Самохин И.Л.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра "Высшая математика"

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

по курсу высшей математики

Часть 3

Нижний Новгород 2002

Составители: М.Ф.Авдеева, М.С.Баранова, Ф.А.Богашов, А.В.Волохин, Л.Н.Ерофеева, Е.К.Китаева, Н.С.Корнилова, Т.В.Лухманова, С.А.Метлицкая, Н.В.Мохнина, Т.И.Пересыпкина, Е.Ф.Романшевская, Ю.А.Самохин, В.П.Тареев, С.И.Хомутецкая, Е.Б.Шинкарева

УДК 517.2

Расчетные задания по курсу высшей математики. ч.3/ НГТУ; Сост.: М.Ф.Авдеева, М.С.Баранова, Ф.А.Богашов и др. Н.Новгород, 2002. 63 с.

Научный редактор Ю.А.Самохин

Редактор И.И.Морозова

Компьютерный набор В.В.Панченко

Подп. к печ. 29.01.02. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная.

Печ. л. 4,0.Уч.-изд. л. 3,7.Тираж 300 экз. Заказ 83.

Нижегородский государственный технический университет.

Типография НГТУ. 603600, Н.Новгород, ул. Минина, 24.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Выяснив тип уравнения, решить его.

Задание 1

1.1.1. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x^2y+4y}$, $y(2)=0$.

1.1.2. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+3}}{y(x^2-1)}$, $y(0)=1$.

1.1.3. $y' = \dfrac{y^2+1}{y\cdot\sqrt{4-x^2}}$, $y(-1)=0$.

1.1.4. $y' = \dfrac{y^2-2}{y\sqrt{x^2-1}}$, $y(\sqrt{2})=0$.

1.1.5. $y' = \dfrac{x\sqrt{y^2+4}}{x^2-1}$, $y(0)=0$.

1.1.6. $y' = \dfrac{2x\sqrt{9-x^2}}{x^2+2}$, $y(1)=0$.

1.1.7. $y' = \dfrac{y^2x-4x}{\sqrt{x^2+3}}$, $y(-1)=0$.

1.1.8. $y' = -\dfrac{2x(y^2+4)}{\sqrt{x^2+5}}$, $y(-2)=0$.

1.1.9. $y' = \dfrac{x\sqrt{y^2+1}}{x^2+9}$, $y(0)=1$.

1.1.10. $y' = 3x(y^2-1)\cdot\sqrt{x^2+1}$, $y(0)=0$.

1.1.11. $y' = \dfrac{2x(y^2+9)}{\sqrt{2-x^2}}$, $y(-1)=0$.

1.1.12. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y(x^2+4)}$, $y(2)=-1$.

1.1.13. $y' = \dfrac{y^2+3}{2y\sqrt{x^2-3}}$, $y(-2)=0$.

1.1.14. $y' = \dfrac{y^2-4}{y\sqrt{4-x^2}}$, $y(2)=0$.

1.1.15. $y' = \dfrac{4\sqrt{y^2+3}}{yx^2-4y}$, $y(0)=1$.

1.1.16. $y' = \dfrac{y^2+1}{2yx^2-2y}$, $y(0)=0$.

1.1.17. $y' = x\,(y^2+4)\sqrt{x^2-3}$, $y(2)=0$.

1.1.18. $y' = \dfrac{y^2-3}{y\sqrt{x^2+5}}$, $y(-2)=2$.

1.1.19. $y' = -\dfrac{8x+2xy^2}{\sqrt{2-x^2}}$, $y(-1)=0$.

1.1.20. $y' = -\dfrac{\sqrt{3+y^2}}{y\sqrt{9-x^2}}$, $y(0)=-1$.

1.1.21. $y' = \dfrac{xy^2-9x}{\sqrt{4+x^2}}$, $y(0)=0$.

1.1.22. $y' = -\dfrac{\sqrt{3+y^2}}{y\sqrt{9-x^2}}$, $y(0)=-1$.

1.1.23. $y' = \dfrac{2x\sqrt{y^2+4}}{x^2-2}$, $y(2)=0$.

1.1.24. $y' = -\dfrac{\sqrt{5-y^2}}{yx^2-4y}$, $y(0)=2$.

1.1.25. $y' = \frac{\sqrt{y^2+8}}{y \cdot \sqrt{4-x^2}}, \quad y(0) = 1.$

1.1.26. $y' = -\frac{\sqrt{3+y^2}}{18y - 2x^2 y}, \quad y(0) = -1.$

1.1.27. $y' = -\frac{xy^2 - x}{\sqrt{2-x^2}}, \quad y(1) = 0.$

1.1.28. $y' = \frac{4x\sqrt{y^2-3}}{x^2+1}, \quad y(0) = 2.$

1.1.29. $y' = -\frac{x(9+y^2)}{\sqrt{3+x^2}}, \quad y(1) = 0.$

1.1.30. $y' = -\frac{y^2-8}{y\sqrt{2-x^2}}, \quad y(0) = 3.$

Задание 2

1.2.1. $(x^2 + 2y^2)dx - yxdy = 0, \quad y(2) = 0.$

1.2.2. $(x^2 - 4y^2)dx + 2yxdy = 0.$

1.2.3. $2(x^2 + y^2)dx - yxdy = 0.$

1.2.4. $(3x^2 + y^2)dy + xydx = 0, \quad y(1) = -2.$

1.2.5. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$

1.2.6. $(y^2 - 2x^2)dx + 2xydy = 0.$

1.2.7. $(3x^2 - 2y^2)dx - xydy = 0, \quad y(1)=2.$

1.2.8. $(x^2 + 8y^2)dx - 4yxdy = 0.$

1.2.9. $(3xy + 2y^2)dx = (x^2 + xy)dy.$

1.2.10. $(xy + 2y^2)dx = (3xy - x^2)dy, \quad y(-1)=-1.$

1.2.11. $(2y^2 + xy)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

1.2.12. $(3xy + 2x^2)dx = (xy + x^2)dy.$

1.2.13. $(x^2 2xy)dx = (xy - 2x^2)dy, \quad y(2) = 2.$

1.2.14. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 3 \ \frac{y}{x} + 2.$

1.2.15. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 3.$

1.2.16. $x^2 \cdot y' = y^2 - 3xy + x^2, \quad y(0{,}5) = 1.$

1.2.17. $x^2 y' = 2y^2 - 3xy - 4x^2.$

1.2.18. $x^2 y' = y^2 5xy + 3x^2.$

1.2.19. $y' = \frac{2x-y}{x-y}, \quad y(1) = 2.$

1.2.20. $y' = \frac{7xy - 2y^2}{x^2 - xy}.$

1.2.21. $y' = 2 \ \frac{y^2}{x^2} - 3 \ \frac{y}{x} + 6.$

1.2.22. $y' = \frac{y^2 + xy}{3x^2 - xy}, \quad y(1) = 0{,}5.$

1.2.23. $y' = \frac{11xy + 2y^2}{3x^2 + xy}.$

1.2.24. $xy \cdot y' + x^2 - 4xy = 0.$

1.2.25. $7x - 6y + y \cdot y' = 0, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 1.$

1.2.26. $y' = \frac{5y^2 - 7xy}{xy + x^2}.$

1.2.27. $x^2 y' = y^2 + 5xy + 2x^2.$

1.2.28. $y' = \frac{2y^2 - 4xy}{2x^2 + xy}, \quad y(1) = 2.$

1.2.29. $y' = \dfrac{x+y}{2x-y}$.

1.2.30. $2(3x^2 + xy)y' = y^2 + 2xy$.

Задание 3

1.3.1. $y' + \dfrac{y}{x} = \ln x$.

1.3.2. $y' - \dfrac{2y}{x} = \ln x,\ \ y(1) = 2$.

1.3.3. $y' + \dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg} x$.

1.3.4. $y' + \dfrac{y}{x} = \operatorname{arcctg} x$.

1.3.5. $y' + \dfrac{y}{x} = \cos 3x,\ \ y(\pi) = 0$.

1.3.6. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin 3x$.

1.3.7. $y' + \dfrac{2y}{x} = \ln x$.

1.3.8. $y' - \dfrac{y}{2x} = \ln x,\ \ y(1) = -3$.

1.3.9. $y' + \dfrac{y}{x} = \cos\dfrac{x}{2}$.

1.3.10. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin\dfrac{x}{3}$.

1.3.11. $y' + \dfrac{3y}{x} = \ln x,\ \ y(1) = 0$.

1.3.12. $y' + \dfrac{y}{2x} = \ln x$.

1.3.13. $y' + y = x - 2$.

1.3.14. $y' - y = x + 1,\ \ y(0) = -2$.

1.3.15. $y' + 2y = x + 3$.

1.3.16. $y' - 2y = x + 5$.

1.3.17. $y' + y = e^{-x} \arcsin x,\ \ y(0) = 1$.

1.3.18. $y' - y = e^{x} \arccos x$.

1.3.19. $y' + 3y = x + 2$.

1.3.20. $y' - 3y = x - 1,\ \ y(0) = 0$.

1.3.21. $y' + y \ \operatorname{ctg} x = 2x + 5$.

1.3.22. $y' - y \ \operatorname{tg} x = 3x + 4$.

1.3.23. $y' + y = e^{-x} \operatorname{arctg} x,\ \ y(0) = 1$.

1.3.24. $y' - y = e^{x} \operatorname{arcctg} x$.

1.3.25. $y' - 2y \ \operatorname{tg} 2x = x$.

1.3.26. $y' + 2y \ \operatorname{ctg} 2x = x,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

1.3.27. $y' + 2y \ \operatorname{tg} x = x$.

1.3.28. $y' - 2y \ \operatorname{ctg} x = x$.

1.3.29. $y' - y = \sin x,\ \ y(0) = 0{,}5$.

1.3.30. $y' + y = \cos x$.

Задание 4

1.4.1. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$.

1.4.2. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.

1.4.3. $y' + xy = (x-1)e^{x} y^2$.

1.4.4. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

1.4.5. $4xy' + 3y = -e^x \cdot x^4 \cdot y^5$.

1.4.6. $y' - y = xy^2$.

1.4.7. $y' + y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{y}$.

1.4.8. $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2\left(x^3+1\right)\sin x$.

1.4.9. $y' + y = xy^2$.

1.4.10. $y' - 2y\,tgx + y^2\sin^2 x = 0$.

1.4.11. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

1.4.12. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$.

1.4.13. $2xyy' - y^2 + x = 0$.

1.4.14. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$.

1.4.15. $3(xy' + y) = xy^2$.

1.4.16. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$.

1.4.17. $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}$.

1.4.18. $2(y' + y) = xy^2$.

1.4.19. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

1.4.20. $y' = y\,ctgx + \frac{y^3}{\sin x}$.

1.4.21. $2(xy' + y) = xy^2$.

1.4.22. $xy' + y = xy^2$.

1.4.23. $y' = xy + x^3y^3$.

1.4.24. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

1.4.25. $y'x + y = -xy^2$.

1.4.26. $xy' + 2y = x^5y^2$.

1.4.27. $y' - y = 2xy^2$.

1.4.28. $y' - xy = -y^3 \cdot e^{-x^2}$.

1.4.29. $y' = \left(\frac{1}{3x^2} - 2y^3\right)y \cdot x$.

1.4.30. $xy' + y = 2y^3\ln x$.

Задание 5

1.5.1. $\left(e^x\sin y + x\right)dx + \left(e^x\cos y + y\right)dy = 0$.

1.5.2. $ye^x dx + \left(y + e^x\right)dy = 0$.

1.5.3. $\left(3x^2y + \sin x\right)dx + \left(x^3 - \cos y\right)dy = 0$.

1.5.4. $\left(e^{x+y} + 3x^2\right)dx + \left(e^{x+y} + 4y^3\right)dy = 0$.

1.5.5. $\left(tgy - \frac{y}{\sin^2 x}\right)dx + \left(ctgx + \frac{x}{\cos^2 y}\right)dy = 0$.

1.5.6. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$.

1.5.7. $(y + x\ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$.

1.5.8. $\left[\sin y + (1-y)\cos x\right]dx + \left[(1+x)\cos y - \sin x\right]dy = 0$.

1.5.9. $\left(2xye^{x^2} + \ln y\right)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0$.

1.5.10. $(xy + \sin y)dx + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\cos y\right)dy = 0$.

1.5.11. $\left(2x + 3x^2y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0$.

1.5.12. $2xydx + \left(x^2 - y^3\right)dy = 0$.

1.5.13. $\left(2-9xy^2\right)xdx+\left(4y^2-6x^3\right)ydy=0$. **1.5.14.** $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$.

1.5.15. $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0$. **1.5.16.** $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$.

1.5.17. $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0$. **1.5.18.** $(x+y)dx+\left(x+2y^2\right)dy=0$.

1.5.19. $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2xydy=0$. **1.5.20.** $\left(x^3-3xy^2+2\right)dx-\left(3x^2y-y^2\right)dy=0$.

1.5.21. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$. **1.5.22.** $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$.

1.5.23. $(2x+y)dx+\left(x+2y^2\right)dy=0$. **1.5.24.** $(10xy-8y+1)dx+\left(5x^2-8x+3\right)dy=0$.

1.5.25. $\left(2x+e^{x/y}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}dy=0$. **1.5.26.** $2x\cos^2 y\,dx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0$.

1.5.27. $(12x+5y-9)dx+(5x+2y-4)dy=0$.

1.5.28. $\left(3xy^2-x^2\right)dx+\left(3x^2y-6y^2-1\right)dy=0$.

1.5.29 $(\ln y-2x)dx+\left(\dfrac{x}{y}-2y\right)dy=0$. **1.5.30.** $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков (n≥2).

2.1. Решить задачу Коши.

2.1.1. $x^2y''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. **2.1.2.** $y\ y''+(y')^2=1$, $y(0)=y'(0)=1$.

2.1.3. $y\ y''=2(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. **2.1.4.** $y''+2\sin y\ \cos^3 y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

2.1.5. $\operatorname{tg}x\ y''-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

2.1.6. $y'''=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y(1)=y'(1)=0$, $y''(1)=-2$.

2.1.7. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$. $y(0)=0$, $y'(0)=1$. **2.1.8.** $y''=x\ \cos x$, $y(0)=y'(0)=1$.

2.1.9. $y^3\ y''=1$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. **2.1.10.** $y''=x+\sin^2 x$, $y(0)=\dfrac{1}{8}$, $y'(0)=0$.

2.1.11. $y''\ \sin x=(1+y')\cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

2.1.12. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.1.13. $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

2.1.14. $y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

2.1.15. $\sin^4 x \cdot y''' = \sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

2.1.16. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$.

2.1.17. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

2.1.18. $y''' = (y'')^2$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2.1.19. $2(y')^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.1.20. $y \cdot y'' - (y')^2 = y^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$.

2.1.21. $y'' = x \sin x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

2.1.22. $y'' \cdot \sin y - 2(y')^2 \cos y = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(0) = 2$.

2.1.23. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

2.1.24. $1 + (y')^2 = 2yy''$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

2.1.25. $x \cdot y'' = y'$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2.1.26. $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2.1.27. $xy'' + x \cdot (y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$.

2.1.28. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

2.1.29. $(y'' \cdot x - y')y' = x^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

2.1.30. $y''' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

2.2. Указать структуру общего решения уравнения, не находя коэффициентов его частных решений.

2.2.1. $y''' - 8y = x^2 + x^3 e^{2x} + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

2.2.2. $y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = (1-x)e^x + \sin 2x + 3x^2$.

2.2.3. $y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 1 + e^{-4x}\cos 5x - 12x$.

2.2.4. $y^{(5)} + 27y'' = xe^{-3x} + \sin x - 15x^3$.

2.2.5. $y^{(4)} - y = e^x \cdot \sin x + e^{-x} + 13x^2$.

2.2.6. $y^{(4)} + y'' = \cos x + e^{2x}\sin x - 2x^3$.

2.2.7. $y^{(5)} - 9y''' = x^2 + 5x - e^{3x} + e^{-3x}\sin x$.

2.2.8. $y^{(4)} - y''' = e^x(6x - x^3) + 1 + \sin x$.

2.2.9. $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' = xe^{2x} + e^{3x} \cdot \cos 2x + 4$.

2.2.10. $y''' - 4y'' + 4y' = e^{2x}\sin x + 14x^2 - 2 + e^{-2x}$.

2.2.11. $y''' + 8y = \cos x - e^{-2x}\sin x + x^3$. **2.2.12.** $y^{(5)} - 27y'' = e^{3x} + \cos 3x + 3x$.

2.2.13. $y^{(4)} - 7y''' + 10y'' = 1 - 7x + e^{2x}\cos 5x + e^{5x}$.

2.2.14. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' = e^{x}\cos x + x^2 + 1$. **2.2.15.** $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y''' = e^{x}\cos x + 1 - x^3 + e^{-x}$.

2.2.16. $y^{(6)} + y^{(4)} = \sin x + e^{x}(5 + 3x) - 1$. **2.2.17.** $y''' + 64y = e^{4x} + \cos 2x + x^2$.

2.2.18. $y^{(4)} - 16y'' = \sin 2x + e^{2x} + 5x$. **2.2.19.** $y^{(4)} + 6y''' + 9y'' = 3x + e^{3x} + \cos 3x$.

2.2.20. $y^{(4)} - 3y''' = 3x + \cos 3x + e^{-3x}$. **2.2.21.** $y''' + y'' - 2y' = e^{x} + x + \cos x$.

2.2.22. $y^{(4)} + y''' - 6y'' = e^{2x} + 2x + \cos 2x$. **2.2.23.** $y''' - y'' - 6' = e^{3x} + 3x + \sin 3x$.

2.2.24. $y''' + 49y' = e^{7x} + 7x + \sin 7x$. **2.2.25.** $y^{(5)} + y''' = e^{x} + x^2 + \cos 2x$.

2.2.26. $y^{(5)} - 4y''' = e^{2x} + x^3 - \sin 2x$. **2.2.27.** $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 2y''' = e^{2x} + x^2 - e^{x}\sin x$.

2.2.28. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = e^{2x}\cos x - 5 + e^{-x}$. **2.2.29.** $y''' - 2y'' + y' = e^{2x}\sin x + 5 + e^{x}$.

2.2.30. $y^{(4)} - 8y''' + 15y'' = e^{3x} + 3x + \cos 3x$.

2.3. Решить уравнение $L_n(y) = f(x)$, используя в случае а) метод подбора, в случае б) метод Лагранжа.

2.3.1. а) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$, б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{1 + e}$.

2.3.2. а) $y'' + 2y = e^{-2x}$; б) $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.

2.3.3. а) $y'' - y' + y = x^3 + 6$; б) $y'' + y = 4ctgx$.

2.3.4. а) $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$; б) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^{x}$.

2.3.5. а) $y'' + y' = 2e^{x}$; б) $y'' + y = tg^2 x$.

2.3.6. а) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$; б) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^{x} + 1}$.

2.3.7. а) $y'' - 5y' = \sin 5x$; б) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

2.3.8. а) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$; б) $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.

2.3.9. а) $y'' + y' = x^2$; б) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

2.3.10. а) $y'' + 3y' - 4y = x - 2;$ б) $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}.$

2.3.11. а) $y'' - 5y' = 3x^2;$ б) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$

2.3.12. а) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1;$ б) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}.$

2.3.13. а) $y'' - y' = 2(1 - x);$ б) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

2.3.14. а) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x;$ б) $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x.$

2.3.15. а) $y'' - 2y' + y = x^3;$ б) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}.$

2.3.16. а) $y'' + 4y = 8e^{2x};$ б) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}.$

2.3.17. а) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x;$ б) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$

2.3.18. а) $y' + 2y = x^2 + 2;$ б) $y'' - 2y' + y' = \dfrac{e^x}{\cos^2 x}.$

2.3.19. а) $y'' - 5y' + 6y = \sin 3x;$ б) $y'' + y' = \dfrac{e^x}{3 + e^{-x}}.$

2.3.20. а) $y'' - 3y' + 2y = x + x^2;$ б) $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x.$

2.3.21. а) $y'' + 2y' = x + 2;$ б) $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x.$

2.3.22. а) $y'' + y = e^x;$ б) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}.$

2.3.23. а) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x;$ б) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^3}.$

2.3.24. а) $y'' - 3y' = 3x + x^2;$ б) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}.$

2.3.25. а) $y'' - 2y' + y = \cos 2x;$ б) $y'' - y' = e^{2x}\sin e^x.$

2.3.26. а) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3;$ б) $y'' - y' = \dfrac{1}{2 + e^x}.$

2.3.27. а) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x;$ б) $y'' + y = 3\operatorname{ctg} x.$

2.3.28. а) $y'' - 4y' + 4y = x^2;$ б) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}.$

2.3.29. а) $y'' - 2y' + y = \cos 2x;$ б) $y'' - y' = \dfrac{3}{e^x - 4}.$

2.3.30. а) $y'' + 9y = 15\sin 2x;$ б) $y'' - y' = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}.$

3. Системы дифференциальных уравнений

3.1. Решить систему, используя метод исключения.

3.1.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2x - y - 9, & y(0) = 0. \end{cases}$

3.1.2. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x - y, & y(0) = 2. \end{cases}$

3.1.3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2, & y(0) = 0. \end{cases}$

3.1.4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

3.1.5. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = -x - 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

3.1.6. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y + 1, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$

3.1.7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2x - 3y, & y(0) = -3. \end{cases}$

3.1.8. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = x + 4y, & y(0) = -2. \end{cases}$

3.1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x + 2y, & y(0) = 3. \end{cases}$

3.1.10. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 2x - 3y + t, & y(0) = -2. \end{cases}$

3.1.11. $\begin{cases} \dot{x} = -y + e^{3t}, & y(0) = 1, \\ \dot{y} = -x + 2e^{3t}, & x(0) = 2. \end{cases}$

3.1.12. $\begin{cases} \dot{x} = y + t, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x + e^{t}, & y(0) = 0. \end{cases}$

3.1.13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t, & x(0) = 5, \\ \dot{y} = -x + 2\sin t, & y(0) = -1. \end{cases}$

3.1.14. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 2(x + y), & x(0) = 3, \\ \dot{y} = 3x + y, & y(0) = -2. \end{cases}$

3.1.15. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - \dfrac{2x}{t}, & x(1) = 1, \\ \dot{y} = x + y + \dfrac{2x}{t}, & y(1) = 2. \end{cases}$

3.1.16. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, & x(0) = -3, \\ \dot{y} = x + 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$

3.1.17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 6y, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = 3x + 4y, & y(0) = 2. \end{cases}$

3.1.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y + \cos t, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = 4x - 3y + \sin t, & y(0) = -1. \end{cases}$

3.1.19. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 4x + y, & y(0) = -2. \end{cases}$

3.1 20. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 3, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = 4x + 2y - 5, & y(0) = -2. \end{cases}$

3.1.21. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 4x + 3y, & y(0) = -1. \end{cases}$

3.1.22. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y + 4\sin t, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 3x - y - \cos t, & y(0) = -1. \end{cases}$

3.1.23. $\begin{cases} \dot{x} = x + 6y, & x(0) = 4, \\ \dot{y} = 2x + 3y, & y(0) = -1. \end{cases}$

3.1.24. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = 3x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

3.1.25. $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -3x + 4y, & y(0) = -2. \end{cases}$

3.1.26. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2x + 1, & y(0) = -1. \end{cases}$

3.1.27. $\begin{cases}\dot{x}=-2y, & x(0)=1,\\ \dot{y}=2x+5y+3, & y(0)=0.\end{cases}$

3.1.28. $\begin{cases}\dot{x}=2x-3y, & x(0)=2,\\ \dot{y}=3x+5, & y(0)=-1.\end{cases}$

3.1.29. $\begin{cases}\dot{x}=5x-3y, & x(0)=2,\\ \dot{y}=2x-y, & y(0)=1.\end{cases}$

3.1.30. $\begin{cases}\dot{x}=5x-\cos t, & x(0)=1,\\ \dot{y}=3x-2y+3\sin t, & y(0)=2.\end{cases}$

3.2. Решить систему, используя метод интегрируемых комбинаций.

3.2.1. $\begin{cases}\dot{x}=5x+3y+t,\\ \dot{y}=3x+5y+t.\end{cases}$

3.2.2. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y,\\ \dot{y}=3x+2y.\end{cases}$

3.2.3. $\begin{cases}\dot{x}=2x-4y,\\ \dot{y}=-4x+2y.\end{cases}$

3.2.4. $\begin{cases}\dot{x}=2x-5y+e^t,\\ \dot{y}=-5x+2y+e^t.\end{cases}$

3.2.5. $\begin{cases}\dot{x}=x+3y+3\cos t,\\ \dot{y}=3x+y+3\cos t.\end{cases}$

3.2.6. $\begin{cases}\dot{x}=-x+4y,\\ \dot{y}=4x-y.\end{cases}$

3.2.7. $\begin{cases}\dot{x}=2x-6y+e^t\cdot\sin t,\\ \dot{y}=-6x+2y+e^t\cdot\sin t.\end{cases}$

3.2.8. $\begin{cases}\dot{x}=-3x+4y+te^t,\\ \dot{y}=4x-3y-te^t.\end{cases}$

3.2.9. $\begin{cases}\dot{x}=3x-y+t\sin t,\\ \dot{y}=-x+3y-t\sin t.\end{cases}$

3.2.10. $\begin{cases}\dot{x}=-2x-3y,\\ \dot{y}=-3x-2y.\end{cases}$

3.2.11. $\begin{cases}\dot{x}=7x-y+2e^{3t},\\ \dot{y}=-x+7y-2e^{3t}.\end{cases}$

3.2.12. $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y,\\ \dot{y}=3x-y.\end{cases}$

3.2.13. $\begin{cases}\dot{x}=-5x+2y,\\ \dot{y}=2x-5y.\end{cases}$

3.2.14. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y+3e^t,\\ \dot{y}=-x+2y-3e^t.\end{cases}$

3.2.15. $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$

3.2.16. $\begin{cases}\dot{x}=-y+\cos t,\\ \dot{y}=-x-\cos t.\end{cases}$

3.2.17. $\begin{cases}\dot{x}=2x+5y,\\ \dot{y}=5x+2y.\end{cases}$

3.2.18. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+\cos t,\\ \dot{y}=3x+2y-\cos t.\end{cases}$

3.2.19. $\begin{cases}\dot{x}=3x+7y,\\ \dot{y}=7x+3y.\end{cases}$

3.2.20. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+e^t,\\ \dot{y}=3x+2y-e^t.\end{cases}$

3.2.21. $\begin{cases}\dot{x}=5y,\\ \dot{y}=5x.\end{cases}$

3.2.22. $\begin{cases}\dot{x}=-3y+\sin t,\\ \dot{y}=-3x-\sin t.\end{cases}$

3.2.23. $\begin{cases}\dot{x}=4x+3y,\\ \dot{y}=3x+4y.\end{cases}$

3.2.24. $\begin{cases}\dot{x}=x+3y,\\ \dot{y}=3x+y.\end{cases}$

3.2.25. $\begin{cases}\dot{x}=5x+y,\\ \dot{y}=x+5y.\end{cases}$

3.2.26. $\begin{cases}\dot{x}=5x+3y+3\cos t,\\ \dot{y}=3x+5y+3\cos t.\end{cases}$

3.2.27. $\begin{cases}\dot{x}=3x+5y+2e^{3t},\\ \dot{y}=5x+3y+2e^{3t}.\end{cases}$

3.2.28. $\begin{cases}\dot{x}=2x-7y+e^t\cos t,\\ \dot{y}=-7x+2y+e^t\cos t.\end{cases}$

3.2.29. $\begin{cases}\dot{x}=-2x-5y,\\ \dot{y}=-5x-2y.\end{cases}$

3.2.30. $\begin{cases}\dot{x}=-6x-y,\\ \dot{y}=-x-6y.\end{cases}$

3.3. Решить систему $\dfrac{dY}{dt}=A\cdot Y+F(t)$, где $Y=col(y_1,y_2)$, $A=(a_{ij})$, $i=1,2;\ j=1,2$.

$F(t)=col(f_1(t),f_2(t))$, используя метод Лагранжа.

3.3.1. $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}$.

3.3.2. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t^2\\ e^t\end{pmatrix}$.

3.3.3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t+1\\ 2t\end{pmatrix}e^{3t}$.

3.3.4. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t+3\\ 3t\end{pmatrix}$.

3.3.5. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}$.

3.3.6. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t\\ 2t+3\end{pmatrix}$.

3.3.7. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}0\\ e^{t}\end{pmatrix}$.

3.3.8. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{2t}$.

3.3.9. $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}te^{2t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}$.

3.3.10. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t+\cos t\end{pmatrix}$.

3.3.11. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}tg^{2}t-1\\ tgt\end{pmatrix}$.

3.3.12. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ 3\sin t\end{pmatrix}$.

3.3.13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t\\ 2t+3\end{pmatrix}\cdot e^{2t}$.

3.3.14. $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}1\\ 3t\end{pmatrix}\cdot e^{t}$.

3.3.15. $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -4 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t\\ 3t\end{pmatrix}\cdot e^{2t}$.

3.3.16. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t^{2}\\ t+3\end{pmatrix}$.

3.3.17. $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\cdot e^{2t}$.

3.3.18. $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}\cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}\cdot e^{t}$.

3.3.19. $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t\\ 3t+2\end{pmatrix}$.

3.3.20. $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}$; $F(t)\begin{pmatrix}t=\\ 2\end{pmatrix}\cdot e^{2t}$.

3.3.21. $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t^{2}+2\\ t+3\end{pmatrix}$.

3.3.22. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $F(t)=\begin{pmatrix}t^{2}\\ -t+2\end{pmatrix}$.

3.3.23. $A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}t-3\\ t^{2}\end{pmatrix}$.

3.3.24. $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}e^{t}$.

3.3.25. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$.

3.3.26. $A=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ 3\cos t\end{pmatrix}$.

3.3.27. $A=\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t+2\cos t\end{pmatrix}$.

3.3.28. $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}\sin t-\cos t\\ 2\sin t+\cos t\end{pmatrix}$.

3.3.29. $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{2t}$.

3.3.30. $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 9 & 3\end{pmatrix}$; $F(t)=\begin{pmatrix}3\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}$.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

Задание 1. Определить тип уравнения в частных производных $a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F(x \cdot y, u, u'_x, u'_y) = 0$ и привести его к каноническому виду. Значения коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} взять из таблицы.

№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{22}
1.1	1	2	1/2	**1.16**	3	1	2/3
1.2	1/2	3	2	**1.17**	2	2	5/2
1.3	2,5	3	1	**1.18**	9	3	4/3
1.4	2	4	1/2	**1.19**	4	2	5/2
1.5	1	4	2	**1.20**	4	3	5/2
1.6	1	5/2	4	**1.21**	2	4	8
1.7	4	5/2	1/2	**1.22**	12	4	4/3
1.8	1	4	3	**1.23**	8	4	2
1.9	1/2	2	1/2	**1.24**	4/3	4	12
1.10	1	3/2	1	**1.25**	3/2	1	2/3
1.11	2	1	3	**1.26**	5/2	1	2/5
1.12	3	2	2	**1.27**	6	3	3/2
1.13	4	3	3	**1.28**	10	5	5/2
1.14	5	4	4	**1.29**	12	2	1/3
1.15	5	3	4	**1.30**	9/4	3	4

Задание 2

а) Используя метод Даламбера, найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $u'_t(t,x)\big|_{t=0} = \psi(x)$. Выражения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и значение a взять из табл. 1.

б) Используя метод Фурье, найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < \ell)$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(t,x)\big|_{t=0} = f(x)$ и краевым условиям $u(t,x)\big|_{x=0} = u(t,x)\big|_{x=\ell} = 0$. Выражение для функции $f(x)$ и значение ℓ взять из табл. 2.

в) Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса r и такую, что $u(r,\varphi)\big|_{r=r_0} = f(\varphi)$. Выражение для функции $f(\varphi)$ и значение r_0 взять из табл. 3.

Таблица 1

№ варианта	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	a	№ варианта	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	a
1	x^2	x^2	1	16	$(x+1)^2$	x^3	1
2	$(x+1)^3$	$(x+1)^3$	1	17	$(x-1)^2$	$(x+1)^3$	2
3	x^4	$2x^2+x$	1	18	x^3	$2x^2-x$	1
4	$\sin x$	$\cos 2x$	1	19	$\sin 2x$	$\cos x$	2
5	$\cos x$	$\sin 2x$	1	20	$\cos 2x$	$\sin 2x$	1
6	$tg x$	$\sin^2 x$	2	21	$tg 2x$	$2\sin x$	2
7	$ctg x$	$\cos^2 x$	2	22	$ctg 2x$	$2\cos x$	1
8	$\sin x+tg x$	$\sin 3x$	2	23	$\sin 2x+\cos x$	$\sin 2x$	2
9	$\cos x+ctg x$	$\cos 3x$	2	24	$\sin 2x$	$\cos 3x$	1
10	$\sin 3x$	$\cos 3x$	2	25	$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$	$(x+1)^3$	2
11	$(2x+1)^2$	$(x^2+1)^2$	1	26	$(x+1)^2$	$\left(\frac{x}{2}+1\right)^3$	1
12	$(2x-1)^2$	$(x+1)^2$	2	27	$(2x+1)^3$	$(x-1)^2$	2
13	$(x-1)^2$	$(x+1)^2$	1	28	$\sin 2x+x$	$\cos 3x+x$	1
14	$(2x+3)^2$	$(2x+1)^3$	2	29	$tg x+x$	$ctg x+x$	2
15	x^3	$2x+x^2$	1	30	$ctg x+x$	$\sin 2x+x$	1

Таблица 2

№ варианта	$f(x)$	ℓ	a	№ варианта	$f(x)$	ℓ	a
1	x	1	2	16	$2x-1$	2	1
2	$x+1$	1	2	17	$\frac{x+3}{5}$	2	1
3	$2-x$	1	2	18	$x+5$	2	1
4	$x+3$	1	2	19	$5-x$	2	1
5	$3-x$	1	2	20	$3x+7$	2	1
6	$4-x$	2	1	21	$7-3x$	1	1

7	$x+4$	2	1	22	$2x+4$	1	1
8	$2x$	2	1	23	$4-2x$	1	1
9	$2x+5$	2	1	24	$5-3x$	1	1
10	$3-2x$	2	1	25	$3x+5$	1	1
11	$x-1$	1	1	26	$8-5x$	2	2
12	$2+x$	2	2	27	$5x+8$	2	2
13	$x+4$	1	2	28	$6x+3$	2	2
14	$1-x$	2	1	29	$3-6x$	2	2
15	$3x$	1	2	30	$\frac{x+3}{5}$	2	2

Таблиця 3

№ варианта	$f(\varphi)$	r_0	№ варианта	$f(\varphi)$	r_0
1	$\cos\varphi$	1	16	$\sin 2\varphi - \cos 2\varphi$	2
2	$\sin\varphi$	1	17	$\cos 2\varphi + \sin\varphi$	1
3	$\cos 2\varphi$	1	18	$\cos^2 \frac{3}{2}\varphi$	1
4	$\sin 2\varphi$	1	19	$\sin^2 \frac{3}{2}\varphi$	1
5	$\cos\frac{4\varphi}{3}$	1	20	$\sin^2 \frac{\varphi}{3}$	1
6	$\sin\frac{\varphi}{3}$	2	21	$\cos^2 \frac{\varphi}{3}$	1
7	$\cos\frac{2}{3}\varphi$	2	22	$\sin 3\varphi$	1
8	$\sin\frac{2}{3}\varphi$	2	23	$\cos 3\varphi$	1
9	$\cos\frac{\varphi}{2}$	2	24	$\cos\frac{\varphi}{5}$	2
10	$\sin\frac{\varphi}{2}$	2	25	$\sin\frac{\varphi}{5}$	2
11	$\frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}$	1	26	$\cos\frac{2}{3}\varphi + \sin\frac{2}{3}\varphi$	2

12	$\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}\varphi$	2	27	$\cos\frac{2}{3}\varphi+\sin4\varphi$	2
13	$\sin\varphi+\cos\varphi$	1	28	$\sin\frac{2}{3}\varphi+\cos\varphi$	2
14	$\sin\varphi-\cos\varphi$	2	29	$\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi$	2
15	$\sin2\varphi+\cos\varphi$	1	30	$\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi$	2

РЯДЫ

1. Числовые ряды

Задание 1. Найти сумму ряда.

1.1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

1.1.2. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{6}{n^2-4n+3}$.

1.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(6n-7)(6n+5)}$.

1.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

1.1.5. $\sum\limits_{n=8}^{\infty}\frac{4}{n^2-12n+35}$.

1.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

1.1.7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$.

1.1.8. $\sum\limits_{n=9}^{\infty}\frac{2}{n^2-14n+48}$.

1.1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

1.1.10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-3)}$.

1.1.11. $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\frac{6}{n^2-10+24}$.

1.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(7n-5)(7n+2)}$.

1.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

1.1.14. $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\frac{8}{n^2-8n+15}$.

1.1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(4n-3)(4n+5)}$.

1.1.16. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{10}{n^2-6+8}$.

1.1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}$.

1.1.18. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{12}{n^2-4n+3}$.

1.1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(4n-5)(4n+3)}$.

1.1.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{16}{n^2+4n+3}$.

1.1.21. $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{6}{(2n-3)(2n+3)}$.

1.1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{24}{n^2+4n+3}$.

1.1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

1.1.24. $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\frac{48}{n^2-6n+8}$.

1.1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$.

1.1.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{36}{n^2+n-2}$.

1.1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

1.1.28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2+7n+10}$.

1.1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(6n-5)(6n+1)}$.

1.1.30. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2-5n+4}$.

Задание 2. Исследовать сходимость ряда.

1.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

1.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{8n}$.

1.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3(n+2)^2}$.

1.2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n+1}$.

1.2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13}{(n+1)(n+2)}$.

1.2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$.

1.2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$.

1.2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n}$.

1.2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

1.2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+2}$.

1.2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$.

1.2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{4n}$.

1.2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$.

1.2.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)(n-2)}}$.

1.2.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+1)(n+2)}$.

1.2.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$.

1.2.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+1}$.

1.2.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$.

1.2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

1.2.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{17n+4}$.

1.2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha n}{n^4}$.

1.2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}\cdot n^2}{2^n}$.

1.2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$.

1.2.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-2}$.

1.2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5}}$.

1.2.26. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-4}$.

1.2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$.

1.2.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

1.2.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^4+5}$.

1.2.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

Задание 3. Исследовать сходимость ряда.

1.3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n(n^2+4)^n}$.

1.3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.

1.3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

1.3.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

1.3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

1.3.6. $\sum_{n=1}\left(\frac{7n}{2n+5}\right)^n$.

1.3.7. $\sum\limits_{n=1} \frac{(2n)!}{3^n \cdot n!}$. **1.3.8.** $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{(n-1)^2\sqrt{n-1}}$. **1.3.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

1.3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$. **1.3.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\ln(2n)}$. **1.3.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$.

1.3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$. **1.3.14.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. **1.3.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot e^n$.

1.3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!}$. **1.3.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. **1.3.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

1.3.19. $\sum\limits_{n=3} \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$. **1.3.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$. **1.3.21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

1.3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)\ln(n+7)}$. **1.3.23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$. **1.3.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-5}\right)^n$.

1.3.25. $\sum\limits_{n=1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. **1.3 26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^{3/4}(n+1)}$. **1.3.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-7}{2n+2}\right)^{n^2}$.

1.3.28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$. **1.3.29.** $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$. **1.3.30.** $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{(2n)!}$.

Задание 4. Исследовать сходимость ряда.

1.4.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n-7}{2^n+200}$. **1.4.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ n!\ e^n}{n^n\sqrt[3]{n^7}}$. **1.4.3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n+2}{6^n-3n}$.

1.4.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n}$. **1.4.5.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 8^n-3^n}{2\cdot 4^n+3\cdot 7^n}$. **1.4.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ n!e^n}{n^{n-2}(n^7+2)}$.

1.4.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n+4^n}{2\cdot 4^n-9\cdot 3^n}$. **1.4.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ **1.4.9.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n+7^n}{3\cdot 7^n-2\cdot 8^n}$.

1.4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ n!\ e^n}{n^n\cdot\sqrt{n+2}}$. **1.4.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{2n^7+3n^2}}$. **1.4.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n\cdot 2^n}{n!5^n}$.

1.4.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+5\sqrt[3]{n-5}}}$. **1.4.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-2}{\sqrt[6]{6n^2+n}\sqrt{n^3}}$.

1.4.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt[3]{3n+1}}{(2n+5)\cdot\sqrt[5]{n}}$. **1.4.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{\sqrt{n^3+2\cdot\sqrt[3]{6n^2}}}$.

1.4.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}}{n}$.

1.4.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{3n+5}}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[4]{4n^4+3n^3}}$.

1.4.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{7n+4}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt[3]{2n+1}}$.

1.4.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n!\cdot e^n}{n^n\sqrt[3]{n^4}}$.

1.4.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5n+3}{\sqrt{2n+7}\sqrt[3]{n^4}}$.

1.4.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n+3}{3^n-2}$.

1.4.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{n-1}}{n!e^n}$.

1.4.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)$.

1.4.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{n-2}(n^2+4)}{n!2^n}$.

1.4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\dfrac{1}{n}$.

1.4.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+3)!}{2^n}$.

1.4.28. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)}$.

1.4.29 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\ln n}$.

1.4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$.

Задание 5. Найти сумму ряда с точностью α.

1.5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{5n^4}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(3n)^2}$, $\alpha=0{,}001$.

1.5.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2(3n+2)}$, $\alpha=0{,}001$.

1.5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(5n+2)!}$, $\alpha=0{,}0001$.

1.5.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{4^n}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{(2n+3)^2(2n+2)^3}$, $\alpha=0{,}001$.

1.5.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+2)!!}$, $\alpha=0{,}0001$.

1.5.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\alpha=0{,}001$.

1.5.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{5n}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{7^n}$, $\alpha=0{,}0001$.

1.5.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!5^n}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n)!}$, $\alpha=0{,}001$.

1.5.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n)!}$, $\alpha=0{,}01$.

1.5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\cdot 2n}$, $\alpha=0{,}00001$.

1.5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{(2n)!}$, $\alpha=0{,}001$.

1.5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$, $\alpha = 0{,}001$.

1.5.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}$, $\alpha = 0{,}0001$.

1.5.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot n!}$, $\alpha = 0{,}00001$.

1.5.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(2n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$.

1.5.23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \cdot (2n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$.

1.5.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$, $\alpha = 0{,}01$.

1.5.25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}$, $\alpha = 0{,}001$.

1.5.26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, $\alpha = 0{,}001$.

1.5.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4}$, $\alpha = 0{,}01$.

1.5.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2+3)}$, $\alpha = 0{,}01$.

1.5.29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^2}$, $\alpha = 0{,}001$.

1.5.30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^2}$, $\alpha = 0{,}01$.

2. Степенные ряды и их приложения

Задание 1. Исследовать сходимость ряда.

2.1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 4^n}{7^n \cdot n^3}$.

2.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$.

2.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 3^n}{7^n \; n^3}$.

2.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

2.1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 7^n}{6^n \cdot \sqrt[7]{n^6}}$.

2.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n}$.

2.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \; \sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}}$.

2.1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n) \cdot 4^n}$.

2.1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n tg\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}}$.

2.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3} \cdot (x-2)^{3n}$.

2.1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 3^n}{4^n \cdot \sqrt[3]{n^4}}$.

2.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3} \cdot (x-4)^{2n}$.

2.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{(n+1)^3}}$.

2.1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

2.1.15. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{x^n \cdot 5^n}{7^n \; \sqrt{n^3}}$.

2.1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}$.

2.1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \cos\frac{3}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}}$.

2.1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}$.

2.1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot tg\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^4}}$.

2.1.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!}(x+4)^{2n+1}$.

2.1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n \cdot n^5}$.

2.1.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3}(x-4)^{3n}$.

2.1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^4+1}}$.

2.1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$.

2.1.25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \ln^3 n}$.

2.1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

2.1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n tg\frac{1}{n}}{n^2}$.

2.1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$.

2.1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt[4]{n^5}}$.

2.1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n^4}}$.

Задание 2. Используя известные разложения элементарных функций в ряд, представить в виде степенного ряда "сходные" функции.

2.2.1. $f(x) = e^{1-2x^3}$.

2.2.2. $f(x) = 2^x$.

2.2.3. $f(x) = 2^x \cdot 3^{-x}$.

2.2.4. $f(x) = (2+x)e^{x-1}$.

2.2.5. $f(x) = \sin(a+x)$.

2.2.6. $f(x) = \cos(a+x)$.

2.2.7. $f(x) = \cos^2 x$.

2.2.8. $f(x) \sin x \cos 3x$.

2.2.9. $f(x) \sin 2x \cos x$.

2.2.10. $f(x) = \ln(1-x^2)$.

2.2.11. $f(x) = \ln(4+3x-x^2)$.

2.2.12. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

2.2.13. $f(x) = sh^2 x$.

2.2.14. $f(x) = ch^2 x$.

2.2.15. $f(x) = \frac{1}{x^2+7x+12}$.

2.2.16. $f(x) = \frac{x}{x^2+4x+3}$.

2.2.17. $f(x) = \ln\frac{1+x^2}{1+x}$.

2.2.18. $f(x) = arctg\frac{x^2}{2}$.

2.2.19. $f(x) = arcctg\frac{x^2}{2}$.

2.2.20. $f(x) = \arcsin 2x^2$.

2.2.21. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$.

2.2.22. $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

2.2.23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

2.2.24. $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

2.2.25. $f(x) = \sin^2 x$.

2.2.26. $f(x) = \ln(4+x^2)$.

2.2.27. $f(x) = \ln(2x+3)$.

2.2.28. $f(x) = \ln(x^2+5x+6)$.

2.2.29. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

2.2.30. $f(x) = \frac{1}{2x^2+5x-3}$.

Задание 3. Вычислить в (нечетных вариантах) определенный интеграл с точностью $\alpha = 0{,}01$. В четных вариантах найти приближенное решение задачи Коши.

2.3.1. $\int\limits_0^{0.5} \cos\frac{x^2}{4}dx$.

2.3.2. $y' = x + x^2 + y^2;\quad y(0) = 1$.

2.3.3. $\int\limits_0^{0.2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

2.3.4. $y' = x + 2y^2;\quad y(0) = 0$.

2.3.5. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx$.

2.3.6. $y'' - xy^2 = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

2.3.7. $\int\limits_0^{0.25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

2.3.8. $y' = y^2 + x;\quad y(0) = 1$.

2.3.9. $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2.3.10. $y'' + x^2 y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

2.3.11. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$.

2.3.12. $y'' = (2x-1)y - 1;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

2.3.13. $\int\limits_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

2.3.14. $y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 1$.

2.3.15. $\int\limits_0^{0.2} e^{-3x^2}dx$.

2.3.16. $y'' = xy^2 - y';\ y'(0) = 2,\ y(0) = 1$.

2.3.17. $\int\limits_0^{0.1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$.

2.3.18. $y'' = xy' - y + 1;\ y(0) = y'(0) = 0$.

2.3.19. $\int\limits_0^{0.1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

2.3.20. $y' = x + y^2;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

2.3.21. $\int\limits_0^{0.2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$.

2.3.22. $y' = y^2 + x^3;\quad y(0) = \frac{1}{2}$.

2.3.23. $\int\limits_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

2.3.24. $y'' - xy' - y = 0;\ y(0) = 1\ y'(0) = 0$.

2.3.25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

2.3.26. $y'' = yy' - x^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

2.3.27. $\int\limits_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

2.3.28. $\left(1+x^2\right)y'' + xy' - y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

2.3.29. $\int\limits_0^{0.5} \cos\left(4x^2\right)dx$.

2.3.30. $y'' = xy' - y + e^x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

3. Ряды Фурье

Задание 1. Представить рядом Фурье функцию $f(x)$.

3.1.1. $f(x)=\begin{cases}-1/2, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

3.1.2. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0, \quad a<x\le\pi,\\ 1/2, & x=0, \quad x=a,\\ 1, & 0<x<a.\end{cases}$

3.1.3. $f(x)=\begin{cases}-\pi/4, & -\pi\le x<0,\\ \pi/4, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

3.1.4. $f(x)=\pi+x, \quad -\pi\le x\le\pi$.

3.1.5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

3.1.6. $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi<x\le 0,\\ 3x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

3.1.7. $f(x)=5x+2, \quad -\pi\le x\le\pi$.

3.1.8. $f(x)=\pi^2-x^2, \quad -\pi<x<\pi$.

3.1.9. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{(\pi+x)}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

3.1.10. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le\pi/2,\\ -x, & -\pi/2<x<\pi/2.\\ 0, & \pi/2\le x<\pi.\end{cases}$

3.1.11. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<2\pi,\\ \pi, & x=2\pi.\end{cases}$

3.1.12. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<3/2,\\ -1, & 3/2<x<3.\end{cases}$

3.1.13. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi/2,\\ -1, & \pi/2<x<3\pi/2,\\ 1, & 3\pi/2<x<2\pi.\end{cases}$

3.1.14. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0.\\ -x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

3.1.15 . $f(x)=e^x-1, \quad -2<x<2$.

3.1.16. $f(x)=\begin{cases}1/2, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}.\\ 2, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$

3.1.17. $f(x)=5x-1, \quad -5<x<5$.

3.1.18. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<\pi/2,\\ 1, & \pi/2\le x<3\pi/2.\\ -1, & 3\pi/2<x<2\pi.\end{cases}$

3.1.19. $f(x)=2x-3, \quad -3<x<3$.

3.1.20. $f(x)=\begin{cases}6, & 0<x<2.\\ 3x, & 2<x<4.\end{cases}$

3.1.21. $f(x)=|x|, \quad -\pi<x\le\pi$.

3.1.22. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi.\\ 1/2, & x=\pi.\\ 0, & \pi<x<2\pi.\end{cases}$

3.1.23. $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 3x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

3.1.24. $f(x)=e^{-x}, \quad -\pi<x<\pi$.

3.1.25. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

3.1.26. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x<3.\end{cases}$

3.1.27. $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 1/2,\\ 1/2, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}$

3.1.28. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0.\\ x, & 0<x<2.\end{cases}$

3.1.29. $f(x)=x^2,\ \ -1\le x\le 1.$

3.1.30. $f(x)=|x|,\ \ -1\le x\le 1.$

Задание 2. Функцию $f(x)$ **разложить в ряд Фурье: а) в нечетных вариантах по косинусам кратных дуг; б) в четных вариантах по синусам кратных дуг.**

3.2.1. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ \ 0<x<\pi.$

3.2.2. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\pi/2,\\ 0, & \pi/2\le x\le\pi.\end{cases}$

3.2.3. $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ x+7, & 0<x<\pi/2,\\ 0, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

3.2.4. $f(x)=x^2,\ \ 0<x<\pi.$

3.2.5. $f(x)=\begin{cases}\pi/2, & 0<x<\pi/2,\\ 0, & \pi/2\le x<\pi.\end{cases}$

3.2.6. $f(x)=\pi/4,\ \ 0<x<\pi.$

3.2.7. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$

3.2.8. $f(x)=x-\frac{x^2}{2},\ \ 0\le x\le 1.$

3.2.9. $f(x)=x^2,\ \ 0<x<2\pi.$

3.2.10. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi/2.\\ 0, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

3.2.11. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2.\end{cases}$

3.2.12. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ x, & 1\le x<2.\end{cases}$

3.2.13. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<\pi/2,\\ 1, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

3.2.14. $f(x)=e^{ax},\ \ 0<x<\pi.$

3.2.15. $f(x)=e^{x},\ \ 0<x<\ln 2.$

3.2.16. $f(x)=\frac{x}{3},\ \ 0<x<3.$

3.2.17. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\pi/2,\\ \pi/2, & \pi/2\le x\le\pi.\end{cases}$

3.2.18. $f(x)=\frac{x}{2},\ \ 0\le x\le 1.$

3.2.19. $f(x)=\sin ax,\ \ 0\le x\le\pi.$

3.2.20. $f(x)=x\cos x,\ \ 0<x<\pi.$

3.2.21. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ & a<x<\pi.\end{cases}$

3.2.22. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi/2,\\ 0, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

3.2.23. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2a}, & 0\le x\le 2a,\\ 0, & 2a<x\le\pi.\end{cases}$

3.2.24. $f(x)=x(l-x).\quad 0<x<l.$

3.2.25. $f(x)=\begin{cases}0{,}3, & 0<x<0{,}5,\\ -0{,}3, & 0{,}5<x<1.\end{cases}$

3.2.26. $f(x)=\dfrac{\pi-2x}{4}.\quad 0<x<\pi.$

3.2.27. $f(x)=x\cos x,\quad 0<x<\pi.$

3.2.28. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\pi/2,\\ \pi/2, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

3.2.29. $f(x)=\left\{\dfrac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.\right.$

3.2.30. $f(x)=\cos 2x,\quad 0\le x\le\pi.$

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$.

1. $f(x)=\begin{cases}1, & при\ |x|<1,\\ 0, & при\ |x|\geqslant 1.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}x, & при\ |x|<1,\\ 0, & при\ |x|\geqslant 1.\end{cases}$

3. $f(x)=e^{-x^2}.$

4. $f(x)=e^{-x},\quad 0\le x<+\infty$ (продолжить функцию на $(-\infty, 0)$ четным образом).

5. $f(x)=e^{-x},\quad 0\le x<+\infty$ (продолжить функцию на $(-\infty, 0)$ нечетным образом).

6. $f(x)=e^{-\alpha|x|},\quad при\ \alpha>0.$

7. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & при\ |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & при\ |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & при\ |x|\le\pi,\\ 0, & при\ |x|>\pi.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}1+x, & при\ -1<x<0,\\ 1-x, & при\ 0\le x<1,\\ 0, & при\ |x|\ge 1.\end{cases}$

10. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2},\quad при\ a>0.$

11. $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2},\quad при\ a>0.$

12. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\quad x\in R,\quad \alpha>0.$

13. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x,\quad x\in R,\quad \alpha>0.$

14. $f(x)=\operatorname{sign}(x-a)-\operatorname{sign}(x-b),\quad при\ (b>a).$

15. $f(x)=e^{-2x^2}.$

16. $f(x)=xe^{-x^2}.$ $= e^{-|x|}$

17. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ при $f(-x)=-f(x)$.

18. $f(x)=\begin{cases}x, & при\ |x|\le 1,\\ 0, & при\ |x|>1.\end{cases}$

19. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$

20. $f(x)=\begin{cases}x-1, & при\ 0\le x\le 1,\\ 0, & при\ 1<x<+\infty.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & при\ 0\le x<\dfrac{1}{3}, \\ 0, & при\ x<0,\ x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

22. $f(x)=2^{-x}$, при $o\le x<+\infty$.

23. $f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & |x|<1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1, \\ 1, & 1<|x|\le 2, \\ 0, & |x|>2. \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{|x|}{2}, & при |x|\le 2, \\ 0, & при |x|>2. \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} 2-3|x|, & при |x|\le\dfrac{2}{3}, \\ 0, & \dfrac{2}{3}<|x|. \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & при\ x>0, \\ 0, & при\ x=0, \\ -e^{x}, & при\ x<0. \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & при\ |x|\le 1, \\ 1, & при\ 1<|x|\le 2, \\ 0, & при\ |x|>2. \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & при\ |x|\le 1, \\ \dfrac{1}{2}, & при\ 1<|x|\le 2, \\ 0, & при\ |x|>2. \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} 1, & при\ o\le x<2, \\ \dfrac{1}{2}, & при\ x=2, \\ 0, & при\ x>2. \end{cases}$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Двойные интегралы

Задание 1. Изменить порядок интегрирования.

1.1.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$.

1.1.2. $\int\limits_{1/2}^1 dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{4}+y-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

1.1.3. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-2y-1}^{y^2} f(x,y)dx$.

1.1.4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx$.

1.1.5. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$.

1.1.6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

1.1.7. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

1.1.8. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x,y)dx$. **1.1.9.** $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx$. **1.1.10.** $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{\sqrt{12-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

1.1.11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx$. **1.1.12.** $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx$.

1.1.13. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1+\sqrt{y}}^{\cos\frac{\pi y}{2}} f(x,y)dx$. **1.1.14.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx$. **1.1.15.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2y-y^2} f(x,y)dx$.

1.1.16. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} f(x,y)dy$. **1.1.17.** $\int\limits_0^6 dx \int\limits_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y)dy$. **1.1.18.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^4}^{x^2} f(x,y)dy$.

1.1.19. $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$. **1.1.20.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{(x-1)^2} f(x,y)dy$. **1.1.21.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)dy$.

1.1.22. $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)dy$. **1.1.23.** $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$. **1.1.24.** $\int\limits_e^{e^2} dx \int\limits_{\ln x}^{\ln x^2} f(x,y)dy$.

1.1.25. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$. **1.1.26.** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$. **1.1.27.** $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2}-x} f(x,y)dy$.

1.1.28. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)dy$. **1.1.29.** $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$. **1.1.30.** $\int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{2}{3}(x-1)}^{\log_2 x} f(x,y)dy$.

Задание 2. Найти площадь области, ограниченной линиями.

1.2.1. $\rho=(1+\cos\varphi), \rho=\cos\varphi$. **1.2.2.** $y^2 = x+1,\quad x+y=1$. **1.2.3.** $xy=4, x=1, y=2$.

1.2.4. $y=x^2-2x,\quad y=x$. **1.2.5.** $\rho=3\cos\varphi,\quad \rho=2-\cos\varphi$.

1.2.6. $y^2=2x(2x\le y^2), y^2=4x-x^2$. **1.2.7.** $\rho=1-\sin\varphi$. **1.2.8.** $xy=1, x+y=\frac{5}{2}$.

1.2.9. $\rho^2=-2\cos 2\varphi, \rho=1(\rho\ge 1)$. **1.2.10.** $\rho^2=4\sin 2\varphi, \rho=1(0\le\rho\le 1)$.

1.2.11. $\rho=2\sin\varphi, \rho=4\sin\varphi$. **1.2.12.** $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$.

1.2.13. $\rho=2\sin\varphi,\ \rho=1(\rho\ge 1)$. **1.2.14.** $y^2=1-x, y=1+x$.

1.2.15. $\rho=2\sin\varphi, \rho=\sin\varphi$. **1.2.16.** $xy=\frac{1}{2},\ xy=2,\ y=\frac{x}{2}, y=2x$.

1.2.17. $\rho = 2 - \cos\varphi, \rho = \cos\varphi$.

1.2.18. $y = arctg\sqrt{x},\ y + x^2 = 0,\ x = 1$.

1.2.19. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi,\ \rho = 1(\rho \ge 1)$.

1.2.20. $x^2 - y^2 = 1,\ y = 1,\ y = -1$.

1.2.21. $\rho^2 = 2\cos 2\varphi,\ \rho = 1(0 \le \rho \le 1)$.

1.2.22. $y = x^2 e^{-x},\quad y = 0,\quad x = 2$.

1.2.23. $\rho = tg\varphi,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

1.2.24. $x^2 + 4y^2 = 8a^2,\ x^2 - 3y^2 = a^2,\ x \ge a$.

1.2.25. $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi},\ \rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le \rho \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

1.2.26. $y = x,\ y = -x,\ -y^2 + 2x^2 = 1$.

1.2.27. $\rho = \cos 3\varphi,\ \rho = \dfrac{1}{2},\ \rho \ge \dfrac{1}{2}$.

1.2.28. $y = x\ln^2 x,\ y = x\ln x,\ o < x \le 1$.

1.2.29. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi,\ \rho = 1,\ \rho \ge 1$.

1.2.30 $.2x^2 + 2y^2 = 2x + 1,\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 \ge 1$.

Задание 3. Неоднородная плоская фигура (пластина) с известной плотностью $\gamma = \gamma(x,y)$ ограничена заданными линиями.

а) В вариантах 1.3.1 - 1.3.10 найти массу пластины.

б) В вариантах 1.3.11-1.3.20 найти статический момент пластины относительноосиOX.

в) В вариантах 1.3.21-1.3.30 найти статический момент пластины относительно оси OY.

1.3.1. $y = x^2,\ x + y = 2,\ y - x = 2(x \ge 0),\ \gamma = x + 2$.

1.3.2. $x = y,\ x\text{-}3y=1,\ y=1,\ y=3,\ \gamma = y$.

1.3.3. $x^2 + y^2 = 4x,\quad x^2 + y^2 = 4y(xy \ge 0),\quad \gamma = x$.

1.3.4. $y^2 = x + 4,\quad y^2 = 4 - x,\quad y = 0(y \ge 0),\quad \gamma = y$.

1.3.5. $x^2 + y^2 = 1,\quad x^2 + y^2 = 9,\quad x = 0,\quad y = 0(x \ge 0,\quad y \ge 0),\quad \gamma = x + y$.

1.3.6. $y = x,\ x + y = 2a,\ x = 0(a > 0),\ \gamma = x^2 + y^2$.

1.3.7. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\quad \gamma = x(x \ge 0)$.

1.3.8. $y = 3x^2,\quad y = 6 - 3x,\quad \gamma = x^2$.

1.3.9. $|x| + |y| \le 1,\quad \gamma = |x| + |y|$.

1.3.10. $y^2 = 2x,\quad x + y = 4,\quad x + y = 12,\quad y = 0,\quad \gamma = x + y$.

1.3.11. $ay = x^2,\quad x + y = 2a(a > 0),\quad \gamma = 1$.

1.3.12. $y = 0,\quad y = \sin x,\quad 0 \le x \le \pi,\quad \gamma = 1$.

1.3.13. $y^2 = x,\ x^2 = y,\ \gamma = 1$.

1.3.14. $x = y^2,\quad x = 1,\quad \gamma = x^2 y$.

1.3.15. $x^2 + y^2 = a^2,\quad \gamma = xy(y \ge 0)$.

1.3.16. $y = x,\quad y = x + a,\quad y = a,\quad y = 3a(a > 0),\quad \gamma = \dfrac{x^2 + y^2}{y^2}$.

1.3.17. $x^2 + y^2 = 4,\quad x + y - 2 = 0,\quad x \ge 0,\quad \gamma = xy$.

1.3.18. $x=0,\ \ x=1,\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ \gamma=\dfrac{3y}{1+x^2}$. **1.3.19.** $y=x^2,\ \ y^2=x,\ \ \gamma=x$.

1.3.20. $y=0,\ \ y=x,\ \ x=1,\ \ \gamma=x$. **1.3.21.** $ay=x^2,\ x+y=2a(a>0),\ \gamma=1$.

1.3.22. $x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ \gamma=x^2y^5$. **1.3.23.** $x+|y|=1,\ \ x=0,\ \ \gamma=x$.

1.3.24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ a\ge 0,\ \gamma=y$. **1.3.25.** $x^2+y^2=ax,\ \ x\ge 0,\ \ \gamma=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1.3.26. $x^2+y^2=25,\ \ y=5-3x(y\ge 5-3x),\ \gamma=x$. **1.3.27.** $x=0,\ y=-1,\ x=1,\ y=0,\ \gamma=e^{xy}$.

1.3.28. $x-y=-1,\ x+y=-1,\ x=0,\ \gamma=x^2y^2$. **1.3.29.** $x=0,\ \ y=1-x,\ \ y=x^2-1,\ \ \gamma=x$.

1.3.30. $x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=1,\ \gamma=\dfrac{x}{1+y^2}$.

Задание 4. Неоднородная плоская фигура D(пластина) с известной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$ ограничена заданными линиями. Найти момент инерции пластины.

а) В вариантах 1.4.1 - 1.4.10 относительно оси OX; б) В вариантах 1.4.11 - 1.4.20 относительно оси OY; в) В вариантах 1.4.21 - 1.4.30 относительно начала координат.

1.4.1. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x(y\ge 0),\ \gamma=6x^2+4y$.

1.4.2. $D:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0(x\ge 0,\ y\ge 0),\ \gamma=\dfrac{(y-x)}{x^2+y^2}$.

1.4.3. $D:\ x=4,\ y=0,\ y^2=4x(y\ge 0),\ \gamma=\dfrac{27x^2}{16}+\dfrac{3y}{2}$.

1.4.4. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=x(y\ge 0),\ \gamma=6x+5y^2$.

1.4.5. $D:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0(x\le 0,\ y\ge 0),\ \gamma=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

1.4.6. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=9x(y\ge 0),\ \gamma=3x^2+2y$.

1.4.7. $D:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0(x\le 0,\ y\ge 0),\ \gamma=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

1.4.8. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x(y\ge 0),\ \gamma=6x+8y$.

1.4.9. $D:\ x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0(x\ge 0,\ y\le 0),\ \gamma=\dfrac{3x+y}{x^2+y^2}$.

1.4.10. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=x(y\ge 0),\ \gamma=x+y^2$.

2. Тройные интегралы

Задание 1. Вычислить тройной интеграл.

2.1.1. $\iiint\limits_V x^2 \sin(4\pi xy)\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=1, & y=\dfrac{x}{2}, \quad y=0. \\ z=0, & z=8\pi. \end{cases}$

2.1.2. $\iiint\limits_V 2y^2ze^{xyz}\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=1, & y=1, & z=1. \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$

2.1.3. $\iiint\limits_V 3y^2\,dxdydz;\ V:\begin{cases} y=2x, & y=0, & x=2, \\ z=xy, & z=0. \end{cases}$

2.1.4. $\iiint\limits_V (60y+90z)\,dxdydy,\ V:\begin{cases} y=x, & y=0, \quad x=1, \\ z=x^2+y^2, & z=0. \end{cases}$

2.1.5. $\iiint\limits_V y^2z\cos\dfrac{xyz}{9}\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=9, & y=1, & z=2\pi, \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$

2.1.6. $\iiint\limits_V y^2e^{-xy}\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=0, & y=-2, & y=4x, \\ z=0, & z=1. \end{cases}$

2.1.7. $\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right)dxdydz;\ V:\begin{cases} y=9x, & y=0, & x=1. \\ z=\sqrt{xy}, & z=0. \end{cases}$

2.1.8. $\iiint\limits_V 15\left(y^2+z^2\right)dxdydz;\ V:\begin{cases} z=x+y, & x+y=1, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

2.1.9. $\iiint\limits_V y^2z\cos\dfrac{xyz}{3}\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=3, & y=1, & z=2\pi. \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$

2.1.10. $\iiint\limits_V 8y^2ze^{-xyz}\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=2, & y=-1, & z=2. \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$

2.1.11. $\iiint\limits_V y^2\,dxdydz;\ V:\begin{cases} z=10(3x+y), & x+y=1, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

2.1.12. $\iiint\limits_V x^2z\,dxdydz;\ V:\begin{cases} y=3x, & y=0, & x=2. \\ z=xy, & z=0. \end{cases}$

2.1.13. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)\,dxdydz;\ V:\begin{cases} x=2, & y=\pi, & z=1. \\ x=0, & y=0. & z=0. \end{cases}$

2.1.14. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}xy\right)dxdydz;\ V:\begin{cases} x=0, & y=-1, \quad y=\dfrac{x}{2}. \\ z=0, & z=-\pi^2. \end{cases}$

2.1.15. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} y = x, & y = 0, \quad x = 2, \\ z = xy, & z = 0. \end{cases}$

2.1.16. $\iiint\limits_V (x+y)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} y = x, & y = 0, \quad x = 1, \\ z = 30x^2 + 60y^2, & z = 0. \end{cases}$

2.1.17. $\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = -1, & y = 2, \quad z = 1, \\ x = 0, & y = 0. \quad z = 0. \end{cases}$

2.1.18. $\iiint\limits_V x^2z\sin\frac{xyz}{4}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = 0, & y = 2\pi, \quad z = 4, \\ x = 0, & y = 0. \end{cases}$

2.1.19. $\iiint\limits_V |3x+4y|\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} y = x, & y = 0, \quad x = 1, \\ z = 5(x^2+y^2), & z = 0. \end{cases}$

2.1.20. $\iiint\limits_V (4+8z^3)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} y = x, & y = 0, \quad x = 1, \\ z = \sqrt{xy}, & z = 0. \end{cases}$

2.1.21. $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = 1, & y = 2x, \quad y = 0, \\ z = 0, & z = 4. \end{cases}$

2.1.22. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = 0, & y = -1, \quad y = x, \\ z = 0, & z = 2\pi^2. \end{cases}$

2.1.23. $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} z = x^2+3y^2, & z = 0, \\ y = x, & y = 0. \quad x = 1. \end{cases}$

2.1.24. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} y = 36x, & y = 0, \quad x = 1, \\ z = \sqrt{xy}, & z = 0. \end{cases}$

2.1.25. $\iiint\limits_V y^2e^{\frac{xy}{2}}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = 0, & y = 2, \quad y = 2x, \\ z = 0, & z = -1. \end{cases}$

2.1.26. $\iiint\limits_V x^2z\sin\frac{xyz}{2}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = 1, & y = 4, \quad z = \pi, \\ x = 0, & y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

2.1.27. $\iiint\limits_V (9+18z)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} y = 4x, & y = 0, \quad x = 1. \\ z = \sqrt{xy}, & z = 0. \end{cases}$

2.1.28. $\iiint\limits_V (x^2+4y^2)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} z = 20(2x+y), & x + y = 1, \\ x = 0, & y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

2.1.29. $\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x = 0, & y = 1, \quad y = 2x, \\ z = 0, & z = \pi^2. \end{cases}$

2.1.30. $\iiint\limits_V x^2 \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) dxdydz;\quad V: \begin{cases} x=2, & y=x, \quad y=0, \\ z=0, & z=\pi. \end{cases}$

Задание 2. Вычислить тройной интеграл: а) в вариантах 2.2.1. - 2.2.15., используя цилиндрические координаты; б) в вариантах 2.2.16 - 2.2.30 , используя сферические координаты.

2.2.1. $\iiint\limits_V zdxdydz;\quad V: \begin{cases} z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \\ \frac{9}{2}z=x^2+y^2. \end{cases}$

2.2.2. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V: \begin{cases} x^2+y^2=2x, & y=0. \\ z=0, & z=9(y\ge 0). \end{cases}$

2.2.3. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V: \begin{cases} x^2+y^2=-2x, & y=0. \\ z=0, & z=9(y\ge 0). \end{cases}$

2.2.4. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V: \begin{cases} x^2+y^2=2y, & x=0. \\ z=0, & z=9(x\ge 0). \end{cases}$

2.2.5. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V: \begin{cases} x^2+y^2=-2y, & x=0. \\ z=0, & z=9(x\ge 0). \end{cases}$

2.2.6. $\iiint\limits_V xydxdydz;\quad V: \begin{cases} z=\frac{21}{2}\sqrt{x^2+y^2}, & x\ge 0. \\ z=\frac{23}{2}-x^2-y^2, & y\ge 0. \end{cases}$

2.2.7. $\iiint\limits_V zdxdydz;\quad V: \begin{cases} z=\sqrt{9-x^2-y^2}, & x\ge 0. \\ \frac{5}{4}z=x^2+y^2, & y\ge 0. \end{cases}$

2.2.8. $\iiint\limits_V xyzdxdydz;\quad V: \begin{cases} z=\sqrt{11-x^2-y^2}, & x\le 0. \\ \frac{2z}{3}=x^2+y^2, & y\le 0. \end{cases}$

2.2.9. $\iiint\limits_V xyzdxdydz;\quad V: \begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, & x\ge 0. \\ z=x^2+y^2, & y\ge 0. \end{cases}$

2.2.10. $\iiint\limits_V zydxdydz;\quad V: \begin{cases} z=\frac{15}{2}\sqrt{x^2+y^2}, & x\le 0. \\ z=\frac{17}{2}-x^2-y^2, & y\le 0. \end{cases}$

2.2.11. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V: \begin{cases} x^2+y^2=4x, & y=0. \\ z=0, & z=3(y\ge 0). \end{cases}$

2.2.12. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2=-4x, & y=0, \\ z=0, & z=3\,(y\geq 0). \end{cases}$

2.2.13. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2=4y, & x=0, \\ z=0, & z=3\,(x\geq 0). \end{cases}$

2.2.14. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2=-4y, & x=0, \\ z=0, & z=3\,(x\geq 0). \end{cases}$

2.2.15. $\iiint\limits_V xy\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} z=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}, & x\geq 0, \\ z=\dfrac{5}{2}-x^2-y^2, & y\geq 0. \end{cases}$

2.2.16. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 1, & x\geq 0, \\ z\geq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, & y\geq 0. \end{cases}$

2.2.17. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 2, & x\leq 0. \\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}, & y\leq 0. \end{cases}$

2.2.18. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 3, & x\leq 0, \\ z\geq\sqrt{3(x^2+y^2)}; & y\leq 0. \end{cases}$

2.2.19. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} 2\leq x^2+y^2+z^2\leq 4, & x\geq 0, \\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}, & y\geq 0. \end{cases}$

2.2.20. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 1, & x\geq 0, \\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

2.2.21. $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 9, & x\geq 0, \\ z\geq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}, & y\leq 0. \end{cases}$

2.2.22. $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4, & x\leq 4, \\ z\geq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{8}}, & y\geq 0. \end{cases}$

2.2.23. $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 1, & x\leq 0. \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}\leq z\leq 0, & y\leq 0. \end{cases}$

2.2.24. $\iiint\limits_V z^2 dxdydz;\quad V:\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, & x \ge 0, \\ z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{8}}, & y \ge 0. \end{cases}$

2.2.25. $\iiint\limits_V z^2 dxdydz;\quad V:\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, & x \le 0, \\ z \ge -\sqrt{x^2 + x^2}, & y \ge 0. \end{cases}$

2.2.26. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, & x \le 0, \\ -\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, & y \le 0. \end{cases}$

2.2.27. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1, & x \ge 0. \\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}}, & y \ge 0. \end{cases}$

2.2.28. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4. & x \ge 0, \\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}, & y \le 0. \end{cases}$

2.2.29. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9, & x \le 0. \\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{8}} \le z \le 0, & y \ge 0. \end{cases}$

2.2.30. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1, & x \le 0, \\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}}, & y \le 0. \end{cases}$

Задание 3. Найти объем области Ω (тройным интегрированием), ограниченной поверхностями.

2.3.1. $z=x^2 + y^2,\ z = x^2 +2y^2,\ y= x,\ y=2x,\ x=1.$

2.3.2. $z^2=x^2 + y^2,\ 2z^2 = x^2 +y^2 + 4$

2.3.3. $x^2 + y^2+z^2 = 9,\ x^2 + y^2+z^2 = 6x.$

2.3.4. $z =xy,\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0\ .$

2.3.5. $2z^2 = x^2 + y^2 +4,\ x^2 + y^2 = 4.$

2.3.6. $x^2 + y^2+z^2 = 2z,\ z^2 = x^2 + y^2.$

2.3.7. $y + z = 4,\ z=0,\ y=0.$

2.3.8. $2x^2 + 2y^2 - 4 = z^2,\ x^2 + y^2 = 4.$

2.3.9. $x^2 + y^2+z^2=1\ ,\ z^2 = x^2 + y^2.$

2.3.10. $z = 8 - y^2,\ z = y^2,\ x=3,\ x=5.$

2.3.11. $x^2 + y^2+z^2 = -4y,\ x^2 + y^2+z^2 = 4.$

2.3.12. $z^2 + y^2 = x^2,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$

2.3.13. $z= - 2,\ z = 3,\ y = x^2 + 4,\ y = - x^2 + 6.$

2.3.14. $4z = x^2+y^2,\ 4x= x^2+y^2,\ z\ge 0.$

2.3.15. $x^2 + y^2+z^2=1,\ x^2 + y^2- z^2=0.$

2.3.16. $z = 2,\ x + 3y = 3,\ x=0,\ y = 0,\ z=3 + x^2 + 9 y^2.$

2.3.17. $2x^2 +2 y^2+3z^2 = 1,\ 3z^2= 2y^2 + 2 z^2.$

2.3.18. $x^2 + y^2+z^2=1,\ y^2= 3x^2 +3z^2.$

2.3.19. $y=2,\ y=3 - x^2 - z^2,\ x=0,\ z=0,\ x+ z=1.$

2.3.20. $x^2 + y^2=1,\ z^2 = x^2 + y^2 +1.$

2.3.21. $x^2+y^2+z^2=2y,\ y^2=x^2+z^2.$

2.3.22. $z=0,\ y+z=2,\ y=x^2.$

2.3.23. $y^2=1+z^2-x^2,\ x^2+y^2=2,\ z\geq 0.$

2.3.24. $x^2=3y^2+3z^2,\ \ x^2-2x+y^2+z^2=0.$

2.3.25. $x^2+z^2=y^2,\ x=0,\ z=0,\ y=0,\ x=2,\ y=2.$

2.3.26. $2z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2+z^2=3.$

2.3.27. $x^2+y^2+z^2=16,\ \ x^2+y^2+z^2=4.$

2.3.28. $z=x^2+y^2+2,\ x=0,\ y=0,\ t=0,\ x=4,\ y=4.$

2.3.29. $x^2+y^2+z^2=49,\ x^2+y^2+z^2=14z.$

2.3.30. $z^2=x^2+y^2,\ 3z^2=x^2+y^2,\ 0\leq z\leq 1.$

Задание 4. Найти массу области Ω (тройным интегрированием), с известной плотностью $\gamma=\gamma(x,y,z)$ и ограниченной заданными поверхностями.

2.4.1. $x^2+y^2+z^2=1.\ z\geq 0,\ y\leq 0;\ \gamma=x^2+y^2+z^2.$

2.4.2. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1,\ \gamma=x+y+z.$

2.4.3. $2z=x^2+y^2,\ z=2;\ \gamma=x^2+y^2.$

2.4.4. $x^2+y^2+z^2\leq 1;\ \gamma=2x^2+2y^2+2z^2.$

2.4.5. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1;\ \gamma=xz(1-y).$

2.4.6. $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=2,\ \gamma=z\sqrt{x^2+y^2}.$

2.4.7. $x^2+y^2+z^2\leq 2z;\ \gamma=x^2+y^2+z^2.$

2.4.8. $x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=2,\ z=5,\ \gamma=x^2y^2z^2.$

2.4.9. $9x^2=4(z^2+y^2),\ x=2;\ \gamma=x.$

2.4.10. $4x^2+4y^2+4z^2\leq 1,\ x^2+y^2+z^2\leq z;\ \gamma=z^2.$

2.4.11. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1;\ \gamma=(x+y+z)^{-3}.$

2.4.12. $x^2+y^2=8, z=0, z=3;\ \gamma=x^2+y^2.$

2.4.13. $x^2+y^2+z^2\leq 2,\ z\geq 0;\ \gamma=z.$

2.4.14. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2+z^2=1;\ \gamma=x^2y^2z^2.$

2.4.15. $y^2+z^2=4,\ x=2,\ x=6;\ \gamma=y^2+z^2.$

2.4.16. $x^2+y^2+z^2\leq 6z;\ \gamma=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}.$

2.4.17. $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=3;\ \gamma=x.$

2.4.18. $2x=y^2+z^2,\ y-z=0,\ y=0,\ x=8;\ \gamma=xy.$

2.4.19. $x^2+y^2\leq(3z)^2,\ z\leq 1;\ \gamma=xy.$

2.4.20. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1-y-z;\ \gamma=z^2.$

2.4.21. $x\geq 0.\ x^2=y^2+z^2,\ x=5;\ \gamma=x^2.$

2.4.22. $z^2\geq x^2+y^2,\ z\leq 1;\ \gamma=yz.$

2.4.23. $z=10x+30y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;\ \gamma=x^2.$

2.4.24. $x^2+z^2=2y,\ x=\sqrt{3}z,\ z=0,\ y=2;\ \gamma=yz.$

2.4.25. $x^2+y^2+z^2\geq 8,\ x^2+y^2+z^2\leq 4;\ \gamma=x^2+y^2+z^2.$

2.4.26. $y=x.\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=30x^2+60y^2;\ \gamma=x+y.$

2.4.27 $4z=x^2+y^2,\ y=\sqrt{3}x,\ z=4,\ y=0;\ \gamma=xz.$

2.4.28 $x^2+y^2+z^2\geq 6.\ x^2+y^2+z^2\leq 12,\ \gamma=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}.$

2.4.29 $y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=3x^2+2y^2,\ z=0;\ \gamma=8y+12z.$

2.4.30 $x^2+z^2=25,\ y^2=x^2+z^2+1,\ y=0;\ \gamma=z.$

Задание 5. Область Ω ограничена заданными поверхностями и плотность в каждой точке области $\gamma\equiv 1$. Найти: а) в вариантах 2.5.1 - 2.5.10 статический момент области

Ω относительно плоскости XOY; б) в вариантах 2.5.11 - 2.5.20 статический момент области Ω относительно плоскости YOZ; в) в вариантах 2.5.21 - 2.5.30 статический момент области Ω относительно плоскости XOZ.

2.5.1. $z=12x^2+12y^2,\ z=12.$

2.5.2. $z=\sqrt{3x^2+3y^2},\ z=\sqrt{3},\ y=0.$

2.5.3. $z=x^2+y^2,\ z=4.$

2.5.4. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=3z\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.5. $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4\ (z\geq 0).$

2.5.6. $x^2+y^2=3,\ x^2+y^2=2z-4\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.7. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=9z^2\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.8. $x^2+y^2+z^2=16,\ z=0\ (z\geq 0).$

2.5.9. $z=\sqrt{3x^2+3y^2},\ z=\sqrt{3}.$

2.5.10. $x^2+y^2+z^2\leq 2z.$

2.5.11. $6x=y^2+z^2,\ y^2+z^2=1,\ z\geq -2.$

2.5.12. $x^2+y^2+z^2=25(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.13. $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=z^2\ (z\geq 0).$

2.5.14. $2x+2y+z=8,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2.5.15. $x=y^2+z^2,\ y+z=1\ (y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.16. $y=4-x^2-z^2\ ((x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.17. $z=x^2+y^2,\ z=2.$

2.5.18. $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2.5.19. $2z=x^2+y^2,\ z=3.$

2.5.20. $3-x^2-z^2,\ z=0.$

2.5.21. $x^2+y^2-z=1,\ z=0,\ z=2.$

2.5.22. $x^2+y^2+z^2=9\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.23. $x^2+y^2+z^2\leq 1,\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.24. $x+y+z=3\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0).$

2.5.25. $6x+3y+2z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2.5.26. $y=x^2+z^2,\ y=9.$

2.5.27. $z=25-x^2-z^2,\ z=0.$

2.5.28. $x^2+y^2-z^2=0,\ z=3.$

2.5.29. $2x+y+z=5,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2.5.30. $3x=y^2+z^2,\ x=3.$

3. Криволинейные интегралы

Задание 1. Вычислить криволинейный интеграл первого типа (по длине дуги) вдоль линии, заданной в декартовых координатах.

3.1.1. $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{d\ell}{x-y}$, где Γ - отрезок прямой, соединяющий точку A(0;-2) и точку B(4;0).

3.1.2. $\oint\limits_{\Gamma} xyd\ell$, где Γ - треугольник с вершинами A(-1;0), B(1;0), C(0;1).

3.1.3. $\oint\limits_{\Gamma} xyd\ell$, где Γ - прямоугольник с вершинами A(0;0), B(4;0), C(4,2), D(0,2).

3.1.4. $\oint\limits_{\Gamma} xyd\ell$, где Γ-часть эллипса, находящаяся в первом квадранте

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0.$$

3.1.5. $\oint\limits_{\Gamma} y\,d\ell$, где Γ-часть параболы $y = 2\sqrt{x}$, находящаяся в верхней полуплоскости $(0 \le x \le 1)$.

3.1.6. $\oint\limits_{\Gamma} x\,d\ell$, где Γ - часть параболы $y = \frac{3}{8}x^2 (0 \le x \le 4)$.

3.1.7. $\oint\limits_{\Gamma} y\,d\ell$, где Γ - дуга параболы $y^2=2x$ от точки O(0;0) до точки B(2;2).

3.1.8. $\oint\limits_{\Gamma} x\,d\ell$, где Γ - дуга параболы $y=x^2$ от точки O(0;0) до точки B(1;1).

3.1.9. $\oint\limits_{\Gamma} (x+y)\,d\ell$, где Γ - контур треугольника с вершинами A(1;0), B(0;1), O(0;0).

3.1.10. $\oint\limits_{\Gamma} xy\,d\ell$, где Γ - контур квадрата $|x|+|y| = a\,(a > 0)$.

3.1.11. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{d\ell}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где Γ - отрезок прямой, соединяющий точки O(0;0) и A(1;2).

3.1.12. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{d\ell}{y^2}$, где Γ - цепная линия $y = a\,ch\frac{x}{a}$.

3.1.13. $\oint\limits_{C} |y|\,d\ell$, где C - дуга параболы $y^2 = 2px$, $0 \le x \le \frac{p}{2}$.

3.1.14. $\oint\limits_{\Gamma} x^2\,d\ell$, где Γ - часть линии $y=\ln x$, $1 \le x \le e$.

3.1.15. $\oint\limits_{\Gamma} x\,d\ell$, где Γ - часть параболы $y=x^2$ от точки A(2;4), до точки B(1;1).

3.1.16. $\oint\limits_{\Gamma} x\,d\ell$, где Γ - отрезок прямой, соединяющий точки A(0;0), B(1;2).

3.1.17. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{d\ell}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где Γ-отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, соединяющий точки A(0;-2), B(4;0).

3.1.18. $\oint\limits_{\Gamma} e^x\,d\ell$, где Γ - часть линии $y=e^x$ от точки A(0;1) до точки B(1;e).

3.1.19. $\oint\limits_{\Gamma} x^2\,d\ell$, где Γ - часть кривой $y = \ln x$, $e \le x \le e^2$.

3.1.20. $\oint\limits_{\Gamma} y\,d\ell$, где Γ- часть линии $y = e^x$, $0 \le x \le 1$.

3.1.21. $\oint\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)d\ell$, где Γ - отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$ от точки O(0;-2) до точки B(4;0).

3.1.22. $\oint\limits_{\Gamma} x^3 y d\ell$, где Γ - отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$ от точки O(0;-2) до точки B(4;0).

3.1.23. $\oint\limits_{\Gamma}\left(x^3+y^3\right)d\ell$, где Γ - контур треугольника с вершинами A(1;0), B(0;1), O(0;0).

3.1.24. $\oint\limits_{\Gamma} x^3 y d\ell$, где Γ - прямоугольник с вершинами A(0;0), B(4;0), C(4;2), D(0;2).

3.1.25. $\oint\limits_{\Gamma} xy^2 d\ell$, где Γ - треугольник с вершинами A(-1;0), B(1;0), C(0;1).

3.1.26. $\oint\limits_{\Gamma} x^3 d\ell$, где Γ - часть линии $y=x^3$, соединяющей точки O(0;0), A(1;1).

3.1.27. $\oint\limits_{\Gamma} x^5 d\ell$, где Γ - часть линии $y=\frac{x^4}{4}$ от точки A(1;1/4) до точки B(2;4).

3.1.28. $\oint\limits_{\Gamma} yx^2 d\ell$, где Γ - отрезок прямой $y=x-2$, соединяющий точки E(0;-2), D(2;0).

3.1.29. $\oint\limits_{C} yx^2 d\ell$, где C - контур квадрата $|x|+|y|=2$.

3.1.30. $\oint\limits_{\Gamma} x d\ell$, где Γ - парабола $y=3x^2$ от точки A(1;3) до точки B(3; 27).

Задание 2. Вычислить криволинейный интеграл первого типа (по длине дуги) вдоль линии, заданной параметрически.

3.2.1. $\oint\limits_{C} y^4 d\ell$, где C - часть окружности $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$ расположенная в первой четверти.

3.2.2. $\oint\limits_{AB} y^2 d\ell$, где AB - часть окружности $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

3.2.3. $\oint\limits_{C}\left(x^2+y^2+z^2\right)d\ell$, где C - первый виток винтовой линии $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt. \end{cases}$

3.2.4. $\oint\limits_{C} d\ell$, где C - первая арка циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

3.2.5. $\oint\limits_{C} y^2 d\ell$, где C - первая арка циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

3.2.6. $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell$, где C - дуга развертки окружности $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.2.7. $\oint\limits_C (x+z)\,d\ell$, где C - дуга кривой $\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}, \\ z = t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

3.2.8. $\oint\limits_C \dfrac{d\ell}{x^2+y^2+z^2}$, где C - первый виток винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt. \end{cases}$

3.2.9. $\oint\limits_C d\ell$, где C - дуга конической винтовой линии $\begin{cases} x = ae^t\cos t, \\ y = ae^t\sin t, \\ z = ae^t \end{cases}$ от точки O(0;0;0) до точки A(a;0;a).

3.2.10. $\oint\limits_C xy\,d\ell$, где C - окружность $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

3.2.11. $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\ell$, где C- первый виток винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt. \end{cases}$

3.2.12. $\oint\limits_C (x^2+y^2)\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.2.13. $\oint\limits_C xy\,d\ell$, где C - дуга гиперболы $\begin{cases} x = a\,ch\,t, \\ y = a\,sh\,t, \end{cases}$ $0 \le t \le t_0$.

3.2.14. $\oint\limits_C \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right)d\ell$, где C - дуга астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

3.2.15. $\oint\limits_C z\,d\ell$, C- коническая винтовая линия $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \end{cases}$ $0 \le t \le t_0$.

3.2.16. $\oint\limits_C \sqrt{\dfrac{2y}{a}}\,d\ell$, где C -кривая $\begin{cases} x = at, \\ y = \dfrac{a}{2}t^2, \\ z = \dfrac{a}{3}t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

3.2.17. $\oint\limits_C x\,d\ell$, где C - астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, & x \ge 0, \\ y = a\sin^3 t, & y \ge 0. \end{cases}$

3.2.18. $\oint\limits_C y\,d\ell$, где C - астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, & x \ge 0, \\ y = a\sin^3 t, & y \ge 0. \end{cases}$

3.2.19. $\oint\limits_C x\,d\ell$, где C - циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

3.2.20. $\oint\limits_C y\,d\ell$, где C - циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

3.2.21. $\oint\limits_C x\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases}$ $t \in (-\infty; 0]$.

3.2.22. $\oint\limits_C y\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t. \end{cases}$ $-\infty < t \le 0$.

3.2.23. $\oint\limits_C z\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases}$ $-\infty < t \le 0$.

3.2.24. $\oint\limits_C \sqrt{y}\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.2.25. $\oint\limits_C x^2\,d\ell$, где C - часть окружности $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

3.2.26. $\oint\limits_C y^3\,d\ell$, где C - часть окружности $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

3.2.27. $\oint\limits_C x^2\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 3t^2, \\ z = 2t^3, \end{cases}$ от O(0;0;0) до A(3;3;2).

3.2.28. $\oint\limits_C x\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t, \\ z = e^{-t}, \end{cases}$ $0 < t < +\infty$.

3.2.29. $\oint\limits_C y\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t, \quad 0 < t < +\infty. \\ z = e^{-t}, \end{cases}$

3.2.30. $\oint\limits_C z\,d\ell$, где C - кривая $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t\,, \quad 0 < t < +\infty. \\ z = e^{-t}, \end{cases}$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл первого типа (по длине дуги) вдоль линии, заданной в полярных координатах.

3.3.1. $\oint\limits_C arctg\dfrac{y}{x}d\ell$, где C - один виток спирали $r = a\varphi$.

3.3.2. $\oint\limits_C \left(x^2 + y^2\right)^2 d\ell$, где C - дуга логарифмической спирали $r = a\varphi^{m\varphi}(m > 0)$ от точки A(0;a) до точки O(-∞;0).

3.3.3. $\oint\limits_C (x + y)d\ell$, где C - правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

3.3.4. $\oint\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}d\ell$, где C - окружность $x^2+y^2=4$.

3.3.5. $\oint\limits_C |y|d\ell$, где C - дуга лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

3.3.6. $\oint\limits_C x\,d\ell$, где C - часть логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$ $(k > 0)$, находящаяся внутри круга $r=a$.

3.3.7. $\oint\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,d\ell$, где C - окружность $r = a\cos\varphi$.

3.3.8. $\oint\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,d\ell$, где C - окружность $r = a\sin\varphi$.

3.3.9. $\oint\limits_C \left(x^2 + y^2\right)d\ell$, где C - окружность $r = a\cos\varphi$.

3.3.10. $\oint\limits_C \left(x^2 + y^2\right)d\ell$, где C - окружность $r = a\sin\varphi$.

3.3.11. $\oint\limits_C (x - y)d\ell$, где C - окружность $x^2+y^2=ax$.

3.3.12. $\oint\limits_C x\sqrt{x^2 - y^2}\,d\ell$, где C - линия, заданная уравнением $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geq 0)$.

3.3.13. $\oint\limits_C arctg\frac{y}{x}\,d\ell$, где C - часть спирали Архимеда $r=2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса R с центром в начале координат (в полюсе).

3.3.14. Вычислить $\oint\limits_C\sqrt{y^2+z^2}\,d\ell$, где C - контур окружности $y^2+z^2=\sqrt{2}y$.

3.3.15. Вычислить $\oint\limits_C\left(z^2+y^2\right)^5 d\ell$, где C - окружность $z^2+y^2=4$.

3.3.16. Вычислить $\oint\limits_C\sqrt[3]{x^2+y^2}\,y\,d\ell$, где C - окружность $x^2+y^2=2x$.

3.3.17. Вычислить $\oint\limits_C\left(x^2-y^2\right)d\ell$, где C - окружность $x^2+y^2=2$.

3.3.18. Вычислить $\oint\limits_C(x+y)\,d\ell$, где C - окружность $x^2+y^2=2y$.

3.3.19. Вычислить $\oint\limits_C arcctg\frac{x}{y}\,d\ell$, где C: $\rho=3\varphi$, $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

3.3.20. Вычислить $\oint\limits_C(x-y)\,d\ell$, где C - левый лепесток лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

3.3.21. Вычислить $\oint\limits_C\sqrt[3]{x^2+y^2}\,x\,d\ell$, где C - окружность $x^2+y^2=2y$.

3.3.22. Вычислить $\oint\limits_C\frac{xy}{x^2+y^2}\,d\ell$, где C: $\rho=2\cos\varphi$.

3.3.23. Вычислить $\oint\limits_C xy\left(x^2-y^2\right)d\ell$, где C: $\rho=2\sin 2\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

3.3.24. Вычислить $\oint\limits_C x\,d\ell$, где C: $\rho=1+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.3.25. Вычислить $\oint\limits_C\left(arctg\frac{y}{x}\right)^3 d\ell$, где C: $\rho=\frac{1}{\varphi}$, $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

3.3.26. Вычислить $\oint\limits_C y\,d\ell$, где C: $\rho=2+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.3.27. Вычислить $\oint\limits_C x\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,d\ell$, где C: $\rho=2\cos\varphi$.

3.3.28. Вычислить $\oint\limits_C\left(arcctg\frac{x}{y}\right)^3 d\ell$, где C: $\rho=\frac{1}{\varphi}$, $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

3.3.29. Вычислить $\oint\limits_C x\left(arctg\frac{y}{x}\right)^2 d\ell$, где C $\rho=\sin\varphi$.

3.3.30. Вычислить $\oint\limits_C\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,d\ell$, где C: $\rho=2\cos\varphi$.

Задание 4. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа (по координатам) вдоль

1.4.11. D: $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=25$, $x=0$, $y=0(x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\gamma\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$.

1.4.12. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x(y\ge 0)$, $\gamma=x+3y^2$.

1.4.13. D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0(x\le 0, y\ge 0)$, $\gamma=\dfrac{4x+11y}{x^2+y^2}$.

1.4.14. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=9x(y\ge 0)$, $\gamma=3x+2y$.

1.4.15. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=x(y\ge 0)$, $\gamma=x^2+3y$.

1.4.16. D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0(y\le 0,\ x\le 0)$, $\gamma=\dfrac{x-4y}{x^2+y^2}$.

1.4.17. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x(y\ge 0)$, $\gamma=11x+\dfrac{27y^2}{4}$.

1.4.18. D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $x=0$, $y=0(x\ge 0,\ y\le 0)$, $\gamma=\dfrac{2y+3x}{x^2+y^2}$.

1.4.19. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=x(y\ge 0)$, $\gamma=\dfrac{13}{2}x^2+8y$.

1.4.20. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0(x\le 0,\ y\le 0)$, $\gamma=\dfrac{-2x-5y}{x^2+y^2}$.

1.4.21. D: $x=1$, $y=x^2$, $y=0(x\ge 0)$, $\gamma=x+y$.

1.4.22. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0(x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\gamma=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

1.4.23. D: $x=2$, $y=0$, $y=2x$, $\gamma=x+y^2$.

1.4.24. D: $x=1$, $y=0$, $y=2x^2$, $\gamma=2x+y$.

1.4.25. D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0(x\ge 0,\ y\le 0)$, $\gamma=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$.

1.4.26. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=x(y\ge 0)$, $\gamma=x^2+y$.

1.4.27. D: $x=2$, $y=0$, $y^2=4x(y\ge 0)$, $\gamma=2x^2+3y$.

1.4.28. D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0(x\le 0,\ y\ge 0)$, $\gamma=x^2+y^2$.

1.4.29. D: $x=2$, $y=0$, $y=x$, $\gamma=x^2+y$.

1.4.30. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=9x(y\ge 0)$, $\gamma=x+2y^2$.

(контура Г) линии, заданной в декартовых координатах.

3.4.1. $\oint\limits_{\Gamma} x^2dx+\sqrt{x}ydy,\quad \Gamma:\ x^2+y^2=9(x\geq 0;\ y\geq 0)$ от A(3;0) к B(0;3).

3.4.2. $\oint\limits_{\Gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где Γ - отрезок прямой. соединяющий точки A(2;3) и B(3;5).

3.4.3. $\oint\limits_{\Gamma}(x^2+2y)dx+(y^2+2x)dy,$ где $\Gamma:\ 2-\dfrac{x^2}{8}=y$ от A(-4;0) до B(0;2).

3.4.4. $\oint\limits_{\Gamma}(xy-x)dx+\dfrac{x^2}{2}dy,$ где $\Gamma:\ y=2\sqrt{x}$ от A(0;0) до B(1;2).

3.4.5. $\oint\limits_{\Gamma}(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy,$ где $\Gamma:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y\geq 0)$ от A(3;0) до B(-3;0).

3.4.6. $\oint\limits_{\Gamma} x^2ydx-xy^2dy,$ где $\Gamma: x^2+y^2=4\ (x\geq 0;\ y\geq 0)$ от A(2;0) до B(0;2).

3.4.7. $\oint\limits_{\Gamma}(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy,$ где $\Gamma:\ y=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1,\\ 2-x, & 1\leq x\leq 2,\end{cases}$ от A(2;0) до B (0;0).

3.4.8. $\oint\limits_{\Gamma}(x+y)dx+(x-y)dy,$ где $\Gamma:\ x=y^2$ от A(0;0) до B(4;2).

3.4.9. $\oint\limits_{\Gamma} xy^2dx+y\sqrt{x}\,dy,$ где $\Gamma:\ y=x^3$ от A(0;0) до B(1;1).

3.4.10. $\oint\limits_{\Gamma} xdx-ydy,$ где $\Gamma:\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1\ (x\geq 0; y\geq 0)$ от A(1;0) до B(0;3).

3.4.11. $\oint\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)(xdx+ydy)$, где Γ: $x^2+y^2=1$.

3.4.12. $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2},$ где $\Gamma: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ от A(1;1) до B(3;2).

3.4.13. $\oint\limits_{\Gamma} xydx-2xdy,$ где $\Gamma:\ y=\sin x$ от A(π;0) до B(0;0).

3.4.14. $\oint\limits_{\Gamma}\left(x+y\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy,$ где $\Gamma:\ x^2+y^2=16\ (x\geq 0;\ y\geq 0)$ от A(4;0) до B(0;4).

3.4.15. $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{y^2dx-x^2dy}{(x-y)^2},$ где $y=-(x^2+1)$ от A(0;-1) до B(2;-5).

3.4.16. $\oint\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$, где Γ: $x+\frac{y}{3}=1$ от A(0;3) до B(1;0).

3.4.17. $\oint\limits_{\Gamma}\sin x(1+y)dx+\cos^2 x dy$, где Γ: $y=\cos x$ от A(0;1) до B($\pi/2$;0).

3.4.18. $\oint\limits_{\Gamma}\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy$, где Γ: $x=y^2$ от A(1;1) до B(4;2).

3.4.19. $\oint\limits_{\Gamma}\frac{y}{x}dx+2\ln x dy$, где Γ: $y=4-2x$ от A(1;2) до B(2;0).

3.4.20. $\oint\limits_{\Gamma}\frac{x}{x^2+y^2}dx-\frac{y}{x^2+y^2}dy$, где Γ: $x^2+y^2=25$.

3.4.21. $\oint\limits_{\Gamma}xydx+yzdy+xzdz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ x+y+z=1.\end{cases}$

3.4.22. $\oint\limits_{\Gamma}x^2dx+yzdy+3zdz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ z=4.\end{cases}$

3.4.23. $\oint\limits_{\Gamma}ydx+2zdy+3xdz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0,\\ z=3.\end{cases}$

3.4.24. $\oint\limits_{\Gamma}zdx+5xdy-6ydz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ z=1.\end{cases}$

3.4.25. $\oint\limits_{\Gamma}xzdx+zdy+ydz$, где Γ: $\begin{cases}z=5\left(x^2+y^2\right)-1,\\ z=4.\end{cases}$

3.4.26. $\oint\limits_{\Gamma}5xdx+3dy+xydz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=2.\end{cases}$

3.4.27. $\oint\limits_{\Gamma}ydx+zdy+ydz$, где Γ: $\begin{cases}z=2\left(x^2+y^2\right)+1,\\ z=7.\end{cases}$

3.4.28. $\oint\limits_{\Gamma}xdx+zdy+ydz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=1.\end{cases}$

3.4.29. $\oint\limits_{\Gamma}yzdx+xzdy+xydz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ z=1.\end{cases}$

3.4.30. $\oint\limits_{\Gamma}zdx+xdy+ydz$, где Γ: $\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ z=5.\end{cases}$

Задание 5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа вдоль линии, заданной параметрически (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

3.5.1. $\oint\limits_{\Gamma} y^2dx - x^2dy$, где Γ - дуга эллипса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.2. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, где Γ - дуга астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3.5.3. $\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx$, где Γ - петля декартова листа $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ $0 \le t < \infty$.

3.5.4. $\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx$, где Γ - дуга арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.5. $\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx$, где Γ - дуга кардиоиды $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.6. $\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx$, где Γ - дуга лемнискаты $\begin{cases} x = a\sqrt{2}\cos t\sqrt{\cos 2t}, \\ y = a\sqrt{2}\sin t\sqrt{\cos 2t}, \end{cases}$ $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$.

3.5.7. $\oint\limits_{\Gamma} -x^2ydx + xy^2dy$, где Γ: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3.5.8. $\oint\limits_{\Gamma} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy$, где Γ: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{3}$.

3.5.9. $\oint\limits_{\Gamma} \sqrt[3]{y}dx - \sqrt[3]{x}dy$, где Γ - дуга астроиды $\begin{cases} x = 8\cos^3\frac{t}{4}, \\ y = 8\sin^3\frac{t}{4}, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.10. $\oint\limits_{\Gamma} (a - y)dx + (a - x)dy$, где Γ - дуга циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

3.5.11. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{x}{y}dx + \frac{y}{x}dy$, где Γ - парабола $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1, \end{cases}$ от точки A(1,1) до точки B(4;2).

3.5.12. $\oint\limits_{\Gamma} x^2dx + y^2dy$, где Γ - окружность $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

3.5.13. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dx}{y} + \frac{dy}{x}$, где Γ - окружность $\begin{cases} x = R\sin 2t, \\ y = 2R\sin^2 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3.5.14. $\oint\limits_{\Gamma} ydx - xdy$, где Γ - дуга эволюты эллипса $\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, & c^2 = a^2 - b^2, \\ y = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

3.5.15. $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{x}{y}dx + \dfrac{y}{x}dy$, где Γ - кардиоида $\begin{cases} x = a(1+\cos t)\cos t, \\ y = a(1+\cos t)\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Вычислить циркуляцию вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

3.5.16. $\oint\limits_{\Gamma} xdx + 2z^2dy + ydz$, где Γ: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.17. $\oint\limits_{\Gamma} ydx - 3xdy + xdz$, где Γ: $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.18. $\oint\limits_{\Gamma} zdx - xdy + xzdz$, где Γ: $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 4, \end{cases}$

3.5.19. $\oint\limits_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, где Γ: $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.20. $\oint\limits_{\Gamma} ydx - zdy + xdz$, где Γ: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 3 - \cos t - \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3.5.21. $\oint\limits_{\Gamma} ydx + xdy + (x^2 + y^2)dz$, где Γ: $\begin{cases} x = a\sqrt{t}\cos t, \\ y = a\sqrt{t}\sin t, \quad 0 \le t \le T. \\ z = at, \end{cases}$

3.5.22. $\oint\limits_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$, где Γ: $\begin{cases} x = at^2, \\ y = a\left(t + t^3/3\right), \quad 0 \le t \le \sqrt{3}. \\ z = a\left(t - t^3/3\right), \end{cases}$

3.5.23. $\oint\limits_{\Gamma} ydx - xdy + \left(x^2 + y^2\right)dz$, где Γ: $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \quad \alpha \le t \le \beta. \\ z = e^t, \end{cases}$

3.5.24. $\oint\limits_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$, где Γ: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 4\cos {t}/{2}. \end{cases}$

3.5.25. $\oint\limits_{\Gamma} xzdx + yzdy + xydz$, где Γ: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = \sin t, \end{cases}$

3.5.26. $\oint\limits_{\Gamma} xdx - z^2dy + ydz$, где Γ: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3, \end{cases}$

3.5.27. $\oint\limits_{\Gamma} zdx - y^2dy + xdz$, где Γ: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 3t, \end{cases}$

3.5.28. $\oint\limits_{\Gamma} ydx - zdy + x^2dz$, где Γ: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 1 - \cos t - \sin t, \end{cases}$

3.5.29. $\oint\limits_{\Gamma} yzdx + xzdy + xydz$, *г д е* Γ: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = ht, \end{cases}$

3.5.30. $\oint\limits_{\Gamma} y^2dx + (x+z)dy + x^2dz$, где Γ: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 1 - \cos t - 2\sin t, \end{cases}$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа вдоль линии, заданной в полярных координатах.

3.6.1. $\oint\limits_{\Gamma} -x^2ydx + xy^2dy$, где Γ: $\rho = 2a\sin\varphi$. **3.6.2.** $\oint\limits_{\Gamma} y^3dx - x^3dy$, где Γ: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

3.6.3. $\oint\limits_{\Gamma} xy^2dx - x^2ydy$, где Γ: $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

3.6.4. $\oint\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, где Γ: $\rho = 2a\cos\varphi$.

3.6.5. $\oint\limits_{\Gamma}(y-a)^2dx+(x-a)^2dy$, где Γ: $\rho=a(1+sin\varphi)$.

3.6.6. $\oint\limits_{\Gamma}\left(3x^2y+y^2\right)dx+\left(x^3+6xy\right)dy$, где Γ: $\rho^2=a^2cos2\varphi$.

3.6.7. $\oint\limits_{\Gamma}dx+dy$, где Γ - первый виток спирали Архимеда $\rho=a\varphi,\ 0\le\varphi\le2\pi$.

3.6.8. $\oint\limits_{\Gamma}\frac{ydx-xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где Γ - логарифмическая спираль $\rho=ae^{m\varphi}$ от A (ρ_0,φ_0) до B (ρ,φ).

3.6.9. $\oint\limits_{\Gamma}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где Γ - гиперболическая спираль $\rho\varphi=1$ от $\varphi_1={}^3\!/_4$ до $\varphi_2={}^4\!/_3$.

3.6.10. $\oint\limits_{\Gamma}\frac{ydx-xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где Γ - гипербола $\rho=\frac{2pcos\varphi}{sin^2\varphi}$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$.

3.6.11. $\oint\limits_{\Gamma}(x+7y)dx+(7x+y)dy$, вдоль замкнутого контура Γ: $\rho=2a(sin\varphi+cos\varphi)$.

3.6.12. $\oint\limits_{\Gamma}\left(x^3+y^3\right)dx+\left(x^3-y^3\right)dy$, где Γ: $\rho=6sin\varphi$.

3.6.13. $\oint\limits_{\Gamma}\left(xy^2-5y\right)dx+\left(x^2y+3x\right)dy$, где Γ: $\rho=a(1-cos\varphi)$.

3.6.14. $\oint\limits_{\Gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где Γ: $\rho^2=a^2cos2\varphi$.

3.6.15. $\oint\limits_{\Gamma}\left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy$, где Γ: $\rho=8cos\varphi$.

3.6.16. $\oint\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+dy$, где Γ - первый виток спирали Архимеда $\rho=a\varphi,\ 0\le\varphi\le2\pi$.

3.6.17. $\oint\limits_{\Gamma}ydx-xdy$, где Γ: логарифмическая спираль $\rho=ae^{m\varphi}$ от A (ρ_0,φ_0) до B(ρ,φ).

3.6.18. $\oint\limits_{\Gamma}\frac{ydx-xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где Γ: гиперболическая спираль $\rho\varphi=1$ от $\varphi_1=2/3$ до $\varphi_2=3/2$.

3.6.19. $\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2-5y+sin2x\right)dx+\left(3y^2+2xy+cos2y\right)dy$, где Γ: $\rho=2a(sin\varphi+cos\varphi)$.

3.6.20. $\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2-8y+cos2x\right)dx+(2xy+3y+cos2y)dy$, где Γ: $\rho=asin2\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

3.6.21. $\oint\limits_{\Gamma}\left(sin^2x-3xy^2-3y\right)dx+\left(cos^2y-3x^2y\right)dy$, где Γ: $\rho=acos2\varphi,\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

3.6.22. $\oint\limits_{\Gamma}\left(5xy^2-2y\right)dx+\left(5x^2y+3x\right)dy$, где Γ: $\rho=a\cos 3\varphi$, $-\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6}$.

3.6.23. $\oint\limits_{\Gamma}x^2dx+xy^2dy$, где Γ: $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

3.6.24. $\oint\limits_{\Gamma}\left(xy^2-2y\right)dx+\left(x^2y+3x\right)dy$, где Γ: $\rho=2a\left(1+\cos\varphi\right)$.

3.6.25. $\oint\limits_{\Gamma}\left(6xy+5y\right)dx+\left(3x^2+8x\right)dy$, где Γ: $\rho=8\sin\varphi$.

3.6.26. $\oint\limits_{\Gamma}\left(5xy^2+3y\right)dx+\left(5x^2y+8x\right)dy$, где Γ: $\rho=a\cos 2\varphi$, $-\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

3.6.27. $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dx+\dfrac{2}{y}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}dy$, где Γ - замкнутый контур, составленный линиями

$\rho=1$, $\rho=4$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, причем $\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

3.6.28. $\oint\limits_{\Gamma}\left(\cos x-y^2+3x^2y\right)dx+\left(x^2+x-y^2\right)dy$, где Γ: $\rho=a\left(1+\cos\varphi\right)$.

3.6.29. $\oint\limits_{\Gamma}\left(\sin y+y\cos x+2y\right)dx+\left(x\cos y+\sin x+3x\right)dy$, где Γ - составной контур,

образованный $\left.\begin{matrix}\rho=\sqrt{3}\sin\varphi\\ \rho=1+\cos\varphi\end{matrix}\right\}$.

3.6.30. $\oint\limits_{\Gamma}\left(e^{\frac{x}{y}}-y\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy$, где Γ: $\rho^2=a^2\cos\varphi$.

Задание 7. Задана материальная линия ℓ, в каждой точке которой определена плотность $\gamma=\gamma(P)$. В вариантах:

а) 3.7.1-3.7.5 найти массу линии $\ell(\ell\subset R_2)$;

б) 3.7.6-3.7.15 найти статический момент линии ℓ относительно оси OX;

в) 3.7.16 - 3.7.25 найти статический момент относительно оси OY;

г) 3.7.26 - 3.7.30 найти массу линии $\ell(\ell\subset R_3)$.

3.7.1. $y=x^2$; $A(2,4)$, $B(1,1)$; $\gamma=x$.

3.7.2. $\begin{cases}x=4\cos\varphi,\\ y=4\sin\varphi,\end{cases}$ $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $\gamma=x$.

3.7.3. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $\begin{matrix}x\ge 0\\ y\ge 0\end{matrix}$; $\gamma=xy$.

3.7.4. $\begin{cases}x=\left(t-\sin t\right),\\ y=\left(1-\cos t\right),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$; $\gamma=y$.

3.7.5. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, $\gamma = y^2$. 3.7.6. $y = \frac{1}{2}x - 2;\ A(0,-2),\ B(4,0);\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3.7.7. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \le x \le a;\ \gamma = \frac{2}{y}$. 3.7.8. $y = \ln x$, $1 \le x \le 2;\ \gamma = x^2$.

3.7.9. $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$, $A(0,0)$, $B(4, \frac{16}{3});\ \gamma = y$.

3.7.10. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi;\ \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.7.11. $\rho = 2e^{3\varphi}$, $A(2,0)$, $B(0,0);\ \gamma = x^2 + y^2$. 3.7.12. $\rho = 3e^{2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ \gamma = x + y$.

3.7.13. $\ell:\ x^2 + y^2 = 2x;\ \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.7.14. $\ell:\ \rho = 2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ \gamma = 2\cos\varphi$.

3.7.15. $\ell:\ y^2 = 4x$, $0 \le x \le 1;\ \gamma = |y|$. 3.7.16 $\ell:\ x^2 + y^2 = 4$, $|x| \le 2$, $y \ge 0$, $\gamma = y^3$.

3.7.17. $\ell:\ x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0;\ \gamma = 2x$.

3.7.18. $\ell:\ x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \le 0;\ \gamma = -y^3$.

3.7.19. $\ell:\ 3x^2 + 2y^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0;\ \gamma = 3xy$.

3.7.20. $\ell:\ x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2};\ \gamma = y^2$.

3.7.21. $\ell:\ y^2 = 2x$, $A(0,0)$, $B(2,2);\ \gamma = y$.

3.7.22. $\ell:\ x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2};\ \gamma = 3\sin 2t$.

3.7.23. $\ell:\ x^2 + y^2 = 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0;\ \gamma = xy$.

3.7.24. $\ell:\ \rho^2 = \cos 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi;\ \gamma = 2\rho$.

3.7.25. $\ell:\ x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi;\ \gamma = (1 - \cos t)^2$.

3.7.26. $\ell:\ x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $z = \frac{t^3}{3}\ (0 \le t \le 1);\ \gamma = \sqrt{2y}$.

3.7.27. $\ell:\ x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi;\ \gamma = x^2 + y^2 + z^2$.

3.7.28. $\ell:\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ $\gamma = x^2$. 3.7.29. $\ell:\ x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 1$.

3.7.30. ℓ: $x = 3\cos t,\quad y = 3\sin t,\quad z = 2t,\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};\quad \gamma = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Задание 8. Найти работу силового поля $\vec{F} = col(P,Q)$ в R_2 (задания 3.8.1. - 3.8.18, 3.8.25. - 3.8.30) и силового поля $\vec{F} = col(P,Q,R)$ в R_3 (задания 3.8.19. - 3.8.24.) вдоль заданной линии l.

3.8.1. $y = 2x^2,\quad A(0,0),\quad B(1,2),\quad P = xy - y^2,\quad Q = x$.

3.8.2. $y = 2\sqrt{x},\quad A(0,0),\quad B(1,2),\quad P = x \cdot y - y^2,\quad Q = x$.

3.8.3. $y = x^2,\quad A(0,0),\quad B(2,4),\quad P = \left(x + y^2\right),\quad Q = 2xy + 8$.

3.8.4. $y = x^3,\quad A(0,0),\quad B(2,8),\quad P = -y,\quad Q = x$.

3.8.5. $x^2 + y^2 = 4,\quad A(2,0),\quad B(-2,0),\quad P(x - y),\quad Q = 1$.

3.8.6. $y = 2x^3,\quad A(0,0),\quad B(1,2),\quad P = 2xy,\quad Q = x^2$.

3.8.7. $4x = y^2,\quad A(0,0),\quad B(1,2),\quad P = 2xy,\quad Q = x^2$.

3.8.8. $x = 8\cos^3 t,\quad y = 8\sin^3 t,\quad A(8,0),\quad B(0,8),\quad P = -\dfrac{y^2}{x^{5/3} + y^{5/3}},\quad Q = \dfrac{x^2}{x^{5/3} + y^{5/3}}$.

3.8.9. $x = 2(t - \sin t),\quad y = 2(1 - \cos t),\quad \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{3},\quad P = \dfrac{x}{y},\quad Q = \dfrac{1}{y - 2}$.

3.8.10. $y^2 = 1 - x,\quad A(1,0),\quad B(0,1),\quad P = 0,\quad Q = -x^2$.

3.8.11. $\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 2(1 - \sin\varphi) \end{cases},\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\quad P = 2(1 - \sin\varphi),\quad Q = 2\cos\varphi$.

3.8.12. $y = 2 - \dfrac{x^2}{2},\quad A(-2,0),\quad B(0,2),\quad P = y,\quad Q = y - x$.

3.8.13. $y = x^2 + 1,\quad A(0,1),\quad B(2,5),\quad P = x + y,\quad Q = -2y$.

3.8.14. $x = 2\cos t,\quad y = 3\sin t,\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2},\quad P = 3\sin t,\quad Q = 2$.

3.8.15. $x = 2(t - \sin t),\quad y = 2(1 - \cos t),\quad 0 \le t \le 2\pi,\quad P = 4 - y,\quad Q = x$.

3.8.16. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\quad P = x + y,\quad Q = x - y$.

3.8.17. $y = x^2,\quad -1 \le x \le 1,\quad P = x^2 - 2xy,\quad Q = y^2 - 2xy$.

3.8.18. $y=\frac{x^2}{2}$, $A(2,2)$, $B(2,0)$, $P=x+y$, $Q=0$.

3.8.19. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$, $P=y^2-z^2$, $Q=2yz$, $R=-x^2$.

3.8.20. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$, $P=y$, $Q=z$, $R=x$.

3.8.21. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=4x,\end{cases}$ $z\ge 0$, $P=y^2$, $Q=z^2$, $R=x^2$.

3.8.22. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=2t,\end{cases}$ $A(1,0,0)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\frac{\pi}{4}\right)$, $P=xz$, $Q=z$, $R=x^3$.

3.8.23. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=3t,\end{cases}$ $A(1,0,0)$, $B\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac{a}{2},\frac{\pi}{6}\right)\equiv B\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac{1}{2},\frac{\pi}{6}\right)$, $P=z$, $Q=z$, $R=y^3$.

3.8.24. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=tm,\end{cases}$ $A(1,0,0)$, $B\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$, $P=xz$, $Q=yz$, $R=y^2x^3$.

3.8.25. $\rho^2=a^2\cos2\varphi$, $A(0,0)$, $B(0,0)$, $P=\cos y-y\cos x+6y$, $Q=\sin2y-x\sin y-\sin x$.

3.8.26. $\rho^2=a^2\cos2\varphi$, $A(0,0)$, $B(0,0)$, $P=6y+3x^2y+y^3$, $Q=2y+x^3+3y^2x$.

3.8.27. $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $A(0,0)$, $B(0,0)$, $P=\sin y+y\sin x+3y$, $Q=x\cos y-\cos x$.

3.8.28. $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $A(0,0)$, $B(0,0)$, $P=3x^2y+y^3+7y$, $Q=\sin^2 y+x^3+3xy^2$.

3.8.29. $x^2+y^2=4$, $P=x^2y$, $Q=-xy^2$.

3.8.30. $x^2+y^2=9$, $P=x+y$, $Q=-x+y$.

4. Поверхностные интегралы

Задание 1. Вычислить поверхностный интеграл первого типа (по площади поверхности).

4.1.1. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma;$ $\sigma:$ $z=1-x^2-y^2;$ $z=0$.

4.1.2. $\iint\limits_{\sigma}x(y+z)\,d\sigma;$ $\sigma:$ $x=\sqrt{1-y^2};$ $z=0;$ $z=1$.

4.1.3. $\iint\limits_{\sigma}\left(3x^2+5y^2+3z^2-2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $y=\sqrt{x^2+z^2};$ $y=0;$ $y=1$.

4.1.4. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+3z^2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $z=\sqrt{x^2+y^2};$ $z=0;$ $z=1$.

4.1.5. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $2z=2-x^2-y^2$, отсеченного плоскостью xOy.

4.1.6. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,d\sigma;$ $\sigma:$ $y=2-x^2-z^2;$ $y=0$.

4.1.7. $\iint\limits_{\sigma}y(z+x)d\sigma;$ $\sigma:$ $y=\sqrt{c^2-z^2};$ $x=0;$ $x=a$.

4.1.8. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4y^2+4z^2}\,d\sigma;$ $\sigma:$ $x=4-y^2-z^2;$ $x=0$.

4.1.9. $\iint\limits_{\sigma}z(x+y)d\sigma;$ $\sigma:$ $z=\sqrt{9-x^2};$ $y=0;$ $y=2$.

4.1.10. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

4.1.11. $\iint\limits_{\sigma}(x+y)d\sigma;$ $\sigma:$ часть плоскости $x+y+z=a$, лежащая в первом октанте.

4.1.12. $\iint\limits_{\sigma}x\,d\sigma;$ $\sigma:$ полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

4.1.13. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right);$ $z=0;$ $z=1$.

4.1.14. $\iint\limits_{\sigma}z\,d\sigma;$ $\sigma:$ $z=\sqrt{x^2+y^2};$ $z=1;$ $z=2$.

4.1.15. $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)d\sigma;$ $\sigma:$ $x+2y+4z=4;$ $x\geq 0;$ $y\geq 0;$ $z\geq 0$.

4.1.16. $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)d\sigma;$ $\sigma:$ $x^2+y^2+z^2=1;$ $z\geq 0$.

4.1.17. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $x^2+y^2+z^2=R^2$.

4.1.18. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$.

4.1.19. $\iint\limits_{\sigma}xyz\,d\sigma;$ $\sigma:$ $z=x^2+y^2;$ $z\leq 1$.

4.1.20. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma;$ $\sigma:$ $z=x^2+y^2;$ $z\leq 1$.

4.1.21. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma;\quad \sigma:\quad z\le 1;\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$.

4.1.22. $\iint\limits_{\sigma}\left(3x^2+5y^2+3z^2-2\right)d\sigma;\quad \sigma:\quad y=\sqrt{x^2+z^2}$ между плоскостями $y=0;\quad y=\sqrt{2}$.

4.1.23. $\iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma;$ σ-участок поверхности, вырезанный цилиндром $x^2+y^2=1\ (x;y\ge 0)$ из $z=xy$.

4.1.24. $\iint\limits_{\sigma} d\sigma;\quad \sigma:$ участок поверхности, вырезанный цилиндром $x^2+y^2=1$ из $x^2+y^2+z^2=4$.

4.1.25. $\iint\limits_{\sigma} d\sigma;\quad \sigma:$ участок поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанный из нее цилиндром $x^2+y^2=2x$.

4.1.26. $\iint\limits_{\sigma} x^2yz\,d\sigma;\quad \sigma:$ часть плоскости $x+y+z=1$, лежащей в первом октанте.

4.1.27. $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,d\sigma;\quad \sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$, лежащей в 1 октанте.

4.1.28. $\iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma;\quad \sigma:\quad z=x^2-y^2;\quad x^2+y^2=4$.

4.1.29. $\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma;\quad \sigma:\quad x=2y^2+1(y>0);\quad x=y^2+z^2;\quad x=2;\quad x=3$.

4.1.30. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{y^2-x^2}\,d\sigma;\quad \sigma:$ часть поверхности $x^2+y^2=z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=a^2$.

Задание 2. Вычислить поверхностный интеграл второго типа по заданной замкнутой поверхности σ. Замечание: $\sigma^+(\sigma^-)$ означает, что интегрирование следует проводить по внешней (внутренней) стороне поверхности.

4.2.1. $\iint\limits_{\sigma^+}\left(z^2-1\right)dxdy;\quad \sigma: 0\le x\le a;\quad 0\le y\le b;\quad 0\le z\le c$.

4.2.2. $\iint\limits_{\sigma^+} z\,dxdy;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2$.

4.2.3. $\iint\limits_{\sigma^-} z^2dxdy;\quad \sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$.

4.2.4. $\iint\limits_{\sigma^+}\left(2z^2+x^2+y^2\right)dxdy;\quad \sigma:\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le H$.

4.2.5. $\iint\limits_{\sigma^-} x^2y^2z\,dxdy;\quad \sigma: x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\le 0$.

4.2.6. $\iint\limits_{\sigma^+}\left(x^2+y^2\right)dxdy;\quad \sigma: x^2+y^2=4;\quad z=0;\quad z=1$.

4.2.7. $\iint\limits_{\sigma^-} xzdxdy;\quad \sigma:\ x+y+z\leq 1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0.$

4.2.8. $\iint\limits_{\sigma^-} xydxdy;\quad \sigma:\ x+y+z\leq 1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0.$

4.2.9. $\iint\limits_{\sigma^-} zy^2dxdy;\quad \sigma:\ z^2+x^2=r^2;\ 0\leq y\leq r;\ z\leq 0.$ 4.2.10. $\iint\limits_{\sigma^-} z^2dxdy;\quad \sigma:\ z=x^2+y^2;\ z\leq 1.$

4.2.11. $\iint\limits_{\sigma^+} \left(x^2-1\right)dydz;\ \sigma:\ 0\leq x\leq a;\ 0\leq y\leq b;\ 0\leq z\leq c.$

4.2.12. $\iint\limits_{\sigma^+} xdydz;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2.$ 4.2.13 $\iint\limits_{\sigma^-} x^2dydz;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2.$

4.2.14. $\iint\limits_{\sigma^+} \left(z^2+y^2+2x^2\right)dzdy;\quad \sigma:\ \sqrt{z^2+y^2}\leq x\leq H.$

4.2.15. $\iint\limits_{\sigma^+} y^2z^2xdzdy;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2;\ x\leq 0.$

4.2.16. $\iint\limits_{\sigma^-} \left(z^2+y^2\right)dzdy;\quad \sigma:\ z^2+y^2\leq 4;\ x=0;\ x=1.$

4.2.17. $\iint\limits_{\sigma^-} zxdzdy;\quad \sigma:\ x+y+z\leq 1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0.$

4.2.18. $\iint\limits_{\sigma^-} zydzdy;\quad \sigma:\ x+y+z\leq 1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0.$

4.2.19. $\iint\limits_{\sigma^-} xy^2dzdy;\quad \sigma:\ z^2+x^2=r^2;\ 0\leq y\leq r;\ z\leq 0.$

4.2.20. $\iint\limits_{\sigma^-} x^2dzdy;\quad \sigma:\ x=z^2+y^2;\ x\leq 1.$ 4.2.21. $\iint\limits_{\sigma^+} \left(y^2-1\right)dzdx;\quad \sigma:\ 0\leq x\leq a;\ 0\leq y\leq b;\ 0\leq z\leq c.$

4.2.22. $\iint\limits_{\sigma^+} ydzdx;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2.$ 4.2.23. $\iint\limits_{\sigma^-} y^2dzdx;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2.$

4.2.24. $\iint\limits_{\sigma^+} \left(2y^2+x^2+z^2\right)dzdx;\quad \sigma:\ \sqrt{z^2+x^2}\leq y\leq H.$

4.2.25. $\iint\limits_{\sigma^+} yz^2x^2dzdx;\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2;\ y\leq 0.$

4.2.26. $\iint\limits_{\sigma^-} \left(z^2+x^2\right)dzdx;\quad \sigma:\ z^2+x^2=4;\ y=0;\ y=1.$

4.2.27. $\iint\limits_{\sigma^-} xzdzdx;\quad \sigma:\ x+y+z\leq 1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0.$

4.2.28. $\iint\limits_{\sigma^-} zydzdx;\quad \sigma\text{: } x+y+z\le 1;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0.$

4.2.29. $\iint\limits_{\sigma^-} yx^2dzdx;\quad \sigma\text{: } z^2+x^2-r^2;\ 0\le y\le 2.$ **4.2.30.** $\iint\limits_{\sigma^-} y^2dzdx;\quad \sigma\text{: } y=z^2+x^2;\ y\le 1.$

Задание 3. Найти массу, сосредоточенную на заданной поверхности σ, при известной плотности $f(P)$ в каждой точке $P(x,y,z)\in\sigma$.

4.3.1. σ: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2};\quad f(P)=x^2+y^2.$

4.3.2. σ: $z=x^2+y^2,\quad 0\le z\le h;\quad f(P)=\dfrac{1}{\sqrt{z}}.$

4.3.3. σ: $z^2=x^2+y^2,\quad 0\le z\le a;\quad f(P)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

4.3.4. σ - полная поверхность тетраэдра, отсекаемого от 1 -го октанта плоскостью $x+y+z=1;\ f(P)=z^2.$

4.3.5. σ: $x^2+y^2=R^2,\quad 0\le z\le H;\quad f(P)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}.$

4.3.6. σ: $\begin{cases} z=5-x^2-y^2, \\ z=1, \end{cases}\quad f(P)=k=const.$

4.3.7. σ: $\begin{cases} z=x^2+y^2+2, \\ 2\le z\le 6, \end{cases}\quad f(P)=k=const.$ **4.3.8.** σ: $\begin{cases} x^2+y^2=4x, \\ z=y, \\ z=0, \end{cases}\quad f(P)=\dfrac{1}{x^2+y^2}.$

4.3.9. σ: $\begin{cases} x^2+y^2=2y, \\ z=x, \\ z=0, \end{cases}\quad f(P)=\sqrt{x^2+y^2}.$ **4.3.10.** σ: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ x^2+y^2=R^2, \\ z=0, \end{cases}\quad f(P)=|z|.$

4.3.11. σ: $\begin{cases} z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \\ 4\le z\le 5, \end{cases}\quad f(P)=z.$

4.3.12. σ: $\begin{cases} z=x^2+y^2+4, \\ x^2+y^2=4, \\ z=0, \end{cases}\quad f(P)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}.$

4.3.13. σ: $\begin{cases} z=3-\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0\le z\le 3, \end{cases}\quad f(P)=k\sqrt{x^2+y^2},\quad k=const.$

4.3.14. σ: $\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=60, \end{cases}$ $1\le z\le 8$; $f(P)=k=const$.

4.3.15. σ: $\begin{cases} z=2-4(x^2+y^2), \\ z=4(x^2+y^2), \end{cases}$ $f(P)=\sqrt{x^2+y^2}$.

4.3.16. σ: $\begin{cases} z=16-x^2-y^2, \\ x=0, \end{cases}$ $f(P)=\sqrt{x^2+y^2}$.

4.3.17. σ: $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=2x, \end{cases}$ $f(P)=k=const$.

4.3.18. σ: $\begin{cases} z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=21, \\ 1\le z\le 5, \end{cases}$ $f(P)=k=const$.

4.3.19. σ: $\begin{cases} z=4-2(x^2+y^2), \\ z=2(x^2+y^2), \end{cases}$ $f(P)=k\sqrt{x^2+y^2}$.

4.3.20. σ: $\begin{cases} x^2+z^2=y^2, \\ 0\le y\le b, \end{cases}$ $f(P)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4.3.21. σ: $\begin{cases} x^2+z^2=H^2, \\ 0\le y\le b, \end{cases}$ $f(P)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

4.3.22. σ: $\begin{cases} y=10-x^2-z^2, \\ y=1. \end{cases}$ $f(P)=k=const$.

4.3.23. σ: $\begin{cases} y=x^2+z^2+3, \\ 3\le y\le 7, \end{cases}$ $f(P)=k=const$. **4.3.24.** σ: $\begin{cases} x^2+y^2=8x, \\ z=y, \\ z=0. \end{cases}$ $f(P)=\dfrac{3}{x^2+y^2}$.

4.3.25. σ: $\begin{cases} x^2+y^2=4y, \\ z=x, \\ z=0. \end{cases}$ $f(P)=k\sqrt{x^2+y^2}$, $k=const$.

4.3.26. σ: $\begin{cases} y=2-4(x^2+z^2), \\ y=4(x^2+z^2), \end{cases}$ $f(P)=k\sqrt{x^2+z^2}$, $k=const$.

4.3.27. σ: $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$; $f(P)=y^2+z^2$. **4.3.28.** σ: $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ a\le x\le b, \end{cases}$ $f(P)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4.3.29. σ: $\begin{cases} x^2=y^2+z^2, \\ 0\le x\le h, \end{cases}$ $f(P)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4.3.30. σ: $\begin{cases} y=4-2(x^2+z^2), \\ y=2(x^2+z^2). \end{cases}$ $f(P)=\sqrt{x^2+z^2}$.

Задание 4. Задана однородная материальная поверхность $\sigma(\gamma\equiv 1)$. Найти:

а) в вариантах 4.4.1 - 4.4.10 статический момент поверхности σ относительно плоскости XOY;

б) в вариантах 4.4.11 - 4.4.20 статический момент поверхности σ относительно плоскости YOZ;

в) в вариантах 4.4.21 - 4.4.30 статический момент поверхности σ относительно плоскости XOZ.

4.4.1. σ: $\begin{cases} z=3\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0\le z\le 4. \end{cases}$ **4.4.2.** σ: $\begin{cases} z=2-(x^2+y^2), \\ z=1. \end{cases}$

4.4.3. σ - поверхность сегмента сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, отсекаемого плоскостью $z=H$.

4.4.4. Часть поверхности параболоида $2qz=x^2+y^2$, отсечённой плоскостью $z=a$.

4.4.5. σ: $\begin{cases} x^2+z^2=R^2, \\ z=0, \end{cases}$ $0\le y\le h$. **4.4.6.** σ: $\begin{cases} z=3+x^2+y^2, \\ 3\le z\le 12. \end{cases}$

4.4.7. σ: $\begin{cases} z=3-\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=0. \end{cases}$ **4.4.8.** σ: $\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2}, \\ z=10. \end{cases}$

4.4.9. σ: $\begin{cases} x^2+z^2=25, \\ z=0, \end{cases}$ $|y|\le 3$. **4.4.10.** σ: $\begin{cases} z=5+\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=10. \end{cases}$

4.4.11. σ: $\begin{cases} z=6\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0\le z\le 12. \end{cases}$ **4.4.12.** σ: $\begin{cases} x=4-(z^2+y^2), \\ x=5. \end{cases}$

4.4.13 σ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ z=h. \end{cases}$ **4.4.14.** σ: $\begin{cases} 2ax=y^2+z^2, \\ x=a. \end{cases}$

4.4.15. $\sigma: \begin{cases} x^2+z^2=25, \\ z=0, \\ 0\le y\le h. \end{cases}$

4.4.16. $\sigma: \begin{cases} z=6-\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=0. \end{cases}$

4.4.17. $\sigma: \begin{cases} x=8+y^2+z^2, \\ 8\le x\le 12. \end{cases}$

4.4.18. $\sigma: \begin{cases} x=\sqrt{64-y^2-z^2}, \\ x=10. \end{cases}$

4.4.19. $\sigma: \begin{cases} x=\sqrt{36-y^2}, \\ x=0, \\ |z|\le 4. \end{cases}$

4.4.20. $\sigma: \begin{cases} x=5+\sqrt{y^2+z^2}, \\ x=10. \end{cases}$

4.4.21. $\sigma: \begin{cases} z=2\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0\le z\le 4. \end{cases}$

4.4.22. $\sigma: \begin{cases} y=6-(x^2+y^2), \\ y=8. \end{cases}$

4.4.23. $\sigma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=h. \end{cases}$

4.4.24. $\sigma: \begin{cases} 2ay=x^2+z^2, \\ y=a. \end{cases}$

4.4.25. $\sigma: \begin{cases} x^2+y^2=36, \\ z=0, \\ 0\le y\le h. \end{cases}$

4.4.26. $\sigma: \begin{cases} z=5-\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=0. \end{cases}$

4.4.27. $\sigma: \begin{cases} y=6+x^2+z^2, \\ 6\le y\le 10. \end{cases}$

4.4.28. $\sigma: \begin{cases} y=\sqrt{64-x^2-z^2}, \\ y=10. \end{cases}$

4.4.29. $\sigma: \begin{cases} y^2+z^2=36, \\ y=0, \end{cases} \quad |x|\le 3.$

4.4.30. $\sigma: \begin{cases} y=5+\sqrt{x^2+z^2}, \\ y=15. \end{cases}$

Задание 5. а) в вариантах 4.5.1 - 4.5.15 найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями; б) в вариантах 4.5.16 - 4.5.20 вычислить поток векторного поля $\vec{F}=col(P(x,y,z);0;0)$ через часть плоскости σ^+, расположенной в первом октанте (σ - незамкнутая поверхность); в) в вариантах 4.5.21 - 4.5.25 вычислить поток векторного поля $\vec{F}=col(0;Q(x,y,z);0)$ через σ^+ (σ - замкнутая поверхность); г) в вариантах 4.5.26 - 4.5.30 вычислить поток векторного поля $\vec{F}=col(0;0;R(x,y,z))$ через σ^+ (σ - замкнутая поверхность).

Замечание. σ^+ означает выбор верхней стороны поверхности, если σ - незамкнутая поверхность и внешней стороны поверхности, если σ - замкнутая поверхность.

4.5.1. $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\quad z=1,\quad x^2+y^2\le 60.$ **4.5.2.** $z=3+x^2+y^2,\quad z=0,\quad x^2+y^2=4.$

4.5.3. $x^2+y^2=z^2,\quad x^2+y^2=25,\quad z=0.$ **4.5.4.** $x^2+y^2-z^2=-1,\quad x^2+y^2=9.$

4.5.5. $z=5-x^2-y^2,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0.$ **4.5.6.** $y=\sqrt{81-x^2-z^2},\quad x^2+z^2\le 45,\quad y=5.$

4.5.7. $y=5+x^2+z^2,\quad x^2+z^2=9,\quad y=0.$ **4.5.8.** $x^2+z^2=y^2,\quad x^2+z^2=49,\quad y=0.$

4.5.9. $x^2-y^2+z^2=-1,\quad x^2+z^2=16.$ **4.5.10.** $y=7-x^2-z^2,\quad x^2+z^2=4.$

4.5.11. $x=\sqrt{100-y^2-z^2},\quad y^2+z^2\le 51,\quad x=6.$ **4.5.12.** $x=12+y^2+z^2,\quad y^2+z^2=16,\quad x=0.$

4.5.13. $y^2+z^2=x^2,\quad y^2+z^2=64,\quad x=0.$ **4.5.14.** $-x^2+y^2+z^2=-1,\quad y^2+z^2=9.$

4.5.15. $x=8-y^2-z^2,\quad y^2+z^2=4.$

4.5.16. $P(x,y,z)=x+y-2z,$ $\sigma+:\ 2x+y+z=1.$

4.5.17. $P(x,y,z)=x+e^{-y}+z,$ $\sigma^+:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1.$

4.5.18. $P(x,y,z)=x-y^2+2z,$ $\sigma^+:\ \frac{x}{2}+4y+\frac{z}{4}=1.$

4.5.19. $P(x,y,z)=6x-\cos y+3z,$ $\sigma^+:\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$

4.5.20. $P(x,y,z)=x+yz,$ $\sigma^+:\ x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$

4.5.21. $Q(x,y,z)=xz+y^2,$ $\sigma^+:\ \begin{cases} z^2=8(x^2+y^2), \\ z=2. \end{cases}$

4.5.22. $Q(x,y,z)=e^x+3y+z,$ $\sigma^+:\ x^2+y^2+z^2=2x+3.$

4.5.23. $Q(x,y,z)=\ln z+xz+2y^2,$ $\sigma^+:\ \begin{cases} z^2=36(x^2+y^2), \\ z=6. \end{cases}$

4.5.24. $Q(x,y,z)=\sin x-3y+2z,$ $\sigma^+:\ \begin{cases} z=3x^2+2y^2+1, \\ x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

4.5.25. $Q(x,y,z)=xy+z^2,$ $\sigma^+:\ \begin{cases} 4z=x^2+y^2, \\ z=4. \end{cases}$

4.5.26. $R(x,y,z)=e^x+4y+2z,$ $\sigma^+:\ \begin{cases} x+y=1, \\ x=0;\ y=0;\ z=0, \\ z=x^2+y^2. \end{cases}$

4.5.27. $R(x,y,z)=x^2+xz+y^2,\quad \sigma^+:\ \begin{cases} y=x, \\ y=2x, \\ z=0,\quad x=1, \\ z=x^2+y^2. \end{cases}$

4.5.28. $R(x,y,z)=\cos x+\sin y+5z.\quad \sigma^{+}:\ \begin{cases} z=8-x^2-y^2, \\ z=x^2+y^2. \end{cases}$

4.5.29. $R(x,y,z)=xz+2y,\quad \sigma^{+}:\ \begin{cases} x+y+2z=4, \\ x=0;\ y=0;\ z=0. \end{cases}$

4.5.30. $R(x,y,z)=5xz^2-2y,\quad \sigma^{+}:\ \begin{cases} z=x^2+y^2+6, \\ z=0, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$