высшего профессионального образования
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА
Кафедра «Высшая математика»

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов всех специальностей и всех форм обучения

Составитель Ю.А. Самохин

УДК 517.2

Предел числовой последовательности и функции: метод. указания для студентов всех специальностей и всех форм обучения / НГТУ; сост.: Ю.А. Самохин. Н.Новгород, 2009. – 21 с.

Научный редактор Т.В. Чекмарёв

Редактор Э.Б. Абросимова

Бр

аб

а газетная.
кз. Заказ 264.

Р. Е. Алексеева.
нина, 24.

енный технический
еева, 2009

нный технический
ва, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Известно, какие трудности испытывает студент, впервые сталкивающийся с понятием предела – фундаментальным понятием математического анализа.

Вместе с тем без твердого усвоения основных положений теории пределов нельзя глубоко и прочно овладеть курсом высшей математики в целом.

На примерах выясняется смысл предела числовой последовательности и функции. Приведены необходимые краткие теоретические сведения.

Данные методические указания предназначены для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Понятие предела числовой последовательности

Любой числовой функции $f(n)$, заданной на множестве всех натуральных чисел, соответствует числовая последовательность

$$f(1), f(2), ..., f(n), ..., \qquad (1)$$

полученная из ряда натуральных чисел $1,2,...,n,...$ заменой каждого натурального числа n соответствующим ему числом $f(n)$. Значения функции $f(n)$ называются членами последовательности (1), сама функция $f(n)$ называется общим членом последовательности. Если ввести обозначение $f(n) = a_n$, то последовательность (1) запишется в виде

$$a_1, a_2, ..., a_n, ..., \qquad (2)$$

Наряду с записью (2) числовой последовательности часто употребляется сокращённая запись $\{a_n\}$, $n = 1,2,...$ или просто $\{a_n\}$.

Определение 1. Число a называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такое целое неотрицательное число N в зависимости от ε, что из неравенства $n > N$ будет следовать неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad (3)$$

С геометрической точки зрения равенство (3) означает, что при любом выборе положительного числа ε все члены последовательности $\{a_n\}$, за исключением, быть может, конечного числа членов, содержатся в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность $\{a_n\}$ называют сходящейся (расходящейся), если существует (не существует) действительное число a, являющееся пределом последовательности $\{a_n\}$.

Для расходящейся последовательности аналогом понятия предела является

понятие о несобственном пределе.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ имеет несобственный предел плюс бесконечность (минус бесконечность), если для любого действительного числа M можно подобрать такое целое неотрицательное число N в зависимости от M, что из неравенства $n > N$ будет следовать неравенство $a_n > M$ $(a_n < M)$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \ (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Определение 3. Если у последовательности $\{a_n\}$ имеется бесконечно много членов как положительных, так и отрицательных и выполнено неравенство $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет несобственный предел $\pm\infty$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \text{ или } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Отметим (без доказательства) некоторые теоремы теории последовательностей, непосредственно следующие из введённых выше определений.

1. Если $\{a_n\}$ такова, что $a_n \neq 0$ для любого n и $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, то $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$.

2. Если $\{a_n\}$ такова, что $a_n \neq 0$ для любого n и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \infty$.

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty)$, то общий член последовательности $\{a_n\}$ называется бесконечно малой (бесконечно большой) величиной. В связи с этим теоремы 1 и 2 принято выражать так:

величина, обратная бесконечно большой (малой), является бесконечно малой (большой).

3. Если последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ таковы, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0, |v_n| < M$ для всех n, то $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0$ (или коротко: произведение бесконечно малой величины

на величину ограниченную есть бесконечно малая величина).

4. Если последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty, |v_n| > M > 0$ для всех n, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = 0$ (коротко: произведение бесконечно большой величины на величину, модуль которой больше некоторого положительного числа, есть величина бесконечно большая).

Следствиями теорем 1-4 являются равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ если } |u_n| < M, v_n \neq 0, \ \lim_{n\to\infty} v_n = \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \infty, \text{ если } |u_n| > M > 0, v_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$

5. Если $x_n = c$ – const для любого n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

6. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n \neq 0, n = 1,2,\ldots$ также сходятся, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Решение задач на нахождение пределов, как правило, осуществляется с использованием теорем 1-6.

§ 2. Примеры

Пример 1. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{2n-5}{n+1}\right\}$ имеет своим пределом число 2. Указать число членов последовательности, отличающихся от числа ε 1) больше чем на $\varepsilon = 0{,}001$, 2) меньше чем на $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Доказать, что число ε является пределом последовательности,

это значит показать, что (смотри определение 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое неотрицательное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| < \varepsilon, \tag{4}$$

или

$$\frac{7}{n+1} < \varepsilon. \tag{5}$$

Неравенство (5) выполнится, если

$$n > \frac{7}{\varepsilon} - 1. \tag{6}$$

Так как число $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1$ может быть положительным и отрицательным, то наши дальнейшие рассуждения строятся следующим образом.

Пусть $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1 \geq 0$. Отсюда $\varepsilon \leq 7$. Следовательно, при $0 < \varepsilon \leq 7$, обозначая целую часть числа $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1$ символом $\left[\dfrac{7}{\varepsilon} - 1\right]$, утверждаем, что как только

$$n > \left[\frac{7}{\varepsilon} - 1\right] \equiv N(\varepsilon),$$

выполнится и (4).

Если же $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1 < 0$, то неравенство (6) выполняется при любом натуральном n. Это означает, что (4) имеет место для всех членов последовательности (следовательно, $N(\varepsilon) = 0$).

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: как только $n > N(\varepsilon)$, где

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} 0, \textit{ если } \varepsilon > 7, \\ \dfrac{7}{\varepsilon} - 1, \textit{ если } 0 < \varepsilon \leq 7, \end{cases}$$

выполнится (4), то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{n+1} = 2$.

Пусть $\varepsilon = 0{,}001$. Тогда $N(0{,}001) = \left[\frac{7}{0{,}001} - 1\right] = 6999$. Приведённые выше рассуждения показывают, что $|a_n - 2| < 0{,}001$ при всех $n > 6999$. Очевидно, что таких членов последовательности бесчисленное множество. С другой стороны, 6998 членов последовательности $(a_1, a_2, ..., a_{6998})$ обладают тем свойством, что для них $|a_n - 2| > 0{,}001$ $(n = 1,2,3,,...,6998)$. Наконец, для $a_{6999} : |a_{6999} - 2| = 0{,}001$.

Легко обнаружить, что, увеличивая число ε (в пределах отрезка $(0,7]$), мы уменьшаем число членов последовательности, удовлетворяющих неравенству $|a_n - 2| > \varepsilon$. Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ $N(0{,}01) = \left[\frac{7}{0{,}01} - 1\right] = 699$.

Пример 2. Дана последовательность

$$a_n = \frac{7^n + (-7)^n}{7^n}, n = 1,2,3,.... \tag{7}$$

Доказать, что она не имеет предела.

Решение. Предположим противное, то есть пусть последовательность имеет предел, равный a. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и, в частности, для $\varepsilon = 0{,}5$ найдётся целое неотрицательное число $N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - a| < 0{,}5$ для всех $n > N(\varepsilon)$.

Как следует из (7), a_n может принимать лишь два значения: 2 (при n – чётном) и 0 (при n – нечётном). Следовательно, должны выполняться неравенства

$$|2 - a| < 0{,}5 \text{ и } |a| < 0{,}5. \tag{8}$$

Используя неравенства (8), получаем

$$2 = |(2 - a) + a| \le |2 - a| + |a| < 0{,}5 + 0{,}5 = 1,$$

то есть $2 < 1$. Полученное противоречие и доказывает , что последовательность (7) не имеет предела.

При решении более сложных примеров на доказательство равенств (3) следует учитывать, что операция нахождения числа N по данному $\varepsilon > 0$ неоднозначна. Действительно, если число N обладает нужным свойством:

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon,$$

то число $N^* > N$ также обладает нужным свойством:

$$n > N^* \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Поэтому формулу для $N(\varepsilon)$ можно получить не обязательно в результате решения неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$. Её можно получить, решая другое неравенство, при выполнении которого следует выполнение неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$.

Следующий пример иллюстрирует сказанное выше.

Пример 3. Пользуясь определением предела, доказать, что последовательность $\left\{\frac{n}{n^4 + 2n + 7}\right\}$ имеет своим пределом нуль, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^4 + 2n + 7} = 0. \tag{9}$$

Решение. Убедимся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{n}{n^4 + 2n + 7}\right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Имеем:

$$\left|\frac{n}{n^4 + 2n + 7}\right| = \frac{n}{n^4 + 2n + 7} < \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}. \tag{11}$$

В силу (11) для каждого n, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{1}{n^3} < \varepsilon, \tag{12}$$

будет справедливо и неравенство (10). Неравенство (12) равносильно неравенству

$$n > \varepsilon^{-\frac{1}{3}}.$$

Следовательно, за число N можно взять $\left[\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right]$.

Итак, как только $n > N = \left[\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right]$, сразу же выполнится неравенство (10). Равенство (9) доказано.

Пример 4. Убедиться в том, что последовательность $\left\{n^3 + 2 + \frac{7}{n}\right\}$ бесконечно большая.

Решение. Обозначим через $a_n = \frac{n}{n^4 + 2n + 7}$. Очевидно, что для любого $n = 1,2,3,...$ $a_n \neq 0$. В силу (9) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Используя теорему 2, утверждаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3 + 2 + \frac{7}{n}\right) = \infty$.

Пример 5. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, n = 2k, \\ \\ -1 + \frac{1}{2^n}, n = 2k+1 \end{cases} \qquad (13)$$

предела не имеет.

Решение. Из (13) следует, что точки x_n с нечётными номерами стягиваются к точке -1, а точки x_n с чётными номерами – к точке 1.

Возьмём произвольное число a. Пусть число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ не содержит, по крайней мере, некоторую окрестность одной из точек –1 или 1. Тогда вне интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ будет находиться бесконечное множество чисел x_n. Это означает, что нельзя утверждать, что все числа x_n, начиная с некоторого, попадут в ε – окрестность точки a. Следовательно, число a не является пределом данной числовой последовательности (13). В силу произвольности этого числа a утверждаем, что никакое число не является пределом данной последовательности.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 3. Понятие предела функции непрерывного аргумента

Предел последовательности является частным случаем понятия о пределе функции. Случай, когда областью определения функции является множество натуральных чисел, рассмотрен в §1,2. Ниже мы рассмотрим общий случай, когда областью определения функции может быть конечный или бесконечный интервал, совокупность интервалов или любое другое множество действительных чисел.

Приведём определения предела функции, относящиеся к общему случаю.

Определение 4. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ в зависимости от ε, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Определение 5. Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке a или пределом функции $f(x)$ справа (слева), если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число $\delta(\varepsilon)$ в зависимости от ε,что из неравенства $0 < x - a < \delta (-\delta < x - a < 0)$ будет следовать неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \ \left(\lim_{x\to a-0} f(x) = A\right)$$

или

$$f(a+0) = A \ \left(f(a-0) = A\right).$$

Замечание. Равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ равносильно совместному выполнению равенств $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$.

Определение 6. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ в зависимости от ε, что из неравенства $x > \delta$ $(x < -\delta)$ будет следовать неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = A).$$

Определение 7. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ в зависимости от ε, что из неравенства $|x| > \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Замечание. Равенство $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ равносильно совместному выполнению равенств $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Определение 8. Функция $f(x)$ имеет несобственный предел $+\infty(-\infty)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое положительное число δ в зависимости от ε, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ будет следовать неравенство $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

Определение 9. Функция $f(x)$ имеет несобственный предел $+\infty(-\infty)$ при $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое положительное число δ в зависимости от ε, что из неравенства $x > \delta$ будет следовать неравенство $f(x) > \varepsilon (f(x) < -\varepsilon)$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty).$$

Определение 10. Функция $f(x)$ имеет несобственный предел $+\infty(-\infty)$ при $x \to -\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое положительное число δ в зависимости от ε, что из неравенства $x < -\delta$ будет следовать неравенство $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty).$$

На рис. 1, 2, и 3 даны графические иллюстрации соответственно равенствам $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$.

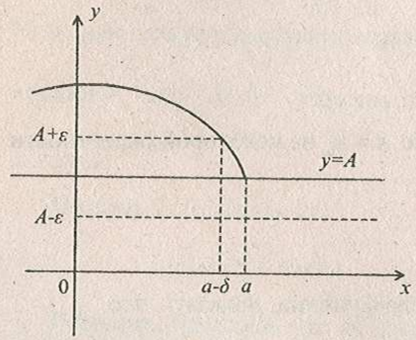

Рис. 1

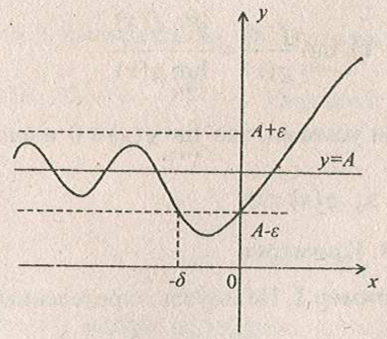

Рис. 2

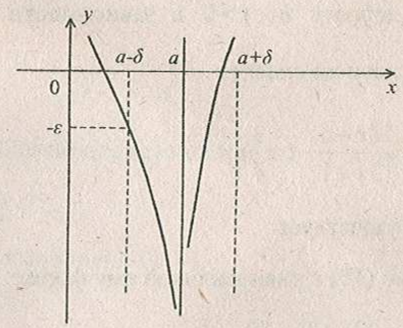

Рис. 3

Студенту рекомендуется в качестве упражнения выполнить рисунки, иллюстрирующие определения 4-10.

Нахождение пределов функций в большинстве случаев основывается на следующих теоремах.

1. Если $f(x)=c$ – const, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

2. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, k – const,

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

г) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ и для любого $x\neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 $g(x)\neq 0$.

§ 4. Примеры

Пример 1. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-5}{3x+1}=-\frac{3}{4}. \qquad (14)$$

Решение. В соответствии с определением 5 нам надо показать, что по любому $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon)>0$ в зависимости от ε так, что из неравенства $0<|x-1|<\delta$ сразу же следует

$$\left|f(x)-(-\frac{3}{4})\right|=\left|\frac{2x-5}{3x+1}-(-\frac{3}{4})\right|<\varepsilon. \qquad (15)$$

Покажем, что такое $\delta(\varepsilon)$ существует.

Перепишем неравенство (15) в равносильной ему форме:

$$\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|<\frac{4\varepsilon}{17} \text{ или } \left|\frac{3x+1}{x-1}\right|>\frac{17}{4\varepsilon}.$$

Учитывая, что

$$\left|\frac{3x+1}{x-1}\right|=\left|\frac{3(x-1)+4}{x-1}\right|=\left|\frac{4}{x-1}+3\right|\geq\frac{4}{|x-1|}-3,$$

заключаем, что из неравенства

$$\frac{4}{|x-1|}-3>\frac{17}{4\varepsilon} \qquad (16)$$

следует неравенство (15). Но неравенство (16) равносильно неравенству

$$\left|\sqrt{7-x}-\sqrt{5}\right|=\frac{|2-x|}{\left|\sqrt{7-x}+\sqrt{5}\right|}<\frac{|x-2|}{\sqrt{5}}. \qquad (17)$$

Итак, как только выполнено неравенство (17), выполнено и (15). Тем самым мы показали, что $\delta(\varepsilon)$ существует, причём $\delta(\varepsilon)=\dfrac{16}{17+12\varepsilon}$. Равенство (14) доказано.

Пример 2. Доказать что

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{7-x}=\sqrt{5}. \qquad (18)$$

Решение. Покажем, что по заданному $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon)>0$ так, что из выполнения неравенства $|x-2|<\delta(\varepsilon)$, $x\leq 7$ будет следовать неравенство

$$\left|\sqrt{7-x}-\sqrt{5}\right|<\varepsilon. \qquad (19)$$

$$\left|\sqrt{7-x}-\sqrt{5}\right|=\frac{|2-x|}{\left|\sqrt{7-x}+\sqrt{5}\right|}<\frac{|x-2|}{\sqrt{5}}. \qquad (20)$$

В силу неравенства (20) неравенство (19) следует из неравенства

$$|x-2|<\varepsilon\sqrt{5}. \qquad (21)$$

Поэтому, как только выполнено (21) и

$$x-2\leq 5, \qquad (22)$$

сразу же выполнится неравенство (19).

Пусть $\delta(\varepsilon)=\min(\varepsilon\sqrt{5},5)$. Выбор такого $\delta(\varepsilon)$ в силу неравенств (21) и (22) гарантирует выполнение неравенства (19), и равенство (18) доказано.

Формулу для $\delta(\varepsilon)$ можно записать и так:

$$\delta(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon\sqrt{5}, \text{ если } 0<\varepsilon<\sqrt{5},\\ 5, \text{ если } \varepsilon\geq\sqrt{5}.\end{cases} \tag{23}$$

Фиксируем ε. Положим, что $\varepsilon=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}(<\sqrt{5})$. Тогда из (23) следует, что

$\delta(\varepsilon)=\dfrac{1}{4}$. Следовательно, как только $|x-2|<0{,}25$, сразу же $\left|\sqrt{7-x}-\sqrt{5}\right|<\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$,

то есть, как только $\dfrac{7}{4}<x<\dfrac{9}{4}$, сразу же $\dfrac{19}{4\sqrt{5}}<\sqrt{7-x}<\dfrac{21}{4\sqrt{5}}$.

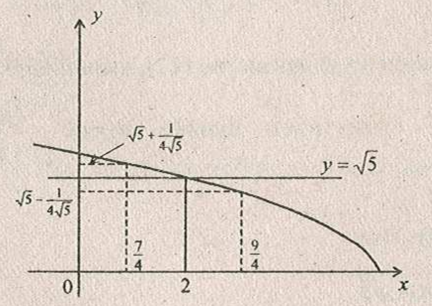

Рис. 4

Пример 3. Дана функция $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Согласно определению 6 равенство $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства $|x|>\delta(\varepsilon)$ $(x\neq-0{,}5)$ будет следовать неравенство

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon. \tag{24}$$

Так как

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|2x+1|} \text{ и } |2x+1|>2|x|-1,$$

то имеем

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4|x|-2}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что выполнения неравенства

$$\frac{1}{4|x|-2}<\varepsilon \tag{26}$$

достаточно для того, чтобы имело место (24). Решая неравенство (26), имеем

$$|x|>\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Полагая $\delta(\varepsilon)=\dfrac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$, мы получаем, что при $|x|>\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство (24). Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4. Доказать, что

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{2x+3}{3x-1}=\infty. \tag{27}$$

Решение. Доказать равенство (27) – это значит показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, что, как только

$$0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta(\varepsilon),$$

сразу же выполняется неравенство

$$\left|\frac{2x+3}{3x-1}\right|>\varepsilon. \tag{28}$$

Имеем:

$$\left|\frac{2x+3}{3x-1}\right|=\left|\frac{2(x-\frac{1}{3})+\frac{11}{3}}{3(x-\frac{1}{3})}\right|\geq\frac{\frac{11}{3}-2\left|x-\frac{1}{3}\right|}{3\left|x-\frac{1}{3}\right|}. \tag{29}$$

В силу неравенства (29), как только

$$\frac{\frac{11}{3}-2\left|x-\frac{1}{3}\right|}{3\left|x-\frac{1}{3}\right|}>\varepsilon, \qquad (30)$$

выполнится и неравенство (28). Нетрудно проверить, что (30) имеет место, если

$$0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{11}{3(3\varepsilon+2)}. \qquad (31)$$

Таким образом, как только выполнится (31), имеет место и (28). Равенство (27) доказано, причём за $\delta(\varepsilon)$ можно взять число

$$\delta(\varepsilon)=\frac{11}{3(3\varepsilon+2)}.$$

Пример 5. Доказать, что

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}+1)=1. \qquad (32)$$

Решение. Обозначим

$$g(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}+1.$$

Имеем:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}}+1. \qquad (33)$$

Следовательно, равенство (32) соответствует равенству

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}}+1\right)=1. \qquad (34)$$

Доказать (34) – это значит показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $C(\varepsilon)$, что как только $x<C(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$|g(x)-1|<\varepsilon. \qquad (35)$$

Используя (33), перепишем неравенство (35):

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}}<\varepsilon. \qquad (36)$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}}<\frac{1}{2\sqrt{1-x}}. \qquad (37)$$

Следовательно, для того, чтобы выполнилось неравенство (36), достаточно выполнения (в силу (37)) неравенства $\frac{1}{2\sqrt{1-x}}<\varepsilon$, то есть

$$\sqrt{1-x}>\frac{1}{2\varepsilon}. \qquad (38)$$

При $x<1$ неравенство (38) равносильно неравенству

$$x<1-\frac{1}{4\varepsilon^2}. \qquad (39)$$

Обозначая через

$$C=1-\frac{1}{4\varepsilon^2}, \qquad (40)$$

получаем, что число C, в силу неравенства (39), по отношению к числу ε обладает нужным свойством. Следовательно, равенство (32) доказано. В частности, при $\varepsilon=0{,}01$ имеем из (40), что $C=-2499$. Следовательно, как только $-\infty<x<-2499$, значения функции $g(x)$ принадлежат промежутку $(1;1{,}01)$.

Пример 6. Доказать, что

$$\lim_{x\to2+0}\frac{2x+3}{3x+1}=1. \qquad (41)$$

Решение. В задаче требуется показать, что число 1 для функции $f(x)=\frac{2x+3}{3x+1}$ является правым пределом. Согласно определению 4 покажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что как только $2<x<2+\delta(\varepsilon)$, сразу же выполняется неравенство

$$\left|\frac{2x+3}{3x+1}-1\right|<\varepsilon. \qquad (42)$$

Перепишем неравенство (42):

$$\left|\frac{2-x}{3x+1}\right|<\varepsilon. \qquad (43)$$

У нас $x>2$. Следовательно, из (43) имеем

$$\frac{x-2}{3x+1}<\varepsilon. \qquad (44)$$

Неравенство (44) равносильно неравенству

$$\frac{3x+1}{x-2}>\frac{1}{\varepsilon}, \text{ или } \frac{3(x-2)+7}{x-2}>\frac{1}{\varepsilon},$$

или

$$\frac{7}{x-2}>\frac{1-3\varepsilon}{\varepsilon}. \qquad (45)$$

Число ε – любое заданное положительное число. Если $\varepsilon \geq \frac{1}{3}(1-3\varepsilon \leq 0)$, то неравенство (45) и, следовательно, (42) выполнится при любом $x>2$. В этом случае $\delta(\varepsilon)$ – любое положительное число. Если же $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$, то неравенство (45) равносильно неравенству

$$0<x-2<\frac{7\varepsilon}{1-3\varepsilon}$$

или

$$2<x<2+\frac{7\varepsilon}{1-3\varepsilon} \qquad (46)$$

и выполнения неравенства (46) достаточно, чтобы имело место неравенство (42), причём роль $\delta(\varepsilon)$ играет число

$$\delta(\varepsilon)=\frac{7\varepsilon}{1-3\varepsilon},\ 0<\varepsilon<\frac{1}{3}.$$

Итак, для любого $\varepsilon>0$ мы показали существование такого $\delta(\varepsilon)$:

$\delta(\varepsilon)$ – любое положительное число, если $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$;

$\delta(\varepsilon)=\frac{7\varepsilon}{1-3\varepsilon}$, если $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$,

что выполняется неравенство (42), как только $2<x<2+\delta(\varepsilon)$. Равенство (41) доказано.

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1 / Л.Д. Кудрявцев, М., Высшая школа, 1981.

2. Виленкин Н.Я. Задачник по курсу математического анализа. Ч. 1 / Н.Я. Виленкин и др., М., Просвещение,1971.

3. Ильин В.А. Основы математического анализа Т. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, М., Наука, 1982.