Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Нижегородский государственный технический университет

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Часть II

Нижний Новгород 1997

Составители: Л.Н.Ерофеева, А.В.Владыкин, В.А.Волохин, Е.К.Китаева Т.И.Пересыпкина, Е.Ф.Ромашевская, Ю.А.Самохин, В.П.Тареев, В.П.Федотов, Е.Б.Шинкарева

УДК 517.2

Расчетные задания по курсу высшей математики/НГТУ; Сост.: Л.Н. Ерофеева, А.В.Владыкин и др. Н.Новгород, 1996, 46 с.

Научный редактор Ю.А.Самохин

Редактор И.И.Морозова

Подп. к печ. 21.01.97. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 3,0. Уч.-изд.л. 2,8. Тираж 1000 экз. Заказ 22.

Нижегородский государственный технический университет. Типография НГТУ. Н.Новгород, ул. Минина, 24.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ЗАДАНИЕ I

Восстановить вид функции $y=f(x)$ по её дифференциалу df.

I.1. $df=6(x^3+\pi)x^2dx$

I.2. $df=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$

I.3. $df=-xe^{-x^2}dx$

I.4. $df=6\sin 3x\cos 3x dx$

I.5. $df=\frac{6tg3xdx}{\cos^2 3x}$

I.6. $df=7^{x^2}2x\ln 7dx$

I.7. $df=\frac{4xdx}{1+4x^4}$

I.8. $df=-\frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}}$

I.9. $df=\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

I.10. $df=2^{\sin x}\cos x\ln 2dx$

I.11. $df=-\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

I.12. $df=\frac{2\cos 2xdx}{\sin 2x}$

I.13. $df=\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}$

I.14. $df=\frac{\cos xdx}{\sin x\ln 3}$

I.15. $df=-\frac{e^xdx}{\sin^2(e^x)}$

I.16. $df=-\frac{\sin xdx}{\cos x\cdot\ln 2}$

I.17. $df=6(x^2+e)^2xdx$

I.18. $df=8(x^4+3)x^3dx$

I.19. $df=-3e^{-3x^3}x^2dx$

I.20 $df=-6\cos^2 2x\sin 2xdx$

I.21. $df=-\frac{4ctg2x}{\sin^2 2x}dx$

I.22. $df=3\cdot 10^{x^3}x^2\ln 10dx$

I.23. $df=-\frac{6xdx}{1+9x^4}$

I.24. $df=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

I.25. $df=-\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

I.26. $df=\frac{3^{tgx}\ln 3}{\cos^2 x}dx$

I.27. $df=-\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

I.28. $df=-\frac{3\sin 3xdx}{\cos 3x}$

I.29. $df=-\frac{\cos xdx}{\cos^2(\sin x)}$

I.30. $df=-\frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}$

ЗАДАНИЕ 2.

Вычислить интеграл.

2.1. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

2.2. $\int\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{x}}dx$

2.3. $\int\frac{e^xdx}{2+e^x}$

2.4. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$

2.5. $\int\frac{x^3dx}{1+x^4}$

2.6. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

2.7. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

2.8. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$

2.9. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$

2.10. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$

2.11. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

2.12. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

2.13. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx$

2.14. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$

2.15. $\int \frac{3-\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

2.16. $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$

2.17. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$

2.18. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$

2.19. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx$

2.20. $\int \sqrt[3]{1+3\sin x}\,\cos x\,dx$

2.21. $\int x\sqrt{x-5}\,dx$

2.22. $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$

2.23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$

2.24. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$

2.25. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

2.26. $\int \left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$

2.27. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

2.28. $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2}$

2.29. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

2.30. $\int x\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx$

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить интеграл.

3.1. $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

3.2. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

3.3. $\int \frac{5^x\cdot 7^x}{25^x-49^x}\,dx$

3.4. $\int x^2(6x^3-7)^8\,dx$

3.5. $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\,dx$

3.6. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3.7. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

3.8. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-5}}\,dx$

3.9. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

3.10. $\int (4-3\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x\,dx$

3.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$

3.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

3.13. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx$

3.14. $\int \frac{1-5\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

3.15. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+8\sin x}}dx$

3.16. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^6}}dx$

3.17. $\int \frac{7x-9}{3x^2+10}dx$

3.18. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$

3.19. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

3.20. $\int \frac{5x^4}{\sqrt{x^{10}-1}}dx$

3.21. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3.22. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

3.23. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$

3.24. $\int \frac{\sqrt{1+5\ln x}}{x}dx$

3.25. $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4dx$

3.26. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

3.27. $\int \frac{dx}{x(5+\ln^2 x)}$

3.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$

3.29. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

3.30. $\int \frac{\sqrt{x^8+x^{-8}+2}}{x^3}dx$

ЗАДАНИЕ 4

Вычислить интеграл.

4.1. $\int \arcsin x\,dx$

4.2. $\int x^3\ln x\,dx$

4.3. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$

4.4. $\int (3x^2+6x+5)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

4.5. $\int x\sin x\,dx$

4.6. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$

4.7. $\int x^2e^{-2x}dx$

4.8. $\int \ln x\,dx$

4.9. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

4.10. $\int x^n\ln x\,dx$

4.11. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

4.12. $\int x\,\mathrm{tg}^2x\,dx$

4.13. $\int \ln(x^2+1)dx$

4.14. $\int x^2\cos^2 x\,dx$

4.15. $\int \arccos x\,dx$

4.16. $\int \sin\ln x\,dx$

4.17. $\int \cos\ln x\,dx$

4.18. $\int x\cos^2 x\,dx$

4.19. $\int \sin x\ln(\mathrm{tg}\,x)dx$

4.20. $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$

4.21. $\int (x^2+2)e^{-\frac{x}{2}}dx$

4.22. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$

4.23. $\int (3-7x^2)\cos 2x\,dx$

4.24. $\int (1-8x^2)\cos 4x\,dx$

4.25. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$

4.26. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$

4.27. $\int (3x-4)e^{3x}dx$

4.28. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

4.29. $\int \frac{\lg x\,dx}{x^3}$

4.30. $\int x\cdot 3^x dx$

ЗАДАНИЕ 5

Вычислить интеграл от рациональной дроби

$$\frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Дx^2 + Ex + F}{(x-a)\,(x-в)\,(x-c)}.$$

№ Варианта	A	B	C	Д	E		a	в	c
5.I.	5	-I	-6	0	-I3	6	3	-2	0
5.2.	0	2	2	-42	0	20	4	-5	0
5.3.	0	3	3	-5	0	2	I	-2	0
5.4.	0	4	0	2	-I	-3	I	-I	0
5.5.	0	2	0	-5	-8	-8	2	-2	0
5.6.	0	0	2	0	-40	-8	-4	2	0
5.7.	0	0	2	-I	-7	-I2	3	-I	0
5.8.	0	2	2	-3	2	-9	I	-3	0
5.9.	0	0	3	-I	-I2	-2	-I	-3	0
5.I0.	I	2	-2	5	-7	9	-3	I	0
5.II.	0	0	I	-5	5	23	I	-I	5
5.I2.	-I	0	25	0	0	I	-5	0	I
5.I3.	-I	0	9	0	0	4	0	-3	I
5.I4.	3	0	-I2	0	0	-7	0	-2	I
5.I5.	0	0	2	0	0	-I	-3	2	0
5.I6.	0	0	I	-3	0	-I2	4	2	0
5.I7.	2	0	-8	0	0	3	2	0	2
5.I8.	I	0	3	0	0	-I	0	-I	2
5.I9.	0	0	3	0	0	-2	0	I	-I
5.20.	I	0	-I	0	0	I	I	0	3
5.2I.	0	0	4	I	0	2	0	I	2
5.22.	0	0	I	-3	0	-I2	4	3	2
5.23.	0	0	I	-3	0	-I2	4	3	0
5.24.	0	0	I	0	0	0	I	-I	-2
5.25.	0	0	3	2	0	I	2	-2	I
5.26.	0	0	I	2	0	3	I	2	3
5.28.	0	2	2	-I	0	I5	0	I	-5
5.29.	0	0	I	0	0	0	I	-I	-2
5.30.	0	0	3	0	0	25	-2	-I	0

ЗАДАНИЕ 6

Вычислить интеграл от рациональной дроби $\dfrac{Cx^3+Дx^2+Ex+F}{(x-a)^m\,(X-в)^n}$.

№ Варианта	C	Д	E	F	a	в	m	n
6.I.	I	6	I3	9	-I	-2	I	3
6.2.	I	-6	I3	-6	-2	2	I	3
6.3.	I	-6	II	-I0	-2	2	I	3
6.4.	2	6	7	I	I	-I	I	3
6.5.	2	6	7	2	0	-I	I	3
6.6.	I	-6	I3	-7	-I	2	I	3
6.7.	I	-6	I0	-I0	-I	2	I	3
6.8.	3	9	I0	2	I	-I	I	3
6.9.	2	6	7	4	-2	-I	I	3
6.I0.	2.	6	7	0	-2	-I	I	3
6.II.	I	6	4	24	2	-2	I	3
6.I2.	I	6	I8	-4	2	-2	I	3
6.I3.	I	-6	I4	-4	-2	2	I	3
6.I4.	2	-6	I3	6	2	I	I	3
6.I5.	I	6	-I0	52	0	-2	I	3
6.I6.	I	6	I3	6	2	-2	I	3
6.I7.	I	6	I3	8	0	-2	I	3
6.I8.	0	6	0	8	I	2	I	3
6.I9.	I	6	II	7	-I	-2	I	3
6.20.	I	6	I0	I0	I	- 2	I	3
6.2I.	I	-6	I3	-8	-I	2	I	3
6.22.	I	-6	I4	-6	-I	2	I	3
6.23.	I	0	-I	2	0	-2	3	I
6.24.	2	0	I	I	-I	0	I	3
6.25.	2	6	5	0	-2	-I	I	3
6.26.	2	6	5	4	2	-I	I	3
6.27.	I	6	I4	4	2	-2	I	3
6.28.	I	6	I0	I2	2	-2	I	3
6.29.	I.	6	I5	2	2	-2	I	3
6.30.	2	-6	7	0	-2	I	I	3

ЗАДАНИЕ 7

Вычислить интеграл от рациональной дроби $\dfrac{Cx^3 + Дx^2 + Ex + F}{(ax^2 + вx + c)^m (fx^2 + gx + h)^n}$.

№Варианта	C	Д	E	F	a	в	c	f	g	h	m	n
7.I.	0	0	0	I	0	I	I	I	0	I	2	I
7.2.	I	0	0	3	I	0	2	I	0	I	I	I
7.3.	0	0	0	I	I	I	I	I	0	4	I	I
7.4.	0	0	I	I	I	I	2	I	4	5	I	I
7.5.	4	II	I2	8	I	2	3	I	0	I	I	I
7.6.	0	0	I	I	I	I	-I	I	0	3	I	I
7.7.	0	0	I	0	I	0	I	I	-3	5	I	I
7.8.	0	0	I	-I	I	0	4	I	I	5	I	I
7.9.	0	2	-3	3	I	I	2	I	0	3	I	I
7.I0.	3	0	-3	-2	I	2	5	I	0	5	I	I
7.II.	0	I	0	0	I	0	2	I	3	5	I	I
7.I2.	0	0	I	0	I	0	3	I	I	3	I	I
7.I3.	0	0	I	0	I	0	2	I	2	5	I	I
7.I4.	0	0	0	I	0	I	I	I	0	I	2	I
7.I5.	I	0	0	-6	I	0	2	I	0	4	I	I
7.I6.	0	3	I	3	0	I	-I	I	0	I	2	I
7.I7.	0	0	0	I	I	0	4	I	0	I	I	I
7.I8.	0	3	5	I2	I	0	3	I	0	I	I	I
7.I9.	I	0	0	5	0	I	-2	I	0	4	2	I
7.20.	0	I	-2	I	I	-I	I	I	I	0	I	I
7.2I.	3	0	I	46	0	I	-I	I	0	9	2	I
7.22.	3	4	6	0	I	0	2	I	2	2	I	I
7.23.	I	0	0	3	0	I	I	I	0	I	2	I
7.24.	0	0	5	-I4	0	I	-I	I	0	4	2	I
7.25.	0	0	3	0	I	0	I	I	2	3	I	I
7.26.	I	2	I0	0	0	I	I	I	-I	I	2	I
7.27.	I	0	I	I	I	I	I	I	0	I	I	I
7.28.	2	II	I6	I0	I	2	3	0	I	I	I	2
7.29.	I	0	I	I	I	-I	I	I	0	I	I	I
7.30.	2	4	2	-I	I	2	2	0	I	I	I	2

ЗАДАНИЕ 8

8.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$ 8.2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$ 8.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b^2}}$

8.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 8.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ 8.6. $\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}\,dx$

8.7. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$ 8.8. $\int x^{-1}(1+\sqrt[3]{x})^{-3}\,dx$ 8.9. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

8.10. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$ 8.11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ 8.12. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

8.13. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$ 8.14. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 8.15. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

8.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ 8.17. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$ 8.18. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

8.19. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$ 8.20. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$ 8.21. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

8.22. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$ 8.23. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$ 8.24. $\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2\,dx$

8.25. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ 8.26. $\int \sqrt[3]{x}\,(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\,dx$ 8.27. $\int x^5(1+x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx$

8.28. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$ 8.29. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ 8.30. $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$

ЗАДАНИЕ 9

9.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$ 9.2 $\int \frac{\cos x\,dx}{2+\cos x}$ 9.3. $\int \frac{dx}{\sin^2(1+\cos x)}$

9.4. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^3}$ 9.5. $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx$ 9.6. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$

9.7. $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$ 9.8. $\int \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$ 9.9. $\int \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}$

9.10. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{1+\cos x+\sin x}$ 9.11. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}$ 9.12. $\int \frac{(1+\cos x)\,dx}{1+\cos x+\sin x}$

9.13. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$ 9.14. $\int \frac{1+\sin x}{(1-\sin)^2}\,dx$ 9.15. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x+\cos x}$

9.16. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$ 9.17. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x-\sin x}$ 9.18. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x}$

9.19. $\int\frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$ 9.20. $\int\frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos x\,(1+\cos x)}$ 9.21. $\int\frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$

9.22. $\int\frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$ 9.23. $\int\frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$ 9.24. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$

9.25. $\int\frac{\sin^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$ 9.26. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$ 9.27. $\int\frac{dx}{\sin x\,(1+\sin x)}$

9.28. $\int\frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$ 9.29. $\int\frac{\sin x\,dx}{2+\sin x}$ 9.30. $\int\frac{dx}{\cos x\,(1+\cos x)}$

ЗАДАНИЕ 10

10.1. $\int\sqrt{256-x^2}\,dx$ 10.2. $\int\frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$ 10.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

10.4. $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ 10.5. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ 10.6. $\int\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

10.7. $\int\frac{(25+x^2)\,dx}{\sqrt{25+x^2}}$ 10.8. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$ 10.9. $\int\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

10.10. $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$ 10.11. $\int\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ 10.12. $\int\frac{x^4\,dx}{(2-x^2)^{3/2}}$

10.13. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ 10.14. $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$ 10.15. $\int\frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$

10.16. $\int\frac{x^4\,dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$ 10.17. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 10.18. $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

10.19. $\int\sqrt{10-x^2}\,dx$ 10.20. $\int\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$ 10.21. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

10.22. $\int\frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$ 10.23. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$ 10.24. $\int\frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\,dx$

10.25. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$ 10.26. $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$ 10.27. $\int\frac{x^4\,dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

10.28. $\int\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$ 10.29. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$ 10.30. $\int x^2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

ЗАДАНИЕ 11

11.1. $\int\sin^3 x\cos^4 x\,dx$ 11.2. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$ 11.3. $\int\frac{\sin 5x}{1+\cos^2 5x}\,dx$

11.4. $\int\sin 7x\cos 3x\,dx$ 11.5. $\int\frac{\cos^3 4x}{\sin^2 4x}\,dx$ 11.6. $\int\cos^8 x\,dx$

II.7. $\int \sin^4 3x \cos^4 3x\, dx$

II.8. $\int \frac{\sin^2 2x}{\cos^6 2x}\, dx$

II.9. $\int \sin^8 \frac{x}{4}\, dx$

II.10. $\int \sin^6 x \cos^2 x\, dx$

II.11. $\int \frac{\cos^2 x}{\cos^6 x}\, dx$

II.12. $\int \sin^8 x\, dx$

II.13. $\int \sin^2 x \cos^6 x\, dx$

II.14. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$

II.15. $\int \sin^3 x\, dx$

II.16. $\int \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4}\, dx$

II.17. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

II.18. $\int \cos^3 x\, dx$

II.19. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

II.20. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

II.21. $\int \sin^4 x\, dx$

II.22. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

II.23. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

II.24. $\int \cos^4 x\, dx$

II.25. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$

II.26. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\, dx$

II.27. $\int \sin^5 x\, dx$

II.28. $\int x \sin^2 x^2\, dx$

II.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$

II.30. $\int \cos^5 x\, dx$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ЗАДАНИЕ I

Вычислить интеграл.

ВАРИАНТ I

I.I. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{\sin x}\cdot \sin 2x\,dx$

I.2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

I.3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$

I.4. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

ВАРИАНТ 2

2.I. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{x}\ln(1+2e^{2x})\,dx$

2.2. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \arcsin^2 x\,dx$

2.3. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$

2.4. $\displaystyle\int_{5/2}^{5} \frac{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3}{x^4}\,dx$

ВАРИАНТ 3

3.I. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{\cos x}\sin 2x\,dx$

3.2. $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \ln\sqrt{x}\,dx$

3.3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^3+x^2+2x+2)^2}$

3.4. $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

ВАРИАНТ 4

4.I. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} e^{x}\ln(2+3e^{3x})\,dx$

4.2. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \arcsin\sqrt{x}\,dx$

4.3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

4.4. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^8)^{2/5}}$

ВАРИАНТ 5

5.I. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

5.2. $\displaystyle\int_{1/2}^{3/4} \arccos\sqrt{x}\,dx$

5.3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(3x-7)\,dx}{(x^3+4x^2+4x+16)^2}$

5.4. $\displaystyle\int_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{(x^2-5)^5}}$

ВАРИАНТ 6

6.I. $\int\limits_0^1 \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}dx$

6.2. $\int\limits_0^1 \mathrm{arcctg}\sqrt{x}\,dx$

6.3. $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}\,1/2}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$

6.4. $\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3}$

ВАРИАНТ 7

7.I. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

7.2. $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}\,1/3} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$

7.3. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$

7.4. $\int\limits_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx$

ВАРИАНТ 8

8.I. $\int\limits_1^{64} \frac{(6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})\,dx}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}$

8.2. $\int\limits_0^1 \arcsin^2 x\,dx$

8.3. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

8.4. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

ВАРИАНТ 9.

9.I. $\int\limits_0^6 e^{\sqrt{\frac{6-x}{6+x}}}\frac{dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}$

9.2. $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 \arccos^2 x\,dx$

9.3. $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}\,1/2} \frac{(1+\sin x)\,dx}{(1+\sin x)^2}$

9.4. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

ВАРИАНТ IO

IO.I. $\int\limits_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)\,dx$

IO.2. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$

IO.3. $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

IO.4. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} (\mathrm{arctg}\,x)^2\,dx$

ВАРИАНТ II

II.I. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} (\mathrm{arcctg}\,x)^2\,dx$

II.2. $\int\limits_0^2 \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$

II.3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+\sqrt{4-x^2}}$

II.4. $\int\limits_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{x\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

ВАРИАНТ I2

12.1. $\int\limits_0^3 e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}} \cdot \frac{dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$

12.2. $\int\limits_1^e \ln^3 x\,dx$

12.3. $\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$

12.4. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$

ВАРИАНТ I3

13.1. $\int\limits_1^8 x^{-2/3}\ln^2 x\,dx$

13.2. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$

13.3. $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

13.4. $\int\limits_0^1 (\mathrm{arcctg}\,x)^2 dx$

ВАРИАНТ I4

14.1. $\int\limits_0^1 (2x+1)^3\ln^2(2x+1)\,dx$

14.2. $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}\,1/2} \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)^2}$

14.3. $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$

14.4. $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^4 dx$

ВАРИАНТ I5

15.1. $\int\limits_0^{e^2-1} (x+1)^{-1/2}\cdot\ln^2(x+1)\,dx$

15.2. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+1/6\sin^2 x}$

15.3. $\int\limits_1^{16} \mathrm{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$

15.4. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+x^3)^2}$

ВАРИАНТ I6

16.1. $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}\,dx}{(x+3)^2\cdot\sqrt{x}}$

16.2. $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$

16.3. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$

16.4. $\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

ВАРИАНТ I7

17.1. $\int\limits_2^1 x\arcsin\frac{1}{x}\,dx$

17.2. $\int\limits_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

17.3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$

17.4. $\int\limits_0^{\pi/4} e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$

ВАРИАНТ I8

I8.I $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx$

I8.2. $\int_0^{7} \frac{\sqrt{x+25}\, dx}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}$

I8.3. $\int_0^{1} \frac{(1+x)\, dx}{(x^2+2x+2)^2}$

I8.4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$

ВАРИАНТ I9

I9.I. $\int_{-3}^{0} (x+4) \ln^2(x+4)\, dx$

I9.2. $\int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\, dx$

I9.3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x\, dx}{(1+\cos x)^2}$

I9.4. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$

ВАРИАНТ 20

20.I. $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}\, dx$

20.2. $\int_2^{28} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\, dx}{3+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

20.3. $\int_0^{\pi/2} 3^{2x} \cos x\, dx$

20.4. $\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

ВАРИАНТ 2I

2I.I. $\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x\, dx$

2I.2. $\int_0^3 \frac{dx}{x+\sqrt{9-x^2}}$

2I.3. $\int_0^{\pi/2} 2^{2x} \sin x\, dx$

2I.4. $\int_1^2 \frac{(3x^4+4)\, dx}{x^2(x^2+1)^3}$

ВАРИАНТ 22

22.I. $\int_0^1 \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\, dx$

22.2. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

22.3. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

22.4. $\int_0^1 \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\, dx$

ВАРИАНТ 23

23.I. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

23.2. $\int_0^1 x \ln(1+x^3)\, dx$

23.3. $\int_0^1 \frac{(3+x^2)x^3\, dx}{(1+x^2)^3}$

23.4. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}$

ВАРИАНТ 24

24.1. $\int_0^1 \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$

24.2. $\int_8^{27} \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}} \cdot \frac{dx}{x}$

24.3. $\int_2^3 \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

24.4. $\int_0^{\ln^3 2} e^{\sqrt[3]{x}} dx$

ВАРИАНТ 25

25.1. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{2e^{3x}+3e^{-3x}}$

25.2. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$

25.3. $\int_0^1 x e^{\sqrt[3]{x}} dx$

25.4. $\int_1^e \frac{dx}{1+x^4}$

ВАРИАНТ 26

26.1. $\int_2^3 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$

26.2. $\int_0^1 \frac{(x+2)\, dx}{(x^2+2x+2)^3}$

26.3. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x\, dx$

26.4. $\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \sin\sqrt{x}\, dx$

ВАРИАНТ 27

27.1. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

27.2. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin^4 x}$

27.3. $\int_0^1 e^x \cdot \sin^2 x\, dx$

27.4. $\int_2^3 \frac{x^9\, dx}{(x^4-1)^2}$

ВАРИАНТ 28

28.1. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

28.2. $\int_2^3 \frac{x^2\, dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

28.3. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx$

28.4. $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

ВАРИАНТ 29

29.1. $\int_1^2 \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

29.2. $\int_0^1 \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$

29.3. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$

29.4. $\int_0^{0,5} \frac{x^7\, dx}{(1-x^2)^5}$

ВАРИАНТ 30

30.1. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$ 30.2. $\int_{-1}^0 \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$

30.3. $\int_1^4 \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{x}$ 30.4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{tg^2 x+\sin^2 x}$

ЗАДАНИЕ 2

Установить сходимость (или расходимость) несобственных интегралов.

2.1. $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}\,dx$ 2.2. $\int_1^\infty (1-\cos\frac{4}{x})\,dx$ 2.3. $\int_1^\infty \frac{3+x^3}{x^4}\,dx$

2.4. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-x}\,dx$ 2.5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x^2}{x^2}\,dx$ 2.6. $\int_1^\infty \frac{dx}{3x+\sqrt{x^2+1}+5}$

2.7. $\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^7+2}}$ 2.8. $\int_0^\infty \frac{2x\,arctg\,x/2}{\sqrt{3+x^3}}\,dx$ 2.9. $\int_1^\infty \frac{dx}{1+2x^2+3x^3}$

2.10. $\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 2.11. $\int_0^\infty \frac{2+\sin x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ 2.12. $\int_2^\infty \frac{\arcsin\frac{2}{x}}{x}\,dx$

2.13. $\int_{e^2}^\infty \frac{3dx}{x\ln\ln x}$ 2.14. $\int_{100}^\infty \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$ 2.15. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}+\cos x}$

2.16. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\ln x}$ 2.17. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}$ 2.18. $\int_1^\infty \frac{\cos\frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}}\,dx$

2.19. $\int_1^\infty \frac{5x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{4x^3+2\sqrt[3]{x^5+1}+3}$ 2.20. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{3}+\sin x}$ 2.21. $\int_0^\infty x\sin x\,dx$

2.22. $\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$ 2.23. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$ 2.24. $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}$

2.25. $\int_1^\infty \frac{arctg\,x}{5+\sqrt{x^5}}\,dx$ 2.26. $\int_1^\infty \frac{\sin\sqrt[3]{x^2}}{5+x}$ 2.27. $\int_5^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$

2.28. $\int_1^\infty \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ 2.29. $\int_2^\infty \frac{arctg(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}\,dx$ 2.30. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

ЗАДАНИЕ 3

Установить сходимость (или расходимость) несобственных интегралов.

3.1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{tg\,x - x}$ 3.2. $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ 3.3. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}dx$

3.4. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{(4-x)^2}$ 3.5. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln(x-1)}$ 3.6. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}$

3.7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\,(e^{\sqrt{x}}-1)}$ 3.8. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x\cdot(e^{\sqrt{x}}-1)}$ 3.9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\cos x(e^{\sqrt{x}}-1)}$

3.10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$ 3.11. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sin x}-1}dx$ 3.12. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$

3.13. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 3.14. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln^2 x}$ 3.15. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$

3.16. $\int\limits_0^1 x^2\ln^2\frac{1}{x}dx$ 3.17. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cdot\sqrt{\cos x}}$ 3.18. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

3.19. $\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^2}}dx$ 3.20. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ 3.21. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x(1-x^2)}}$

3.22. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 3.23. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln tg\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 3.24. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}$

3.25. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x\sqrt{1-x^4}}$ 3.26. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x^2}$ 3.27. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{\cos x}}$

3.28. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}\cdot\sqrt{\cos x}}$ 3.29. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x^3}}-1}$ 3.30. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$

ЗАДАНИЕ 4

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

4.1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ 4.2. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 4.3. $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctg\,x}{x^2}dx$

4.4. $\int\limits_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 4.5. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ 4.6. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$

4.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ 4.8. $\int\limits_0^{\infty} x^3e^{-x^2}dx$ 4.9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

4.10. $\int\limits_0^{\infty} x\cos x\,dx$ 4.11. $\int\limits_0^{\infty} e^{-7x}\cos 3x\,dx$ 4.12. $\int\limits_0^{\infty} e^{5x}\cos 4x\,dx$

4.13. $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}\sin x\,dx$ 4.14. $\int\limits_0^{\infty} e^{2x}\sin 5x\,dx$ 4.15. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

4.16. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ 4.17 $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$ 4.18. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,arctg\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$

4.19. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ 4.20. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$ 4.21. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^3}$

4.22. $\int\limits_0^\infty e^{-3x}dx$ 4.23. $\int\limits_0^\infty e^{2x+1}dx$ 4.24. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

4.25. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ 4.26. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^3}$ 4.27. $\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx$

4.28. $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}dx$ 4.29. $\int\limits_0^\infty x^3e^{-x^2}dx$ 4.30. $\int\limits_0^\infty x^5e^{-x^2}dx$

ЗАДАНИЕ 5

Вычислить несобственные интегралы(или установить их расходимость).

5.1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ 5.2. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$ 5.3. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

5.4. $\int\limits_3^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$ 5.5. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ 5.6. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

5.7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 5.8. $\int\limits_0^1 x\ln^2x\,dx$ 5.9. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$

5.10. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$ 5.11. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ 5.12. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

5.13. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ 5.14. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$ 5.15. $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2x}$

5.16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+3\sqrt{1-x^2}}$ 5.17. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$ 5.18. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$

5.19. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5.20. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5.21. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$

5.22. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$ 5.23. $\int\limits_0^1 (\ln x)^2dx$ 5.24. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5.25. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5.26. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$ 5.27. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^3}{\sqrt{x}}dx$

5.28. $\int\limits_0^1 \ln^3x\,dx$ 5.29. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ 5.30. $\int\limits_5^{10} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-5)(10-x)}}$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

ЗАДАНИЕ I

Построить плоскую область Д. Найти ее площадь.

1.1. $\begin{cases} y \geq x^2-1, \\ y \leq x+1, \\ y \leq -3x+3. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} y \leq 0, \\ y \geq \log_2 x, \\ 15 \geq 8x-19. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y \leq 2x-x^2+3, \\ y \leq x^2-4x+3, \\ y \geq 0. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x = 4-y^2, \\ x = y^2-2y. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} y \geq x^2-1, \\ y \leq x+1, \\ y \geq -3x+3. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} y \leq 2x-x^2+3, \\ y \leq x^2-4x+3, \\ 5y \geq 11x-27. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} y \leq \log_2 x, \\ 15y \geq 8x-19, \\ y \geq 0. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} y \geq x^2-1, \\ y \leq -3x+3, \\ y \geq x^2-1. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} y \geq 2x-x^2+3, \\ y \geq x^2-4x+3, \\ y \leq -2x+6. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} y \leq \log_2 x, \\ y \leq 0, \\ 15y \geq 8x-19. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x = 2 \ (x \geq 2). \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \\ y = 2 \ (y \geq 2). \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x = 4(t-\sin t), \\ y = 4(1-\cos t), \end{cases}$ $y = 4$ $(0 < x < 8\pi, y \geq 4)$.

1.14. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2 \ (x \geq 2)$.

1.15. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3 \ (y \geq 3)$.

1.16. $\begin{cases} x = 2(t-\sin t), \\ y = 2(1-\cos t), \\ y = 3 \end{cases}$ $(0 < x < 4\pi, y \geq 3)$.

1.17. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3})$.

1.18. $x = 6\cos t,$ $y = 2\sin t,$ $y = \sqrt{3} \ (y \geq \sqrt{3})$.

1.19. $\begin{cases} x = 3(t-\sin t), \\ y = 3(1-\cos t), \end{cases}$ $y = 3$ $(0 < x \leq 6\pi, y \geq 3)$.

1.20. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 \ (x \geq 4)$.

1.21.

1.21. $r = 4\cos\varphi$,
$r = 2\ (r \geq 2)$.

1.22. $r = \cos 2\varphi$.

1.23. $r = \sqrt{3}\cos\varphi$,
$r = \sin\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

1.24. $r = 4\sin 3\varphi$,
$r = 2\ (r \geq 2)$.

1.25. $r = 2\cos\varphi$,
$r = 2\sqrt{3}\sin\varphi \ (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

1.26. $r = \sin\varphi + \cos\varphi$.

1.27. $r = 3\sin\varphi$,
$r = 5\sin\varphi$.

1.28. $r = a\cos^3\varphi$
$(a > 0)$.

1.29. Переходя к полярным коэффициентам, вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $(x^2 + y^2) = 4a^2x^2y^2$.

1.30. Переходя к полярным коэффициентам, вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить длину дуги кривой.

2.1. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

2.2. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

2.3. $\begin{cases} x = 5\sqrt{5}\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2$.

2.6. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

2.7. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$.

2.8. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

2.9. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t + t\cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

2.10. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

2.11. $r=1\sin\varphi\ (-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{8})$. 2.12. $r=2(1-\cos\varphi)\ (-\pi\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$.

2.13. $r=6(1+\sin\varphi)\ (-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0)$. 2.14. $r=8\cos\varphi\ (0\le\varphi\le\frac{\pi}{4})$.

2.15. $r=6\sin\varphi\ (0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$. 2.16. $r=5\varphi\ (0\le\varphi\le\frac{12}{5})$.

2.17. $r=3e^{\frac{3}{4}\varphi}\ (-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$. 2.18. $r=4e^{\frac{4}{3}\varphi}\ (0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$.

2.19. $r=2a(\sin\varphi+\cos\varphi)$. 2.20. $r\varphi=1\ (3/4\le\varphi\le\frac{4}{3})$.

2.21. $y=\ln\sin x\ (\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2})$. 2.22. $y=\ln\cos x+2\ (0\le x\le\frac{\pi}{6})$.

2.23. $y=1-\ln\cos x\ (0\le x\le\frac{\pi}{6})$. 2.24. $y=1-\ln(x^2-1)$ $(3\le x\le 4)$.

2.25. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $(\frac{1}{4}\le x\le 1)$. 2.26. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроида).

2.27. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(2\cos x)$ между соседними точками пересечения с осью ОХ.

2.28. $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (1\le x\le a+1)$.

2.29. Найти длину дуги кривой, состоящей из участков кривых $x^2=(y+1)^3$ и $y=4$.

2.30. $3y^2=x(x-1)^2$ между точками пересечения с осью ОХ (половину длины петли).

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками заданных функций. В вариантах 1-16 ось вращения ОХ, в вариантах 17-30 - ось вращения ОУ.

3.1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0$. 3.2. $2x-x^2-y=0$, $2x^2-4x+y=0$.

3.3. $y=3\sin x,\ 0\le x\le\pi$, $y=\sin x$. 3.4. $y=5\cos x,\ x=0,\ x\ge 0$, $y=\cos x$.

3.5. $y=\sin^2 x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

3.6. $x=\sqrt[3]{y+2}$, $x=1$, $y=1$.

3.7. $y=xe^{x}$; $y=0$, $x=1$.

3.8. $y=2x-x^2$; $y=-x+2$, $x=0$.

3.9. $y=2x-x^2$, $y=-x+2$.

3.10. $y=e^{1-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

3.11. $y=x^2$; $y^2-x=0$.

3.12. $x^2+(y-2)^2=1$.

3.13. $y=1-x^2$, $x=0$, $x=\sqrt{y-2}$, $x=1$.

3.14. $y=x^2$, $y=1$, $x=2$.

3.15. $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$.

3.16. $y=\sin(\pi x/2)$, $y=x^2$.

3.17. $y=\arccos\frac{x}{3}$, $y=\arccos x$, $y=0$.

3.18. $y=\arcsin\frac{x}{5}$, $y=\arcsin x$, $y=\frac{\pi}{2}$.

3.19. $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

3.20. $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $x=1$.

3.21. $y=\sqrt{x-1}$, $y=0$, $y=1$, $x=0.5$.

3.22. $y=\ln x$, $x=2$, $y=0$.

3.23. $y=(x-1)^2$, $y=1$.

3.24. $y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$

3.25. $y=x^3$, $y=x^2$.

3.26. $y=\arccos\frac{x}{5}$, $y=\arccos\frac{x}{3}$, $y=0$.

3.27. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

3.28. $y=x^2-2x+1$, $x=2$, $y=0$.

3.29. $y=x^3$, $y=x$.

3.30. $y=\arccos x$, $y=\arcsin x$, $x=0$.

ЗАДАНИЕ 4

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

4.1. $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, $z=y$, $z=0\ (y>0)$.

4.2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.

4.3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, $z=1$, $z=0$.

4.4. $z=x^2+9y^2$, $z=3$.

4.5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1$, $z=16$.

4.6. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, $z=y\sqrt{3}$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

4.7. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1$, $z=0$, $z=2$.

4.8. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$, $z=3$, $z=0$.

4.9. $z=x^2+5y^2$, $z=5$.

4.10. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1$, $z=20$.

4.11. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1$, $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

4.12. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$

4.13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{100}=1$, $z=5$, $z=0$.

4.14. $z=2x^2+18y^2$, $z=6$.

4.15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{64}=-1$, $z=16$.

4.16. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1$, $z=6$, $z=0$.

4.17. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{196}=1$, $z=7$, $z=0$.

4.18. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$, $z=0$, $z=2$.

4.19. $\frac{x^2}{27}+y^2=1$, $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

4.20. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1$, $z=20$.

4.21. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1$, $z=4$, $z=0$.

4.22. $z=4x^2+9y^2$, $z=6$.

4.23. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=4$.

4.24. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=y\sqrt{3}$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

4.25. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1$, $z=12$.

4.26. $z=2x^2+8y^2$, $z=4$.

4.27. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, $z=2$, $z=0$.

4.28. $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.

4.29. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=-1$, $z=12$.

4.30. $x^2+y^2=9$, $z=y$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

ЗАДАНИЕ 5

Найти статический момент и момент инерции*) относительно оси OX дуги кривой:

5.1. $y=e^{x}$, $0\le x\le 1$.

5.2. Одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

5.3. Вычислить момент инерции отрезка, длина которого ℓ относительно оси, лежащей с ним в одной плоскости и не пересекающей этот отрезок, если расстояние до оси от одного конца отрезка равна a, от другого b.

5.4. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей OX и OY дуги астроиды

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\,;\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$$

5.5. Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной ℓ и массой m относительно его конца и середины.

Найти координаты центра тяжести кривой:

5.6. дуги окружности $x^2+y^2=a^2$; $x\ge 0$; $y\ge 0$.

5.7. одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

5.8. дуги гипоциклоиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; $y\ge 0$.

5.9. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; $x\ge 0$.

5.10. дуги цепной линии $y=a\cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $0\le x\le a$.

Найти момент инерции и статический момент:

5.11. Однородного треугольника с основанием b и высотой h относительно оси, содержащей его основание.

5.12. параболического сегмента $y=4-x^2$; $y=3$ относительно оси OX.

---

*) Считать в задачах 5.1–5.10 постоянной линейную и поверхностную плотность $\rho\equiv 1$, если не оговорено иное.

5.13. Найти момент инерции площади эллипса с полуосями a и b относительно его главных осей.

5.14. Найти момент инерции относительно хорды параболического сегмента, у которого хорда равна a, а стрелка относительно хорды равна h.

Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривыми:

5.15. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, \quad x=0, \; y=0.$

5.16. $x=a\cos^3\varphi, \; y=a\sin^3\varphi, \; x>0, \; y>0, \; x=0, \; y=0$

5.17. $x=a(t-\sin t), \; y=a(1-\cos t), \; 0\le t\le 2\pi, \; y=0.$

5.18. $y=x^2, \quad x=y^2.$

5.19. $y=\cos x, \; x=0, \; y=0.$

5.20. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \; x>0, \; y>0, \; x=0, \; y=0.$

Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной:

5.21. полувитком архимедовой спирали $r=a\varphi, \quad 0\le\varphi\le\pi$ и лучами $\varphi=0, \quad \varphi=\pi.$

5.22. кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi).$

5.23. кривой $r=a\sin 2\varphi, \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

5.24. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной параболой $y=4px$, осью OX и ординатой точки $(h;k)$ кривой.

5.25. Найти моменты инерции относительно осей OX и OY и координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями

$$a^2y=bx^2, \quad x=a; \quad y=0.$$

5.26. Найти центр тяжести четверти окружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной в I-м квадранте, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

5.27. Найти центр тяжести дуги астроиды

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad 0\le t\le \pi/2,$$

если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

5.28. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=0$, $y\ge 0$; $x\ge 0$.

5.29. Пользуясь теоремами Гульдена, найти площади поверхностей и объемы колец (торов), образованных вращением круга

$$(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2\quad (a\ge r,\ b\ge r)$$

вокруг осей ОХ и ОУ.

5.30. Найти координаты центра тяжести и момент инерции относительно оси ОУ фигуры $y=h(1-\frac{x^2}{a^2})$, $x^2+y^2=r^2$, $y\ge 0$; $y=0$.

ЗАДАНИЕ 6

Определить силу давления воды на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в жидкость вершиной вниз так, что основание находится в воде параллельно ее поверхности на расстоянии d. Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

6.1. $a=30{,}5$ м; $h=40{,}6$ м; $d=0$.

6.2. $a=25{,}3$ м; $h=16{,}4$ м; $d=9{,}8$ м.

Найти силу давления на вертикальную пластину, имеющую форму равнобочной трапеции с основаниями a и b и высотой h (прямоугольника, если $a=b$), погруженную в воду на глубину d. Основания трапеции параллельны поверхности воды.

6.3. $a=10{,}5$ м, $b=21{,}1$ м; $h=14{,}7$ м; $d=0$.

6.4. $a=15{,}3$ м; $b=35{,}6$ м; $h=40{,}3$ м; $d=10{,}3$ м.

6.5. $a=19{,}6$ м; $b=19{,}6$ м; $h=15{,}2$ м; $d=14{,}9$.

6.6. Цилиндр высотой Н и радиусом R, наполненный газом под атмосферным давлением (10330 кг/м^2), закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние h внутрь цилиндра.

6.7. При условиях предыдущей задачи определить работу адиабатического сжатия газа, при котором его объем V и давление P связаны соотношением $PV^{k} = C = const$ (закон Пуассона), где k – постоянная для данного газа величина, бо́льшая единицы (для воздуха $k \approx 1{,}4$).

6.8. Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом P с поверхности Земли на высоту H (в частности, найти работу при P=1.7 т, H=2500 км, R =6400 км).

6.9. Определить массу шара радиуса r , если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

6.10. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r.

В бензин с плотностью ρ погружена вертикально треугольная пластина вершиной вверх. Найти силу давления бензина на пластину, если основание треугольника равно a , высота h . Вершина треугольника расположена от поверхности бензина на расстоянии d , а основание параллельно ей. Плотность бензина ρ = 900 кг/м^3.

6.11. a=4,5 м, h= 2,5 м, d= 0.

6.12. a=3,2 м, h= 2,9 м, d= 1,3 м.

Определить давление воды на вертикальную пластину, имеющую форму неравнобочной трапеции с верхним основанием a , нижним основанием b и высотой h , погруженную в воду так, что верхнее основание параллельно поверхности воды и погружено на расстояние d от поверхности воды.

6.13. a =80,2 м, b= 52,1 м, h= 22,2 м, d=26,7 м.

6.14. a = 72,1 м, b= 122 м, h= 59,2 м, d= 38 м.

6.15. a= 101 м, b= 53,5 м, h= 50,3 м, d= 0 м.

6.16. Вычислить работу, производимую при растягивании пружины на a см, если известно, что для удлинения пружины на 1 см требуется сила, равная P кг.

6.17. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой H и радиусом основания R (удельный вес масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3, $H = 8{,}2$ м, $R = 3{,}6$ м).

6.18. При условиях предыдущей задачи (6.17) вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из цилиндрического резервуара, если его ось имеет горизонтальное направление.

6.19. С какой силой тонкий, прямой, однородный стержень AB, всюду одинаковой толщины, имеющий длину ℓ и массу M, притягивает материальную точку N массы m, лежащую на протяжении линии стержня на расстоянии a от одного из его концов.

6.20. В условиях предыдущей задачи (6.19) положить, что точка N находится на перпендикуляре, восстановленном в середине стержня на расстоянии a от него. Найти силу, с которой стержень притягивает точку.

6.21. При изменении температуры сопротивление металлических проводников меняется (при обычных температурах) по закону

$$R = R_0(1 + 0{,}004\,\theta),$$

где R_0 – сопротивление при 0^0C и θ – температура по Цельсию (этот закон справедлив для большинства металлов). Проводник, сопротивление которого при 0^0C равно $R_0 = 10$ Ом, равномерно нагревается от $\theta_1 = 20^0$ до $\theta_2 = 200^0$ в течение 10 мин. В это время по нему идет ток под напряжением $U = 120$ В. Сколько кулонов электричества протечет за это время через проводник?

6.22. Напряжение на клеммах электрической цепи $U = 120$ В. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью 0,1 Ом в секунду. Кроме того, в цепь включено постоянное сопротивление $R_0 = 10$ Ом. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение 2-х минут?

6.23. Пластина в форме прямоугольного треугольника с катетами a и b опущена вертикально в жидкость плотности ρ так, что катет a находится на поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на пластину.

6.24. Фиксированная точка A обода, катящегося без проскальзования колеса, совершает плоское непрямолинейное движение. Радиус колеса R. Вычислить длину пути, пройденного точкой A при одном полном обороте колеса.

6.25. С поверхности Земли вертикально вверх бросается камень с начальной скоростью V_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить: а) высоту подъема $H_п$; б) время подъема $t_п$; в) полное время T движения камня до его падения на Землю; г) результирующее перемещение камня S; д) полный пройденный камнем путь L.

6.26. Найти кинетическую энергию пластинки, имеющую форму параболического сегмента и вращающегося вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотность материала γ.

6.27. Вычислить кинетическую энергию диска массой M и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его основанию.

6.28. Идеальный газ, заключенный в цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем, расширяясь, увеличивается в объеме, передвигая при этом поршень. Найти работу, совершаемую силой давления газа на поршень, если известно, что объем газа увеличился от величины V_0 до V_1. Температура при этом предполагается неизменяющейся.

6.29. При охлаждении температура тела, окруженного средой с постоянной температурой $\theta_{ср}$, меняется со временем по закону $\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_{ср}),\ k > 0$ (ньютон).

Тело окружено средой с постоянной температурой $\theta_{ср} = 20^\circ C$. За 20 минут температура тела в результате охлаждения понизилась со $100^\circ C$ до $60^\circ C$. За какое время от начала охлаждения температура тела понизится до $30^\circ C$?

6.30. Найти давление воды на поверхность шара диаметром a, если его центр находится на глубине h от поверхности воды.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЗАДАНИЕ I

Найти дифференциал 2-го порядка функции $f(x,y)$, если:

I.1. $f = x\sin^2 y$; I.2. $f = \frac{1}{y}e^{xy}$;

I.3. $f = \arcsin(xy)$; I.4. $f = \ln(x-y^2)$.

Найти d^2f в указанной точке:

I.5. $f = e^{x^2/y}$ $(1;1)$; I.6. $f = x\cos(xy)$ $(\frac{\pi}{2};-1)$;

I.7. $f = \frac{x}{y}e^{x^2}$ $(0;1)$; I.8. $f = e^{y\ln x}$ $(2;1)$.

Вычислить частные производные второго порядка функции $f(x,y)$ в заданной точке:

I.9. $f = y^2(1-e^{xy})$ $(0;1)$; I.10. $f = y\sin\frac{y}{x}$ $(2;\pi)$;

I.11. $f = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ $(1;1)$; I.12. $f = \ln(x^2+y)$ $(0;1)$.

Доказать равенство смешанных производных второго порядка для функции:

I.13. $f = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}}$; I.14. $f = \arccos(x\sqrt{y})$;

I.15. $f = (2x+1)^y$; I.16. $f = y^{3x-1}$;

I.17. $f = \operatorname{tg}(x^3-y)$; I.18. $f = 2^{-x}\arcsin\sqrt{y}$.

Показать, что функция $U(x,t)$ удовлетворяет данному уравнению в частных производных:

I.19. $U = \ln\sqrt{x^2+t^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$.

I.20. $U = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial t^2} = 0$.

I.21. $U = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/t}$, $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

I.22. $U=\frac{x}{x^2-a^2t^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

I.23. $U=A\sin(\omega x)\cdot\cos(a\omega t)$, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

I.24. $U=e^{-2x}\cdot ctg\frac{t}{2}$, $U\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}=\frac{\partial U}{dx}\cdot\frac{\partial U}{dt}$.

I.25. $U=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{ix^2/4t}$, $i\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$.

I.26. Для функции $z=e^{-xy}$ доказать равенство $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

I.27. Доказать равенство $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, если $z=\ln(y^2-x)$.

I.28. Найти $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ для $f=e^{xyz^2}$.

I.29. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$ для функции $z=x\lg(x-y)$.

I.30. Для функции $f=x^3\sin y+y^3\sin z+z^3\sin x$ найти $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z}$.

ЗАДАНИЕ 2

I. Исследовать функцию $U=U(xy)$ на экстремум.

I.2.I. $U=3x^2y+y^3-12x-15y+3$.

I.2.2. $U=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$.

I.2.3. $U=3x^3+y^3-3y^2x-1$.

I.2.4. $U=x^4+y^4-2x^2$.

I.2.5. $U=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

I.2.6. $U=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

I.2.7. $U=\frac{1}{3}y^3-x^2+2xy-\frac{1}{3}$.

I.2.8. $U=x^3+3y^2-6x+1$.

I.2.9. $U=(x+y^2)e^{\frac{x}{2}}$.

I.2.10. $U=(x^2-2y^2)e^{x-y}$.

I.2.11. $U=x^3+y^3+3xy$.

I.2.12. $U=x^2+y^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}y$.

I.2.13. $U=2x^2y^2-4xy^2-$
$-12x^2y+24xy$.

I.2.14. $U=x^2y^3(6-x-y)$.

I.2.15. $U=x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{y}+\frac{1}{3}y-\frac{8}{3}x$.

I.2.16. $U=y(x-1)^2+2y^2x$.

I.2.17. $U=5+2x-y-x^2+xy-y^2$.

I.2.18. $U=4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1$.

I.2.19. $U=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

I.2.20. $U=x^2+xy+y^2-12x-3y$.

I.2.21. $U=(y-x)^2+(y+2)^3$.

I.2.22. $U=xy(1-x-y)$.

I.2.23. $U=x^3+y^3-3xy$.

I.2.24. $U=(x^2+y^2)^2-8x-8y$.

Исследовать на экстремум функцию $z=z(xy)$, заданную уравнением.

I.2.25. $2(x^2+z^2)+3(2y^2+1)+8(xz-y)-4x=0$.

I.2.26. $\frac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z=0$.

I.2.27. $x^2+y^2+4xz+4+\frac{z^2+z}{2}=0$.

I.2.28. $z^2+xyz-x^2-x^3=0$.

I.2.29. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

I.2.30. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

П. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанной области.

П.2.1. $U=xy+x+y$, $-2\le x\le 2$, $-2\le y\le 4$.

П.2.2. $U=x^2-xy+y$, $|x|\le 2$, $|y|\le 3$.

П.2.3. $U=x^2+y^2-4x$, $-2\le x\le 1$, $1\le y\le 3$.

П.2.4. $u=1+x+2y$, $x+y\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

П.2.5. $u=x+3y$, $x+y\le 6$, $x+4y\ge 4$, $y\le 2$.

П.2.6. $u=x^2-2y+3$, $y-x\le 1$, $x\le 0$, $y\ge 0$.

П.2.7. $u=x^2+y^2-xy-x-y$, $x+y\le 3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

П.2.8. $u=x^2+xy^2-x$, $x^2+y^2\le 2$.

П.2.9. $u=(x-1)^2-2xy$, $y\ge x^2$, $y\le 2$.

П.2.10. $u=x^2-y^2-4x+2$, $x\ge y^2-1$, $x\le 3$.

П.2.11. $u=x-2y+3$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le x+y\le 1$.

П.2.12. $u=x^2+3y^2-x+18y-4$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

П.2.13. $u=x^2+3y^2-x+18y-4$, $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$, $y\ge x$.

П.2.14. $u=x^2-xy+y^2+2$, $y\le 2x+1$, $y\le 2-x$, $y\ge -1$.

П.2.15. $u=x^2+y^2-8x+2y$, $x+y\ge 2$, $x\le 5$, $y\le 2$.

П.2.16. $u=5+2x-y-x^2+xy-y^2$, $|x|\le 1$, $|y|\le 2$.

П.2.17. $u=2x^2+y^2-4x+8y-1$, $y\le -x$, $y\ge -5$, $x\ge 0$.

П.2.18. $u=2+3x+8y$, $x+y\le 2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

П.2.19. $u=x-8y$, $x+y\le 7$, $x+4y\ge 5$, $x\ge 2$.

П.2.20. $u=x^2-3y+2$, $y-x\le 1$, $x\le 2$, $y\ge 0$.

П.2.21. $u=x^2+2x+2y+5$, $2\le x+y\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

П.2.22. $u=y^2+3x+5y-6$, $x+y\le 5$, $x\ge 0$, $y\ge -2$.

П.2.23. $u=x^2-4y^2+5x-2$, $x\ge y^2-1$, $0\le x\le 3$

П.2.24. $u=x^2-y^2+4x$, $2\le x\le 3$, $-2\le y\le 0$.

П.2.25. $u=x^2+xy-y^2+2$, $y\ge 2x+1$, $y\le 2$, $x\ge 0$.

П.2.26. $u=x^2+y^2-x+8y-4$, $0\le x\le 4$, $y\le x$.

П.2.27. $u=x^2+xy-y^2-2$, $y\geq -2x+5$, $y\leq 6$, $0\leq x\leq 1$.

П.2.28. $u=5+6x-8y^2$, $x+y\leq 5$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

П.2.29. $u=6-2x+y-x^2+xy+y^2$, $|x|\leq 3$, $|y|\leq 3$.

П.2.30. $u(x+1)^2-2xy$, $y\leq x^2$; $0\leq x\leq 1$, $y\geq -1$.

Найти условный экстремум функции при заданном уравнении связи.

Ш.2.1. $u=xy$, $x+y-1=0$. Ш.2.2. $u=x^2+y^2$, $3x+2y-6=0$.

Ш.2.3. $u=x^2-y^2$; $2x-y-3=0$. Ш.2.4. $u=xy^2$, $x+2y-1=0$.

Ш.2.5. $u=xy$, $x-y-2=0$. Ш.2.6. $u=x^2+y^2$, $x+y-1=0$.

Ш.2.7. $u=x^2-y^2$, $x+2y-1=0$. Ш.2.8. $u=x^2y$, $x+y-3=0$.

Ш.2.9. $u=5-3x-4y$, $x^2+y^2=25$. Ш.2.10. $u=1-4x-8y$, $x^2-8y^2=8$.

Ш.2.11. $u=e^{xy}$, $x+y=1$. Ш.2.12. $u=e^{x^2+y}$, $x-y=1$.

Ш.2.13. $u=xy$, $x^2+y^2=1$. Ш.2.14. $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $x+y=2$.

Ш.2.15. $u=xy$, $2x+3y-5=0$. Ш.2.16. $u=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, $x+y=3$.

Ш.2.17. $u=xy^2$; $x+y-5=0$. Ш.2.18. $u=5+3x+4y$, $x^2+y^2=9$.

Ш.2.19. $u=2x^2-y^2$; $x+y-3=0$. Ш.2.20. $u=x^2-2y^2$; $x-y+5=0$.

Ш.2.21. $u=1+8y-4x$, $2x^2-y^2=4$. Ш.2.22. $u=e^{x^2y}$, $x+y=5$.

Ш.2.23. $u=x^2+y$, $x+y+2=0$. Ш.2.24. $u=x+y^2$; $x-y+5=0$.

Ш.2.25. $u=7+3x+8y$, $x^2+y^2=2$. Ш.2.26. $u=e^{x-y^2}$, $x-y=7$.

Ш.2.27. $u=e^{xy}$ $2x+5y=3$. Ш.2.28. $u=x^2-y^2$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

Ш.2.29. $u=e^{2x^2-y}$ $x+y=1$. Ш.2.30. e^{x^2-2y}, $x+2y=5$.

ЗАДАНИЕ 3

3.1. Показать, что конус $z^2=x^2+y^2$ и сфера $x^2+y^2+(z-2)^2=2$ касаются в точке $M(0;-1;1)$. Написать уравнение общей касательной плоскости и нормали.

3.2. Опустить перпендикуляр из точки $A(-1;0;4)$ к параболоиду $z=x^2+\frac{1}{2}y^2$ и в точке их пересечения провести касательную плоскость.

3.3. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2-y^2+2xz+6=0$ в точке пересечения ее с нормалью, параллельной прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

3.4. Найти расстояние от начала координат до плоскости, касающейся сферы $x^2+y^2+z^2=4x$ в точке $M(1;1;\sqrt{2})$. Составить параметрические уравнения нормали в данной точке.

3.5. Какой угол с осью конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ образует нормаль, проведенная к нему в точке $P(4;3;4)$? Составить уравнение касательной плоскости, проходящей через эту точку.

3.6. К поверхности $z=(y+2x)(3-y)$ провести нормаль, параллельную прямой $x=2+2t,\ y=1-t,\ z=-1-t$. Составить уравнение касательной плоскости, перпендикулярной этой прямой.

3.7. Дана поверхность $z=x^2-2xy+y^2$. Составить уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x-2y+z+1=0$. В точке касания написать уравнение нормали.

3.8. Найти кратчайшее расстояние от плоскости $x+y+z=0$ до параболоида $z=x^2+y^2+4$. Написать уравнение нормали, перпендикулярной данной плоскости.

3.9. Какой угол с осью ОУ образует нормаль, проведенная в т. $P(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3})$ к эллипсоиду $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$? Написать уравнение касательной плоскости в этой точке.

3.10. К гиперболоиду $x^2+2y^2-4z^2=5$ проведена нормаль в точке $M(1;2;1)$ и касательная плоскость в точке $A(-1;2;1)$. Найти угол между ними.

3.11. Написать уравнение нормали и касательной плоскости к параболоиду $z=\frac{1}{2}x^2-y^2$ в точке $A(2;-1;1)$. Есть ли другие точки пересечения нормали с поверхностью?

3.12. Вычислить угол между касательной плоскостью к сфере $x^2+y^2+z^2=6y$ и нормалью к параболоиду $z=4x^2+y^2+3x$ в их общей точке $M(-1;1;2)$.

3.13. Под каким углом пересекаются цилиндр $x^2+y^2=2$ и гиперболический параболоид $z=xy$ в точке $P(1;1;1;)$? Написать уравнение нормали и касательной плоскости к параболоиду в этой точке.

3.14. Найти угол между касательной плоскостью к сфере $x^2+y^2+z^2=2$ и нормалью к конусу $x^2+y^2=z^2$, проведенными в точке $M(1;0;1)$ линии их пересечения.

3.15. Касательные плоскости к параболоиду $x^2+2y^2-z=5$ параллельны плоскости $4x-4y-2z+1=0$. Написать уравнения этих плоскостей и нормалей в точках касания плоскостей с поверхностью.

3.16. Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости, проведенной к конусу $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A(0;2;-2)$. Написать параметрические уравнения нормали в этой точке.

3.17. На поверхности $x^2y-3y^3+24x-z=0$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны плоскости XOY. Написать уравнения нормалей и касательных плоскостей в этих точках.

3.18. Найти расстояние между плоскостью $2x-4y-z+1=0$ и параболоидом $z=x^2+y^2-2$. Написать уравнение нормали, образующей прямой угол с данной плоскостью.

3.19. Определить точки пересечения поверхности $x^2-3x+z^2+2+2y=0$ с осью OX и написать уравнение нормалей и касательных плоскостей в этих точках.

3.20. Показать, что прямая $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости, касающейся поверхности $x^2+y^2-z^2=1$ в точке $A(1;1;1;)$. Составить уравнение нормали, проходящей через эту точку.

3.21. Через точку $M(1;-3;5)$ провести нормаль и касательную плоскость к параболоиду $z=(x-3)^2+(y+4)^2$. Вычислить длину отрезка нормали, заключенного внутри поверхности.

3.22. В точке P(I;0;0) к поверхности $z=\ln(x^2+y^2)$ проведены нормаль и касательная плоскость. Найти расстояние от точки M(0; I; I;) до касательной плоскости.

3.23. Доказать, что поверхности $z=(x-2y-14)(x-2y+14)$ и $x^2+3y^2+z^2=84$ касаются в точке P(-6; 4;0). Написать уравнение общей нормали.

3.24. Какой угол с осью OZ составляет нормаль к поверхности $3xyz-z^3=1$, проведенная в точке P(0; I; -I)? Написать уравнение касательной плоскости в этой точке.

3.25. Написать уравнение касательных плоскостей к сфере $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$, проведенных в точках пересечения с нормалью, проходящей через точку A (-I;I;0).

3.26. Найти объем пирамиды, образованной координатными плоскостями и касательной плоскостью к параболоиду $z=4x^2+y^2+3x$ в точке M (-I; I; 2).

3.27. Показать, что поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=3-\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ ортогональны, т.е. пересекаются под прямым углом.

3.28. Составить уравнения касательных плоскостей к поверхностям $z=(3x-y)(3x-y-8)$ и $2(x-z)^2=y^2x$ в точке B(2;7;9) их пересечения и найти угол между ними.

3.29. Показать, что нормали к поверхностям $z=4-2(x^2+y^2)$ и $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$, проведенные в каждой точке линии их пересечения, образуют один и тот же угол. Какой именно?

3.30. Какие отрезки на координатных осях отсекает касательная плоскость к поверхности $z=2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ в точке A(I;I; $\frac{\pi}{2}$). Составить уравнение нормали в этой точке.

ЗАДАНИЕ 4

4.1. Полуоси эллипса a = 5 см, b = 3 см. Как приближенно(и в какую сторону) изменится его эксцентриситет и площадь, если большую полуось укоротить на 5 мм, а малую удлинить на 3 мм?

4.2. Стороны прямоугольника $a = 4$ м и $b = 3$ м изменяются так, что его диагональ, сохраняя направление, увеличивается на 1 см. Найти приближенную величину изменения площади прямоугольника и сравнить с точной.

4.3. Две дальние противоположные вершины ромба сближаются, а две другие удаляются с одной и той же скоростью 25 см/с в направлении диагоналей. С какой скоростью изменяются его сторона и высота в тот момент, когда диагонали ромба равняются 8 м и 6 м?

4.4. Радиус основания конуса равен $10,2 \pm 0,1$ см, а образующая равна $44,6 \pm 0,1$ см. Найти объем конуса и указать погрешность подсчета.

4.5. Площадь S прямоугольника ежеминутно увеличивается на $1,9$ дм^2, а его диагональ ℓ уменьшается на 8,7 дм. Определить скорости изменения сторон a и b прямоугольника в тот момент, когда $a = 12$ м, $b = 5$ м.

4.6. Центральный угол сектора $\alpha = 60^0$ увеличился на $\Delta\alpha = 1^0$. На сколько следует уменьшить радиус сектора $R = 20$ см, чтобы площадь сектора осталась без изменения.

4.7. Сосуд, имеющий форму конуса, обращенного вершиной вниз, непрерывно наполняется водой со скоростью $a = 2$ л/мин. С какой скоростью увеличивается площадь "мокрой" поверхности сосуда в тот момент, когда уровень воды достигает отметки $b = 8$ см, если известно, что сосуд вмещает $V = 300$ см^3 воды и имеет высоту $H = 12$ см ?

4.8. Для определения количества нефти, оставшейся в железнодорожной цистерне(круглый цилиндр с горизонтальной осью), делают замер (например шестом, опуская его в люк) наибольшей глубины h и, зная размеры самой цистерны, т.е. радиус основания R и высоту H цилиндра, вычисляют соответствующий объем. С какой абсолютной погрешностью будет произведен расчет при следующих результатах измерений: $H = 8 \pm 0,05$ м, $R = 2,5 \pm 0,08$ м, $h = 2 \pm 0,1$ м?

4.9. Два парохода, вышедшие в разное время из одного порта, держат курс один на юг, а другой на юго-восток, двигаясь со скоростью 20 км/ч и 35 км/ч соответственно. В некоторый момент они оказались на одной широте в 10 км друг от друга. С какой скоростью будет меняться расстояние между ними спустя 30 минут?

4.10. Посевное поле прямоугольной формы имело площадь $S = 0,25 км^2$ и периметр $P = 2,7$ км. Со временем площадь и периметр поля увеличились на одну и ту же величину 0,05, но прямоугольная форма его сохранилась. Увеличилось или уменьшилось при этом и насколько расстояние между наиболее удаленными точками поля?

4.11. Два прямоугольных параллелепипеда представляют собой проволочные каркасы, обтянутые (без нахлеста) материей. На изготовление одного параллелепипеда потребовалось 26 см проволоки и 192 $см^2$ материи, на изготовление другого соответственно 80 см и 256 $см^2$. Диагональ какого параллелепипеда меньше?

4.12. Найти приближенную величину изменения площади треугольника ABC при перемещении его вершины A в точку Д, если A(9;7;3), B(9;4;0), C(8;4;5), Д(10;8;1).

4.13. Вершины A, B, C треугольника движутся равномерно с одной и той же скоростью 70 см/с вдоль координатных осей OX, OY, OZ соответственно, причем первые две к началу координат O, а третья - от него. С какой скоростью изменяется площадь треугольника в тот момент, когда OA = 1 м, OB = 2 м, OC = 3 м?

4.14. Имеются две круглые бочки одинаковой толщины, изготовленные из одного и того же материала. Одна бочка, высота которой 1 м, вмещает 90π литров воды. Другая бочка больше первой на 20 см по высоте и на 57π $дм^3$ по объему. Какова (приближенно и точно) разница в количестве материала, затраченного на их изготовление?

4.15. При измерении высоты h и образующей ℓ конуса были получены следующие результаты: $h = (4{,}0 \pm 0{,}2)$м, $\ell = (7{,}5 \pm 0{,}1)$ м. С какой абсолютной погрешностью может быть вычислен объем конуса и площадь его боковой поверхности?

4.16. Как и на сколько приближенно изменятся полуоси эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, если его эксцентриситет уменьшить на 0,2, а фокусное расстояние увеличить на 1,25?

4.17. Сторона треугольника имеет длину 2,4 м и возрастает со скоростью 10 см/с; вторая сторона длиной 1,5 м уменьшается со скоростью 5 см/с. Угол между этими сторонами, равный 60^0, возрастает со скоростью 2^0 в секунду. С какой скоростью изменяется площадь треугольника?

4.18. Основания равнобедренной трапеции $a = 19$ см и $b = 7$ см уменьшаются соответственно на 5 мм и 3 мм, а каждая из боковых сторон $\ell = 6$ см увеличивается на 2 мм. Найти приближенную величину изменения диагонали трапеции и сравнить ее с точной.

4.19. В усеченном конусе радиусы оснований равны $R = 30$ см и $r = 20$ см и высота $h = 40$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить R на 3 мм, r на 4 мм, h на 2 мм?

4.20. Катеты a и b прямоугольного треугольника ежесекундно увеличиваются на 8 мм и 6 мм соответственно. С какой скоростью высота h треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, возрастает в тот момент, когда $a = 4$ см, $b = 3$ см?

4.21. Найти длину отрезка прямой $x=2$, $y=3$, заключенного между касательными плоскостями, проведенными к поверхностям $z = x^2 + y^2$ и $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ соответственно в точках $A(1;-2;5)$ и $B(1;-2;2)$.

4.22. Как и насколько приближенно изменится объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, если один катет $a=6$см удлинить на 0,8 мм, а другой, равный b=8см, укоротить на 0,6 мм?

4.23. Через точки $M_1(3;4;2)$ и $M_2(2,9;\ 4,4;\ 3)$ перпендикулярно плоскости ОХУ проведены прямые до пересечения с эллипсоидом $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{8}=1$. .Определить с помощью дифференциала, какая из образовавшихся хорд эллипсоида длиннее?

4.24. Точка М(9,8,7) в любой момент времени находится на плоскости, нормальный вектор $\vec{N}=\{A,\ B,\ 1\}$ которой непрерывно изменяет величину и направление, причем так, что его координата А возрастает, а координата В убывает с одной и той же скоростью V=12 см/с. С какой скоростью изменяется расстояние от начала координат до плоскости в тот момент, когда она имеет уравнение $2x-2y+z-9=0$?

4.25. Стороны треугольника $a=200$м $\pm$ 2 м, $b=300$ м $\pm$ 5 м и угол между ними $\alpha=60^\circ\pm1^\circ$. С какой абсолютной погрешностью может быть вычислена третья сторона треугольника и его площадь?

4.26. Найти абсолютную погрешность при вычислении площади боковой поверхности усеченного конуса, если его высота $h=(12\pm0,4)$ см и радиусы оснований $R=(8\pm0,3)$ см, $r=(3\pm0,2)$ см.

4.27. Коробка должна иметь форму прямого параллелепипеда с заданной диагональю и представлять собой проволочный каркас, обтянутый(без нахлеста) материей. Для изготовления коробки планировалось израсходовать кусок проволоки длиной 2,2 м и определенное количество материи. Однако в наличии материи оказалось на 0,05 $м^2$ меньше. Сколько теперь надо взять проволоки, чтобы изготовить коробку с той же диагональю?

4.28. Одна из сторон треугольника a=1 м, а прилежащие к ней углы $\alpha=30^\circ$, $\beta=120^\circ$. Угол α нужно увеличить, а угол β уменьшить на 5°. Как следует изменить сторону a треугольника, чтобы его площадь осталась неизменной?

4.29. Оси эллипса равномерно укорачиваются: большая со скоростью 2 см/с, малая со скоростью 22 см/с. С какой скоростью изменяется фокусное расстояние и расстояние между директрисами эллипса в тот момент, когда его оси соответственно равны 26 см и 10 см?

4.30. Тело взвесили в воздухе $(4,1 \pm 0,1)$ г и в воде $(1,8 \pm 0,2)$ г. Найти удельный вес тела и указать погрешность подсчета.

ЗАДАНИЕ 5

5.1. Какие точки кривых $y=(x-4)^2$ и $y=(x+2)^2$ соединяет отрезок наименьшей длины?

5.2. Для какой точки первого октанта, взятой на поверхности параболоида $z = 3-\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{12}$, произведение координат будет наибольшим?

5.3. Сечение канала имеет форму равнобедренной трапеции данной площади S. Как выбрать его размеры, чтобы омываемая поверхность канала была наименьшей?

5.4. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x+9}{1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z}{8}$ и $\frac{x-7}{2}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z+4}{0}$.

5.5. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1; -2; 3 \\ 2; 3; -4 \\ 3; 4; 7 \end{pmatrix}$ и X – (1×3)-матрица, сумма элементов которой равна 2. Найти матрицу X так, чтобы (единственный) элемент матрицы $X\cdot A\cdot X^T$, где X^T – транспонированная к X матрица, был наименьшим.

5.6. На полусфере $x^2+y^2+z^2=17$, $z\geq 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой до трех заданных ее точек $A(-3;2;2)$, $B(0;-1;4)$ и $C(1;0;-4)$ является наименьшей.

5.7. Представив положительное число $a \neq 6$ в виде суммы трех положительных слагаемых, выяснить, в каком случае их произведение, сложенное с суммой квадратов, будет наибольшим, а в каком наименьшим.

5.8. Из имеющихся l м^2 досок необходимо сделать прямоугольный ящик наибольшей вместимости. Рассчитать его размеры, пренебрегая толщиной досок.

5.9. В точках $M_1(2;7)$, $M_2(1;9)$ и $M_3(-3;8)$ сосредоточены единичные массы. Указать прямую, относительно которой момент инерции системы этих точек минимален.

5.10. Основанием пирамиды, вписанной в шар радиусом R, является прямоугольный треугольник. Какова должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим?

5.11. На прямой $2x+y=7$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

5.12. Между двумя числами а и в вставить еще два числа x и y так, чтобы объем тетраэдра с вершинами $A(a;x;y)$, $B(a;x;в)$, $C(a;y;z)$, $Д(x;y;в)$ был наибольшим.

5.13. Русла двух рек, имеющие в пределах данной местности формы парабол $y=x^2$ и $y=(x-3)(5-x)$, необходимо соединить прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки берегов рек следует провести канал и какова будет его длина?

5.14. Найти наибольший из объемов всех круговых цилиндров, вписанных в область между сферами $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $x^2+y^2+(z-\frac{R}{2})^2=R^2$.

5.15. Найти расстояние от точки $K(0;18;0)$ до параболоида $z=x^2+y^2$.

5.16. Садовый домик с площадью пола S м^2 имеет форму прямой пятиугольной призмы и наибольшую вместимость. Определить линейные размеры домика и угол между (равными) скатами крыши, если известно, что на его каркас израсходовано P м брусков.

5.17. Какое наименьшее количество материала потребуется для того, чтобы сшить палатку, которая, имея с боков круглую цилиндрическую, а сверху коническую форму, ограничивает заданный объем V?

5.18. Число 32 разложить на три положительных множителя так, чтобы сумма одного из них, квадрата другого и куба третьего была минимальной.

5.19. На прямых $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ найти по точке A и B так, чтобы площадь Δ OAB, где $O(0;0;0)$, была наименьшей.

5.20. Найти диаметр (т.е. наибольшее расстояние между точками) области $x^2 \le y \le 4 - \frac{(x-2)^2}{7}$.

5.21. На поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ найти точку $M(x;y;z)$, относительно которой момент инерции системы материальных точек $M_1(-9;4;0)$, $M_2(8;-4;5)$, $M_3(-9;7;3)$, $M_4(5;3;-6)$ с единичными массами будет наименьшим.

5.22. Какая точка эллипсоида $\frac{(x-6)^2}{6} + \frac{(y+2)^2}{6} + \frac{z^2}{25} = 1$ наиболее удалена от начала координат ?

5.23. На прямой $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ найти точку, наименее удаленную от кривой $\frac{6}{x} + \frac{2}{y} = 1$,

5.24. В пространстве R^3 найти вектор, квадрат модуля которого, сложенный с произведением координат, дает наибольшую сумму, если сумма координат вектора равна 9.

5.25. Между двумя положительными числами а и в вставить два числа х и у так, чтобы величина дроби $U = \frac{xy}{(a+x)(x+y)(y+b)}$ была наибольшей.

5.26. В игре "Автогонки" дистанция состоит из трех этапов: 9, 16 и 25 кругов. На каждом этапе гонщики могут двигаться лишь с постоянной, хотя и произвольной скоростью, причем правила игры требуют, чтобы суммарная скорость на всех этапах для каждого игрока составляла 110 кругов в минуту. При каком распределении скоростей по этапам будет показано наилучшее время и какое именно?

5.27. Из всех прямых, проходящих через начало координат и вершины парабол $y = ax^2 + x + b \cdot (a^2 - b)$, найти ту, которая имеет наименьший угловой коэффициент.

5.28. На плоскости $4x - 8y + 2z - 18 = 0$ указать точку $M(x;y;z)$, относительно которой система материальных точек с единичными массами $M_1(6;0;6)$, $M_2(-1;1;3)$, $M_3(9;2;7)$ имеет наименьший момент инерции.

5.29. К эллипсоиду вращения $\frac{x^2+y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ провести касательную плоскость, наименее удаленную от точки $D(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0)$.

5.30. На плоскости OXY найти точку, сумма квадратов расстояний которой до двух прямых $X-Y-1=0$ и $7x+y+3=0$ была бы наименьшей.