закон Ньютона . . . . .	15	<b>Глава 5. Тяготение. Элементы теории поля . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 7. Третий закон Ньютона . . . . .	17	§ 22. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения . . . . .	46
§ 8. Силы трения . . . . .	17	§ 23. Сила тяжести и вес. Невесомость . . . . .	48
§ 9. Закон сохранения импульса. Центр масс . . . . .	19	§ 24. Поле тяготения и его напряженность . . . . .	49
§ 10. Уравнение движения тела переменной массы . . . . .	21	§ 25. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения . . . . .	49
Контрольные вопросы . . . . .	22	§ 26. Космические скорости . . . . .	51
Задачи . . . . .	22	§ 27. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции . . . . .	52
<b>Глава 3. Работа и энергия . . . . .</b>	<b>23</b>	Контрольные вопросы . . . . .	55
§ 11. Энергия, работа, мощность . . . . .	23	Задачи . . . . .	56
§ 12. Кинетическая и потенциальная энергии . . . . .	24	<b>Глава 6. Элементы механики жидкостей . . . . .</b>	<b>57</b>
§ 13. Закон сохранения механической энергии . . . . .	27	§ 28. Давление жидкости и газа . . . . .	57
		§ 29. Уравнение неразрывности . . . . .	58

§ 30. Уравнение Бернулли и следствия из него . . . . .	59	по скоростям и энергиям теплового движения. . . . .	87
§ 31. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей . . . .	62	§ 45. Барометрическая формула. Распределение Больцмана . . . .	90
§ 32. Методы определения вязкости . . . . .	63	§ 46. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. . . . .	91
§ 33. Движение тел в жидкостях и газах . . . . .	64	§ 47. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории. . . . .	92
Контрольные вопросы . . . . .	66	§ 48. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах. . . . .	94
Задачи. . . . .	66	§ 49. Вакуум и методы его получения. Свойства ультраразреженных газов . . . . .	96
<b>Глава 7. Элементы специальной (частной) теории относительности . . .</b>	<b>67</b>	Контрольные вопросы . . . . .	98
§ 34. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности . . . . .	67	Задачи . . . . .	99
§ 35. Постулаты специальной (частной) теории относительности. . . . .	68	<b>Глава 9. Основы термодинамики _____</b>	<b>99</b>
§ 36. Преобразования Лоренца . . . .	70	§ 50. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул ..	99
§ 37. Следствия из преобразований Лоренца . . . . .	71	§ 51. Первое начало термодинамики. . . . .	101
§ 38. Интервал между событиями . . .	75	§ 52. Работа газа при изменении его объема . . . . .	102
§ 39. Основной закон релятивистской динамики материальной точки. . . . .	76	§ 53. Теплоемкость . . . . .	103
§ 40. Энергия в релятивистской механике. . . . .	77	§ 54. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам . . . . .	105
Контрольные вопросы . . . . .	79	§ 55. Адиабатный процесс. Политропный процесс. . . . .	106
Задачи . . . . .	79	§ 56. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). . . . .	108
<b>Часть 2</b>		§ 57. Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью. . . . .	109
<b>ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ</b>		§ 58. Второе начало термодинамики. . . . .	111
<b>Глава 8. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов. . . . .</b>	<b>81</b>	§ 59. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД для идеального газа . . . . .	113
§ 41. Статистический и термодинамический методы. Опытные законы идеального газа . . . . .	81	Контрольные вопросы . . . . .	115
§ 42. Уравнение Клапейрона — Менделеева . . . .	84	Задачи . . . . .	116
§ 43. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов . . . . .	86		
§ 44. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа			

<b>Глава 10. Реальные газы, жидкости и твердые тела</b> . . . . .	117
§ 60. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия. . . . .	117
§ 61. Уравнение Ван-дер-Ваальса . . . . .	119
§ 62. Изотермы Ван-дер-Ваальса и их анализ . . . . .	120
§ 63. Внутренняя энергия реального газа . . . . .	122
§ 64. Эффект Джоуля—Томсона . . . . .	123
§ 65. Сжижение газов . . . . .	125
§ 66. Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение_____	126
§ 67. Смачивание . . . . .	128
§ 68. Давление под искривленной поверхностью жидкости. . . . .	130
§ 69. Капиллярные явления . . . . .	131
§ 70. Твердые тела. Моно- и поликристаллы. . . . .	132
§ 71. Типы кристаллических твердых тел. . . . .	133
§ 72. Дефекты в кристаллах . . . . .	137
§ 73. Теплоемкость твердых тел_____	138
§ 74. Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела . . . . .	139
§ 75. Фазовые переходы I и II рода . . . . .	141
§ 76. Диаграмма состояния. Тройная точка. . . . .	142
Контрольные вопросы . . . . .	144
Задачи . . . . .	145

**Часть 3**  
**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО**  
**И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

<b>Глава 11. Электростатика</b> . . . . .	146
§ 77. Закон сохранения электрического заряда. . . . .	146
§ 78. Закон Кулона . . . . .	147
§ 79. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля . . . . .	148
§ 80. Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя . . . . .	150

§ 81. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. . . . .	152
§ 82. Применение теоремы Гаусса к расчету некоторых электростатических полей в вакууме. . . . .	153
§ 83. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля_____	155
§ 84. Потенциал электростатического поля . . . . .	156
§ 85. Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности. . . . .	158
§ 86. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля . . . . .	159
§ 87. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков . . . . .	160
§ 88. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике . . . . .	162
§ 89. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. . . . .	163
§ 90. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред . . . . .	164
§ 91. Сегнетоэлектрики . . . . .	166
§ 92. Проводники в электростатическом поле_____	167
§ 93. Электроемкость уединенного проводника . . . . .	170
§ 94. Конденсаторы . . . . .	170
§ 95. Энергия системы зарядов, уединенного проводника и конденсатора. Энергия электростатического поля_____	173
Контрольные вопросы . . . . .	175
Задачи . . . . .	176

<b>Глава 12. Постоянный электрический ток</b> . . . . .	177
§ 96. Электрический ток, сила и плотность тока . . . . .	177
§ 97. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение. . . . .	178

§ 98. Закон Ома. Сопротивление проводников . . . . .	179	§ 115. Движение заряженных частиц в магнитном поле_____	210
§ 99. Работа и мощность тока. Закон Джоуля — Ленца . . . . .	181	§ 116. Ускорители заряженных частиц . . . . .	211
§ 100. Закон Ома для неоднородного участка цепи. . . . .	182	§ 117. Эффект Холла . . . . .	213
§ 101. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей_____	183	§ 118. Циркуляция вектора $\vec{B}$ магнитного поля в вакууме ...	214
Контрольные вопросы. . . . .	185	§ 119. Магнитные поля соленоида и тороида . . . . .	215
Задачи. . . . .	186	§ 120. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля $B$ . . . . .	217
<b>Глава 13. Электрические токи в металлах, вакууме и газах . . . . .</b>	<b>186</b>	§ 121. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле_____	218
§ 102. Элементарная классическая теория электропроводности металлов . . . . .	186	Контрольные вопросы. . . . .	219
§ 103. Вывод основных законов электрического тока в классической теории проводимости металлов. . . . .	188	Задачи. . . . .	220
§ 104. Работа выхода электронов из металла . . . . .	191	<b>Глава 15. Электромагнитная индукция . . . . .</b>	<b>221</b>
§ 105. Эмиссионные явления и их применение. . . . .	191	§ 122. Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). . . . .	221
§ 106. Ионизация газов. Несамостоятельный газовый разряд . . . . .	194	§ 123. Закон Фарадея и его вывод из закона сохранения энергии. . . . .	222
§ 107. Самостоятельный газовый разряд и его типы. . . . .	196	§ 124. Вращение рамки в магнитном поле. . . . .	224
§ 108. Плазма и ее свойства . . . . .	200	§ 125. Вихревые токи (токи Фуко) ..	225
Контрольные вопросы. . . . .	201	§ 126. Индуктивность контура. Самоиндукция. . . . .	226
Задачи. . . . .	202	§ 127. Токи при размыкании и замыкании цепи. . . . .	227
<b>Глава 14. Магнитное поле. . . . .</b>	<b>202</b>	§ 128. Взаимная индукция. . . . .	229
§ 109. Магнитное поле и его характеристики. . . . .	202	§ 129. Трансформаторы . . . . .	230
§ 110. Закон Био — Савара — Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. . . . .	205	§ 130. Энергия магнитного поля ...	231
§ 111. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов . . . . .	207	Контрольные вопросы. . . . .	233
§ 112. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля. . . . .	208	Задачи. . . . .	234
§ 113. Магнитное поле движущегося заряда . . . . .	208	<b>Глава 16. Магнитные свойства вещества . . . . .</b>	<b>234</b>
§ 114. Действие магнитного поля на движущийся заряд . . . . .	209	§ 131. Магнитные моменты электронов и атомов . . . . .	234
		§ 132. Диа- и парамагнетизм_____	236
		§ 133. Намагниченность. Магнитное поле в веществе. . . . .	238
		§ 134. Условия на границе раздела двух магнетиков . . . . .	240
		§ 135. Ферромагнетики и их свойства . . . . .	241



§ 136. Природа ферромагнетизма ..	243	(механических	
Контрольные вопросы ..	245	и электромагнитных).	
Задачи ..	245	Резонанс ..	271
<b>Глава 17. Основы теории Максвелла</b>		§ 149. Переменный ток ..	273
<b>для электромагнитного поля ..</b>	<b>246</b>	§ 150. Резонанс напряжений ..	276
§ 137. Вихревое электрическое		§ 151. Резонанс токов ..	277
поле ..	246	§ 152. Мощность, выделяемая	
§ 138. Ток смещения ..	247	в цепи переменного тока . . . .	278
§ 139. Уравнения Максвелла		Контрольные вопросы ..	279
для электромагнитного		Задачи ..	280
поля ..	249	<b>Глава 19. Упругие волны ..</b>	<b>281</b>
Контрольные вопросы ..	252	§ 153. Волновые процессы.	
		Продольные и поперечные	
		волны ..	281
		§ 154. Уравнение бегущей волны.	
		Фазовая скорость. Волновое	
		уравнение ..	283
		§ 155. Принцип суперпозиции.	
		Групповая скорость ..	285
		§ 156. Интерференция волн ..	286
		§ 157. Стоячие волны ..	287
		§ 158. Звуковые волны ..	289
		§ 159. Эффект Доплера	
		в акустике ..	291
		§ 160. Ультразвук	
		и его применение ..	292
		Контрольные вопросы ..	293
		Задачи ..	294
		<b>Глава 20. Электромагнитные</b>	
		<b>волны ..</b>	<b>294</b>
		§ 161. Экспериментальное получение	
		электромагнитных волн . . . .	294
		§ 162. Дифференциальное уравнение	
		электромагнитной волны ....	297
		§ 163. Энергия и импульс	
		электромагнитной волны ....	298
		§ 164. Излучение диполя. Применение	
		электромагнитных волн . . . .	299
		Контрольные вопросы ..	301
		Задачи ..	301
		<b>Часть 5</b>	
		<b>ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА</b>	
		<b>ИЗЛУЧЕНИЯ</b>	
		<b>Глава 21. Элементы геометрической</b>	
		<b>и электронной оптики ..</b>	<b>302</b>
		§ 165. Основные законы оптики.	
		Полное отражение ..	302

§ 166. Тонкие линзы. Изображения предметов с помощью линз . . . . .	304
§ 167. Аберрации (погрешности) оптических систем. . . . .	308
§ 168. Основные фотометрические величины и их единицы. . . . .	310
§ 169. Элементы электронной оптики. . . . .	311
Контрольные вопросы. . . . .	314
Задачи. . . . .	314
<b>Глава 22. Интерференция света</b> . . . . .	315
§ 170. Развитие представлений о природе света. . . . .	315
§ 171. Когерентность и монохроматичность световых волн. . . . .	318
§ 172. Интерференция света . . . . .	320
§ 173. Методы наблюдения интерференции света. . . . .	321
§ 174. Интерференция света в тонких пленках . . . . .	324
§ 175. Применение интерференции света. . . . .	327
Контрольные вопросы. . . . .	330
Задачи. . . . .	331
<b>Глава 23. Дифракция света</b> . . . . .	331
§ 176. Принцип Гюйгенса — Френеля. . . . .	331
§ 177. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света. . . . .	333
§ 178. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске. . . . .	335
§ 179. Дифракция Фраунгофера на одной щели. . . . .	337
§ 180. Дифракция Фраунгофера надифракционной решетке. . . . .	339
§ 181. Пространственная решетка, Рассеяние света . . . . .	341
§ 182. Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа — Брэггов . . . . .	342
§ 183. Разрешающая способность оптических приборов. . . . .	343
§ 184. Понятие о голографии . . . . .	345
Контрольные вопросы. . . . .	347
Задачи. . . . .	348
<b>Глава 24. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом</b> . . . . .	349
§ 185. Дисперсия света . . . . .	349
§ 186. Электронная теория дисперсии света. . . . .	350
§ 187. Поглощение (абсорбция) света. . . . .	352
§ 188. Эффект Доплера . . . . .	354
§ 189. Излучение Черенкова — Вавилова. . . . .	355
Контрольные вопросы. . . . .	356
Задачи. . . . .	356
<b>Глава 25. Поляризация света</b> . . . . .	357
§ 190. Естественный и поляризованный свет. . . . .	357
§ 191. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков . . . . .	359
§ 192. Двойное лучепреломление. . . . .	360
§ 193. Поляризационные призмы и поляроиды . . . . .	363
§ 194. Анализ поляризованного света. . . . .	364
§ 195. Искусственная оптическая анизотропия. . . . .	366
§ 196. Вращение плоскости поляризации. . . . .	367
Контрольные вопросы. . . . .	368
Задачи. . . . .	369
<b>Глава 26. Квантовая природа излучения</b> . . . . .	369
§ 197. Тепловое излучение и его характеристики . . . . .	369
§ 198. Закон Кирхгофа . . . . .	371
§ 199. Законы Стефана — Больцмана и смещения Вина . . . . .	372
§ 200. Формулы Рэлея — Джинса и Планка. . . . .	373
§ 201. Оптическая пирометрия. Тепловые источники света . . . . .	376

§ 202. Виды фотоэлектрического эффекта. Законы внешнего фотоэффекта . . . . .	378
§ 203. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Экспериментальное подтверждение квантовых свойств света . . . . .	380
§ 204. Применение фотоэффекта . . . . .	383
§ 205. Энергия и импульс фотона. Давление света . . . . .	384
§ 206. Эффект Комптона и его элементарная теория. . . . .	385
§ 207. Единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения. . . . .	387
Контрольные вопросы . . . . .	388
Задачи . . . . .	389

**Часть 6**  
**ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ**  
**ФИЗИКИ АТОМОВ,**  
**МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

<b>Глава 27. Теория атома водорода по Бору. . . . .</b>	<b>390</b>
§ 208. Модели атома Томсона и Резерфорда . . . . .	390
§ 209. Линейчатый спектр атома водорода . . . . .	392
§ 210. Постулаты Бора . . . . .	393
§ 211. Опыты Франка и Герца . . . . .	393
§ 212. Спектр атома водорода по Бору. . . . .	395
Контрольные вопросы . . . . .	397
Задачи . . . . .	397
<b>Глава 28. Элементы квантовой механики . . . . .</b>	<b>398</b>
§ 213. Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества . . . . .	398
§ 214. Некоторые свойства волн де Бройля. . . . .	400
§ 215. Соотношение неопределенностей. . . . .	400
§ 216. Волновая функция и ее статистический смысл . . . . .	403

§ 217. Общее уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера для стационарных состояний. . . . .	406
§ 218. Принцип причинности в квантовой механике. . . . .	408
§ 219. Движение свободной частицы. . . . .	409
§ 220. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». . . . .	409
§ 221. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект. . . . .	412
§ 222. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике. . . . .	415
Контрольные вопросы . . . . .	417
Задачи . . . . .	417
<b>Глава 29. Элементы современной физики атомов и молекул . . . . .</b>	<b>418</b>
§ 223. Атом водорода в квантовой механике. . . . .	418
§ 224. 1s-Состояние электрона в атоме водорода . . . . .	422
§ 225. Спин электрона. Спиновое квантовое число. . . . .	423
§ 226. Принцип неразличимости тождественных частиц. Фермионы и бозоны. . . . .	424
§ 227. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям. . . . .	425
§ 228. Периодическая система элементов Менделеева . . . . .	426
§ 229. Рентгеновские спектры . . . . .	429
§ 230. Молекулы: химические связи, понятие об энергетических уровнях . . . . .	431
§ 231. Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние света . . . . .	433
§ 232. Поглощение. Спонтанное и вынужденное излучения. . . . .	434

§ 233. Оптические квантовые генераторы (лазеры) . . . . .	436
Контрольные вопросы . . . . .	439
Задачи . . . . .	440
<b>Глава 30. Элементы квантовой статистики</b> . . . . .	<b>441</b>
§ 234. Квантовая статистика. Фазовое пространство. Функция распределения . . . . .	441
§ 235. Понятие о квантовой статистике Бозе — Эйнштейна и Ферми—Дирака . . . . .	442
§ 236. Вырожденный электронный газ в металлах . . . . .	444
§ 237. Понятие о квантовой теории теплоемкости. Фононы . . . . .	445
§ 238. Выводы квантовой теории электропроводности металлов . . . . .	447
§ 239. Сверхпроводимость. Понятие об эффекте Джозефсона . . . . .	448
Контрольные вопросы . . . . .	450
Задачи . . . . .	450
<b>Глава 31. Элементы физики твердого тела</b> . . . . .	<b>450</b>
§ 240. Понятие о зонной теории твердых тел . . . . .	450
§ 241. Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории . . . . .	452
§ 242. Собственная проводимость полупроводников . . . . .	454
§ 243. Примесная проводимость полупроводников . . . . .	457
§ 244. Фотопроводимость полупроводников . . . . .	459
§ 245. Люминесценция твердых тел . . . . .	461
§ 246. Контакт двух металлов по зонной теории . . . . .	463
§ 247. Термоэлектрические явления и их применение . . . . .	465
§ 248. Выпрямление на контакте металл — полупроводник . . . . .	467
§ 249. Контакт электронного и дырочного полупроводников ( $p$ - $n$ -переход) . . . . .	469

§ 250. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы) . . . . .	472
Контрольные вопросы . . . . .	474
Задачи . . . . .	475

**Часть 7  
ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ  
АТОМНОГО ЯДРА  
И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

<b>Глава 32. Элементы физики атомного ядра</b> . . . . .	<b>476</b>
§ 251. Размер, состав и заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа . . . . .	476
§ 252. Дефект массы и энергия связи ядра . . . . .	477
§ 253. Спин ядра и его магнитный момент . . . . .	478
§ 254. Ядерные силы. Модели ядра . . . . .	480
§ 255. Радиоактивное излучение и его виды . . . . .	481
§ 256. Закон радиоактивного распада. Правила смещения . . . . .	483
§ 257. Закономерности $\alpha$ -распада . . . . .	484
§ 258. $\beta^-$ -Распад. Нейтрино . . . . .	486
§ 259. Гамма-излучение и его свойства . . . . .	488
§ 260. Резонансное поглощение $\gamma$ -излучения (эффект Мёссбауэра) . . . . .	490
§ 261. Методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений и частиц . . . . .	492
§ 262. Ядерные реакции и их основные типы . . . . .	496
§ 263. Позитрон. $\beta^+$ -Распад. Электронный захват . . . . .	498
§ 264. Открытие нейтрона. Ядерные реакции под действием нейтронов . . . . .	500
§ 265. Реакция деления ядра . . . . .	502
§ 266. Цепная реакция деления . . . . .	503
§ 267. Понятие о ядерной энергетике . . . . .	505

§ 268. Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций. . . . .	507	§ 273. Частицы и античастицы . . . . .	516
Контрольные вопросы. . . . .	509	§ 274. Гипероны. Странность и четность элементарных частиц . . . . .	518
Задачи . . . . .	510	§ 275. Классификация элементарных частиц. Кварки . . . . .	520
<b>Глава 33. Элементы физики элементарных частиц . . . . .</b>	<b>510</b>	Контрольные вопросы. . . . .	524
§ 269. Космическое излучение . . . . .	510	Задачи . . . . .	525
§ 270. Мюоны и их свойства . . . . .	512	Основные законы и формулы. . . . .	526
§ 271. Мезоны и их свойства . . . . .	513	Предметный указатель . . . . .	537
§ 272. Типы взаимодействий элементарных частиц . . . . .	514		

*Учебное издание*

**Трофимова Таисия Ивановна**

**Курс физики**

**Учебное пособие**

Редактор *Т. Ф. Мельникова*  
Технический редактор *Н. И. Горбачева*  
Компьютерная верстка: *Д. В. Федотов*  
Корректоры *А. П. Сизова, В. А. Жилкина*

Изд. № А-926-ХІ. Подписано в печать 29.09.2005. Формат 70 x 100/16.  
Гарнитура «Таймс». Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 45,5.  
Тираж 4900 экз. Заказ №15522.

Издательский центр «Академия». [www.academia-moscow.ru](http://www.academia-moscow.ru)  
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.004796.07.04 от 20.07.2004.  
117342, Москва, ул. Бултерова, 17-Б, к. 360. Тел./факс: (095)330-1092, 334-8337.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат».  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.



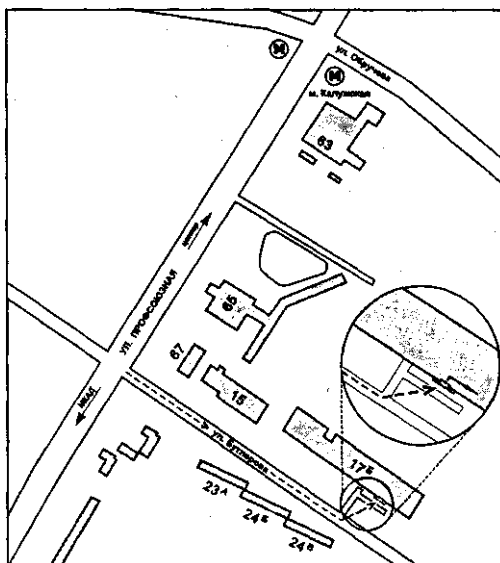
## Книги Издательского центра «АКАДЕМИЯ» можно приобрести

### В розницу:

- Выставка-продажа литературы издательства (ул. Черняховского, 9. В здании Института развития профессионального образования). Тел./факс: (095) 152-1878
- Книжный клуб «Олимпийский» (ОЛИМПИЙСКИЙ пр-т, 16, 5-й этаж, место 20; 3-й этаж, место 166)
- Книжная ярмарка на Тульской (Варшавское шоссе, 9, магазин-склад «Марко»)
- Московский дом книги (ул. Новый Арбат, 8)
- Дом педагогической книги (ул. Б.Дмитровка, 7/5; ул. Кузнецкий мост, 4)
- Торговый дом «Библио-Глобус» (ул. Мясницкая, 6)
- Дом технической книги (Ленинский пр-т, 40)
- Дом медицинской книги (Комсомольский пр-т, 25)
- Магазин «Библиосфера» (Москва, ул. Марксистская, 9)
- Сеть магазинов «Новый книжный» (Сухаревская пл., 12; Волгоградский пр-т, 78)

### Оптом:

- Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, 3-й этаж, к. 360 (здание ГУП «Книгоэкспорт»). Тел./факс: (095) 334-7873, 330-1092, 334-8337. E-mail: sales@academia-moscow.ru



Москва, Автомобильный пр-д, д. 10 (территория ГУП «Таганское»  
Тел./факс: (095) 975-8927, 975-8928. E-mail: sales@academia-moscow.ru

Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, д. 211-213, литер «В».  
Тел./факс: (812) 259-6229, 251-9253. E-mail: fspbacad@comset.net  
(оптово-розничная торговля)