Госкомитет Российской Федерации по высшему образованию
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Часть I

Нижний Новгород 1995

Составители: Л.Н.Ерофеева, М.Г.Красильников, Т.И.Пересыпкина,
Ю.А.Самохин, В.П.Федотов, Е.Б.Шинкарева

УДК 517.2

Расчетные задания по курсу высшей математики /НГТУ; Сост.: Л.Н. Ерофеева, М.Г.Красильников и др. Н.Новгород, 1995. 56 с.

Научный редактор Ю.А.Самохин

Редактор И.И.Морозова

Подп. к печ. 27.09.95. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 3,5. Уч.-изд.л. 3,1. Тираж 1000 экз. Заказ 191. Бесплатно.

Нижегородский государственный технический университет.
603600, Н.Новгород, ул. Минина, 24.

Лаборатория офсетной печати полиграфической базы НГТУ.
603022, Н.Новгород, просп. Гагарина, 1.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЗАДАНИЕ I

Найти значение многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 3$ от матрицы A.

I.I $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -I & 3 \end{pmatrix}$ I.2. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ I.3. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

I.4. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ I.5. $\begin{pmatrix} I & -I \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ I.6. $\begin{pmatrix} 3 & -I \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

I.7. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ I.8. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ I.9. $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -I \end{pmatrix}$

I.I0. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}$ I.II $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & I \end{pmatrix}$ I.I2. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

I.I3. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ I & I \end{pmatrix}$ I.I4. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ I.I5. $\begin{pmatrix} 5 & -I \\ 2 & I \end{pmatrix}$

I.I6. $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & I \end{pmatrix}$ I.I7. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ I.I8. $\begin{pmatrix} I & -3 \\ 2 & -I \end{pmatrix}$

I.I9. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ I.20. $\begin{pmatrix} -3 & I \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ I.2I $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -I \end{pmatrix}$

I.22. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ I.23. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ I.24. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

I.25. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 2

Решить систему уравнений двумя способами: I) применив правило Крамера; 2) представив ее в виде матричного уравнения.

2.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$ 2.4. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2.9. $\begin{array}{l} -3x_1 + 6x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{array}$ 2.10. $\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=1, \\ -2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 3x_1+x_2-2x_3=-2. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} -2x_1+x_2+4x_3=3, \\ 3x_1-x_2-3x_3=-4, \\ x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3=-2, \\ -2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-3. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=-3, \\ -x_1+x_2-3x_3=2. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=3, \\ x_1+2x_2+6x_3=1, \\ x_1-x_2-2x_3=-2. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-3, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ 4x_1-x_2+3x_3=4. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} -5x_1+x_2-2x_3=-3, \\ -x_1+4x_2+x_3=-3, \\ -x_1+2x_2-x_3=-3. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 6x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-2. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 7x_1-2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2+4x_3=3, \\ -x_1+3x_2-x_3=-4. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} -4x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 5x_1-3x_2+x_3=4, \\ -2x_1+4x_2-x_3=-5. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} -2x_1-3x_2+4x_3=-6, \\ x_1+5x_2-x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+x_3=2. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=0, \\ 3x_1+7x_2-x_3=4, \\ -x_1-2x_2+x_3=-2. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=2, \\ -x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ x_1+5x_2-x_3=2. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} -3x_1+6x_2-x_3=-2, \\ 2x_1-3x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} -x_1-6x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 3

Указать число решений системы однородных уравнений в зависимости от параметра a.

3.1. $\begin{cases} a x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 2x_1 + a x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - a x_3 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ a x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 - a x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + a x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ a x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + a x_2 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + a x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ a x_1 + 2x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + a x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + a x_4 = 0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} ax_1+2x_2-x_3=0, \\ -2x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_1-2x_2+x_4=0, \\ -x_1+x_3-2x_4=0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} -3x_1+ax_2-x_3=0, \\ -x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2+2x_4=0, \\ -x_1-x_3+2x_4=0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1-2x_2+ax_3=0, \\ 2x_2-3x_3+x_4=0, \\ -x_1-2x_2-x_4=0, \\ x_1+4x_3-3x_4=0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} -3x_1-x_2+2x_3=0, \\ ax_2-x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2+x_4=0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 4x_2-ax_3+x_4=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_3-x_4=0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_2-3x_3-x_4=0, \\ ax_1-x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_3-x_4=0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_4=0, \\ 2x_1-x_3+x_4=0, \\ -x_1-ax_3+3x_4=0, \\ x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_2-4x_3+ax_4=0, \\ -2x_1-x_3+3x_4=0, \\ x_1+3x_3-x_4=0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} -2x_1-x_3+3x_4=0, \\ x_2+4x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+x_3-ax_4=0, \\ x_1+2x_2-x_4=0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0, \\ -x_2-3x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_3+4x_4=0, \\ ax_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ -x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-4x_3=0, \\ -2x_2+x_3+ax_4=0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} -x_1+3x_2-2x_3=0, \\ 2x_2-x_3+3x_4=0, \\ x_1-3x_2+2x_4=0, \\ 2x_1+ax_3-x_4=0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} -3x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_2-2x_3+x_4=0, \\ 4x_1+3x_2-x_4=0, \\ ax_1-x_2+3x_4=0. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 4

Доказать совместность системы уравнений и найти ее общее решение. Выписать базисные миноры матрицы коэффициентов системы.

4.1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3+x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-4x_4=-2, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=4. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} -3x_1-x_2+4x_3=-3, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1, \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_4=6, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=-1, \\ -x_1+2x_2+5x_3-x_4=-2. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=5, \\ x_1+2x_2-5x_3+x_4=-4, \\ -x_1+3x_3+2x_4=2. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} -x_1+4x_2-3x_3=-4, \\ 5x_2-x_3+2x_4=-1, \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=-1. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_4=3, \\ -x_1+x_2+2x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=5. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3-x_4=4, \\ -x_1+5x_2-3x_3=-4, \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4=3. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=0, \\ -x_1+3x_3+5x_4=2, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=-1, \\ -x_1+2x_2-3x_3+x_4=3, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=3. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_4=-1, \\ x_1+x_2-3x_3+2x_4=3, \\ -3x_1-x_2+x_3-2x_4=-3. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 7x_1-3x_2+x_4=-2, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} 3x_1-6x_3+x_4=1, \\ -x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ 4x_1+x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+x_3=-5, \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4=2, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4=5. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 5

Привести к каноническому виду квадратичную форму.

5.1. $x^2+26y^2+10xy.$

5.2. $x^2+4xy-y^2.$

5.3. $x^2+3y^2+2\sqrt{3}\,xy.$

5.4. $4x^2+4xy+5y^2.$

5.5. $x^2-xy-y^2.$

5.6. $3x^2-2xy-y^2.$

5.7. $3x^2-2xy+2y^2.$

5.8. $8x^2-xy+2y^2.$

5.9. $8x^2-9xy+2y^2.$

5.10. $-4x^2+10xy-4y^2.$

5.11. $7x^2+4\sqrt{3}\,xy+3y^2.$

5.12. $x^2+2xy+3y^2.$

5.13. $4x^2+16xy+6y^2.$

5.14. $2x^2+6xy+5y^2.$

5.15. $11x^2-6xy+y^2.$

5.16. $13x^2-10xy+3y^2.$

5.17. $9x^2-10xy+3y^2.$

5.18. $x^2+2xy+5y^2.$

5.19. $2x^2+6xy+10y^2.$

5.20. $2x^2-2\sqrt{3}\,xy.$

5.21. $x^2-3xy+y^2.$

5.22. $32x^2+52xy-7y^2.$

5.23. $5x^2+24xy-5y^2.$

5.24. $3x^2+2xy+y^2.$

5.25. $9x^2-4xy-7y^2.$

ВАРИАНТ 26.

I. Написать матрицу A линейного преобразования, заключающегося в повороте против часовой стрелки каждого вектора плоскости XOY на угол α. Найти матрицу $B=A^2+\sqrt{2}A+E$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

2. Найти все значения параметра t, при которых вектор $\vec{x}=\{7;-2;t\}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}=\{1;-6;1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ и $\vec{c}=\{3;7;8\}$.

3. Доказать совместность системы и единственность решения. Найти это решение. Выписать базисные миноры матрицы коэффициентов.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

4. Найти собственные значения и собственные векторы обратного преобразования для линейного преобразования с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Привести к каноническому виду квадратичную форму :

$$7x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2xy + 2xz - 2yz.$$

ВАРИАНТ 27

1. Найти матрицу линейного оператора, переводящего систему векторов $\overline{a_1} = \{2; 0; 3\}$, $\overline{a_2} = \{4; 1; 5\}$, $\overline{a_3} = \{3; 1; 2\}$ в систему векторов $\overline{b_1} = \{1; 2; -1\}$, $\overline{b_2} = \{4; 5; -2\}$, $\overline{b_3} = \{1; -1; 1\}$ соответственно.

2. Найти значения параметра t, при которых вектор $\overline{x} = \{1; 3; 5\}$ единственным образом линейно выражается через векторы $\overline{a} = \{5; 6; t\}$, $\overline{b} = \{2; 4; 7\}$ и $\overline{c} = \{3; 2; 5\}$.

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений. Выписать базисные миноры матрицы коэффициентов.

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Доказать, что линейный оператор с матрицей A имеет простой спектр. Найти собственные векторы этого оператора.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz.$$

ВАРИАНТ 28

1. Найти все матрицы, перестановочные с данной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Определить зависимость решений системы от параметров a и b. Для случая единственного решения задать параметры и решить систему

$$\begin{cases} ax+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=b. \end{cases}$$

3. Доказать линейность оператора A, если $Ax=(x_2+x_3;\ 2x_1+x_3;\ 3x_1-x_2+x_3)$. Найти его матрицу в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ и матрицу $2A+A^{-1}$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A. Определить ранг матрицы и выписать базисные миноры.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Привести к каноническому виду квадратичную форму.

$$x^2+4xz+y^2+2yz+4z^2.$$

ВАРИАНТ 29

I. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -I & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ I & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 2 & -I \end{pmatrix}$$

2. Доказать, что собственные значения линейного преобразования с симметрической матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ являются действительными числами ($A \neq 0$).

3. Показать, что система векторов $\vec{x}_1 = \{1; -3; 0; 2\}$, $\vec{x}_2 = \{-2; 1; 4; 0\}$, $\vec{x}_3 = \{3; 0; -1; -2\}$, $\vec{x}_4 = \{0; -1; 2; 1\}$ образует базис в R^4. Найти координаты вектора $\vec{a} = \{0; -5; 5; 1\}$ в этом базисе.

4. Определить размерность подпространства решений, базис и общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Привести к каноническому виду квадратичную форму.

$$x^2 + 2xy + 2xz - 3y^2 - 6yz - 4z^2.$$

ВАРИАНТ 30

I. Вычислить $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

2. Доказать совместность системы и найти ее общее решение, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

3. Даны линейные преобразования:

$$(A)\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y + z, \\ z' = z + x \end{cases} \quad \text{и} \quad (B)\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$$

Найти преобразование (AB) и матрицу обратного преобразования для преобразования (A).

4. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряжённого оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$7x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2xy + 2xz - 2yz.$$

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ЗАДАНИЕ I

Даны треугольная $ABCA_1B_1C_1$ и четырёхугольная $ABCДA_1B_1C_1Д_1$ призмы (с общим двугранным углом при боковом ребре BB_1) и обозначено: O_1 и O_3 – центры соответственно верхних и нижних оснований призм (т.е. точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC или диагоналей параллелограммов $A_1B_1C_1Д_1$ и $ABCД$); O_2 – центр параллелограмма BCC_1B_1 ; O, K_1, K_2 и K_3 – центры (середины) соответствующих отрезков O_1O_2, A_1B_1, B_1B и BC.

Разложить указанные ниже векторы:

а) по заданному базису – при условии, что призма в нечётных вариантах треугольная, а в чётных четырёхугольная;

б) и в) по координатному базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – если, наоборот, призма является треугольной в чётных вариантах, а в нечётных – четырёхугольной, и, кроме того, $A(3;6;4)$, $B(3;1;7)$, $C(3;8;8)$, $A\ (6;2;4)$.

I.I. и I.2, а) $\overrightarrow{AO_1}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$; б) $\overrightarrow{O_1O_2}$; в) $\overrightarrow{CK_1}$.

I.3. и I.4, а) $\overrightarrow{AO_2}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$; б) $\overrightarrow{O_2O_3}$; в) $\overrightarrow{CO}$.

I.5. и I.6, а) $\overrightarrow{A_1O}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$; б) $\overrightarrow{OO_1}$; в) $\overrightarrow{C_1O_3}$.

I.7. и I.8, а) $\overrightarrow{A_1O_2}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$; б) $\overrightarrow{O_2O}$; в) $\overrightarrow{CO_1}$.

I.9. и I.I0, а) $\overrightarrow{A_1O_3}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$; б) $\overrightarrow{O_3O}$; в) $\overrightarrow{C_1O}$.

I.II. и I.I2, а) $\overrightarrow{AO_1}$, $\{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}, \overrightarrow{AK_3}\}$; б) $\overrightarrow{O_1K_2}$; в) $\overrightarrow{B_1O}$.

I.I3. и I.I4, а) $\overrightarrow{AO_2}$, $\{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}, \overrightarrow{AK_3}\}$; б) $\overrightarrow{O_2K_1}$; в) $\overrightarrow{B_1O_3}$.

I.I5. и I.I6, а) $\overrightarrow{A_1O}$, $\{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}, \overrightarrow{AK_3}\}$; б) $\overrightarrow{OK_1}$; в) $\overrightarrow{BO_1}$.

I.I7. и I.I8, а) $\overrightarrow{A_1O_2}$, $\{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}, \overrightarrow{AK_3}\}$; б) $\overrightarrow{O_1K_3}$; в) $\overrightarrow{BO}$.

I.I9. и I.20, а) $\overrightarrow{A_1O_3}$, $\{\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}, \overrightarrow{AK_3}\}$; б) $\overrightarrow{O_3K_2}$; в) $\overrightarrow{AO}$

I.2I. и I.22, а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\{\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AO_3}\}$; б) $\overrightarrow{OK_3}$; в) $\overrightarrow{A_1O_2}$.

I.23. и I.24, а) $\overrightarrow{AC_1}$, $\{\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AO_3}\}$; б) $\overrightarrow{OK_2}$; в) $\overrightarrow{A_1O_3}$.

I.25. и I.26, а) $\overrightarrow{AK_1}$, $\{\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AO_3}\}$; б) $\overrightarrow{K_1K_3}$; в) $\overrightarrow{A_1O}$.

I.27. и I.28, а) $\overrightarrow{A_1K_2}$, $\{\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AO_3}\}$; б) $\overrightarrow{A_1K_3}$; в) $\overrightarrow{AO_2}$.

I.29. и I.30, а) $\overrightarrow{A_1K_3}$, $\{\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AO_3}\}$; б) $\overrightarrow{K_2K_3}$; в) $\overrightarrow{AO_1}$.

ЗАДАНИЕ 2

Даны три последовательные вершины А,В и С равнобедренной трапеции АВСД, у которой $\overline{AB} = 2\ \overline{ДC}$. Найти:

I) четвёртую её вершину Д;

2) угол между диагоналями трапеции и длину проекции одной из них на другую;

3) угол между боковыми сторонами и длину проекции одной из них на другую;

4) площадь трапеции и площадь параллелограмма, построенного на диагоналях трапеции, если:

2.I. A(I;2;3), B(2;8;2), C(0;5;I). 2.2.A(7;3;7),B(5;9;6), C(I;I;2).
2.3. A(4;5;6), B(9;3;0), C(5;2;5). 2.4.A(4;7;5),B(9;7;9),C(I;I;3).
2.5.A(7;8;9), B(3;I;3), C(3;5;4). 2.6.A(7;6;7), B(8;9;9),C(I;I;4).
2.7.A(I;0;I), B(2;3;3), C(5;5;5). 2.8.A(7;7;8),B(I;0;0),C(I;I;5).
2.9.A(I;I;2), B(3;4;3), C(6;5;7).2.I0.A(7;9;8),B(I;0;I),C(I;I;6).
2.II.A(I;3;I),B(5;3;6),C(5;8;5). 2.I2.A(0;8;I),B(I;0;2),C(I;I;7).
2.I3.A(4;I;5),B(3;7;3),C(9;6;0). 2.I4.A(8;2;8),B(I;0;3),C(I;I;8).
2,I5.A(I;6;I),B(8;3;9),C(6;I;6). 2.I6.A(3;8;4),B(I;0;4),C(I;I;9).
2.I7.A(7;I;8),B(4;0;4),C(2;6;3). 2.I8.A(8;5;8),B(I;0;5),C(I;2;0).
2.I9.A(I;9;2),B(I;4;2),C(6;4;6). 2.20.A(6;8;7),B(I;0;6),C(I;2;I).
2.2I.A(0;2;I),B(4;3;4),C(5;6;6). 2.22.A(8;8;8),B(I;0;7),C(I;2;2).
2.23.A(2;2;2),B(4;4;5),C(6;7;6). 2.24.A(9;9;0),B(I;0;8),C(I;2;3).
2.25.A(3;2;4),B(4;6;4),C(8;6;9). 2.26.A(9;I;9),B(I;0;9),C(I;2;4).
2.27.A(2;5;2),B(7;4;8),C(7;0;7). 2.28.A(2;9;3),B(I;I;0),C(I;2;5).
2.29.A(6;2;7),B(4;9;5),C(I;7;2). I.30.A(9;4;9),B(I;I;I),C(I;2;6).

ЗАДАНИЕ 3

Решить следующие задачи:

3.I. В треугольнике ABC известны две медианы $\overrightarrow{AA_1}=-3\vec{p}+6\vec{q}+2\vec{r}$ и $\overrightarrow{BB_1}=7\vec{p}-4\vec{q}-3\vec{r}$, где $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ - взаимно перпендикулярные единичные векторы (орты). Вычислить длину стороны AB.

3.2. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}=4\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{q}=6\vec{l}+2\vec{m}$, где m, n и $\vec{l}$ - единичные векторы, образующие между собой попарно углы 120°.

3.3. Пусть $\vec{m}, \vec{n}, \vec{l}$ - орты, попарно образующие между собой углы 120°. Показать, что векторы $\vec{a}=8\vec{m}+3\vec{n}+\vec{l}$ и $\vec{b}=3\vec{n}-\vec{l}$ взаимно перпендикулярны и, рассматривая их как стороны прямоугольника, вычислить угол между его диагоналями.

3.4. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{d}=4\vec{a}-3\vec{b}$ взаимно ортогональны? Чему равняется $|(\vec{c}+\vec{a})\times(\vec{d}+\vec{b})|$?

3.5. Найти величину равнодействующей $\vec{R}$ четырёх компланарных сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ и $\vec{F_4}$, приложенных к одной точке, если величина каждой силы равна F =10 кг, а угол между последовательными силами α =135°. Вычислить также $|(\vec{F_2}-\vec{F_1})\times(\vec{F_4}-\vec{F_3})|$.

3.6. Чему равен объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов, причём $|\vec{OA}|=1$, $|\vec{OB}|=2$, $|\vec{OC}|=3$?

3.7. Зная две стороны $\vec{AB}=2\vec{p}+7\vec{q}-9\vec{r}$ и $\vec{BC}=-\vec{p}-6\vec{q}+7\vec{r}$ треугольника АВС, определить длину его высоты ВН, опущенной на третью сторону, при условии, что $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ - взаимно перпендикулярные орты.

3,8. Даны три некомпланарных единичных вектора $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, таких, что $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n})=(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{p})=120°$, $(\vec{n}\,\hat{,}\,\vec{p})=60°$. Найти их проекции на вектор $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}$.

3.9. Векторы $\vec{AC}=\vec{p}$ и $\vec{BД}=\vec{q}$ являются диагоналями параллелограмма АВСД. Вычислить его острый угол, если известно, что $|\vec{p}|=2|\vec{q}|$ и $(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q})=30°$.

3.10. Длины четырёх компланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$, приложенных к одной и той же точке, равны между собой, концы векторов совпадают с соответствующими вершинами равнобедренной трапеции АВСД, а угол между последовательными векторами равен α =45°. Найти угол между диагоналями $\vec{AC}$ и $\vec{ДB}$ трапеции.

3.11. В задаче 3.10 вычислить площадь параллелограмма, построенного на диагоналях $\vec{AC}$ и $\vec{ДB}$ трапеции.

3.12. В параллелограмме ОАСВ точки M и N - середины сторон АС=4 и ВС=3; векторы $\vec{OM}$ и $\vec{ON}$ взаимно перпендикулярны. Определить угол между диагоналями $\vec{OC}$ и $\vec{BA}$ параллелограмма.

3.13. В задаче 3.12 разложить вектор $\vec{OC}$ по векторам $\vec{OM}=\vec{m}$ и $\vec{ON}=\vec{n}$ и выразить его длину через модули этих векторов.

3.14. Боковые рёбра треугольной пирамиды ОАВС направлены вдоль векторов $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$, образующих с осью Oz углы 90°, 45° и 30° соответственно. Вычислить объём пирамиды, если $|\vec{OA}|=|\vec{OB}|=|\vec{OC}|=3$.

3.15. Единичные векторы $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ образуют попарно углы в 60°. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}-2\vec{p}$ и $\vec{b}=5\vec{m}-4\vec{n}+3\vec{p}$.

3.16. Три орта $\vec{m}, \vec{n}$ и $\vec{p}$, приложенные к вершине Д пирамиды ДАВС, направлены вдоль её боковых рёбер $\vec{ДA}$, $\vec{ДB}$ и $\vec{ДC}$. Вычислить $np_{\vec{m}+\vec{n}}\vec{a}$ и $np_{\vec{a}}(\vec{m}\times\vec{n})$, если $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n})=(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{p})=90°$ и $(\vec{n}\,\hat{,}\,\vec{p})=30°$.

3.17. К одной из вершин куба приложены три силы $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$, равные по величине 1,2 и 3 и направленные по диагоналям куба. Найти величину равнодействующей этих сил и углы, образуемые ею с составляющими силами.

3.18. Одна из вершин куба неподвижно закреплена, а смежная с ней (т.е. связанная общим ребром) вершина является точкой приложения трёх сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$, равных по величине и направленных по диагоналям граней куба.

Определить величину момента $\vec{M}$ равнодействующей этих сил относительно неподвижной точки и углы, образуемые им с составляющими силами.

3.19. Векторы $\vec{AC}=6\vec{m}-2\vec{n}$ и $\vec{BД}=-4\vec{m}+3\vec{n}$ изображают диагонали параллелограмма АВСД, и точка К – середина его стороны АВ. Найти площадь треугольника СКД и угол между векторами $\vec{KC}$ и $\vec{KД}$, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=60°$.

3.20. Точки K и L являются серединами соответствующих сторон АВ и ВС параллелограмма АВСД, 0 – его центр; $\vec{KL}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{KД}=4\vec{m}+3\vec{n}$. Выразить вектор $\vec{KO}$ через векторы $\vec{KL}$ и $\vec{KД}$, найти его длину и угол, образуемый им со стороной АВ параллелограмма, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=5$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=120°$.

3.21. Точка С делит дугу окружности $\breve{AB}=\frac{\pi}{2}$ в отношении 1:2. Выразить вектор $\vec{OC}$ через векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, где 0 – центр окружности, и найти угол между векторами $\vec{OC}$ и $\vec{AB}$, а также $\vec{OC}$ и $\vec{CA}$.

3.22. Из вершины А ромба АВСД с углом 60° проведён к его плоскости перпендикуляр AS, равный стороне ромба. Определить угол между векторами $\vec{SB}$ и $\vec{SC}$, а также отношение $пр_{\vec{SC}}\vec{SB}:пр_{\vec{SC}}\vec{BC}$.

3.23. К одной и той же точке приложены единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, составляющие угол 120°, и векторы $\vec{M}=6\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{N}=-\vec{m}+3\vec{n}$. Вычислить площадь треугольника с вершинами в концах векторов $\vec{M}$, $\vec{N}$ и $\vec{m}$ и его угол при вершине $\vec{m}$.

3.24. Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ составляют угол 60°. Выразить вектор $(\vec{a}-\vec{в})$ через векторы $\vec{A}=3\vec{a}+5\vec{в}$ и $\vec{B}=5\vec{a}-8\vec{в}$ и показать, что $пр_{\vec{A}}\vec{a}=пр_{\vec{A}+\vec{B}}(\vec{a}-\vec{в})$.

3.25. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ составляют угол 30°. Найти площадь четырёхугольника, вершины которого совпадают с концами векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{A}=7\vec{a}-3\vec{в}$ и $\vec{B}=-\vec{a}+5\vec{в}$, если $|\vec{a}|=|\vec{в}|=9$.
(Сделать чертёж)

3.26. В базисе $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ векторов на плоскости даны два вектора: $\vec{A}=2\vec{a}+8\vec{c}$ и $\vec{C}=6\vec{a}+m\vec{c}$ (m – $const$). Определить значение параметра m, при котором векторы $\vec{A}-\vec{C}$ и $\vec{a}-\vec{c}$ коллинеарны.

Во сколько раз при этом площадь трапеции с вершинами в концах векторов $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{C}$, $\vec{A}$ будет больше площади треугольника, построенного на базисных векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

3.27. Боковые рёбра треугольной пирамиды $SABC$ имеют длины I, 2, 3 и составляют между собой углы, каждый из которых равен 60°. Выразить вектор $\vec{SO}$, где O – центр треугольника ABC (т.е. точка пересечения его медиан), через векторы $\vec{SA}=\vec{a}$, $\vec{SB}=\vec{в}$ и $\vec{SC}=\vec{c}$; найти его модуль и углы с указанными базисными векторами.

3.28. Каждый из плоских углов при вершине S четырёхугольной пирамиды $SАВСД$ равен 60°, а при вершине S её диагональных сечений – 120°. Боковые рёбра пирамиды имеют длины $SA=2$, $SB=SД=4$ и $SC=6$. Вычислить угол между векторами $\vec{SO_1}$ и $\vec{SO_2}$, где O_1 и O_2 – центры треугольников АВД и ВСД (точки пересечения их медиан).

3.29. В трапеции АВСД известно, что $\vec{AB}=2\cdot\vec{ДС}$ и $\vec{АД}=6\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{BC}=4\vec{m}+6\vec{n}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=I$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=120^\circ$. Показать, что трапеция равнобедренная, и найти её площадь.

3.30. В задаче 3.29 (при тех же условиях) разложить векторы $\vec{AC}$ и $\vec{ВД}$ по векторам $\vec{АД}=\vec{a}$ и $\vec{BC}=\vec{в}$ и определить угол между ними (угол между диагоналями трапеции).

ЗАДАНИЕ 4

Точки A_1, B_1, C_1, $Д_1$ являются центрами тяжести граней тетраэдра АВСД, координаты вершин которого известны. Найти высоту тетраэдра $A_1B_1C_1Д_1$, опущенной: а) для чётных вариантов из точки А на грань $B_1C_1Д_1$, б) для нечётных вариантов из точки $Д_1$ на грань $A_1B_1C_1$.

№ варианта	A	B	C	Д
4.I.	(I, 0, 2)	(I, 2,-I)	(2,-2, I)	(2, I, 0)
4.2.	(I, 2, 0)	(I,-2, I)	(0, 2, I)	(3, I, 0)
4.3.	(-I,2, 0)	(I,-I, 2)	(0, I,-I)	(-3,0, I)
4.4.	(-I,I, I)	(-2,0, 3)	(I, 2,-I)	(0, 3,-I)
4.5.	(I,-I, I)	(-2,0,3)	(2, I,-I)	(2,-2,-4)
4.6.	(I, I, 2)	(I,-I, 3)	(2,-2, 0)	(-I,0,-2)
4.7.	(I, 2, I)	(-I,I, 3)	(-2,2, 0)	(0,-I,-2)
4.8.	(2, I, 0)	(2, I,-I)	(-2, 2,I)	(I, 2, 0)
4.9.	(2, 0, I)	(-2,I, I)	(I, 0, 2)	(3, I, 0)
4.I0.	(-I,I, I)	(0,-2, 3)	(2,-I, I)	(3, 0,-I)

4.II.	(3, I, 6)	(I, 2, 2)	(0,-I, I)	(2, 0, I)
4.I2.	(I, 3, 4)	(2, I, 2)	(-I,0, I)	(0, 2, I)
4.I3.	(2, I, 0)	(I, 0, 2)	(I, 2,-I)	(2,-2, I)
4.I4.	(I,-2, I)	(0, 2, I)	(3, I, 0)	(I, 2, 2)
4.I5.	(I,-I, 2)	(0, I,-I)	(-3,0, I)	(-2,3, 0)
4.I6.	(2, I,-3)	(0, I, I)	(-I,2, 6)	(2,-I, I)
4.I7.	(2, I, 4)	(-I,5,-2)	(-7,-3, 2)	(-6,3, 6)
4.I8.	(3, I, 0)	(I, 2, 2)	(I,-2, I)	(I, 0, 2)
4.I9.	(-I,0, I)	(2, I, 2)	(0, 2, I)	(I, 3, 4)
4.20.	(0,-2,-I)	(3, I, 0)	(2, 0, I)	(-2,I,-3)
4.2I.	(-I,2, 3)	(-3,0, 2)	(-2,I, 0)	(2, 3, I)
4.22.	(-I,I, 3)	(I, 2, 0)	(2, I, 2)	(3, I, 6)
4.23.	(I,-3, 2)	(0, I, I)	(-2,-I,6)	(I, 5, 4)
4.24.	(I,-2, I)	(2, 0, I)	(I, 3, 0)	(2, 2, I)
4.25.	(-I,4, 3)	(-2,I, 0)	(0,-5, I)	(3, 2,-6)
4.26.	(I, 2, 3)	(4,-I, 0)	(2, I,-2)	(4, 3,-5)
4.27.	(2, I, 3)	(4,-2, I)	(-2,I, 3)	(-2,0,-2)
4.28.	(I, I,-I)	(2, 3, I)	(3, 2, I)	(-I,0,-2)
4.29.	(-2,0, 4)	(I,-7, I)	(4,-8, 4)	(I, 4, 6)
4.30.	(2, I, 4)	(I,-5, 2)	(-7,3, 2)	(2, 3,-2)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ЗАДАНИЕ I

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

I) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;

2) угол $\hat{B}$ (в радианах с точночтью до двух знаков);

3) уравнение высоты СД и её длину;

4) на СД как на диаметре построить окружность и записать её уравнение;

5) уравнение медианы AE и координаты точки K - точки пересечения этой медианы и высоты СД;

6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB;

7) координаты точки, расположенной симметрично точке A относительно прямой СД;

8) биссектрису угла A.

	A	B	C
I.I.	(4, 3)	(I6,-6)	(20, I6)
I.2.	(-8,-3)	(4,-I2)	(8, I0)
I.3.	(-5, 7)	(7,-2)	(II, 20)
I.4.	(-I2,-I)	(0,-I0)	(4, I2)
I.5.	(-I0, 9)	(2, 0)	(6, 22)
I.6.	(0, 2)	(I2,-7)	(I6, I5)
I.7.	(-9, 6)	(3,-3)	(7, I9)
I.8.	(I, 0)	(I3,-9)	(I7, I3)
I.9.	(-4, I0)	(8, I)	(I2, 23)
I.I0.	(2, 5)	(I4,-4)	(I8, I8)
I.II.	(-I, 4)	(II,-5)	(I5, I7)
I.I2.	(-2, 7)	(I0,-2)	(8, I2)
I.I3.	(-6, 8)	(6,-I)	(4, I3)
I.I4.	(3, 6)	(I5,-3)	(I3, II)
I.I5.	(-I0, 5)	(2,-4)	(0, I0)

I.I6.	(-4, I2)	(8, 3)	(6, I7)
I.I7.	(-3, I0)	(9, I)	(7, I5)
I.I8.	(4, I)	(I6,-8)	(I4, 6)
I.I9.	(-7, 4)	(5,-5)	(3, 9)
I.20.	(0, 3)	(I2,-6)	(I0, 8)
I.2I.	(-5, 9)	(7, 0)	(5, I4)
I.22.	(I6,-6)	(20, I6)	(4, 3)
I.23.	(4,-I2)	(-8,-3)	(8, I0)
I.24.	(II, 20)	(-5, 7)	(7,-2)
I.25.	(0,-I0)	(4, I2)	(-I2,-I)
I.26.	(2, 0)	(-I0, 9)	(6, 22)
I.27.	(I2,-7)	(I6, I5)	(0, 2)
I.28.	(3,-3)	(7, I9)	(-9, 6)
I.29.	(I3,-9)	(I7, I3)	(I, 0)
I.30.	(8, I)	(I2, 23)	(-4, I0)

ЗАДАНИЕ 2

Используя теорию квадратичных форм, построить кривую второго порядка, заданную уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_3=0.$$

Замечание: коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} взять из пятого задания раздела "Линейная алгебра" в соответствии со своим вариантом. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 заданы.

№ варианта	a_1	a_2	a_3
2.I.	0	2	I
2.2.	-2	I	0
2.3.	3	5	I
2.4.	-2	I	0
2.5.	-2	3	4
2.6.	2	-3	2
2.7.	-I	3	2
2.8.	0	2	-3
2.9.	-2	I	4
2.I0.	3	-2	9
2.II.	4	-3	2

2.12.	6	-7	8
2.13.	3	4	-4
2.14.	-4	3	8
2.15.	2	-1	3
2.16.	3	4	-2
2.17.	-2	3	2
2.18.	6	4	-5
2.19.	-6	4	5
2.20.	7	8	-2
2.21.	4	-3	5
2.22.	-4	8	-2
2.23.	5	-3	2
2.24.	2	3	-4
2.25.	9	-2	3
2.26.	3	7	-3
2.27.	2	-12	8
2.28.	1	8	-6
2.29.	-12	-9	4
2.30.	5	-3	8

ЗАДАНИЕ 3

Построить кривые в полярных координатах

3.1. $r = 4\cos 3\varphi$.

3.2. $r = \sqrt{3}\cos\varphi$.

3.3. $r = 2\sqrt{3}\sin\varphi$.

3.4. $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$.

3.5. $r = 6\cos 3\varphi$.

3.6. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$.

3.7. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$.

3.8. $r = \cos\varphi + \sin\varphi$.

3.9. $r = 2\cos 6\varphi$.

3.10. $r = 3\sin\varphi$.

3.11. $r = 2\cos\varphi$.

3.12. $r = \cos 2\varphi$.

3.13. $r = 4\sin 3\varphi$.

3.14. $r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})$.

3.15. $r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$.

3.16. $r = \cos\varphi - \sin\varphi$.

3.17. $r = 2\sin\varphi$.

3.18. $r = \frac{3}{2}\cos\varphi$.

3.19. $r = \frac{1}{2} + \sin\varphi$.

3.20. $r^2 = \cos 2\varphi$.

3.21. $r = 1 + \cos\varphi$.

3.22. $r = \sin 2\varphi$.

3.23. $r^2 = 4\cos 2\varphi$.

3.24. $r = 2 + 2\cos\varphi$.

3.25. $r = \sin\varphi$.

3.26. $r = \cos\varphi$.

3.27. $r = 4|\sin 2\varphi|$.

3.28. $r = \cos 3\varphi$.

3.29. $r = \sin 3\varphi$.

3.30. $r = \frac{5}{2}\sin\varphi$.

ЗАДАНИЕ 4

Построить кривую, заданную уравнением:

4.1. $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$.

4.2. $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$.

4.3. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

4.4. $y = \sqrt{3x - x^2}$.

4.5. $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$.

4.6. $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.

4.7. $x = 4 - \sqrt{16 - y^2}$.

4.8. $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$.

4.9. $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2}$.

4.10. $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$.

4.11. $y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8}{9} - x^2 + \frac{2}{3}x}$.

4.12. $x = \frac{1}{3} + \sqrt{8 + 2y^2 + 4y}$.

4.13. $y = 16 + \sqrt{16 - x^2}$.

4.14. $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{4}$.

4.15. $x = -1 + \sqrt{\dfrac{1 - \frac{3}{2}(y-2)^2}{2}}$.

4.16. $x = 3 - \sqrt{9 - y^2}$.

4.17. $x = \sqrt{y^2 + 4y}$.

4.18. $y = \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$.

4.19. $x = \frac{3}{2} - \sqrt{y + \frac{5}{4}}$.

4.20. $x = 2 + \sqrt{y + 3}$.

4.21. $x = -2 + \sqrt{y + 3}$.

4.22. $y = \sqrt{8 + 2x^2 + 4x} - \frac{1}{3}$.

4.23. $x = 1 - \sqrt{3 + \frac{y^2}{3}}$.

4.24. $x = -1 - \sqrt{3 + \frac{y^2}{3}}$.

4.25. $y = 2 + \sqrt{4 - x^2}$.

4.26. $y = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2}$.

4.27. $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}$.

4.28. $x = 2 - \sqrt{-y^2 - 14y - 24}$.

4.29. $x = 2 + \sqrt{-y^2 - 14y - 24}$.

4.30. $y = -\sqrt{\dfrac{9 - (x-5)^2}{3}}$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ВАРИАНТ I

I) Через точку M(I; I;-I) провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x-y+z-1=0$ и плоскости $2x+y+z+1=0$.

2) Через точку M(-I; 2; I) провести прямую, параллельную прямой $\begin{cases} x+y-2z-1=0, \\ x+2y-z+1=0. \end{cases}$

3) Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} 2x+2y-z+20=0, \\ x-y-z+22=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+2}{4}.$$

4) Составить уравнение плоскости, проходящей через центр сферы $x^2+y^2+z^2-x+3y+z-13=0$, перпендикулярной прямой $x=2t-1$, $y=-3t+5$; $z=4t+7$.

5) Ось Oz - ось круглого конуса с вершиной в начале координат, точка $M_1(3;-4;\ 7)$ лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

ВАРИАНТ 2

I) Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$x-2y+z-1=0 \quad \text{и} \quad 2x-4y+2z-1=0.$$

2) Через точку M(I; I; 2) провести плоскость, параллельную прямым

$$l_1\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad l_2 \begin{cases} 2x-y+3=0, \\ x-z=0. \end{cases}$$

3) Найти точку Q, симметричную точке P(3;-4; 6) относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6;\ I;\ 5)$, $M_2(7;-2;-I)$ и $M_3(0;-7;\ I)$.

4) Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей $6x-3y-2z-35=0$ и $6x-3y-2z+63=0$, причём одной из них в точке $M_1(5;-I;-I)$.

5) Установить, какая линия является сечением плоскости $z+2=0$ и поверхности $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$. Дать геометрическую иллюстрацию.

ВАРИАНТ 3

1) Найти угол между плоскостями $2x+y-2z-4=0$ и $3x+6y-2z-12=0$.

2) Через точку C(2; 1; 3) провести прямую, параллельную плоскости $x+y+z=3$ и пересекающую прямую $\begin{cases} x=y, \\ y=2z. \end{cases}$

3) Найти расстояние от точки C(3;-4;-2) до плоскости, проходящей через прямые

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{13}=\dfrac{y-3}{1}, \\ \dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+3}{-4}. \end{cases}$$

4) Составить уравнение диаметра сферы $x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0$ перпендикулярного к плоскости $5x-y+2z-17=0$.

5) Построить поверхности

а) $x^2+y=25$, б) $x^2-2x+z^2=0$,

в) $x^2+z^2=-z$, г) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{5}=-1$.

ВАРИАНТ 4

1) Найти углы, образованные перпендикуляром к плоскости $x-2y+z-1=0$ с осями координат.

2) Через точку A(2; 2; 1) провести плоскость, перпендикулярную прямой $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

3) Найти проекцию точки P(2;-1; 3) на прямую $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z-2}{2}$.

4) Вычислить радиус сферы, которая касается плоскостей $3x+2y-6z-15=0$, $3x+2y-6z+55=0$.

5) Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси, сделать чертёж.

ВАРИАНТ 5

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2;-1)$ и $M_2(-3; 2; 1)$ и отсекающей на оси Oy отрезок в=3.

2) Через прямую $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ и точку M(2; 2; 2) провести плоскость.

3) Составить уравнение сферы с центром C(3;-5;-2), для которой плоскость $2x-y-3z+11=0$ является касательной.

4) Найти проекцию точки $P(5;\ 2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

5) Определить сечение поверхности $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$ плоскостью, проведённой через точку $M(0;\ 0;\ 1)$ параллельно плоскости xOy.

ВАРИАНТ 6

1) Найти расстояние между плоскостями $\begin{cases} 2x+y-3z+5=0, \\ 2x+y-3z+8=0. \end{cases}$

2) Найти точки пересечения прямой с координатными плоскостями, если прямая задана уравнениями $2x+y-z-3=0$, $x+y+z-1=0$.

3) Вычислить объём пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x-3y+8z-12=0$ и координатными плоскостями.

4) Найти центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2+2x+3y-5z=0$.

5) Найти точки пересечения поверхности и прямой

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}.$$

ВАРИАНТ 7

1) Написать уравнение плоскости, равноудалённой от двух заданных плоскостей P_1 и P_2: $4x-y-2z-3=0$ и $4x-y-2z-5=0$.

2) Написать урвнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекающей прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

3) Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}.$$

4) Составить уравнение сферы, центр которой лежит на прямой $2x+4y-z-7=0$, $4x+5y+z-14=0$ и которая касается плоскостей $x+2y-2z-2=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

5) Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\begin{cases} y=z^2, \\ x=0 \end{cases}$ вокруг оси Oy. Сделать чертёж.

ВАРИАНТ 8

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\ 1;\ 1)$ параллельно векторам $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, если $\overline{a_1}=\{0;\ 1;\ 2\}$, $\overline{a_2}=\{-1;\ 0;\ 1\}$.

2) Найти расстояние от точки $M(0;\ 1;\ 2)$ до прямой $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-1}{0}$ и проекцию точки M на прямую.

3) Убедиться, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

4) Составить уравнение сферы, если $M_1(2;\ 3;\ 5)$ и $M_2(4;\ 1;-3)$ – концы диаметра сферы.

5) Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и прямой $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

ВАРИАНТ 9

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;1;2)$, перпендикулярной прямой $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{0}$.

2) Вычислить расстояние между прямыми:
$\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{5}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

3) Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ перпендикулярно плоскости $x+y-z+1=0$.

4) Составить уравнение сферы, если известно, что точка $C(3;5;2)$ – центр сферы и плоскость $2x-y-3z+11=0$ касается сферы.

5) Убедиться в том, что поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ и плоскость $2x-2y-z-10=0$ имеют одну общую точку, найти её координаты, сделать чертёж.

ВАРИАНТ 10

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P(3;-8;-4)$, $Q(-3;\ 0;\ 0)$, $R(0;\ 0;\ 5)$.

2) Найти точку пересечения прямых
$$\begin{cases} x+y-z+4=0, \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$$ и $\frac{x+3}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

3) Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ на плоскость $x+4y-3z+7=0$.

4) Установить тип поверхности $9y^2-16z^2+64x-18y-199=0$ и сделать чертёж.

5) Исследовать методом сечений форму поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и сделать чертёж.

ВАРИАНТ II

I) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-15;1)$ и $M_2(3;\ 1;-2)$ перпендикулярно плоскости $3x-y-4z=0$.

2) Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую
$$\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ x+4y-z+1=0 \end{cases}$$
на плоскость $x-2y+z-5=0$.

3) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;0;-1)$ и пересекающей две прямые
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad x=5t,\ y=2-t,\ z=-1+2t.$$

4) Составить уравнение сферы радиуса $R=9$, проходящей через точки $M_1(1;-2;-1)$, $M_2(-5;10;-1)$ и $M_3(-8;-2;\ 2)$.

5) Какая поверхность определяется уравнением
$2x^2+y^2+z^2-4x+4y+4z+7=0$. Сделать чертёж.

ВАРИАНТ I2

I) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;2;-2)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $3x-2y-z+1=0$ и $x-y-z=0$.

2) Составить уравнение биссектрисы угла А треугольника с вершинами $A(2;\ 3;-1)$, $B(1;-2;\ 0)$ и $C(-3;\ 2;\ 2)$.

3) Найти проекцию точки $A(4;\ 3;\ 10)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

4) Сфера с центром $C(1;-2;\ 4)$ касается плоскости $2x-y+2z-5=0$. Составить уравнение сферы.

5) Построить поверхность, заданную уравнением $9y^2-16z^2+64z-18y-199=0$.

ВАРИАНТ I3

I) Найти высоту пирамиды SABC, опущенную из вершины S на грань, если $S(1;\ 4;-2)$, $A(0;-1;\ 1)$, $B(3;\ 5;-1)$, $C(1;-3;-1)$.

2) Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(-1;\ 0;-5)$ и $M_2(1;\ 2;\ 0)$, и плоскостью $x-3y+z+5=0$.

3) Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

4) Сфера проходит через точку $M(2;\ 2;\ 2)$ и имеет центр в точке $C(1;-1;-1)$. Составить её уравнение.

5) Методом сечения исследовать форму и затем построить поверхность $2y^2 + z^2 = 1 - x$.

ВАРИАНТ I4

I) Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;-1)$ и $M_2(-1;\ 1;-1)$ параллельно прямой, определяемой точками $A(5;-2;\ 3)$ и $B(6;\ 1;\ 0)$.

2) Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости xOz, проходящей через $O(0;\ 0;\ 0)$ и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}.$$

3) Найти уравнение плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} 2x-4y+z-1=0, \\ 5x+8y-3z+9=0 \end{cases}$$

на все координатные плоскости.

4) Построить поверхность $z^2+2z-4x+1=0$.

5) Методом сечений исследовать форму поверхности и построить её: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{2}=0$.

ВАРИАНТ I5

I) Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки $A(2;\ 0;\ 4)$ на плоскости $x-7y+2z=0$ и $5x+3y-z=0$.

2) Составить уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-1}{1}$ на все координатные плоскости.

3) Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-3}$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-5}$.

4) Найти центр и радиус сферы, заданной уравнением:

$$x^2+y^2+z^2-6x+8y-4z=0.$$

5) В каких точках прямая $\frac{x-4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$?
Сделать чертёж.

ВАРИАНТ I6

I) Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку $M(3;\ 2;\ 1)$.

2) Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из O(0; 0;0) на прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

3) Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x+2y+4z-8=0$ с координатными осями. Найти уравнение средних линий треугольника ABC.

4) Точки M(4;-I;-3) и N(0; 3;-I) - концы одного из диаметров сферы. Составить её уравнение.

5) Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $\begin{cases} x+2y=4, \\ z=0 \end{cases}$ вокруг осей Ox и Oy. Сделать чертёж.

ВАРИАНТ I7

I) Найти точку N, симметричную точке M(I; I; I) относительно данной плоскости $x+y-2z-6=0$.

2) Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(I;-2;3) и образующей с осями Ox и Oy углы 45^0 и 60^0.

3) Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{2}=y+3=\frac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

4) Составить уравнение сферы, проходящей через точки A(I;2;-4), B(I;-3; I), C(2; 2; 3), если её центр находится в плоскости xOy.

5) Построить поверхность: $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$.

ВАРИАНТ I8

I) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ и точки M(0; 3; 0) и N(I;-I; I).

2) Найти точку N, симметричную точке M(I; I; I) относительно данной прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

3) Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ и перпендикулярной плоскости $3x+y-z+2=0$.

4) Найти центр и радиус окружности: $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100, \\ 2x-2y-z+9=0. \end{cases}$

5) Построить поверхность $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$.

ВАРИАНТ I9

I) Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-y-12z-3=0$ и $3x+y-7z-2=0$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+5z-1=0$.

2) Через прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную вектору $\vec{s}\{-1;2;-3\}$.

3) Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(0;2;I) и образующей равные углы с векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{k}$

4) Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $\begin{cases}2y+z-2=0,\\ x=0\end{cases}$ вокруг оси Oz.

5) Составить уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в точке O(0; 0; 0), осью которого является ось Ox, если на его поверхности заданы точки $M_1(-1;-2;2)$ и $M_2(1;1;1)$.

ВАРИАНТ 20

I) Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки P(4;-2; I) и Q(2;-4;-3).

2) Через прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $2x-3y+5z-3=0$.

3) Составить уравнения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если A(I; 2; I), B(2; 3; 3), C(3; 3; 2).

4) Найти уравнение линий пересечения поверхности $z=x^2-y^2$ плоскостями $z=1$, $y=1$, $x=-1$. Сделать чертёж.

5) Составить уравнение эллипсоида, осями симметрии которого служат оси координат, если на его поверхности заданы три точки A(3; 0; 0), B(-2; $\frac{5}{3}$; 0), C(0;-I; $\frac{2}{\sqrt{3}}$).

ВАРИАНТ 2I

I) Составить уравнение плоскости, относительно которой точки $M_1(1;-4;2)$ и $M_2(7;1;5)$ симметричны.

2) Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}$ на плоскость $x-y-2z-5=0$.

3) Даны вершины параллелограмма АВСД: С(-2; 3;-5) и Д(0;4;-7) и точка пересечения диагоналей М(I;-2;-3). Найти уравнение сторон и диагоналей параллелограмма.

4) Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+z^2=100$, $2x+2y-z=18$.

5) Построить поверхность $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$.

ВАРИАНТ 22

I) Лежат ли точки $M_1(2;\ 1;\ 1)$ и $M_2(2;\ 1;\ 3)$ по одну сторону от плоскости $x+2y-z-2=0$?

2) Определить λ, так чтобы прямые $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ и $x+1=y-1=z$ пересекались.

3) Найти уравнение общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x+4z+1=0, \\ x-4y+9=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=0, \\ x+2z+4=0. \end{cases}$$

4) Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения её оси $x=7+3t$, $y=1+4t$, $z=3+2t$ и координаты одной из её точек $M_0(2;-1;\ 0)$.

5) Исследовать методом сечений поверхность $x^2+y^2-z^2=-1$. Сделать чертёж.

ВАРИАНТ 23

I) Через точку М(0; I; 2) провести плоскость перпендикулярно к плоскости $x+2y-z=0$ и к плоскости xOy.

2) Найти проекцию точки М(2; 3; I) на прямую $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$.

3) Составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые

$$x-1=\frac{y+1}{-1}=(z-1)\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=z-1.$$

4) Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2=10y$, $x=0$ вокруг оси Oz. Сделать чертёж.

5) Определить сечение поверхности $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$ плоскостью, проведённой через точку А(0; 0; I) параллельно плоскости Oxy. Сделать чертёж.

ВАРИАНТ 24

I) Найти геометрическое место точек, таких, что объём тетраэдра с вершинами $M(x, y, z)$, $A(1; 2; 1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(2; 1; -1)$ равен 10.

2) Найти проекцию точки $M(2; 1; 1)$ на плоскость $x+y+3z+5=0$.

3) Составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые

$$\begin{cases} x=2t-1, \\ y=3t+2, \\ z=2t-3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=2t+3, \\ y=3t-1, \\ z=2t+1. \end{cases}$$

4) В плоскости Oyz дана окружность с центром в точке $A(0;4;0)$ радиуса $r=1$. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной окружности вокруг оси Oz.

5) Установить, какая линия является сечением плоскости $x-2=0$ и поверхности $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}$. Дать геометрическую иллюстрацию.

ВАРИАНТ 25

I) Составить уравнение плоскости, равноудалённой от плоскостей $x+y-2z-1=0$ и $x+y-2z+3=0$.

2) Через прямую $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ провести плоскость, параллельную прямой $x=2y=3z$.

3) Найти уравнения и длину перпендикуляра, опущенного из точки $A(0;-1;1)$ на прямую $y+1=0$, $x+2z-7=0$.

4) Определить координаты центра и радиус сферы $36x^2+36y^2+36z^2-36x+24y-72z-95=0$.

5) Исследовать методом сечений поверхность $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}$. Сделать чертёж.

ВАРИАНТ 26

I) Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=2t-1, \\ z=2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=-t+2, \\ y=-2t-1, \\ z=-2t. \end{cases}$$

2) Найти уравнения проекции прямой $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1 \end{cases}$ на плоскость $x+2y-z=0$.

3) Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через перпендикуляр, опущенный из точки $A(1;-1;0)$ на прямую $x=z+3$, $y=-2z-3$.

4) Составить уравнение окружности, образующейся в сечении сферы $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$ координатной плоскостью $z=0$. Дать геометрическую иллюстрацию.

5) Построить поверхность.

$$4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0.$$

ВАРИАНТ 27

I) Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

2) Составить уравнения проекций прямой $\begin{cases} x+2y+3z-28=0, \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

3) Через точку A(I; 2; I) провести плоскость, параллельную прямым $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

4) Найти центр и радиус сферы $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=0$.

5) Определить сечение поверхности $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$ с плоскостью, проведённой через точку N(I; 0; 0) параллельно плоскости yOz. Дать геометрическую иллюстрацию.

ВАРИАНТ 28

I) Найти расстояние между плоскостями

$$x-y+z-15=0 \quad \text{и} \quad 2x-2y+2z-10=0.$$

2) Найти проекцию прямой $\begin{cases} x-y-z=0, \\ x-3y+z=0 \end{cases}$ на плоскость $x+2y+3z-2=0$ и определить угол, составляемой этой проекцией с плоскостью xOy.

3) Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тот двугранный угол между плоскостями $x+2y-z-1=0$ и $x+2y+z+1=0$, в котором лежит точка A(I;-I; I).

4) Составить уравнение сферы, если M_1(2; 0; 5) и M_2(8; I; 9)- концы диаметра сферы.

5) Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ и прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$.

ВАРИАНТ 29

I) На оси Oz найти точку, равноудалённую от плоскостей $12x+9y-20z-19=0$ и $16x-12y+15z-9=0$.

2)Составить уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} x-y+2z+3=0, \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$$ на плоскости координат.

3) Через точку A(2; I; I) провести прямую, параллельную плоскостям $2x-y+1=0$, $y-1=0$.

4) Составить уравнение сферы, если известно, что $O_1(2;\ 3;-2)$ – центр сферы и прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=z$ касается сферы.

5) Исследовать методом сечений форму поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=2z$ и сделать чертёж.

ВАРИАНТ 30

I) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(0;\ 0;\ 5)$, $M_2(0;-2;\ 0)$, $M_3(-5;\ 0;\ 0)$.

2) Найти расстояние от точки A(3;-I; 2) до прямой
$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0, \\ x+y-z+1=0. \end{cases}$$

3) Найти уравнение плоскости, проектирующих прямую на плоскость $x+4y-3z+7=0$.

4) Установить тип поверхности $3y^2+3z^2+12y+18z-25=0$ и сделать чертёж.

5) Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $\begin{cases} x+3z=2, \\ y=0 \end{cases}$ вокруг оси Ox и Oz. Сделать чертёж.

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

ЗАДАНИЕ I

Доказать, используя определение предела последовательности,

I.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{6n-1}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2+1}=0$.

I.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+1}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{5\cdot 2^n-1}=\dfrac{1}{5}$.

I.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n}{1+4n}=-\dfrac{3}{4}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{1/n}}{2^{1/n}+1}=\dfrac{1}{2}$.

I.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot(\frac{1}{5})^n-1}{3\cdot(\frac{1}{5})^n+1}=-1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}-2}{1-\sqrt{n}}=-4$.

I.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{2n-1}=3$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}=0$.

I.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{4n^2-3}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}+1}{\sqrt{n}}=0$.

I.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}=2$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{3})^n+6}{(\frac{1}{3})^n+3}=2$.

I.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+3}=2$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n^2+1}=0$.

I.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n+1}{2\lg n-1}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=-2$.

I.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n}{3-4n}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{2})^n+2}{(\frac{1}{2})^n+1}=2$.

I.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{1-4n}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{2})^n+1}{(\frac{1}{2})^n+4}=\dfrac{1}{4}$.

I.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{1-3n}=-2$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}=0$

I.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-1}{2\sqrt[3]{n}+1}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-1}{1+2\cdot 3^n}=\dfrac{1}{2}$.

I.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{2-n}=-4$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{2})^n+5}{3(\frac{1}{2})^n+1}=5$.

I.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=-4$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3\cdot 2^n+1}=\dfrac{1}{3}$.

I.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+3}=3$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}=0$.

I.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+1}{2\sqrt{n+1}-1} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+6} = \frac{1}{2}$.

I.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-3}{2n^2+1} = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}+1}{\sqrt{n}} = 0$.

I.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{9n+1} = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^3-1} = 0$.

I.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-n} = -2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+3}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} = 3$.

I.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-4n}{3-2n} = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} = \frac{1}{2}$.

I.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-8n}{2n+1} = -4$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{5\cdot 3^n-1} = \frac{1}{2}$.

I.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{1+2n^2} = 0$.

I.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+4}{2n+1} = \frac{7}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+3} = 0$.

I.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-5} = \frac{2}{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n+5} = \frac{1}{5}$.

I.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{5\cdot 3^n-1} = \frac{1}{5}$.

I.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-2n}{6-n} = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{1/n}+1}{3^{1/n}+3} = \frac{1}{2}$.

I.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5n}{n+1} = -5$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$.

I.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2-1} = 3$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2-1} = 0$.

I.30 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{23-4n}{2-n} = 4$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6^n+1}{2\cdot 6^n+5} = \frac{1}{2}$.

ЗАДАНИЕ 2

Доказать; дать геометрическую иллюстрацию.

2.1. $\lim\limits_{x\to 6} \left(1-\frac{x}{3}\right) = -1$; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{3-2x^2} = -\infty$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{2-x} = -1$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3x}{2x} = -\frac{3}{2}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to -3} \left(4-\frac{x}{3}\right) = 5$; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{4-x^2} = -\infty$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}=3$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x-1}=+\infty$.

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}(3x-1)=-4$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x}=\frac{1}{2}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-5)=-1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{1-x^2}=-\infty$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+1}=3$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+x^2}=+\infty$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{2x}{3}-5)=-3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3^x-1}=-1$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{1-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{1-3x^2}=-\infty$.

2.10. $\lim\limits_{x\to 6}(4-\frac{x}{3})=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\lg x)=-\infty$.

2.11. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[4]{14-2x}=2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^3}=2$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{x}{2}-4)=-3$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{5-\frac{x^2}{2}}=-\infty$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 3}(5-\frac{2x}{3})=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\lg(1-x)}=0$.

2.14. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{1-2x}=-1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{3-2x^4}=-\infty$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)=-5$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{1-2x^2}=-\infty$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 3}(5-\frac{2x}{3})=3$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^x+3}=0$.

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-2x^4}=-\infty$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 4}(3-\frac{x}{2})=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-1}{2x}=2$.

2.19 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{9-x}=2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-2x}=0$.

2.20. $\lim\limits_{x\to 2}(1-5x)=-9$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=0$.

2.21. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{1-3x}=2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2$.

2.22. $\lim\limits_{x\to -3}(4-\frac{x}{3})=5$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-4x}{2x}=-2$.

2.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-\frac{1}{x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{1-x^2}=-\infty$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{4}=-\frac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}=0$.

2.25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{x+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3-2x}=1$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x}{4}-2\right)=-1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x}{x}=-3$.

2.27. $\lim\limits_{x\to 6}\left(3-\frac{x}{3}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-5x}}=0$.

2.28. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[4]{14-2x}=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\lg x\right)=-\infty$.

2.29. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4-x^2}=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x-1}=0$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x}{2}-4\right)=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2^x-1}=-1$.

ЗАДАНИЕ 3

3.1.

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$.

2) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x^3+x^2+x+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2+4x-4}{2x^2+3x-2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^3-2x^2-x+2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x-7}{4x^2-6x+2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-3x+1}$.

8) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^3+8}$.

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{2x^2+5x-18}$.

10) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}$.

11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^3-6x^2+11x-6}$.

12) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+4x-21}$.

13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

14) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2-16}{x^2-3x+2}$.

15) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-3x+1}$.

16) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+5x+4}$.

17) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2+x-14}$.

18) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+x^2+4x+4}$.

19) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2+5x+3}{3x^2+x-2}$.

20) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^3-3x^2-2x+6}$.

21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{6x^2+x-7}$.

22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

23) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-5x+2}$.

24) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^3-2x^2-4x+8}$.

25) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-2x-3}$.

26) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+4x-12}$.

27) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{4x^2-6x+2}$.

28) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+3x-5}$.

29) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}$.

30) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+6}{x^2-2x-3}$.

3.2.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+2x-6}-\sqrt{x^2-2x+6}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{x^2+4}}{3-\sqrt{2x+3}}$.

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+6}-2\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{2x-3}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+3}-2}$.

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+6}}$.

12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{2x+7}}$.

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt{x}-1}$.

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$.

15) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

16) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x-x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-4}+1}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3}}$.

21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}$.

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{\sqrt{5-x}-2}$.

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+2x}}{x}$.

24) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2}{\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x+3}}$.

25) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{x-5}+\sqrt[3]{x+3}}$.

26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{6-x}}$.

27) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{x^2}-1}$.

28) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-5x+6}$.

29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+3}-2}$.

30) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}-2}$.

3.3.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin x}{\sin 6x+\sin 2x}$.

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$.

3) $\lim\limits_{x\to \alpha}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2\alpha}\sin\dfrac{x-\alpha}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg} 2x}$.

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos 3x-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos 2x}$.

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\operatorname{tg}^3 x-1}$.

10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 2x}{x}$.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{1-\sqrt{\cos x}}$.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 4x}$.

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{\operatorname{tg}(\alpha+x)-\operatorname{tg}(\alpha-x)}$.

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

17) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

18) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

19) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$.

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\sin 4x-\sin x}$.

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

23) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$.

24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$.

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin 2x+\sin x}$.

26) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)$.

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg} 2x}$.

28) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}$.

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 2x}{\sin^2 4x}$.

30) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

3.4.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-x-1}-\sqrt{2x^2+5x+5}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-4x+2}\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+x-2}-\sqrt{3x^2-3x+2}\right)$.

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$.

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\sqrt{x^4+3x-1}-\sqrt{x^4-2x+1}\right]\right\}$.

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{2x^2+4x+5}-\sqrt{2x^2-4x+3}\right]$.

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)\right)$.

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)$.

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\}$.

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-x+1}\right)$.

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2-1}\right)$.

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\right)$.

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]\right\}$.

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^4+2x-1}-\sqrt{x^4-3x+1}\right)\right)$.

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$.

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x(x+a)}-x\right]$.

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

25) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}$.

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

29) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2+6x+2}-\sqrt{3x^2-6x-4}\right]$.

3.5.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+2}\right)^{x/2}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x-1}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot x}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+3)-\ln x}{x}\cdot(x^2-1)$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right)^x$.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2}$.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$.

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{2x}$.

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{2x-1}$.

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x^2}$.

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x$.

14) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$.

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+x+2}\right)^{2x^2}$.

16) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{x}{2}-1}$.

18) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$.

19) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{2a+x}{a+x}$.

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$.

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^x$.

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-1}$.

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x+3}$.

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{x-1}$.

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x-1}$.

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-3}{2x^2-x+2}\right)^{3x}$.

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2}$.

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{2x-1}$.

29) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+3}{3x^2-7}\right)^{6x}$.

3.6.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)]^{\operatorname{ctg} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$.

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 6x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

13) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.

15) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{x}}$.

16) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n}$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

18) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

19) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{1/\operatorname{ctg} x}$.

20) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

22) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/x-a}$.

23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{1/x}$.

24) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 7x}$.

25) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 6x}$.

26) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos 3x)^{\operatorname{ctg} x}$.

27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

28) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

29) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

30) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{(\cos x-\sin x)}$

ЗАДАНИЕ 4

Найти точки разрыва функции и определить их характер

4.1.

1) $y=\begin{cases}-2x, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x<2,\\ x-1, & x\ge 2.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x+2, & x<-2,\\ 4-x^2, & -2\le x\le 1,\\ 3-2x, & x>1.\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}-3-x, & x<-2,\\ x^2-5, & -2\le x<3,\\ 7-2x, & x\ge 3.\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}-3x, & x\le 1,\\ x^2-4, & 1<x<3,\\ 2x-5, & x\ge 3.\end{cases}$

5) $y=\begin{cases}2x+1, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x\le 2,\\ 6-x, & x>2.\end{cases}$

6) $y=\begin{cases}2-x, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ x-\pi, & x\ge \pi.\end{cases}$

7) $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 2, & x\ge \frac{\pi}{2}.\end{cases}$

8) $y=\begin{cases}2x, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le \pi,\\ -3, & x>\pi.\end{cases}$

9) $y=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x<\pi,\\ -1, & x\ge \pi.\end{cases}$

10) $y=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2}, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

11) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 3,\\ 2x+1, & x>3.\end{cases}$

12) $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ 2x, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}$

I3) $y=\begin{cases} x+3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3x+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$

I4) $y=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ 2, & x>1. \end{cases}$

I5) $y=\begin{cases} x-1, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

I6) $y=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$

I7) $y=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x<2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

I8) $y=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ x, & x\ge\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

I9) $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$

20) $y=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x<0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$

21) $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le\frac{\pi}{4}, \\ 2, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

22) $y=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ 1-x, & 0<x\le 2, \\ x^2, & x>2. \end{cases}$

23) $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le\frac{\pi}{4}, \\ 2, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

24) $y=\begin{cases} \cos x, & x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x\ge\pi. \end{cases}$

25) $y=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ 2, & x>1. \end{cases}$

26) $y=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x<2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

27) $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x<3, \\ 10x-20, & x\ge 3. \end{cases}$

28) $y=\begin{cases} -x, & x\le 2, \\ x^2-6, & 2<x<3, \\ 5, & x\ge 3. \end{cases}$

29) $y=\begin{cases} 2x, & x<-1, \\ 6, & -1\le x<0, \\ 5-x^2, & x\ge 0. \end{cases}$

30)

4.2.

I) $y=\frac{x^2}{x-2}$.

2) $y=\frac{x}{x^2-9}$.

3) $y=\frac{1}{x^2-4}$.

4) $y=\frac{x}{x^2-5x+6}$.

5) $y=\frac{x+3}{x^2-2x+1}$.

6) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

7) $y=\frac{x-1}{x^3+1}$.

8) $y=3^{\frac{x-2}{x^2-4}}$.

9) $y=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.

I0) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

II) $y=e^{\frac{1}{x+1}}$.

I2) $y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

I3) $y=\frac{x}{\sin x}$.

I4) $y=\frac{1+x^3}{1+x}$.

15) $y = \frac{x-1}{x^3-1}$.

16) $y = \frac{x+1}{x^2}$.

17) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

18) $y = 2^{\frac{x+5}{x^2-25}}$.

19) $y = 9^{\frac{x-3}{x^2-9}}$.

20) $y = \frac{x+3}{x^3+27}$.

21) $y = \frac{\sin x}{x}$.

22) $y = \frac{1}{x^2-7x+12}$.

23) $y = \frac{1}{x^2-10x+25}$.

24) $y = \frac{1}{x^3+1}$.

25) $y = \frac{x}{x^3-27}$.

26) $y = \frac{x}{x^3-2x^2+x}$.

27) $y = 6^{\frac{1}{x-3}}$.

28) $y = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.

29) $y = \frac{1}{x^2+3x-4}$.

30) $y = 8^{\frac{1}{x+5}}$.

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

ЗАДАНИЕ I

Вычислить производные первого порядка от заданных функций:

I.1. а) $y = 4\cdot\sqrt[3]{x^2+5}\,\ln^3 5x - \dfrac{3\cos^3 2x}{\log_3\sqrt{x}}$;

б) $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x-1)^2(x+3)^3}{(x-2)^7}}$.

I.2. а) $y = 5^{x^2+3}\cdot\log_2\sqrt[3]{x} + \dfrac{4\arcsin^2 5x}{\sqrt[5]{3x^2+4x+1}}$;

б) $y = (x^2+4)^{\ln\sqrt{\sin x}}$.

I.3. а) $y = 4\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{arctg}^2 7x - \dfrac{5\ln^5\sqrt{x}}{\sqrt{\arcsin 5x}}$;

б) $y = \sqrt[7]{\dfrac{(x+3)^2(x-4)^5}{(x+1)^3}}$.

I.4. а) $y = 3^{x^3-x^2}\cdot\arccos^7 5x + \dfrac{7\,\mathrm{arctg}\sqrt[5]{x}}{\log_2\arcsin 5x}$;

б) $y = (x^5-4x)^{\mathrm{tg}^2\sin x}$.

I.5. а) $y = 5\sqrt{x^3+3x^2}\,\ln^3 5x - \dfrac{3\sqrt[3]{\ln^2\cos x}}{\mathrm{arctg}\sqrt{x+1}}$;

б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-4)^2(x+5)^7}{(x+3)^9}}$.

I.6. а) $y = 3^{\sqrt{x}}\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x} + \dfrac{5\cos^3 7x}{\sqrt{\arcsin^3 5x}}$;

б) $y = (3x^2+4x+1)^{\sqrt{\ln\sqrt{x}}}$.

I.7. а) $y = 5\sqrt[3]{2x^2+7x}\,\sin^7\sqrt[3]{x} - \dfrac{5\log_3^2 5x}{\cos\mathrm{arctg}\,3x}$;

б) $y = \sqrt[7]{\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{(x+5)^4}}$.

I.8. а) $y = 3\sqrt{\arccos 5x}\,\ln^5 3x + \dfrac{5\sqrt{\mathrm{tg}\,7x}}{\arcsin^3 4x}$;

б) $y = (5x^2+1)^{\mathrm{arctg}\,5x}$.

I.9. а) $y = 5^{\operatorname{arcctg} 5x} \log_3^5 7x - \dfrac{3\sin^5\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 7x}}$;

б) $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x+1)^3 \operatorname{tg} x}{(x-3)^2}}$.

I.10. а) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} 7x} \cos^3 5x - \dfrac{2\arcsin 5^x}{\operatorname{tg}^2 \ln\sqrt{x}}$;

б) $y = \left(\sqrt{x^2+7x-2}\right)^{\operatorname{tg} 3x}$.

I.11. а) $y = 4\sqrt[3]{\log_2 5x} \sin\sqrt{x} + \dfrac{3\operatorname{arctg}^2 3x}{\operatorname{ctg} \sin\sqrt{x+1}}$;

б) $y = \sqrt[9]{\dfrac{\sin^2 x \ln^3 x}{(x+4)^5}}$.

I.12. а) $y = 5\sqrt{\operatorname{tg}^3 4x} \log_3 \sin x - \dfrac{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}{3^{\cos 5x}}$;

б) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt[3]{x^2-5x+2}}$.

I.13. а) $y = 3^{\sqrt{\arcsin 5x}} \cdot \cos^3 7x + \dfrac{5^{\operatorname{tg} 7x}}{\sqrt{\cos^3 5x}}$;

б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{\cos^2 x \cdot (x+1)^2}{(x-3)^5}}$.

I.14. а) $y = 4\sqrt{\cos^3 6x} \log_7 \operatorname{tg} x - \dfrac{\sqrt[5]{\sin(x^2+3)}}{\operatorname{tg} 7^x}$;

б) $y = (\sin x)^{\sqrt{\operatorname{tg} 7x}}$.

I.15. а) $y = 3\sqrt[3]{\sin^2 3x} \operatorname{arctg} \ln x + \dfrac{5^{\sin 4x}}{\sqrt[3]{x^2+3x-4}}$;

б) $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x+2)^3 \operatorname{tg}^2 x}{\ln^3 x}}$.

I.16. а) $y = 3^{\arcsin^2\sqrt{x}} \cdot \cos \ln 5x - \dfrac{3\sqrt[3]{\log_2 7x}}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

б) $y = (x^2+5)^{\sin\sqrt{x+3}}$.

I.17. а) $y = 5\sqrt{x^2-3x+4^x} \sin \operatorname{tg} 3x + \dfrac{6\sqrt{\ln^3 5x}}{\arccos 7x}$;

б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{\cos^5 x}}$.

I.18. а) $y = 3\sin 5^{x^2+4x} \cdot \operatorname{tg}\cos 7x - \dfrac{4\arccos^2 3x}{\sqrt{\log_5 5x}}$;

б) $y = (\arcsin 3x)^{\sqrt{x^2+5}}$.

I.19. а) $y=\sqrt[3]{x^2-\sin x}\cdot\cos\ln\sqrt{x}+\dfrac{5^{\operatorname{arctg}4x}}{\ln^3\cos 5x}$;

б) $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x-2)^3\ln^2 x}{(x+5)^4}}$.

I.20. а) $y=3^{\cos 5x}\sqrt{\log_3\sin x}-\dfrac{\sqrt[5]{x^2+4x-7}}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x+2}}$;

б) $y=(\sqrt{x}-\operatorname{tg}x)^{\sin 3x}$.

I.21. а) $y=5^{\sin 3x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\ln x}+\dfrac{5\sqrt{\sin^3\cos x}}{7^{\operatorname{tg}4x}}$;

б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(\cos^5 x)(x-2)^3}{\ln^2 x}}$.

I.22. а) $y=\sqrt[5]{x^2-\sin x}\,\operatorname{tg}\ln\sqrt[3]{x}-\dfrac{\operatorname{arctg}5^{\sin x}}{\cos^2 9x}$;

б) $y=(\cos x+x)^{(x-3)^3}$.

I.23. а) $y=5\sin^2\log_3 x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}+\dfrac{\cos\operatorname{tg}3^x}{\arcsin\sqrt{x}}$;

б) $y=\sqrt[7]{\dfrac{(x+5)^3(x-2)^5}{\cos^2 x}}$.

I.24. а) $y=5\sqrt{x^3-\operatorname{tg}^2 x}\,\cos\ln x-\dfrac{3^{\arccos 5x}}{\sin^2\operatorname{arctg}x}$;

б) $y=(x^3-5x)^{\sin^2 x}$.

I.25. а) $y=(3x^2-4x+5^x)\operatorname{tg}^3 7x+\dfrac{\sqrt[3]{\sin^2\ln\sqrt{x}}}{\arccos 4^{\sin x}}$;

б) $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x-2)^2(x+7)^3}{\operatorname{tg}^5 x}}$.

I.26. а) $y=\operatorname{ctg}3^x\cdot\sqrt[3]{x^2-4x+\ln\sqrt{x}}-\dfrac{5^{\operatorname{arctg}7x}}{\log_3^2\arcsin 5x}$;

б) $y=(\arccos 4x)^{x^2-5x}$.

I.27. а) $y=5^{\arcsin 4x}\sqrt{\log_3 7\sin x}+\dfrac{\sqrt{\cos^3\operatorname{tg}x}}{\ln^2(x^2-3x)}$;

б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^3\operatorname{ctg}^2 x}{(x+5)^5}}$.

I.28. а) $y=\sin 5^x\cdot\sqrt[7]{3x^2+5x-\cos x}-\dfrac{\sqrt[7]{\ln^2\operatorname{arctg}\sqrt{x}}}{\cos^3\operatorname{tg}8x}$;

б) $y=(x^5-4x^3)^{\cos\sqrt{x^2+1}}$.

I.29. а) $y = \arccos^2 \ln 7x \cdot 5^{\sqrt{x^2-7x}} + \dfrac{\sqrt[5]{x^2-\sin^3\sqrt{x}}}{\operatorname{ctg} \ln\sqrt{x+1}}$;

б) $y = \sqrt[4]{\dfrac{(x+3)^5(x-1)^3}{(x^2-4x)^2}}$.

I.30. а) $y = \operatorname{arcctg}^4 \cos 3x \cdot 4^{\sin 4x} - \dfrac{4\sqrt{\operatorname{tg}^3 5\sqrt{x}}}{\ln^5 \cos^2 7x}$;

б) $y = \left(\sqrt[5]{x^2+3\sin x}\right)^{x^2-4}$.

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить производные первого и второго порядка от функций, заданных неявно и параметрически.

2.1. а) $x^2+y^2=\sin y$;
б) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

2.2. а) $xy+y^2=\cos y$;
б) $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

2.3. а) $\operatorname{tg} y - y^3 = x^2$;
б) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\operatorname{tg} t. \end{cases}$

2.4. а) $xy^2-\ln y = x$;
б) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=t\cos t. \end{cases}$

2.5. а) $3^y - x^3 = y^2$;
б) $\begin{cases} x=t\cdot e^t, \\ y=t^2\sin t. \end{cases}$

2.6. а) $xy-y^3=\operatorname{arcctg} y$;
б) $\begin{cases} x=\dfrac{\sin t}{t}, \\ y=t\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

2.7. а) $x^2+5^y=\sin y$;
б) $\begin{cases} x=t^2 3^t, \\ y=\sqrt{t^2+3}. \end{cases}$

2.8. а) $x^3+x\sin y=y^2$;
б) $x=\sqrt[3]{t^2-2}$, $y=\sqrt[3]{\cos^2 t}$.

2.9. а) $\operatorname{ctg} y - y^3 = xy^2$;
б) $\begin{cases} x=\dfrac{3^t}{\sqrt{t}}, \\ y=t\cos t. \end{cases}$

2.10. а) $x\cos y - y^2 = 3^y$;
б) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=t^2\ln t. \end{cases}$

2.11. а) $\arccos y = y^2 - x$;
б) $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{t}}{\sin t}, \\ y=\sqrt{\cos t}. \end{cases}$

2.12. а) $x\sin y + xy = y^2$;
б) $\begin{cases} x=t\cdot\operatorname{tg} t, \\ y=\dfrac{\operatorname{ctg} t}{t}. \end{cases}$

2.13. а) $y\sin x + y^3 = x^2$;
б) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t\cos t. \end{cases}$

2.14. а) $y\sin^2 x + y^2 = \sin y$;
б) $\begin{cases} x=\dfrac{\sin t}{t}, \\ y=\dfrac{\cos t}{t}. \end{cases}$

2.15. а) $y^2=\sin y - x$;
б) $x=\sqrt[3]{t^2-1}$, $y=\sqrt[3]{3t^2}$.

2.16. а) $\operatorname{tg} y + y^2 = xy$;
б) $\begin{cases} x=t\cdot 2^t, \\ y=\dfrac{2^t}{\ln t}. \end{cases}$

2.17. а) $\arccos y = x^2 - y$;
б) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t\ln t. \end{cases}$

2.18. а) $y+\operatorname{arcctg} y = x^3$;
б) $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=\dfrac{\cos t}{t}. \end{cases}$

2.19. а) $xy^2+y=3^y$;

б) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t^2+4}, \\ y=2^t. \end{cases}$

2.20. а) $y^2-2^y=x\sin y$;

б) $\begin{cases} x=3^t, \\ y=\sqrt{t^3+5}. \end{cases}$

2.21. а) $\cos y+x^3=y$;

б) $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t, \\ y=t\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

2.22. а) $y^3-\sin y=x\cdot 2^y$;

б) $\begin{cases} x=t\operatorname{tg} t, \\ y=\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

2.23. а) $\ln y+xy=x$;

б) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{\ln t}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

2.24. а) $\operatorname{ctg} y=2^y-x^2y$;

б) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

2.25. а) $\cos y+x\cdot 3^y=y$;

б) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=t\arcsin t. \end{cases}$

2.26. а) $\operatorname{tg} y=\ln y-x^3$;

б) $\begin{cases} x=t\cdot\operatorname{arcctg} t, \\ y=\operatorname{arcctg} t. \end{cases}$

2.27. а) $7^y=x\sin y$;

б) $\begin{cases} x=t\cdot 3^t, \\ y=\sqrt[3]{t^2+3}. \end{cases}$

2.28. а) $x\operatorname{tg} y=xy^2-y$;

б) $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\sqrt{\ln t}. \end{cases}$

2.29. а) $y+5^y=x\operatorname{tg} y$;

б) $\begin{cases} x=t^2-\sin t, \\ y=t\cos t. \end{cases}$

2.30. а) $y^2=x\sin y$;

б) $\begin{cases} x=\sqrt{\operatorname{tg} t}, \\ y=\sqrt{\operatorname{ctg} t}. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 3

Применяя формулу Лейбница, найти производные пятого порядка от заданных функций.

3.1. $y=(5x^2+3x+4)\sin 3x$.

3.2. $y=(4x^2+3x+1)\cos 7x$.

3.3. $y=(2x^2+5x+3)5^{2x}$.

3.4. $y=(7x^2+2x+3)\ln 5x$.

3.5. $y=(3x^2+7x+2)\sin 7x$.

3.6. $y=(6x^2-7x+3)\cos 5x$.

3.7. $y=(6x^2-7x+8)3^{5x}$.

3.8. $y=(3x^2-5x-4)\ln 2x$.

3.9. $y=(4x^2+2x-1)\sin 9x$.

3.10. $y=(7x^2-2x-5)\cos 2x$.

3.11. $y=(5x^2-x+3)7^{3x}$.

3.12. $y=(2x^2-3x+3)\ln 6x$.

3.13. $y=(4x^2+x-5)\sin 11x$.

3.14. $y=(3x^2-x+4)\cos 5x$.

3.15. $y=(2x-x^2+5)5^{7x}$.

3.16. $y=(5-7x^2+2x)\ln 11x$.

3.17. $y=(3-x^2+5x)\sin 8x$.

3.18. $y=(3x-6x^2+9)\cos 3x$.

3.19. $y=(2x^2+5x-4)11^{6x}$.

3.20. $y=(4x^2-7x-5)\ln 9x$.

3.21. $y=(x^2-4x+3)\sin 3x$.

3.22. $y=(5x^2-x-1)\cos 9x$.

3.23. $y=(3x^2-5x+4)9^{5x}$.

3.24. $y=(x^2+5x-4)\ln 7x$.

3.25. $y=(9x^2-3x+2)\sin 7x$.
3.26. $y=(11x^2-2x-3)\cos 5x$.
3.27. $y=(2x-x^2+7)\,5^{2x}$.
3.28. $y=(8x^2-x-5)\ln 5x$.
3.29. $y=(3x^2-11x+3)\sin 9x$.
3.30. $y=(5x^2-3x-4)\cos 3x$.

ЗАДАНИЕ 4

Найти дифференциалы первого и второго порядка данных функций y аргумента x, полагая: а) x – независимой переменной; б) x – зависимой переменной аргумента t.

4.1. а) $y=3\sin(5x+4)$, $x=\ln(t+1)$,
б) $y^2-xy=3$

4.2. а) $y=5\cos(3x+2)$, $x=\sin 2t$,
б) $y+x^2=3y^2$.

4.3. а) $y=5\operatorname{tg}(2x+5)$, $x=3^t$,
б) $x^2y-y=2$.

4.4. а) $y=3\operatorname{ctg}(2x-1)$,
б) $x^3-y^2=\sin x$,
$x=\sin 3t$.

4.5. а) $y=3^{2x-5}$,
б) $x^3y+y^2=3$,
$x=\log_2 t$.

4.6. а) $y=\arcsin 5x$,
б) $xy+y^2=2$,
$x=\ln 2t$.

4.7. а) $y=\arccos 7x$,
б) $x\sin y=y$,
$x=\sin 3t$.

4.8. а) $y=\operatorname{arctg} 2x$,
б) $x=y+\cos y$,
$x=\cos 5t$.

4.9. а) $y=\operatorname{arcctg} 3x$,
б) $x^2y=3-y^2$,
$x=2^t$.

4.10. а) $y=2\sin(5x-3)$,
б) $xy=y^2+7$,
$x=\ln(t+2)$.

4.11. а) $y=3\cos(7x-1)$,
б) $3y=x^2+\cos y$,
$x=\log_3 t$.

4.12. а) $y=5\operatorname{tg}(2x+7)$,
б) $2xy^2=7-y$,
$x=\sin 2t$.

4.13. а) $y=9\operatorname{ctg}(2x-5)$,
б) $2x^2y=\cos y$.
$x=\cos 3t$.

4.14. а) $y=7^{2x+5}$,
б) $4y=3xy+\cos x$,
$x=3^t$.

4.15. а) $y=\arcsin 8x$,
б) $2xy=y^2+5$,
$x=\ln t$.

4.16. а) $y=\arccos 3x$,
б) $xy^2=3y+8$,
$x=\operatorname{tg} t$.

4.17. а) $y=\operatorname{arctg} 7x$,
б) $x\operatorname{tg} y=y^2$.
$x=\operatorname{ctg} t$.

4.18. а) $y=\operatorname{arcctg} 5x$,
б) $2y^2=3xy+4$,
$x=\ln t$.

4.19. а) $y=3\sin 2x$,
б) $\sin y=y^2+5$,
$x=\cos t$.

4.20. а) $y=5\cos 3x$,
б) $3xy=\cos y+x$,
$x=3^t$.

4.21. а) $y = 3\operatorname{tg} 2x$,
б) $2y^2 - x = \cos y$,
$x = \ln 5t$.

4.22. а) $y = 7\operatorname{ctg} 3x$,
б) $\operatorname{tg} y = y^2 - 7$,
$x = \sin 5t$.

4.23. а) $y = 9\arcsin 2x$,
б) $yx^2 = 7 - y$,
$x = \operatorname{tg} 2t$.

4.24. а) $y = 5\arccos 5x$,
б) $x^2 - 3xy = y$,
$x = \cos 2t$.

4.25. а) $y = 11 \operatorname{arcctg} 7x$,
б) $3y - 7x\sin y = 1$,
$x = 2^t$.

4.26. а) $y = 2\operatorname{arcctg}$ [illegible],
б) xy [illegible] $\sin y =$ [illegible],
$x = \ln$ [illegible].

4.27. а) $y = 9\sin 2x$,
б) xy^2 [illegible] $y =$ [illegible],
$x = \log_2 t$.

4.28. а) $y =$ [illegible],
б) [illegible] $y + \cos y = x$,
$x = 5^t$.

4.29. а) $y = 3^{2x-6}$,
б) $2x^2y - 7 = 3y$,
$x = \operatorname{tg} t$.

4.30. а) $y = \ln(2x+5)$,
б) $3\cos y + y^2 = x$,
$x = \operatorname{ctg} t$.

ЗАДАНИЕ 5

Найти наилучшее линейное приближение данной функции в окрестности точки x_0.

5.1. $y = e^{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

5.2. $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

5.3. $y = \cos\sqrt{x}$, $x_0 = 0$.

5.4. $y = \operatorname{tg}^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.5. $y = \ln\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

5.6. $y = 2^{3x}$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

5.7. $y = \arcsin 2x$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

5.8. $y = \arccos 3x$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

5.9. $y = \operatorname{arcctg}^2 x$, $x_0 = 0$.

5.10. $y = \sin\sqrt{x}$, $x_0 = \frac{\pi^2}{4}$.

5.11. $y = e^{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.12. $y = \cos^2 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{5}$.

5.13. $y = \cos\sqrt[3]{2x}$, $x_0 = 0$.

5.14. $y = 3^{5x}$, $x_0 = \frac{1}{5}$.

5.15. $y = \arcsin^2 x$, $x_0 = 1$.

5.16. $y = \operatorname{ctg}^2(x+1)$, $x_0 = 0$.

5.17. $y = \ln\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

5.18. $y = \sqrt{x^2 - 3x}$, $x_0 = 3$.

5.19. $y = 2^{\cos x}$, $x_0 = 0$.

5.20. $y = \sin^5 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5.21. $y = 3\cos\sqrt[5]{x}$, $x_0 = \frac{\pi^5}{32}$.

5.22. $y = \operatorname{arcctg}^3\sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

5.23. $y = e^{\sin x^2}$, $x_0 = 0$.

5.24. $y = \operatorname{arcctg}^3 x$, $x_0 = 1$.

5.25. $y = \sqrt{\cos 5x}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5.26. $y = \sqrt[3]{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.27. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.28. $y = \arccos e^x$, $x_0 = 0$.

5.29. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$.

5.30. $y = \sqrt{\arcsin 2x}$, $x_0 = 0$.

ЗАДАНИЕ 6.

Используя правило Лопиталя-Бернулли, вычислить пределы

6.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\sin x}{\ln(x+1)}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\frac{3}{x}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\mathrm{ctg}\, x}{\ln\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{ctg}\, x)^{\sin x}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}+\sin 5x}{2x-\mathrm{tg}\, 2x}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\cdot \mathrm{tg}\frac{2}{x}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)^{\sin(x-2)}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{tg}\, x}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+\mathrm{tg}\, 5x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\, x$.

6.13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\pi-2\,\mathrm{arcctg}\, x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 5x}}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{e^x-\cos x}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3}\right)^{\mathrm{tg}(x-3)}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to 2} \left(2-\frac{x}{2}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to \infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 4} (16-x^2)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{ctg}\, x-\frac{1}{x}\right)$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

6.23. $\lim\limits_{x\to \infty} x^5 e^{-x}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+e^{x^2}-1}{\sin^3 3x}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\, x)^{2x-\pi}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\cdot 3^{\frac{1}{x^2}}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(2^x-1)}}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-2^x}{x^2\sqrt[5]{1-x^2}}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sqrt{x}-\sin^2 x}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{x^2}$.