Л. А. КУЗНЕЦОВ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Рекомендовано Государственным комитетом
Российской Федерации по высшему образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению «Математика»

Москва
«Высшая школа» 1994

ББК 22.11
К89
УДК 517

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензент — кафедра высшей математики
Московского института электронной техники

К $\frac{1602010000 — 101}{001 (01) — 94}$ без объявл.

ISBN 5-06-002666-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа учащегося. Система типовых расчетов (ТР), как показал опыт ряда вузов нашей страны, активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса высшей математики. Применение системы ТР рекомендовано программой по высшей математике для втузов.

Каждый ТР содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения и расчетную часть — задачи. Теоретические вопросы и теоретические упражнения являются общими для всех студентов, задачи для каждого студента группы индивидуальные (каждая задача составлена в 31 варианте).

Выполнение студентами ТР контролируется преподавателем. Предварительно проверяется правильность решения теоретических упражнений и задач. Завершающим этапом является защита ТР. Студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения теоретических упражнений и задач, решать задачи аналогичного типа.

Настоящий сборник отражает опыт работы Московского энергетического института, в котором система типовых расчетов по высшей математике успешно используется начиная с 1971/72 учебного года. Наряду с традиционными текущими заданиями по математике студенты МЭИ в течение каждого семестра выполняют ТР по разделам, изучаемым в семестре. Задачи сдаются студентами на проверку частями по мере изучения курса. Защита ТР осуществляется в письменной форме во время занятий по расписанию (как правило, защита занимает один учебный час). Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или в виде собеседования (по усмотрению преподавателя).

Работой по созданию типовых расчетов руководил автор сборника доц. Л. А. Кузнецов. Большую помощь в этой работе ему оказали доц. В. П. Пикулин, старшие преподаватели А. Ф. Леферова, А. С. Калинин. В составлении задач принимали участие многие преподаватели кафедры высшей математики МЭИ

В. В. Жаринов, В. А. Илюшкин, Н. К. Козлова, Р. Ф. Салихджанов, Г. А. Соколов и др. Созданию и внедрению системы типовых расчетов во многом способствовал чл.-кор. АН СССР проф. С. И. Похожаев.

При подготовке второго издания учтен опыт использования сборника в МЭИ и в ряде других вузов, внесены исправления, переработаны задачи в разделе «Ряды». Сборник дополнен разделом «Уравнения математической физики», в который включены простейшие задачи, рассчитанные на применение метода разделения переменных.

Автор благодарен проф. А. В. Ефимову, доцентам В. М. Терпигоревой, В. Г. Долголаптеву и И. Б. Кожухову за рецензирование рукописи и полезные замечания. Автор весьма признателен также проф. И. М. Петрушко и доц. А. Л. Павлову за участие в подготовке материалов для составления задач по уравнениям математической физики, доц. В. П. Пикулину, любезно предоставившему готовые материалы по аналитической геометрии и линейной алгебре, доц. П. А. Шмелеву за сделанные замечания и предложения по пересмотру ряда теоретических упражнений, доц. Минского радиотехнического института А. А. Карпуку, сообщившему замечания, накопленные при работе со сборником, и всем, кто проявил внимание и высказал добрые пожелания по совершенствованию сборника.

Автор

I. ПРЕДЕЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятия числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

2. Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.

3. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

4. Теорема о пределе промежуточной функции.

5. Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции $\cos x$.

6. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

7. Понятие бесконечно малой функции. Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

8. Теорема о сумме бесконечно малых функций.

9. Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию.

10. Теорема об отношении бесконечно малой функции к функции, имеющей предел, отличный от нуля.

11. Теорема о пределе суммы.

12. Теорема о пределе произведения.

13. Теорема о пределе частного.

14. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

15. Непрерывность суммы, произведения и частного.

16. Непрерывность сложной функции.

17. Понятие бесконечно большой функции. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми.

18. Сравнение бесконечно малых функций.

19. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема о замене бесконечно малых функций эквивалентными.

20. Условие эквивалентности бесконечно малых функций.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=|a|$. Вытекает ли из существования $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

Указание. Доказать и использовать неравенство

$$||b|-|a||\leqslant|b-a|.$$

2. Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ расходится.

3. Сформулировать на языке «$\varepsilon-\delta$» утверждение: «Число A не является пределом в точке x_0 функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0».

4. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция, то $F(x)=|f(x)|$ есть также непрерывная функция. Верно ли обратное утверждение?

5. Сформулировать на языке «$\varepsilon-\delta$» утверждение: «Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, не является непрерывной в этой точке».

6. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,\varphi(x)$ не существует.

Указание. Допустить противное и использовать теорему о пределе частного.

7. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+\varphi(x)]$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,\varphi(x)$?

Рассмотреть пример: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

8. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, а функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x\to x_0$. Доказать, что произведение $f(x)\varphi(x)$ является бесконечно большой функцией при $x\to x_0$.

9. Является ли бесконечно большой при $x\to 0$ функция $\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$?

10. Пусть $\alpha'(x)\sim\alpha(x)$ и $\beta'(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ не существует, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ тоже не существует.

Расчетные задания

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1.1. $a_n=\dfrac{3n-2}{2n-1},\ a=\dfrac{3}{2}.$

1.2. $a_n=\dfrac{4n-1}{2n+1},\ a=2.$

1.3. $a_n=\dfrac{7n+4}{2n+1},\ a=\dfrac{7}{2}.$

1.4. $a_n=\dfrac{2n-5}{3n+1},\ a=\dfrac{2}{3}.$

1.5. $a_n=\dfrac{7n-1}{n+1},\ a=7.$

1.6. $a_n=\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2},\ a=\dfrac{4}{3}.$

1.7. $a_n=\dfrac{9-n^3}{1+2n^3},\ a=-\dfrac{1}{2}.$

1.8. $a_n=\dfrac{4n-3}{2n+1},\ a=2.$

1.9. $a_n=\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2},\ a=-\dfrac{1}{2}.$

1.10. $a_n=-\dfrac{5n}{n+1},\ a=-5.$

1.11. $a_n=\dfrac{n+1}{1-2n},\ a=-\dfrac{1}{2}.$

1.12. $a_n=\dfrac{2n+1}{3n-5},\ a=\dfrac{2}{3}.$

1.13. $a_n=\dfrac{1-2n^2}{n^2+3},\ a=-2.$

1.14. $a_n=\dfrac{3n^2}{2-n^2},\ a=-3.$

1.15. $a_n=\dfrac{n}{3n-1},\ a=\dfrac{1}{3}.$

1.16. $a_n=\dfrac{3n^3}{n^3-1},\ a=3.$

1.17. $a_n=\dfrac{4+2n}{1-3n},\ a=-\dfrac{2}{3}.$

1.18. $a_n=\dfrac{5n+15}{6-n},\ a=-5.$

1.19. $a_n=\dfrac{3-n^2}{4+2n^2},\ a=-\dfrac{1}{2}.$

1.20. $a_n=\dfrac{2n-1}{2-3n},\ a=-\dfrac{2}{3}.$

1.21. $a_n=\dfrac{3n-1}{5n+1},\ a=\dfrac{3}{5}.$

1.22. $a_n=\dfrac{4n-3}{2n+1},\ a=2.$

1.23. $a_n=\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2},\ a=-\dfrac{1}{2}.$

1.24. $a_n=\dfrac{5n+1}{10n-3},\ a=\dfrac{1}{2}.$

1.25. $a_n=\dfrac{2-2n}{3+4n},\ a=-\dfrac{1}{2}.$

1.26. $a_n=\dfrac{23-4n}{2-n},\ a=4.$

1.27. $a_n=\dfrac{1+3n}{6-n},\ a=-3.$

1.28. $a_n=\dfrac{2n+3}{n+5},\ a=2.$

1.29. $a_n=\dfrac{3n^2+2}{4n^2-1},\ a=\dfrac{3}{4}.$

1.30. $a_n=\dfrac{2-3n^2}{4+5n^2},\ a=-\dfrac{3}{5}.$

1.31. $a_n=\dfrac{2n^3}{n^3-2},\ a=2.$

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}.$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}.$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}.$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}.$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}.$

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$.

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$.

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$.

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$.

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$.

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$.

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$.

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$.

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

2.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$.

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

2.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$.

2.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$.

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$.

2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

2.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$.

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$.

3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$.

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$.

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$.

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$.

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$.

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$.

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$.

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$.

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$.

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$.

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$.

3.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$.

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$.

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$.

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.

3.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$.

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$.

3.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$.

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$.

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$.

3.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

3.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

3.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$.

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1})+\sqrt{n^2-1})$.

4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}]$.

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$.

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}]$.

4.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-3n+2}-n)$.

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty} (n+\sqrt[3]{4-n^3})$.

4.8. $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}]$.

4.9. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}]$.

4.10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}]$.

4.11. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$.

4.12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$.

4.13. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}]$.

4.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

4.15. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$.

4.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$.

4.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$.

4.18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$.

4.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})$.

4.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$.

4.21. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}]$.

4.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.

4.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$.

4.24. $\lim\limits_{n\to\infty}[n-\sqrt{n(n-1)}]$.

4.25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3[\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^8-1)}]$.

4.26. $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}]$.

4.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}]$.

4.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$.

4.29. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$.

4.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2})$.

4.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}$.

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

5.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

5.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]$.

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

5.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

5.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

5.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

5.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

5.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)}$.

5.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

5.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

5.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3+5-7+9-11+\ldots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$.

5.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n}$.

5.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

5.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

5.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{1+2+3+\ldots+n}-\frac{2}{3}\right]$.

5.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

5.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-5+4-7+\ldots+2n-(2n+3)}{n+3}$.

5.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

5.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n-n^2+3}$.

5.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$.

5.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1+2^n}{4^n}\right)$.

5.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

5.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}\right]$.

5.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

5.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

5.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

5.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

5.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

5.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$.

Задача 6. Вычислить пределы числовых последовательностей.

6.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$.

6.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

6.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

6.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

6.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

6.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

6.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

6.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

6.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

6.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

6.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

6.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

6.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$.

6.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

6.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$.

6.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

6.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

6.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

6.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

6.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

6.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

6.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

6.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

6.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

6.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

6.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

6.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

6.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

6.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$.

6.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$.

Задача 7. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

7.1. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7.$

7.2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6.$

7.3. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7.$

7.4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10.$

7.5. $\lim\limits_{x\to -1/2} \frac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5.$

7.6. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5.$

7.7. $\lim\limits_{x\to -1/3} \frac{9x^2-1}{x+1/3} = -6.$

7.8. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7.$

7.9. $\lim\limits_{x\to -1/3} \frac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4.$

7.10. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6.$

7.11. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2.$

7.12. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5.$

7.13. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1.$

7.14. $\lim\limits_{x\to -7/5} \frac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19.$

7.15. $\lim\limits_{x\to -7/2} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\frac{1}{2}.$

7.16. $\lim\limits_{x\to 5/2} \frac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \frac{1}{2}.$

7.17. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5.$

7.18. $\lim\limits_{x\to -1/2} \frac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81.$

7.19. $\lim\limits_{x\to 11} \frac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23.$

7.20. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26.$

7.21. $\lim\limits_{x\to -7} \frac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13.$

7.22. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10.$

7.23. $\lim\limits_{x\to -1/3} \frac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\frac{5}{3}.$

7.24. $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+2x-15}{x+5} = -8.$

7.25. $\lim\limits_{x\to 8} \frac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8.$

7.26. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{5x^2-51x+10}{x-10} = 49.$

7.27. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^2-5x+2}{x-1/2} = -3.$

7.28. $\lim\limits_{x\to -6} \frac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19.$

7.29. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{3x^2+17x-6}{x-1/3} = 19.$

7.30. $\lim\limits_{x\to -1/5} \frac{15x^2-2x-1}{x+1/5} = -8.$

7.31. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{15x^2-2x-1}{x-1/3} = 8.$

Задача 8. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$).

8.1. $f(x)=5x^2-1,\ x_0=6.$

8.2. $f(x)=4x^2-2,\ x_0=5.$

8.3. $f(x)=3x^2-3,\ x_0=4.$

8.4. $f(x)=2x^2-4,\ x_0=3.$

8.5. $f(x)=-2x^2-5,\ x_0=2.$

8.6. $f(x)=-3x^2-6,\ x_0=1.$

8.7. $f(x)=-4x^2-7,\ x_0=1.$

8.8. $f(x)=-5x^2-8,\ x_0=2.$

8.9. $f(x)=-5x^2-9,\ x_0=3.$

8.10. $f(x)=-4x^2+9,\ x_0=4.$

8.11. $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=5.$

8.12. $f(x)=-2x^2+7,\ x_0=6.$

8.13. $f(x)=2x^2+6,\ x_0=7.$

8.14. $f(x)=3x^2+5,\ x_0=8.$

8.15. $f(x)=4x^2+4,\ x_0=9.$

8.16. $f(x)=5x^2+3,\ x_0=8.$

8.17. $f(x)=5x^2+1,\ x_0=7.$

8.18. $f(x)=4x^2-1,\ x_0=6.$

8.19. $f(x)=3x^2-2,\ x_0=5.$

8.20. $f(x)=2x^2-3,\ x_0=4.$

8.21. $f(x)=-2x^2-4,\ x_0=3.$

8.22. $f(x)=-3x^2-5,\ x_0=2.$

8.23. $f(x)=-4x^2-6,\ x_0=1.$

8.24. $f(x)=-5x^2-7,\ x_0=1.$

8.25. $f(x)=-4x^2-8,\ x_0=2.$

8.26. $f(x)=-3x^2-9,\ x_0=3.$

8.27. $f(x)=-2x^2+9,\ x_0=4.$

8.28. $f(x)=2x^2+8,\ x_0=5.$

8.29. $f(x)=3x^2+7,\ x_0=6.$

8.30. $f(x)=4x^2+6,\ x_0=7.$

8.31. $f(x)=5x^2+5,\ x_0=8.$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

9.1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}.$

9.2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}.$

9.3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$

9.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$

9.5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}.$

9.6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}.$

9.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}.$

9.8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}.$

9.9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}.$

9.10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}.$

9.11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.$

9.12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}.$

9.13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}.$

9.14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}.$

9.15. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}.$

9.16. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}.$

9.17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}.$

9.18. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}.$

9.19. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}.$

9.20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}.$

9.21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}.$

9.22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}.$

9.23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}.$

9.24. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}.$

9.25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}.$

9.26. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}.$

9.27. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}.$

9.28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}.$

9.29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

9.30. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

9.31. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Задача 10. Вычислить пределы функций.

10.1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

10.2. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

10.3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

10.4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

10.5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

10.6. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

10.7. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

10.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

10.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

10.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

10.11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

10.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

10.13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

10.14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

10.15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

10.16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

10.17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

10.18. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

10.19. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

10.20. $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

10.21. $\lim\limits_{x\to 1/4} \dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.

10.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

10.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

10.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

10.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

10.26. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

10.27. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.

10.28. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

10.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

10.30. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

10.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Задача 11. Вычислить пределы функций.

11.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$.

11.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10(x+\pi)}{e^{x^2}-1}$.

11.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

11.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

11.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$.

11.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

11.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

11.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

11.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$.

11.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

11.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

11.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$.

11.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$.

11.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

11.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

11.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$.

11.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

11.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

11.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

11.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

11.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

11.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3(x+\pi)}$.

11.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin[\pi(x/2+1)]}$.

11.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2}$.

11.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$.

11.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

11.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

11.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$.

11.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$.

11.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4\pi x}-1}{\sqrt[3]{8+24x}-2}$.

11.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1+\cos(x-3\pi)}$.

Задача 12. Вычислить пределы функций.

12.1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

12.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

12.3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

12.4. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

12.5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$.

12.6. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

12.7. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$.

12.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg} \pi x}$.

12.9. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

12.10. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

12.11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12.12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

12.13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$.

12.14. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

12.15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$.

12.16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$.

12.17. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln 2x-\ln \pi}{\sin(5x/2)\cos x}$.

12.18. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

12.19. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.

12.20. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

12.21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}\right)}$.

12.22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

12.23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

12.24. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$.

12.25. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

12.26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$.

12.27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

12.28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$.

12.29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

12.30. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

12.31. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Задача 13. Вычислить пределы функций.

13.1. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln \sin x}$.

13.2. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

13.3. $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x-\sqrt[3]{2x-3}\right)}{\sin(\pi x/2)-\sin[(x-1)\pi]}.$$

13.4. $$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\sin\ln(x-1)}.$$

13.5. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}.$$

13.6. $$\lim_{x\to\pi/6}\frac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}.$$

13.7. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x}\right)}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}.$$

13.8. $$\lim_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}.$$

13.9. $$\lim_{x\to 1/2}\frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}.$$

13.10. $$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}.$$

13.11. $$\lim_{x\to 3}\frac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}.$$

13.12. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}.$$

13.13. $$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}.$$

13.14. $$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}.$$

13.15. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}.$$

13.16. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}.$$

13.17. $$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}.$$

13.18. $$\lim_{x\to\pi/3}\frac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}.$$

13.19. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg}2x}}{\ln(2x/\pi)}.$$

13.20. $$\lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\left(e^{x+2}-e^{x^2-4}\right)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2}.$$

13.21. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}.$$

13.22. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}.$$

13.23. $$\lim_{x\to\pi}\frac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}.$$

13.24. $$\lim_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}.$$

13.25. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}.$$

13.26. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}.$$

13.27. $$\lim_{x\to a}\frac{a^{x^2-a^2}-1}{\operatorname{tg}\ln(x/a)}.$$

13.28. $$\lim_{x\to -3}\frac{\sin\left(e^{\sqrt[3]{1-x^2}/2}-e^{\sqrt[3]{x+2}}\right)}{\operatorname{arctg}(x+3)}.$$

13.29. $$\lim_{x\to a\pi}\frac{\ln(\cos(x/a)+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x}-a^{a\pi/x-1}}.$$

13.30. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}.$$

13.31. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}.$$

Задача 14. Вычислить пределы функций.

14.1. $$\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x}.$$

14.2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}.$$

14.3. $$\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}.$$

14.4. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}.$$

14.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg} x+x^3}$.

14.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg} x-x^2}$.

14.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$.

14.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg} x-\sin x}$.

14.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$.

14.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

14.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$.

14.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$.

14.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x-x}$.

14.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x-\sin x}$.

14.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg} x}$.

14.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$.

14.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg} x+x^3}$.

14.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg} x-\sin x}$.

14.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.

14.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg} x}$.

14.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg} x^3}$.

14.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$.

14.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$.

14.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$.

14.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x-7x}$.

14.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$.

14.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg} x}$.

14.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$.

14.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg} x^2}$.

14.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.

14.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

Задача 15. Вычислить пределы функций.

15.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

15.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

15.3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

15.4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{\ln x-\ln a}$.

15.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

15.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin \alpha x-\sin \beta x}$.

15.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

15.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(e^{x}-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$.

15.9. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

15.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

15.11. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$.

15.12. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$.

15.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.

15.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$.

15.15. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)+2\ln x}{h^2}$, $x>0$.

15.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$.

15.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

15.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

15.19. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

15.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

15.21. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$.

15.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

15.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin \pi x}$.

15.24. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

15.25. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

15.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$.

15.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$.

15.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4+ax))}$.

15.29. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

15.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

15.31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$.

Задача 16. Вычислить пределы функций.

16.1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+x^3))^{3/(x^2\arcsin x)}$.

16.2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$.

16.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$.

16.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$.

16.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

16.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$.

16.7. $\lim\limits_{x\to 0}[1-\ln(1+\sqrt[3]{x})]^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$.

16.8. $\lim\limits_{x\to 0}[2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}]^{3/x}$.

16.9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/(x\sin\pi x)}$.

16.10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$.

16.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

16.12. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$.

16.13. $\lim\limits_{x\to 0}(2-5^{\arcsin x^3})^{(\operatorname{cosec}^2 x)/x}$.

16.14. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$.

16.15. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

16.16. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$.

16.17. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2(\pi x/3))}$.

16.18. $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

16.19. $\lim\limits_{x\to 0}[2-3^{\sin^2 x}]^{1/\ln\cos x}$.

16.20. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

16.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

16.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$.

16.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}$.

16.24. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/(1-\cos\pi x)}$.

16.25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x}\right)^{1/x^3}$.

16.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x\cos 5x}\right)^{1/x^3}$.

16.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

16.28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{1/\ln(1+3x^2)}$.

16.29. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

16.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}$.

16.31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

Задача 17. Вычислить пределы функций.

17.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

17.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$.

17.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\pi/4+x)}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$.

17.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

17.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$.

17.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$.

17.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

17.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$.

17.16. $\lim\limits_{x\to 0}[\sin(x+2)]^{3/(3+x)}$.

17.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.

17.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$.

17.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$.

17.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/(x+1)}$.

17.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{3/(x+8)}$.

17.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{x}{\pi}\right)^{1+x}$.

17.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$.

17.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x}\right)^{x+2}$.

17.25. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\cos x^4}$.

17.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(x+6)}$.

17.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{(e^x-1)/x}$.

17.28. $\lim\limits_{x\to 0}(6-5/\cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

17.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/(x^2+1)}$.

17.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$.

17.31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{1/(x+2)}$.

Задача 18. Вычислить пределы функций.

18.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

18.2. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.

18.3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

18.4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/(x-2)}$.

18.5. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}$.

18.6. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$.

18.7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/\left(\sqrt[5]{x}-1\right)}$.

18.8. $\lim\limits_{x\to a}(2-x/a)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

18.9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x/\sin 3x}$.

18.10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$.

18.11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$.

18.12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x/\sin 4x}$.

18.13. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

18.14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$.

18.15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$.

18.16. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{6\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 3x}$.

18.17. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{x/(x-1)}$.

18.18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$.

18.19. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

18.20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1+\cos 3x)^{\sec x}$.

18.21. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

18.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

18.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

18.24. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$.

18.25. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$.

18.26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$.

18.27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$.

18.28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg} x}}$.

18.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

18.30. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$.

18.31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

Задача 19. Вычислить пределы функций.

19.1. $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}$.

19.2. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

19.3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\frac{\ln\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\right)^{1/(x+\pi/4)}$.

19.4. $\lim\limits_{x\to 2}(\sin x)^{3/(1+x)}$.

19.5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x}\right)^{\sin^2(x-2)}$.

19.6. $\lim\limits_{x\to \pi/6}(\sin x)^{6x/\pi}$.

19.7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin \pi x}$.

19.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x^2)/(1-x)}$.

19.9. $\lim\limits_{x\to 1}(1+e^x)^{\frac{\sin \pi x}{1-x}}$.

19.10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\operatorname{tg} 9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{x/(x+1)}$.

19.11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$.

19.12. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$.

19.13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-3/4}{(x-1)^2}\right)^{x+1}$.

19.14. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$.

19.15. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$.

19.16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$.

19.17. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\sin x+\cos x)^{1/\operatorname{tg} x}$.

19.18. $\lim\limits_{x\to \pi/8}(\operatorname{tg} 2x)^{\sin(\pi/8+x)}$.

19.19. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\pi x}$.

19.20. $\lim\limits_{x\to \pi}(x+\sin x)^{\sin x+x}$.

19.21. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln^2 ex)^{1/(x^2+1)}$.

19.22. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)^{\pi/\operatorname{arctg} x}$.

19.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$.

19.24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin \pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

19.25. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos \pi x)^{\operatorname{tg}(x-2)}$.

19.26. $\lim\limits_{x\to 1/2}(\arcsin x+\arccos x)^{1/x}$.

19.27. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos x+1)^{\sin x}$.

19.28. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[3]{x}+x-1)^{\sin(\pi x/4)}$.

19.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/(2-x)}$.

19.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}\right)^{x^2}$.

19.31. $\lim\limits_{x\to 1}((e^{2x}-e^2)/(x-1))^{x+1}$.

Задача 20. Вычислить предел функции или числовой последовательности.

20.1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x+x\operatorname{arctg}(1/x)}$.

20.2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\sqrt{3\sin x+(2x-\pi)\sin\dfrac{x}{2x-\pi}}$.

20.3. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.

20.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x\cos(1/x)+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$.

20.5. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{e^{1/n}+\sin\dfrac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos(1/n)}$.

20.6. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{\sqrt[4]{2+n^5}-\sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}$.

20.7. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}+(4x-\pi)\cos\dfrac{x}{4x-\pi}}{\lg(2+\operatorname{tg} x)}$.

20.8. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\sin\sqrt{n^2+1}\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n^2+1}\right)$.

20.9. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{n^2-\sqrt{3n^5-7}}{(n^2-n\cos n+1)\sqrt{n}}$.

20.10. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3\sin n+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}$.

20.11. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$.

20.12. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(2+\sqrt{\operatorname{arctg} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}\right)$.

20.13. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{1+\cos \pi x}{4+(x+2)\sin\dfrac{x}{x+2}}}$.

20.14. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$.

20.15. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+\cos n}+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}$.

20.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+3}{2-\lg(1+\sin x)}$.

20.17. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\operatorname{arctg} x\sin^2\dfrac{1}{x}+5\cos x}$.

20.18. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos x+\sin\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)}$.

20.19. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2\cos^2 x+(e^x-1)\sin\dfrac{1}{x}}$.

20.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\ln\left(e+x\sin\dfrac{1}{x}\right)}{\cos x+\sin x}$.

20.21. $\lim\limits_{x\to 0}\ln[(e^{x^2}-\cos x)\cos(1/x)+\operatorname{tg}(x+\pi/3)]$.

20.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\ln(1+x)\sqrt{2+\cos(1/x)}}{2+e^x}$.

20.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos 2\pi x}{2+\left(e^{\sqrt{x-1}}-1\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{x-1}}$.

20.24. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\left(e^{\sin x}-1\right)\cos\dfrac{1}{x}+4\cos x}$.

20.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(1+x)}{\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)+2}$.

20.26. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\lg(x+2)+\sin\sqrt{4-x^2}\cos\dfrac{x+2}{x-2}}$.

20.27. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2+\cos x\sin\dfrac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$.

20.28. $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\left(\cos x+\sin\dfrac{x-1}{x+1}\cos\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

20.29. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)+4\cos x}$.

20.30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x+\sin\pi x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}}{1+\cos x}$.

20.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}$.

II. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Теоретические вопросы

1. Понятие производной. Производная функции x^n.
2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
3. Понятие дифференцируемости функции и дифференциала. Условие дифференцируемости. Связь дифференциала с производной.
4. Геометрический смысл дифференциала.
5. Непрерывность дифференцируемой функции.
6. Дифференцирование постоянной и суммы, произведения и частного.
7. Производная сложной функции.
8. Инвариантность формы дифференциала.
9. Производная обратной функции.
10. Производные обратных тригонометрических функций.
11. Гиперболические функции, их производные.
12. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

13. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность дифференциалов порядка выше первого.

14. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Теоретические упражнения

1. Исходя из определения производной, доказать, что:

а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;

б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;

в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

2. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $f(0)=0$, то $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

3. Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

4. Доказать, что производная от функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$.

5. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+z}\approx a+z/(2a),\ a>0,\ |z|\ll a.$$

6. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x)+g(x)$ в точке $x=x_0$, если в этой точке:

а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ недифференцируема;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ недифференцируемы.

7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, а функция $g(x)$ недифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)\,g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0.

8. Что можно сказать о дифференцируемости произведения $f(x)\,g(x)$ в предположениях задачи 6?

Рассмотреть примеры:

а) $f(x)=x,\ g(x)=|x|,\ x_0=0;$

$$f(x)=x,\ g(x)=\begin{cases} \sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\ x_0=0;\end{cases}$$

б) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x|,\ x_0=0;$

$f(x)=|x|,\ g(x)=|x|+1,\ x_0=0.$

9. Найти $f'(0)$, если $f(x)=x(x+1)...(x+1\,234\,567)$.

10. Выразить дифференциал d^3y от сложной функции $y=y[u(x)]$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.

11. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y''.

Расчетные задания

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

1.1. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3+x^2\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.2. $f(x)=\begin{cases} \arcsin\left(x^2\cos\dfrac{1}{9x}\right)+\dfrac{2}{3}x, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.3. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x\cos\dfrac{1}{5x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.4. $f(x)=\begin{cases} \ln\left(1-\sin\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.5. $f(x)=\begin{cases} \sin\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.6. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)^2}-1, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.7. $f(x)=\begin{cases} \sin\left(e^{x^2\sin\frac{5}{x}}-1\right)+x, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.8. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x^2}{2}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.9. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3-x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{3x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.10. $f(x)=\begin{cases} \sin x\cos\dfrac{5}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.11. $f(x)=\begin{cases} x+\arcsin\left(x^2\sin\dfrac{6}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.12. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}\left(2^{x^2\cos(1/8x)}-1+x\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.13. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}x\cdot\sin\dfrac{7}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.14. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\dfrac{1}{9x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.15. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos^2\dfrac{11}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.16. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.17. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

1.18. $f(x)=\begin{cases} 6x+x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.20. $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x\sin 5x}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.21. $f(x)=\begin{cases} 3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.22. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln(1+3x^2\cos(2/x))}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.23. $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x\sin(3/5x)}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.24. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{\mathrm{tg}\,x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.25. $f(x)=\begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{3x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$

1.26. $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{\sin\left(x^{3/2}\sin\frac{2}{x}\right)}-1+x^2, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.27. $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{1-2x^3\sin\dfrac{5}{x}}-1+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.28. $f(x)=\begin{cases} x^2e^{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.29. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^2+x^3)}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.30. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.31. $f(x)=\begin{cases} 1-\cos\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Задача 2. Составить уравнение нормали (в вариантах 2.1 — 2.12) или уравнение касательной (в вариантах 2.13 — 2.31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

2.1. $y=(4x-x^2)/4$, $x_0=2$.

2.2. $y=2x^2+3x-1$, $x_0=-2$.

2.3. $y=x-x^3$, $x_0=-1$.

2.4. $y=x^2+8\sqrt{x}-32$, $x_0=4$.

2.5. $y=x+\sqrt{x^3}$, $x_0=1$.

2.6. $y=\sqrt[3]{x^2}-20$, $x_0=-8$.

2.7. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0=4$.

2.8. $y=8\sqrt[4]{x}-70$; $x_0=16$.

2.9. $y=2x^2-3x+1$, $x_0=1$.

2.10. $y=(x^2-3x+6)/x^2$, $x_0=3$.

2.11. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$, $x_0=64$.

2.12. $y=(x^3+2)/(x^3-2)$, $x_0=2$.

2.13. $y=2x^2+3$, $x_0=-1$.

2.14. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}$, $x_0=1$.

2.15. $y=2x+1/x$, $x_0=1$.

2.16. $y=-2(x^8+2)/(3(x^4+1))$, $x_0=1$.

2.17. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$.

2.18. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}$, $x_0=1$.

2.19. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$, $x_0=1$.

2.20. $y=1/(3x+2)$, $x_0=2$.

2.21. $y=x/(x^2+1)$, $x_0=-2$.

2.22. $y=(x^2-3x+3)/3$, $x_0=3$.

2.23. $y=2x/(x^2+1)$, $x_0=1$.

2.24. $y=-2(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x})$, $x_0=1$.

2.25. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0=1$.

2.26. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2$, $x_0=1$.

2.27. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$, $x_0=1$.

2.28. $y=(3x-2x^3)/3$, $x_0=1$.

2.29. $y=x^2/10+3$, $x_0=2$.

2.30. $y=(x^2-2x-3)/4$, $x_0=4$.

2.31. $y=6\sqrt[3]{x}-16\sqrt[4]{x}/3$, $x_0=1$.

Задача 3. Найти дифференциал dy.

3.1. $y=x\arcsin(1/x)+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$, $x>0$.

3.2. $y=\operatorname{tg}(2\arccos\sqrt{1-2x^2})$, $x>0$.

3.3. $y=\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x})$.

3.4. $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$.

3.5. $y=\arccos(1/\sqrt{1+2x^2})$, $x>0$.

3.6. $y=x\ln|x+\sqrt{x^2+3}|-\sqrt{x^2+3}$.

3.7. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)+(\operatorname{sh}x)\ln\operatorname{ch}x$.

3.8. $y=\arccos((x^2-1)/(x^2\sqrt{2}))$.

3.9. $y=\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})$.

3.10. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x$.

3.11. $y=\dfrac{\ln|x|}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

3.12. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$.

3.13. $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin(x/2)$.

3.14. $y=\ln\operatorname{tg}(x/2)-x/\sin x$.

3.15. $y=2x+\ln|\sin x+2\cos x|$.

3.16. $y=\sqrt{\operatorname{ctg}x}-\sqrt{\operatorname{tg}^3x}/3$.

3.17. $y=\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}\right|$.

3.18. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

3.19. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$.

3.20. $y=\ln|x^2-1|-\dfrac{1}{x^2-1}$.

3.21. $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

3.22. $y=\ln|2x+2\sqrt{x^2+x}+1|$.

3.23. $y=\ln|\cos\sqrt{x}|+\sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

3.24. $y=e^x(\cos 2x+2\sin 2x)$.

3.25. $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x)$.

3.26. $y=\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$.

3.27. $y=\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x-\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

3.28. $y=\sqrt{3+x^2}-x\ln|x+\sqrt{3+x^2}|$.

3.29. $y=\sqrt{x}-(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

3.30. $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

3.31. $y=x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$.

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

4.1. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=7{,}76$.

4.2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1{,}012$.

4.3. $y=(x+\sqrt{5-x^2})/2$, $x=0{,}98$.

4.4. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27{,}54$.

4.5. $y=\arcsin x$, $x=0{,}08$.

4.6. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$, $x=0{,}97$.

4.7. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=26{,}46$.

4.8. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1{,}97$.

4.9. $y=x^{11}$, $x=1{,}021$.

4.10. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1{,}21$.

4.11. $y=x^{21}$, $x=0{,}998$.

4.12. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1{,}03$.

4.13. $y=x^6$, $x=2{,}01$.

4.14. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8{,}24$.

4.15. $y=x^7$, $x=1{,}996$.

4.16. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=7{,}64$.

4.17. $y=\sqrt{4x-1}$, $x=2{,}56$.

4.18. $y=1/\sqrt{2x^2+x+1}$, $x=1{,}016$.

4.19. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8{,}36$.

4.20. $y=1/\sqrt{x}$, $x=4{,}16$.

4.21. $y=x^7$, $x=2{,}002$.

4.22. $y=\sqrt{4x-3}$, $x=1{,}78$.

4.23. $y=\sqrt{x^3}$, $x=0{,}98$.

4.24. $y=x^5$, $x=2{,}997$.

4.25. $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x=1{,}03$.

4.26. $y=x^4$, $x=3{,}998$.

4.27. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0{,}01$.

4.28. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0{,}01$.

4.29. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1{,}02$.

4.30. $y=\sqrt{x^2+5}$, $x=1{,}97$.

4.31. $y=1/\sqrt{2x+1}$, $x=1{,}58$.

Задача 5. Найти производную.

5.1. $y=\frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$.

5.2. $y=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

5.3. $y=\frac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.

5.4. $y=\frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

5.5. $y=\frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

5.6. $y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

5.7. $y=\frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.

5.8. $y=\frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

5.9. $y=\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.

5.10. $y=\sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$.

5.11. $y=\frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

5.12. $y=\frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

5.13. $y=\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

5.14. $y=\frac{\sqrt{x-1}\,(3x+2)}{4x^2}$.

5.15. $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

5.16. $y=\frac{128-8x^3-x^6}{\sqrt{8-x^3}}$.

5.17. $y=\frac{\sqrt{2x+3}\,(x-2)}{x^2}$.

5.18. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$.

5.19. $y=\frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

5.20. $y=\frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

5.21. $y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

5.22. $y=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

5.23. $y=\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5.24. $y=3\,\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

5.25. $y=3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2}$.

5.26. $y=(x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$.

5.27. $y=(x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$.

5.28. $y=(x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$.

5.29. $y=((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7)$.

5.30. $y=(3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2})$.

5.31. $y=(3x^6+4x^4-x^2-2)/(15\sqrt{1+x^2})$.

Задача 6. Найти производную.

6.1. $y=x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1})$.

6.2. $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)/8$.

6.3. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-3}{2}$.

6.4. $y=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$.

6.5. $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.

6.6. $y=\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$.

6.7. $y=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg} e^x$.

6.8. $y=\ln(e^x+1)+\frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$.

6.9. $y=2(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1})/\ln 2$.

6.10. $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))$.

6.11. $y=e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)/(\alpha^2+\beta^2)$.

6.12. $y=e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)/(\alpha^2+\beta^2)$.

6.13. $y=e^{ax}\left[\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$.

6.14. $y=x+1/(1+e^x)-\ln(1+e^x)$.

6.15. $y=x-3\ln[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}]-3\,\mathrm{arctg}\,e^{x/6}$.

6.16. $y=x+\dfrac{8}{1+e^{x/4}}$.

6.17. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$.

6.18. $y=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$.

6.19. $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-x/2}\,\mathrm{arctg}\,e^{x/2}-(\mathrm{arctg}\,e^{x/2})^2$.

6.20. $y=\dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}$.

6.21. $y=\dfrac{1}{m\sqrt{ab}}\,\mathrm{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.

6.22. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)$.

6.23. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$.

6.24. $y=e^{\sin x}\left(x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

6.25. $y=\dfrac{e^x}{2}\,[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]$.

6.26. $y=\mathrm{arctg}(e^x-e^{-x})$.

6.27. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}[\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120]$.

6.28. $y=-e^{3x}/(3\,\mathrm{sh}^3 x)$.

6.29. $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$.

6.30. $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$.

6.31. $y=e^{x^2}/(1+x^2)$.

Задача 7. Найти производную.

7.1. $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})-\sqrt{x+a}$.

7.2. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

7.3. $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

7.4. $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

7.5. $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$.

7.6. $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

7.7. $y=\ln^2(x+\cos x)$.

7.8. $y=\ln^3(1+\cos x)$.

7.9. $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

7.10. $y=\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$.

7.11. $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

7.12. $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)+a^{\pi\sqrt{2}}$.

7.13. $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$.

7.14. $y=\log_{16}\log_5 \operatorname{tg} x$.

7.15. $y=\log_4\log_2 \operatorname{tg} x$.

7.16. $y=x(\cos\ln x+\sin\ln x)/2$.

7.17. $y=\ln\cos\frac{2x+3}{2x+1}$.

7.18. $=\lg\ln\operatorname{ctg} x$.

7.19. $y=\log_a\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

7.20. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$.

7.21. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

7.22. $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$.

7.23. $y=\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})$.

7.24. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$.

7.25. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

7.26. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

7.27. $y=\ln\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}(x/2)}$.

7.28. $y=\ln\frac{\ln x}{\sin(1/x)}$.

7.29. $y=\ln\ln\sin(1+1/x)$.

7.30. $y=\ln\ln^3\ln^2 x$.

7.31. $y=\ln\ln^2\ln^3 x$.

Задача 8. Найти производную.

8.1. $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$.

8.2. $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.

8.3. $y=\operatorname{tg}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$.

8.4. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.

8.5. $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.

8.6. $y=\frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$.

8.7. $y=\frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.

8.8. $y=\cos\operatorname{ctg} 2-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$.

8.9. $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\frac{1}{6}\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.

8.10. $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2}-\frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$.

8.11. $y=\frac{1}{3}\cos\operatorname{tg}\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$.

8.12. $y=\ln\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$.

8.13. $y=8\sin\operatorname{ctg} 3+\frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.

8.14. $y=\frac{\cos\operatorname{ctg} 3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$.

8.15. $y=\frac{\cos\operatorname{tg}(1/3)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$.

8.16. $y=\frac{\sin\operatorname{tg}(1/7)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$.

8.17. $y=\frac{\operatorname{ctg}\sin(1/3)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$.

8.18. $y=\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$.

8.19. $y=\frac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$.

8.20. $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

8.21. $y=\sqrt{\operatorname{tg}4}+\frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$.

8.22. $y=\cos\ln 13-\frac{1}{44}\frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$.

8.23. $y=\ln\cos\frac{1}{3}+\frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$.

8.24. $y=\operatorname{ctg}\sin\frac{1}{13}-\frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$.

8.25. $y=\sin\ln\frac{1}{2}+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$.

8.26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\cdot\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$.

8.27. $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2}+\frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$.

8.28. $y=\sin\sqrt[3]{\operatorname{tg}2}-\frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$.

8.29. $y=\cos^2\sin 3+\frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$.

8.30. $y=\sin^3\cos 2-\frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

8.31. $y=\operatorname{tg}\sqrt{\cos(1/3)}+\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$.

Задача 9. Найти производную.

9.1. $y=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}$.

9.2. $y=\arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$.

9.3. $y=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

9.4. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

9.5. $y=\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.

9.6. $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$.

9.7. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

9.8. $y=(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}/2-9\arccos\sqrt{(x-1)/6}$.

9.9. $y=\frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{3x\sqrt{x}}$.

9.10. $y=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.

9.11. $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

9.12. $y=\frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$.

9.13. $y=\frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}$.

9.14. $y=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

9.15. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{\arccos x}{2x^2}$.

9.16. $y=6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$.

9.17. $y=\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}-1}$.

9.18. $y=\frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$.

9.19. $y=\frac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

9.20. $y=\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$.

9.21. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$.

9.22. $y=\arcsin\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$.

9.23. $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

9.24. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}$.

9.25. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$.

9.26. $y=(2x^2+6x+5)\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-x$.

9.27. $y=\frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\frac{1}{8}\ln(1-4x^2)$.

9.28. $y=\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{x^3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

9.29. $y=(x+2\sqrt{x}+2)\operatorname{arctg}((\sqrt{x})/(\sqrt{x}+2))-\sqrt{x}$.

9.30. $y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x}-\sqrt{2}\ln(1+x)$.

9.31. $y=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}$.

Задача 10. Найти производную.

10.1. $y=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\frac{2+\sqrt{5}\operatorname{th}x}{2-\sqrt{5}\operatorname{th}x}$.

10.2. $y=\frac{\operatorname{sh}x}{4\operatorname{ch}^4x}+\frac{3\operatorname{sh}x}{8\operatorname{ch}^2x}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$.

10.3. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{th}x}}{1-\sqrt{\operatorname{th}x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th}x}$.

10.4. $y=\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{th}x}{\sqrt{2}-\operatorname{th}x}-\frac{\operatorname{th}x}{4(2-\operatorname{th}^2x)}$.

10.5. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th}x+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$.

10.6. $y=\left(-\frac{1}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2x}\right)$.

10.7. $y=\frac{1}{2a\sqrt{1+a^2}}\ln\frac{a+\sqrt{1+a^2}\operatorname{th}x}{a-\sqrt{1+a^2}\operatorname{th}x}$.

10.8. $y=\frac{1}{18\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth}x}$.

10.9. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\operatorname{sh}2x}}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}$.

10.10. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{1-\operatorname{sh}2x}{2+\operatorname{sh}2x}$.

10.11. $y=\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}}$.

10.12. $y=\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}$.

10.13. $y=\frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}2x}}$.

10.14. $y=\frac{\operatorname{sh}3x}{\sqrt{\operatorname{ch}6x}}$.

10.15. $y=\frac{1+8\operatorname{ch}^2x\ \ln\operatorname{ch}x}{2\operatorname{ch}^2x}$.

10.16. $y=-\frac{12\operatorname{sh}^2x+1}{3\operatorname{sh}^3x}$.

10.17. $y=-\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2x}+\frac{3}{2}\arcsin(\operatorname{th}x)$.

10.18. $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{3+\operatorname{ch}x}{1+3\operatorname{ch}x}$.

10.19. $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\frac{4+\sqrt{8}\operatorname{th}\frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\operatorname{th}\frac{x}{2}}$.

10.20. $y=\left[\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\ln\frac{3+\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right]$.

10.21. $y=-\frac{1}{4}\arcsin\frac{5+3\operatorname{ch}x}{3+5\operatorname{ch}x}$.

10.22. $y=\frac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}$.

10.23. $y=\frac{2}{\operatorname{sh}x}-\frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x}+\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x$.

10.24. $y=\frac{8}{3}\operatorname{cth}2x-\frac{1}{3\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}^3 x}$.

10.25. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

10.26. $y=\frac{3}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}+\operatorname{ch}x-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x}$.

10.27. $y=-\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{sh}x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x$.

10.28. $y=\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$.

10.29. $y=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}+\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)\right]$.

10.30. $y=-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

10.31. $y=\frac{2}{3}\operatorname{cth}x-\frac{\operatorname{ch}x}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

Задача 11. Найти производную.

11.1. $y=(\operatorname{arctg}x)^{(1/2)\ln\operatorname{arctg}x}$.

11.2. $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$.

11.3. $y=(\sin x)^{5e^x}$.

11.4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

11.5. $y=(\ln x)^{3^x}$.

11.6. $y=x^{\arcsin x}$.

11.7. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$.

11.8. $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$.

11.9. $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$.

11.10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.

11.11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$.

11.12. $y=(x-5)^{\operatorname{ch}x}$.

11.13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$.

11.14. $y=x^{\sin x^3}$.

11.15. $y=(x^2-1)^{\operatorname{sh}x}$.

11.16. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$.

11.17. $y=(\sin x)^{5x/2}$.

11.18. $y=(x^2+1)^{\cos x}$.

11.19. $y=19^{x^{19}}x^{19}$.

11.20. $y=x^{3^x}\cdot 2^x$.

11.21. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$.

11.22. $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$.

11.23. $y=x^{e^{\cos x}}$.

11.24. $y=x^{2^x}\cdot 5^x$.

11.25. $y=x^{e^{\sin x}}$.

11.26. $y=(\operatorname{tg}x)^{(\ln\operatorname{tg}x)/4}$.

11.27. $y=x^{e^{\operatorname{arctg}x}}$.

11.28. $y=(x^8+1)^{\operatorname{th}x}$.

11.29. $y=x^{29^x}\cdot 29^x$.

11.30. $y=(\cos 2x)^{(\ln\cos 2x)/4}$.

11.31. $y=x^{e^x}x^9$.

Задача 12. Найти производную.

12.1. $y=\frac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\frac{x^4}{16}\arcsin\frac{2}{x}$, $x>0$.

12.2. $y=\frac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

12.3. $y=2x-\ln(1+\sqrt{1-e^{4x}})-e^{-2x}\arcsin(e^{2x})$.

12.4. $y=\sqrt{9x^2-12x+5}\operatorname{arctg}(3x-2)-\ln(3x-2+\sqrt{9x^2-12x+5})$.

12.5. $y=\frac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

12.6. $y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$, $x>0$.

12.7. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.

12.8. $y=3x-\ln(1+\sqrt{1-e^{6x}})-e^{-3x}\arcsin(e^{3x})$.

12.9. $y=\ln(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2})-\sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\operatorname{arctg}(4x-1)$.

12.10. $y=\ln\frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\frac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.

12.11. $y=(2x+3)^4\cdot\arcsin\frac{1}{2x+3}+\frac{2}{3}(4x^2+12x+11)\sqrt{x^2+3x+2}$, $2x+3>0$.

12.12. $y=\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}$.

12.13. $y=5x-\ln(1+\sqrt{1-e^{10x}})-e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$.

12.14. $y=\sqrt{x^2-8x+17}\operatorname{arctg}(x-4)-\ln(x-4+\sqrt{x^2-8x+17})$.

12.15. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x}+\frac{2}{2-x}\sqrt{-3+4x-x^2}$.

12.16. $y=(3x^2-4x+2)\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\arcsin\frac{1}{3x-2}$, $3x-2>0$.

12.17. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}$.

12.18. $y=\ln(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1})+\arcsin(e^{-5x})$.

12.19. $y=\ln(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10})-\sqrt{4x^2-12x+10}\operatorname{arctg}(2x-3)$.

12.20. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}-\frac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.

12.21. $y=\frac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1}$, $2x-1>0$.

12.22. $y=\frac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

12.23. $y=\arcsin e^{-4x}+\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1})$.

12.24. $y=\ln(5x+\sqrt{25x^2+1})-\sqrt{25x^2+1}\operatorname{arctg}5x$.

12.25. $y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$.

12.26. $y=(3x+1)^4\arcsin\frac{1}{3x+1}+(3x^2+2x+1)\sqrt{9x^2+6x}$, $3x+1>0$.

12.27. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+\frac{2x+1}{4x^2+4x+3}$.

12.28. $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin e^{-3x}$.

12.29. $y=\sqrt{49x^2+1}\operatorname{arctg}7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right)$.

12.30. $y=\frac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.

12.31. $y=\arcsin e^{-2x}+\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}\right)$.

Задача 13. Найти производную.

13.1. $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

13.2. $y=4\ln\frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

13.3. $y=x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

13.4. $y=x^3\arcsin x+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

13.5. $y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$, $4x+1>0$.

13.6. $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

13.7. $y=2\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$, $3x+4>0$.

13.8. $y=x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

13.9. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

13.10. $y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{17}}$.

13.11. $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right)$.

13.12. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

13.13. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

13.14. $y=4\arcsin\frac{4}{2x+3}+\sqrt{4x^2+12x-7}$, $2x+3>0$.

13.15. $y=2\arcsin\frac{2}{3x+1}+\sqrt{9x^2+6x-3}$, $3x+1>0$.

13.16. $y=(2+3x)\sqrt{x-1}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

13.17. $y=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)$.

13.18. $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

13.19. $y=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg} x$.

13.20. $y=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)$.

13.21. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.22. $y=3\arcsin\frac{3}{x+2}+\sqrt{x^2+4x-5}$.

13.23. $y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{(x+2)/5}$.

13.24. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

13.25. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x$.

13.26. $y=x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

13.27. $y=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$.

13.28. $y=(x/4)(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin(x/2)$.

13.29. $y=\arcsin\frac{1}{2x+3}+2\sqrt{x^2+3x+2}$, $2x+3>0$.

13.30. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

13.31. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

Задача 14. Найти производную.

14.1. $y=\frac{1}{\sin\alpha}\ln(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg}\alpha)$.

14.2. $y=x\cos\alpha+\sin\alpha\ln\sin(x-\alpha)$.

14.3. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}[\sin\ln x-(\sqrt{2}-1)\cos\ln x]x^{\sqrt{2}+1}$.

14.4. $y=\operatorname{arctg}(\cos x/\sqrt[4]{\cos 2x})$.

14.5. $y=3\frac{\sin x}{\cos^2 x}+2\frac{\sin x}{\cos^4 x}$.

14.6. $y=(a^2+b^2)^{-1/2}\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{b}\right)$, $b>0$.

14.7. $y=\frac{7^x(3\sin 3x+\cos 3x\cdot\ln 7)}{(9+\ln^2 7)}$.

14.8. $y=\ln\frac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$.

14.9. $y=(1/(a(1+a^2)))[\operatorname{arctg}(a\cos x)+a\ln\operatorname{tg}(x/2)]$.

$$14.10.\quad y=-\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}.$$

$$14.11.\quad y=(1+x^2)\,e^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$14.12.\quad y=\frac{\operatorname{ctg} x+x}{1-x\operatorname{ctg} x}.$$

$$14.13.\quad y=\frac{1}{2\sin(\alpha/2)}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{1-x^2}.$$

$$14.14.\quad y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x},\ x>0.$$

$$14.15.\quad y=\frac{6^x(\sin 4x\ln 6-4\cos 4x)}{16+\ln^2 6}.$$

$$14.16.\quad y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}.$$

$$14.17.\quad y=\operatorname{arctg}\frac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}.$$

$$14.18.\quad y=\frac{5^x(2\sin 2x+\cos 2x\ln 5)}{4+\ln^2 5}.$$

$$14.19.\quad y=\ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{th} x}{\sqrt{2}-\operatorname{th} x}.$$

$$14.20.\quad y=\frac{3^x(4\sin 4x+\ln 3\cos 4x)}{16+\ln^2 3}.$$

$$14.21.\quad y=\frac{4^x((\ln 4)\sin 4x-4\cos 4x)}{16+\ln^2 4}.$$

$$14.22.\quad y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

$$14.23.\quad y=\frac{5^x(\sin 3x\ln 5-3\cos 3x)}{9+\ln^2 5}.$$

$$14.24.\quad y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}.$$

$$14.25.\quad y=\frac{2^x(\sin x+\cos x\ln 2)}{1+(\ln 2)^2}.$$

$$14.26.\quad y=\frac{\ln(\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\alpha)}{\sin\alpha}.$$

$$14.27.\quad y=2\frac{\cos x}{\sin^4 x}+3\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$14.28.\quad y=\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}.$$

$$14.29.\quad y=\frac{3^x((\ln 3)\sin 2x-2\cos 2x)}{\ln^2 3+4}.$$

$$14.30.\quad y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{3\cos^3 x}.$$

$$14.31.\quad y=\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}}.$$

Задача 15. Найти производную y'_x.

$$15.1.\quad \begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin(t^3/3+t). \end{cases}$$

$$15.2.\quad \begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$$

$$15.3.\quad \begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=1/\sqrt[3]{(t-1)^2}. \end{cases}$$

$$15.4.\quad \begin{cases} x=\arcsin(\sin t), \\ y=\arccos(\cos t). \end{cases}$$

$$15.5.\quad \begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{t^2+1}), \\ y=t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$$

$$15.6.\quad \begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin(t-1). \end{cases}$$

$$15.7.\quad \begin{cases} x=\operatorname{ctg}(2e^t), \\ y=\ln\operatorname{tg} e^t. \end{cases}$$

$$15.8.\quad \begin{cases} x=\ln\operatorname{ctg} t, \\ y=1/\cos^2 t. \end{cases}$$

15.9. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y=\sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

15.10. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.11. $\begin{cases} x=\ln(1/\sqrt{1-t^4}), \\ y=\arcsin(1-t^2)/(1+t^2). \end{cases}$

15.12. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.13. $\begin{cases} x=\arcsin(\sqrt{1-t^2}), \\ y=(\arccos t)^2. \end{cases}$

15.14. $\begin{cases} x=t/\sqrt{1-t^2}, \\ y=\ln(1+\sqrt{1-t^2})/t. \end{cases}$

15.15. $\begin{cases} x=(1+\cos^2 t)^2, \\ y=\cos t/\sin^2 t. \end{cases}$

15.16. $\begin{cases} x=\ln((1-t)/(1+t)), \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.17. $\begin{cases} x=\arccos(1/t), \\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin(1/t). \end{cases}$

15.18. $\begin{cases} x=1/\ln t, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

15.19. $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

15.20. $\begin{cases} x=(\arcsin t)^2, \\ y=t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.21. $\begin{cases} x=t\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

15.22. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

15.23. $\begin{cases} x=\ln(1-t^2), \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.24. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}((t+1)/(t-1)), \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.25. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{(1-\sin t)/(1+\sin t)}, \\ y=(1/2)\operatorname{tg}^2 t+\ln\cos t. \end{cases}$

15.26. $\begin{cases} x=\sqrt{t-t^2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}, \\ y=\sqrt{t}-\sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

15.27. $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg} t, \\ y=1/\sin^2 t. \end{cases}$

15.28. $\begin{cases} x=\dfrac{t^2\ln t}{1-t^2}+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.29. $\begin{cases} x=e^{\sec^2 t}, \\ y=\operatorname{tg} t\ln\cos t+\operatorname{tg} t-t. \end{cases}$

15.30. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

15.31. $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ y=\sqrt{1+t^2}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

Задача 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

16.1. $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \ t_0=\pi/3. \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \ t_0=\pi/3. \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \ t_0=\pi/3. \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3, \ t_0=1. \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x=(2t+t^2)/(1+t^3), \\ y=(2t-t^2)/(1+t^3), \ t_0=1. \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} x=\arcsin(t/\sqrt{1+t^2}), \\ y=\arccos(1/\sqrt{1+t^2}), \ t_0=-1. \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t), \ t_0=\pi/4. \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} x=3at/(1+t^2), \\ y=3at^2/(1+t^2), \ t_0=2. \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} x=2\ln\operatorname{ctg} t+1, \\ y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t, \ t_0=\pi/4. \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} x=(1/2)t^2-(1/4)t^4, \\ y=(1/2)t^2+(1/3)t^3, \ t_0=0. \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \ t_0=\pi/2. \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t, \ t_0=\pi/6. \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} x=\arcsin(t/\sqrt{1+t^2}), \\ y=\arccos(1/\sqrt{1+t^2}), \ t_0=1. \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x=(1+\ln t)/t^2, \\ y=(3+2\ln t)/t, \ t_0=1. \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} x=(1+t)/t^2, \\ y=3/(2t^2)+2/t, \ t_0=2. \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \ t_0=\pi/6. \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x=a(t\sin t+\cos t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \ t_0=\pi/4. \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} x=(t+1)/t, \\ y=(t-1)/t, \ t_0=-1. \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3, \ t_0=2. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\operatorname{arctg} t, \ t_0=1. \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \ t_0=0. \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} x=(1+t^3)/(t^2-1), \\ y=t/(t^2-1), \ t_0=2. \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t, \ t_0=\pi/4. \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x=t-t^4, \\ y=t^2-t^3, \ t_0=1. \end{cases}$

16.25. $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2+t+1, \ t_0=1. \end{cases}$

16.26. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t, \ t_0=-\pi/3. \end{cases}$

16.27. $\begin{cases} x=2\operatorname{tg} t, \\ y=2\sin^2 t+\sin 2t, \ t_0=\pi/4. \end{cases}$

16.28. $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2, \ t_0=-2. \end{cases}$

16.29. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=a^t, \ t_0=0. \end{cases}$

16.30. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 2t, \ t_0=\pi/6. \end{cases}$

16.31. $\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t}, \ t_0=0. \end{cases}$

Задача 17. Найти производную n-го порядка.

17.1. $y=xe^{ax}$.

17.2. $y=\sin 2x+\cos(x+1)$.

17.3. $y=\sqrt[5]{e^{7x-1}}$.

17.4. $y=(4x+7)/(2x+3)$.

17.5. $y=\lg(5x+2)$.

17.6. $y=a^{3x}$.

17.7. $y=x/(2(3x+2))$.

17.8. $y=\lg(x+4)$.

17.9. $y=\sqrt{x}$.

17.10. $y=(2x+5)/(13(3x+1))$.

17.11. $y=2^{3x+5}$.

17.12. $y=\sin(x+1)+\cos 2x$.

17.13. $y=\sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

17.14. $y=(4+15x)/(5x+1)$.

17.15. $y=\lg(3x+1)$.

17.16. $y=7^{5x}$.

17.17. $y=x/(9(4x+9))$.

17.18. $y=\lg(1+x)$.

17.19. $y=4/x$.

17.20. $y=(5x+1)/(13(2x+3))$.

17.21. $y=a^{2x+3}$.

17.22. $y=\sin(3x+1)+\cos 5x$.

17.23. $y=\sqrt{e^{3x+1}}$.

17.24. $y=(11+12x)/(6x+5)$.

17.25. $y=\lg(2x+7)$.

17.26. $y=2^{kx}$.

17.27. $y=x/(x+1)$.

17.28. $y=\log_3(x+5)$.

17.29. $y=(1+x)/(1-x)$.

17.30. $y=(7x+1)/(17(4x+3))$.

17.31. $y=3^{2x+5}$.

Задача 18. Найти производную указанного порядка.

18.1. $y=(2x^2-7)\ln(x-1)$, $y^{V}=?$

18.2. $y=(3-x^2)\ln^2 x$, $y^{III}=?$

18.3. $y=x\cos x^2$, $y^{III}=?$

18.4. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y^{III}=?$

18.5. $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3}$, $y^{III}=?$

18.6. $y=(4x^3+5)e^{2x+1}$, $y^{V}=?$

18.7. $y=x^2\sin(5x-3)$, $y^{III}=?$

18.8. $y=(\ln x)/x^2$, $y^{IV}=?$

18.9. $y=(2x+3)\ln^2 x$, $y^{III}=?$

18.10. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$, $y^{III}=?$

18.11. $y=(\ln x)/x^3$, $y^{IV}=?$

18.12. $y=(4x+3)2^{-x}$, $y^{V}=?$

18.13. $y=e^{1-2x}\cdot\sin(2+3x)$, $y^{IV}=?$

18.14. $y=\dfrac{\ln(3+x)}{3+x}$, $y^{III}=?$

18.15. $y=(2x^3+1)\cos x$, $y^{V}=?$

18.16. $y=(x^2+3)\ln(x-3)$, $y^{IV}=?$

18.17. $y=(1-x-x^2)e^{(x-1)/2}$, $y^{IV}=?$

18.18. $y=(1/x)\sin 2x$, $y^{III}=?$

18.19. $y=(x+7)\ln(x+4)$, $y^{V}=?$

18.20. $y=(3x-7)3^{-x}$, $y^{IV}=?$

18.21. $y=\dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y^{III}=?$

18.22. $y=e^{x/2}\sin 2x$, $y^{IV}=?$

18.23. $y=(\ln x)/x^5$, $y^{III}=?$

18.24. $y=x\ln(1-3x)$, $y^{IV}=?$

18.25. $y=(x^2+3x+1)e^{3x+2}$, $y^{V}=?$

18.26. $y=(5x-8)\cdot 2^{-x}$, $y^{IV}=?$

18.27. $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^{V}=?$

18.28. $y=e^{-x}(\cos 2x-3\sin 2x)$, $y^{IV}=?$

18.29. $y=(5x-1)\ln^2 x$, $y^{III}=?$

18.30. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{IV}=?$

18.31. $y=(x^3+2)e^{4x+3}$, $y^{IV}=?$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

19.1. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2\sec^2 t. \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=1/t. \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

19.4. $\begin{cases} x=\operatorname{sh}^2 t, \\ y=1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$

19.5. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

19.6. $\begin{cases} x=1/t, \\ y=1/(1+t^2). \end{cases}$

19.7. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

19.8. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\sec t. \end{cases}$

19.9. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t, \\ y=1/\sin 2t. \end{cases}$

19.10. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=t/\sqrt{t-1}. \end{cases}$

19.11. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

19.12. $\begin{cases} x=\cos t/(1+2\cos t), \\ y=\sin t/(1+2\cos t). \end{cases}$

19.13. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\ln t. \end{cases}$

19.14. $\begin{cases} x=\operatorname{sh} t, \\ y=\operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

19.15. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=1/\sqrt{t}. \end{cases}$

19.16. $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

19.17. $\begin{cases} x=\sqrt{t-3}, \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$

19.18. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$

19.19. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t. \end{cases}$

19.20. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

19.21. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

19.22. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

19.23. $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

19.24. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin^4(t/2). \end{cases}$

19.25. $\begin{cases} x=\operatorname{ch} t, \\ y=\sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

19.26. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=t^2/2. \end{cases}$

19.27. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$

19.28. $\begin{cases} x=\sin t-t\cos t, \\ y=\cos t+t\sin t. \end{cases}$

19.29. $\begin{cases} x=1/t^2, \\ y=1/(t^2+1). \end{cases}$

19.30. $\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

19.31. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Задача 20. Показать, что функция y удовлетворяет уравнению (1).

20.1. $y=xe^{-x^2/2}$,

$xy'=(1-x^2)y$. (1)

20.2. $y=\dfrac{\sin x}{x}$,

$xy'+y=\cos x$. (1)

20.3. $y=5e^{-2x}+e^{x}/3$,
$y'+2y=e^{x}$. (1)

20.4. $y=2+c\sqrt{1-x^2}$,
$(1-x^2)y'+xy=2x$. (1)

20.5 $y=x\sqrt{1-x^2}$,
$yy'=x-2x^3$. (1)

20.6. $y=\dfrac{c}{\cos x}$,
$y'-\operatorname{tg} x\cdot y=0$. (1)

20.7. $y=-1/(3x+c)$,
$y'=3y^2$. (1)

20.8. $y=\ln(c+e^{x})$,
$y'=e^{x-y}$. (1)

20.9. $y=\sqrt{x^2-cx}$,
$(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$. (1)

20.10. $y=x(c-\ln x)$,
$(x-y)\,dx+x\,dy=0$. (1)

20.11. $y=e^{\operatorname{tg}(x/2)}$,
$y'\sin x=y\ln y$. (1)

20.12. $y=(1+x)/(1-x)$,
$y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$. (1)

20.13 $y=(b+x)/(1+bx)$,
$y-xy'=b(1+x^2y')$. (1)

20.14. $y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2}$,
$yy'=(1-2x)/y$. (1)

20.15. $y=\sqrt{\ln\left(\dfrac{1+e^{x}}{2}\right)^2+1}$,
$(1+e^{x})yy'=e^{x}$. (1)

20.16. $y=\operatorname{tg}\ln 3x$,
$(1+y^2)\,dx=x\,dy$. (1)

20.17. $y=-\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$,
$1+y^2+xyy'=0$. (1)

20.18. $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1}$,
$\ln x+y^3-3xy^2y'=0$. (1)

20.19. $y=a+7x/(ax+1)$,
$y-xy'=a(1+x^2y')$. (1)

20.20. $y=a\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{a}{x}-1}$,
$a^2+y^2+2x\sqrt{ax-x^2}\,y'=0$. (1)

20.21. $y=\sqrt[4]{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$,
$8xy'-y=\dfrac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}$. (1)

20.22. $y=(x^2+1)\,e^{x^2}$,
$y'-2xy=2xe^{x^2}$. (1)

20.23. $y=\dfrac{2x}{x^3+1}+\dfrac{1}{x}$,
$x(x^3+1)y'+(2x^3-1)y=\dfrac{x^3-2}{x}$. (1).

20.24. $y=e^{x+x^2}+2e^{x}$,
$y'-y=2xe^{x+x^2}$. (1)

20.25. $y=-x\cos x+3x$,
$xy'=y+x^2\sin x$. (1)

20.26. $y=1/\sqrt{\sin x+x}$,
$2(\sin x)y'+y\cos x=$
$=y^3(x\cos x-\sin x)$. (1)

20.27. $y=x/(x-1)+x^2$,
$x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$. (1)

20.28. $y=x/\cos x$,
$y'-y\operatorname{tg} x=\sec x$. (1)

20.29. $y=(x+1)^n(e^{x}-1)$,
$y'-\dfrac{ny}{x+1}=e^{x}(1+x)^n$. (1)

20.30. $y=2\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$,
$x(\sin x)y'+(\sin x-x\cos x)y=$
$=\sin x\cos x-x$. (1)

20.31. $y=-\sqrt{x^4-x^2}$,
$xyy'-y^2=x^4$. (1)

III. ГРАФИКИ

Теоретические вопросы

1. Условия возрастания функции на отрезке.
2. Условия убывания функции на отрезке.
3. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.
4. Достаточные признаки максимума и минимума функции (изменение знака первой производной).
5. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.
6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.
7. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
8. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных.
9. Асимптоты графика функции.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция $f(x)=x-\sin x$ монотонно возрастает на отрезке: а) $[0, 2\pi]$; б) $[0,4\pi]$. Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

2. Доказать теорему: *если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *диффренцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и* $\varphi'(x)>\psi'(x)\ \forall x\in(a, b)$, *а* $\varphi(a)=\psi(a)$, *то* $\varphi(x)>\psi(x)\ \forall x\in(a, b]$.

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

Указание. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$.

3. Доказать неравенство $2x/\pi<\sin x$ для трех случаев:

а) $\forall x\in\left(0, \arccos\dfrac{2}{\pi}\right]$; б) $\forall x\in\left[\arccos\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $\forall x\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ минимум, а функция

$$g(x)=\begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

не имеет в точке $x=0$ экстремума.

5. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x)=$

$=(x-x_0)^n\varphi(x)$, считая, что производная $\varphi'(x)$ не существует, но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0)\neq 0$, n — натуральное число.

6. Исследовать знаки максимума и минимума функции x^3-3x+q и выяснить условия, при которых уравнение $x^3-3x+q=0$ имеет: а) три различных действительных корня; б) один действительный корень.

7. Определить «отклонение от нуля» многочлена $p(x)=6x^3-27x^2+36x-14$ на отрезке [0, 3], т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции $|p(x)|$.

8. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

Расчетные задания

Задача 1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1.1. $y=2x^3-9x^2+12x-9$.
1.2. $y=3x-x^3$.
1.3. $y=x^2(x-2)^2$.
1.4. $y=(x^3-9x^2)/4+6x-9$.
1.5. $y=2-3x^2-x^3$.
1.6. $y=(x+1)^2(x-1)^2$.
1.7. $y=2x^3-3x^2-4$.
1.8. $y=3x^2-2-x^3$.
1.9. $y=(x-1)^2(x-3)^2$.
1.10. $y=(x^3+3x^2)/4-5$.
1.11. $y=6x-8x^3$.
1.12. $y=16x^2(x-1)^2$.
1.13. $y=2x^3+3x^2-5$.
1.14. $y=2-12x^2-8x^3$.
1.15. $y=(2x+1)^2(2x-1)^2$.
1.16. $y=2x^3+9x^2+12x$.
1.17. $y=12x^2-8x^3-2$.
1.18. $y=(2x-1)^2(2x-3)^2$.
1.19. $y=27(x^3-x^2)/4-4$.
1.20. $y=x(12-x^2)/8$.
1.21. $y=x^2(x-4)^2/16$.
1.22. $y=27(x^3+x^2)/4-5$.
1.23. $y=(16-6x^2-x^3)/8$.
1.24. $y=-(x^2-4)^2/16$.
1.25. $y=16x^3-36x^2+24x-9$.
1.26. $y=(6x^2-x^3-16)/8$.
1.27. $y=-(x-2)^2(x-6)^2/16$.
1.28. $y=16x^3-12x^2-4$.
1.29. $y=(11+9x-3x^2-x^3)/8$.
1.30. $y=-(x+1)^2(x-3)^2/16$.
1.31. $y=16x^3+12x^2-5$.

Задача 2. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

2.1. $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$.
2.2. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.
2.3. $y=12\sqrt[3]{6(x-2)^2}/(x^2+8)$.
2.4. $y=-12\sqrt[3]{6(x-1)^2}/(x^2+2x+9)$.
2.5. $y=1-\sqrt[3]{x^2+2x}$.
2.6. $y=2x+6-3\sqrt[3]{(x+3)^2}$.
2.7. $y=6\sqrt[3]{6(x-3)^2}/(x^2-2x+9)$.
2.8. $y=1-\sqrt[3]{x^2+4x+3}$.
2.9. $y=3\sqrt[3]{(x-3)^2}-2x+6$.
2.10. $y=-6\sqrt[3]{6x^2}/(x^2+4x+12)$.

2.11. $y=4x+8-6\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

2.12. $y=3\sqrt[3]{6(x-4)^2}/(x^2-4x+12)$.

2.13. $y=\sqrt[3]{x(x+2)}$.

2.14. $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$.

2.15. $y=-3\sqrt[3]{6(x+1)^2}/(x^2+6x+17)$.

2.16. $y=6\sqrt[3]{(x-2)^2}-4x+8$.

2.17. $y=3\sqrt[3]{6(x-5)^2}/(x^2-6x+17)$.

2.18. $y=2+\sqrt[3]{8x(x+2)}$.

2.19. $y=6x-6-9\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

2.20. $y=\sqrt[3]{x^2+6x+8}$.

2.21. $y=\sqrt[3]{4x(x-1)}$.

2.22. $y=-3\sqrt[3]{6(x+2)^2}/(x^2+8x+24)$.

2.23. $y=\sqrt[3]{x(x-2)}$.

2.24. $y=1-\sqrt[3]{x^2-4x+3}$.

2.25. $y=9\sqrt[3]{(x+1)^2}-6x-6$.

2.26. $y=6\sqrt[3]{6(x+3)^2}/(x^2+10x+33)$.

2.27. $y=8x-16-12\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

2.28. $y=-6\sqrt[3]{6(x-6)^2}/(x^2-8x+24)$.

2.29. $y=12\sqrt[3]{(x+2)^2}-8x-16$.

2.30. $y=3\sqrt[3]{6(x-1)^2}/(2(x^2+2x+9))$.

2.31. $y=3\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

3.1. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$, [1,4].

3.2. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, [1, 4].

3.3. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$, [0, 6].

3.4. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, [−3, 3].

3.5. $y=2\sqrt{x}-x$, [0, 4].

3.6. $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$, [−1, 5].

3.7. $y=x-4\sqrt{x}+5$, [1, 9].

3.8. $y=10x/(1+x^2)$, [0, 3].

3.9. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$, [−3, 3].

3.10. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$, [2, 4].

3.11. $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$, [−1, 2].

3.12. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, [−1, 6].

3.13. $y=2(-x^2+7x-7)/(x^2-2x+2)$, [1,4].

3.14. $y=x-4\sqrt{x+2}+8$, [−1, 7].

3.15. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, [1, 5].

3.16. $y=4x/(4+x^2)$, [−4, 2].

3.17. $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$, [−4, −1].

3.18. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, [−2, 4].

3.19. $y=\dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, [−2, 1].

3.20. $y=-\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, [−5, 1].

3.21. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, [0, 4].

3.22. $y=x^2-2x+16/(x-1)-13$, [2, 5].

3.23. $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, [1, 5].

3.24. $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, [−3, 4].

3.25. $y=-x^2/2+2x+8/(x-2)+5$, [−2, 1].

3.26. $y=8x+4/x^2-15$, [1/2, 2].

3.27. $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)}+3$, [−4, 2].

3.28. $y=x^2+4x+16/(x+2)-9$, [−1, 2].

3.29. $y=4/x^2-8x-15$, [−2, −1/2].

3.30. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$, [−2, 5].

3.31. $y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$, [−1, 2].

Задача 4. Варианты 1 — 10

Рыбаку нужно переправиться с острова A на остров B (рис. 1). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега MN. Найти наикратчайший путь рыбака $s=s_1+s_2$.

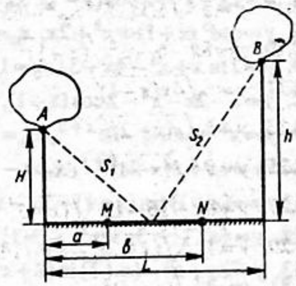

Рис. 1

4.1. $a=200$, $b=300$, $H=400$, $h=300$, $L=700$.
4.2. $a=400$, $b=600$, $H=800$, $h=600$, $L=1400$.
4.3. $a=600$, $b=900$, $H=1200$, $h=900$, $L=2100$.
4.4. $a=800$, $b=1200$, $H=1600$, $h=1200$, $L=2800$.
4.5. $a=1000$, $b=1500$, $H=2000$, $h=1500$, $L=3500$.
4.6. $a=400$, $b=500$, $H=300$, $h=400$, $L=700$.
4.7. $a=800$, $b=1000$, $H=600$, $h=800$, $L=1400$.
4.8. $a=1200$, $b=1500$, $H=900$, $h=1200$, $L=2100$.
4.9. $a=1600$, $b=2000$, $H=1200$, $h=1600$, $L=2800$.
4.10. $a=2000$, $b=2500$, $H=1500$, $h=2000$, $L=3500$.

Варианты 11 — 20

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$-ю часть курса, а забывает αt-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

4.11. $k=1/2$, $\alpha=2/49$.
4.12. $k=1/2$, $\alpha=2/81$.
4.13. $k=1/2$, $\alpha=2/121$.
4.14. $k=1/2$, $\alpha=2/169$.
4.15. $k=1$, $\alpha=1/25$.
4.16. $k=1$, $\alpha=1/16$.
4.17. $k=1$, $\alpha=1/36$.
4.18. $k=1$, $\alpha=1/49$.
4.19. $k=2$, $\alpha=1/18$.
4.20. $k=2$, $\alpha=2/49$.

Варианты 21 — 31

Тело массой $m_0=3000$ кг падает с высоты H м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k=100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $v_0=0$, ускорение $g=10$ м/с^2, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

4.21. $H=500$.
4.22. $H=605$.
4.23. $H=720$.
4.24. $H=845$.
4.25. $H=980$.
4.26. $H=1125$.
4.27. $H=1280$.
4.28. $H=1445$.
4.29. $H=1620$.
4.30. $H=1805$.
4.31. $H=2000$.

Задача 5. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

5.1. $y=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$, $x_0=2$.

5.2. $y=4x-x^2-2\cos(x-2)$, $x_0=2$.

5.3. $y=6e^{x-2}-x^3+3x^2-6x$, $x_0=2$.

5.4. $y=2\ln(x+1)-2x+x^2+1$, $x_0=0$.

5.5. $y=2x-x^2-2\cos(x-1)$, $x_0=1$.

5.6. $y=\cos^2(x+1)+x^2+2x$, $x_0=-1$.

5.7. $y=2\ln x+x^2-4x+3$, $x_0=1$.

5.8. $y=1-2x-x^2-2\cos(x+1)$, $x_0=-1$.

5.9. $y=x^2+6x+8-2e^{x+2}$, $x_0=-2$.

5.10. $y=4x+x^2-2e^{x+1}$, $x_0=-1$.

5.11. $y=(x+1)\sin(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$.

5.12. $y=6e^{x-1}-3x-x^3$, $x_0=1$.

5.13. $y=2x+x^2-(x+1)\ln(2+x)$, $x_0=-1$.

5.14. $y=\sin^2(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$.

5.15. $y=x^2+4x+\cos^2(x+2)$, $x_0=-2$.

5.16. $y=x^2+2\ln(x+2)$, $x_0=-1$.

5.17. $y=4x-x^2+(x-2)\sin(x-2)$, $x_0=2$.

5.18. $y=6e^x-x^3-3x^2-6x-5$, $x_0=0$.

5.19. $y=x^2-2x-2e^{x-2}$, $x_0=2$.

5.20. $y=\sin^2(x+2)-x^2-4x-4$, $x_0=-2$.

5.21. $y=\cos^2(x-1)+x^2-2x$, $x_0=1$.

5.22. $y=x^2-2x-(x-1)\ln x$, $x_0=1$.

5.23. $y=(x-1)\sin(x-1)+2x-x^2$, $x_0=1$.

5.24. $y=x^2-4x+\cos^2(x-2)$, $x_0=2$.

5.25. $y=x^4+4x^3+12x^2+24(x+1-e^x)$, $x_0=0$.

5.26. $y=\sin^2(x-2)-x^2+4x-4$, $x_0=2$.

5.27. $y=6e^{x+1}-x^3-6x^2-15x-16$, $x_0=-1$.

5.28. $y=\sin x+\operatorname{sh} x-2x$, $x_0=0$.

5.29. $y=\sin^2(x-1)-x^2+2x$, $x_0=1$.

5.30. $y=\cos x+\operatorname{ch} x$, $x_0=0$.

5.31. $y=x^2-2e^{x-1}$, $x_0=1$.

Задача 6. Найти асимптоты и построить графики функций.

6.1. $y=(17-x^2)/(4x-5)$.

6.2. $y=(x^2+1)/\sqrt{4x^2-3}$.

6.3. $y=(x^3-4x)/(3x^2-4)$.

6.4. $y=(4x^2+9)/(4x+8)$.

6.5. $y=(4x^3+3x^2-8x-2)/(2-3x^2)$.

6.6. $y=(x^2-3)/\sqrt{3x^2-2}$.

6.7. $y=(2x^2-6)/(x-2)$.

6.8. $y=(2x^3+2x^2-3x-1)/(2-4x^2)$.

6.9. $y=(x^3-5x)/(5-3x^2)$.

6.10. $y=(x^2-6x+4)/(3x-2)$.

6.11. $y=(2-x^2)/\sqrt{9x^2-4}$.

6.12. $y=(4x^3-3x)/(4x^2-1)$.

6.13. $y=(3x^2-7)/(2x+1)$.

6.14. $y=(x^2+16)/\sqrt{9x^2-8}$.

6.15. $y=(x^3+3x^2-2x-2)/(2-3x^2)$.

6.16. $y=(21-x^2)/(7x+9)$.

6.17. $y=(2x^2-1)/\sqrt{x^2-2}$.

6.18. $y=(2x^3-3x^2-2x+1)/(1-3x^2)$.

6.19. $y=(x^2-11)/(4x-3)$.

6.20. $y=(2x^2-9)/\sqrt{x^2-1}$.

6.21. $y=(x^3-2x^2-3x+2)/(1-x^2)$.

6.22. $y=(x^2+2x-1)/(2x+1)$.

6.23. $y=(x^3+x^2-3x-1)/(2x^2-2)$.

6.24. $y=(x^2+6x+9)/(x+4)$.

6.25. $y=(3x^2-10)/\sqrt{4x^2-1}$.

6.26. $y=(x^2-2x+2)/(x+3)$.

6.27. $y=(2x^3+2x^2-9x-3)/(2x^2-3)$.

6.28. $y=(3x^2-10)/(3-2x)$.

6.29. $y=(-x^2-4x+13)/(4x+3)$.

6.30. $y=(-8-x^2)/\sqrt{x^2-4}$.

6.31. $y=(9-10x^2)/\sqrt{4x^2-1}$.

Задача 7. Провести полное исследование функций и построить их графики.

7.1. $y=(x^3+4)/x^2$.

7.2. $y=(x^2-x+1)/(x-1)$.

7.3. $y=2/(x^2+2x)$.

7.4. $y=4x^2/(3+x^2)$.

7.5. $y=12x/(9+x^2)$.

7.6. $y=(x^2-3x+3)/(x-1)$.

7.7. $y=(4-x^3)/x^2$.

7.8. $y=(x^2-4x+1)/(x-4)$.

7.9. $y=(2x^3+1)/x^2$.

7.10. $y=(x-1)^2/x^2$.

7.11. $y=x^2/(x-1)^2$.

7.12. $y=(1+1/x)^2$.

7.13. $y=(12-3x^2)/(x^2+12)$.

7.14. $y=(9+6x-3x^2)/(x^2-2x+13)$.

7.15. $y=-8x/(x^2+4)$.

7.16. $y=((x-1)/(x+1))^2$.

7.17. $y=(3x^4+1)/x^3$.

7.18. $y=4x/(x+1)^2$.

7.19. $y=8(x-1)/(x+1)^2$.

7.20. $y=(1-2x^3)/x^2$.

7.21. $y=4/(x^2+2x-3)$.

7.22. $y=4/(3+2x-x^2)$.

7.23. $y=(x^2+2x-7)/(x^2+2x-3)$.

7.24. $y=1/(x^4-1)$.

7.25. $y=-(x/(x+2))^2$.

7.26. $y=(x^3-32)/x^2$.

7.27. $y=4(x+1)^2/(x^2+2x+4)$.

7.28. $y=(3x-2)/x^3$.

7.29. $y=(x^2-6x+9)/(x-1)^2$.

7.30. $y=(x^3-27x+54)/x^3$.

7.31. $y=(x^3-4)/x^2$.

Задача 8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

8.1. $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

8.2. $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

8.3. $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$.

8.4. $y=(3-x)\,e^{x-2}$.

8.5. $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$.

8.6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

8.7. $y=(x-2)\,e^{3-x}$.

8.8. $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

8.9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

8.10. $y=-(2x+1)\,e^{2(x+1)}$.

8.11. $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

8.12. $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$.

8.13. $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

8.14. $y=\dfrac{e^{3-x}}{3-x}$.

8.15. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

8.16. $y=(4-x)e^{x-3}$.

8.17. $y=-\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

8.18. $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

8.19. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$.

8.20. $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.

8.21. $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$.

8.22. $y=-(x+1)e^{(x+2)}$.

8.23. $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

8.24. $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

8.25. $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$.

8.26. $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.

8.27. $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$.

8.28. $y=(x+4)e^{-(x+3)}$.

8.29. $y=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

8.30. $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$.

8.31. $y=2\ln\dfrac{x-1}{x}+1$.

Задача 9. Провести полное исследование функций и построить их графики.

9.1. $y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$.

9.2. $y=-\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$.

9.3. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$.

9.4. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$.

9.5. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$.

9.6. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$.

9.7. $y=\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$.

9.8. $y=\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.

9.9. $y=\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$.

9.10. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$.

9.11. $y=\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$.

9.12. $y=\sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$.

9.13. $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

9.14. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$.

9.15. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

9.16. $y=\sqrt[3]{(x+6)x^2}$.

9.17. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$.

9.18. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

9.19. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$.

9.20. $y=\sqrt[3]{(x-3)x^2}$.

9.21. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

9.22. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$.

9.23. $y=\sqrt[3]{(x-6)x^2}$.

9.24. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

9.25. $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

9.26. $y=\sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

9.27. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+3)^2}$.

9.28. $y=\sqrt[3]{x(x-6)^2}$.

9.29. $y=\sqrt[3]{x(x+6)^2}$.

9.30. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

9.31. $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Задача 10. Провести полное исследование функций и построить их графики.

10.1. $y=e^{\sin x+\cos x}$.

10.2. $y=\operatorname{arctg}[(\sin x+\cos x)/\sqrt{2}]$.

10.3. $y=\ln(\cos x+\sin x)$.

10.4. $y=1/(\sin x+\cos x)$.

10.5. $y=e^{\sqrt{2}\sin x}$.

10.6. $y=\operatorname{arctg}\sin x$.

10.7. $y=\ln(\sqrt{2}\sin x)$.

10.8. $y=1/(\sin x-\cos x)$.

10.9. $y=e^{\sin x-\cos x}$.

10.10. $y=\operatorname{arctg}[(\sin x-\cos x)/\sqrt{2}]$.

10.11. $y=\ln(\sin x-\cos x)$.

10.12. $y=1/(\sin x+\cos x)^2$.

10.13. $y=e^{-\sqrt{2}\cos x}$.

10.14. $y=-\operatorname{arctg}\cos x$.

10.15. $y=\ln(-\sqrt{2}\cos x)$.

10.16. $y=1/(\sin x-\cos x)^2$.

10.17. $y=e^{-\sin x-\cos x}$.

10.18. $y=\sqrt[3]{\sin x}$.

10.19. $y=\ln(-\sin x-\cos x)$.

10.20. $y=\sqrt{(\sin x-\cos x)/\sqrt{2}}$.

10.21. $y=e^{-\sqrt{2}\sin x}$.

10.22. $y=\sqrt[3]{\cos x}$.

10.23. $y=\ln(-\sqrt{2}\sin x)$.

10.24. $y=\sqrt{\cos x}$.

10.25. $y=e^{\cos x-\sin x}$.

10.26. $y=\sqrt[3]{(\sin x+\cos x)/\sqrt{2}}$.

10.27. $y=\ln(\cos x-\sin x)$.

10.28. $y=\sqrt{\sin x}$.

10.29. $y=e^{\sqrt{2}\cos x}$.

10.30. $y=\sqrt{(\sin x+\cos x)/\sqrt{2}}$.

10.31. $y=\ln(\sqrt{2}\cos x)$.

IV. ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8. Интегрирование иррациональных выражений.

9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.

10. Основные свойства определенного интеграла.

11. Теорема о среднем.

12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона — Лейбница.

13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

15. Вычисление площадей плоских фигур.

16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x=0$, доказать, что она интегрируема на отрезке [0, 1].

2. Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx?$$

3. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

4. Найти $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2}\,dt.$

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)\,e^{-t^2}\,dt.$$

6. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T. Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \;\forall a.$$

7. Доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{+a} f(x)\,dx \text{ и } \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln\frac{2+x}{2-x}\,dx$?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c, интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int\sqrt{1+x^n}\,dx$ выражается элементарными функциями?

Расчетные задания

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int (4-3x)e^{-3x}\,dx$.

1.2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$.

1.3. $\int (3x+4)e^{3x}\,dx$.

1.4. $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$.

1.5. $\int (4-16x)\sin 4x\,dx$.

1.6. $\int (5x-2)e^{3x}\,dx$.

1.7. $\int (1-6x)e^{2x}\,dx$.

1.8. $\int \ln(x^2+4)\,dx$.

1.9. $\int \ln(4x^2+1)\,dx$.

1.10. $\int (2-4x)\sin 2x\,dx$.

1.11. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}\,dx$.

1.12. $\int e^{-2x}(4x-3)\,dx$.

1.13. $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$.

1.14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$.

1.15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$.

1.16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\,dx$.

1.17. $\int (5x+6)\cos 2x\,dx.$

1.18. $\int (3x-2)\cos 5x\,dx.$

1.19. $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x\,dx.$

1.20. $\int (4x+7)\cos 3x\,dx.$

1.21. $\int (2x-5)\cos 4x\,dx.$

1.22. $\int (8-3x)\cos 5x\,dx.$

1.23. $\int (x+5)\sin 3x\,dx.$

1.24. $\int (2-3x)\sin 2x\,dx.$

1.25. $\int (4x+3)\sin 5x\,dx.$

1.26. $\int (7x-10)\sin 4x\,dx.$

1.27. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x\,dx.$

1.28. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

1.29. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$

1.30. $\int x\sin^2 x\,dx.$

1.31. $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}.$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

2.1. $\int_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$

2.2. $\int_{-2}^{0} (x^2-4)\cos 3x\,dx.$

2.3. $\int_{-1}^{0} (x^2+4x+3)\cos x\,dx.$

2.4. $\int_{-2}^{0} (x+2)^2\cos 3x\,dx.$

2.5. $\int_{-4}^{0} (x^2+7x+12)\cos x\,dx.$

2.6. $\int_{0}^{\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx.$

2.7. $\int_{0}^{\pi} (9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx.$

2.8. $\int_{0}^{\pi} (8x^2+16x+17)\cos 4x\,dx.$

2.9. $\int_{0}^{2\pi} (3x^2+5)\cos 2x\,dx.$

2.10. $\int_{0}^{2\pi} (2x^2-15)\cos 3x\,dx.$

2.11. $\int_{0}^{2\pi} (3-7x^2)\cos 2x\,dx.$

2.12. $\int_{0}^{2\pi} (1-8x^2)\cos 4x\,dx.$

2.13. $\int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\sin 3x\,dx.$

2.14. $\int_{0}^{3} (x^2-3x)\sin 2x\,dx.$

2.15. $\int\limits_0^{\pi}(x^2-3x+2)\sin x\,dx$.

2.16. $\int\limits_0^{\pi/2}(x^2-5x+6)\sin 3x\,dx$.

2.17. $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$.

2.18. $\int\limits_0^{\pi/4}(x^2+17{,}5)\sin 2x\,dx$.

2.19. $\int\limits_0^{\pi/2}(1-5x^2)\sin x\,dx$.

2.20. $\int\limits_{\pi/4}^{3}(3x-x^2)\sin 2x\,dx$.

2.21. $\int\limits_1^{2}x\ln^2 x\,dx$.

2.22. $\int\limits_1^{e^2}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$.

2.23. $\int\limits_1^{8}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

2.24. $\int\limits_0^{1}(x+1)\ln^2(x+1)\,dx$.

2.25. $\int\limits_2^{3}(x-1)^3\ln^2(x-1)\,dx$.

2.26. $\int\limits_{-1}^{0}(x+2)^3\ln^2(x+2)\,dx$.

2.27. $\int\limits_0^{2}(x+1)^2\ln^2(x+1)\,dx$.

2.28. $\int\limits_1^{e}\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$.

2.29. $\int\limits_{-1}^{1}x^2 e^{-x/2}\,dx$.

2.30. $\int\limits_0^{1}x^2 e^{3x}\,dx$.

2.31. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+2)e^{x/2}\,dx$.

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

3.1. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3.2. $\int\frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

3.3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3.4. $\int\frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$.

3.5. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

3.6. $\int\frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3.7. $\int\operatorname{tg}x\ln\cos x\,dx$.

3.8. $\int\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,dx$.

3.9. $\int\frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

3.10. $\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx$.

3.11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5}\,dx.$

3.12. $\int \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2}\,dx.$

3.13. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx.$

3.14. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$

3.15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[2]{x-1}}.$

3.16. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx.$

3.17. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^5}.$

3.18. $\int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx.$

3.19. $\int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx.$

3.20. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx.$

3.21. $\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}\,dx.$

3.22. $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx.$

3.23. $\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}\,dx.$

3.24. $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx.$

3.25. $\int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

3.26. $\int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

3.27. $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}\,dx.$

3.28. $\int \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}\,dx.$

3.29. $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx.$

3.30. $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

3.31. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

4.1. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx.$

4.2. $\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^2}.$

4.3. $\int\limits_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx.$

4.4. $\int\limits_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^2+4}.$

4.5. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx.$

4.6. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}\,dx.$

4.7. $\int\limits_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx.$

4.8. $\int\limits_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}\,dx.$

4.9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

4.10. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

4.11. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

4.12. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}\,dx$.

4.13. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}\,dx$.

4.14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$.

4.15. $\displaystyle\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

4.16. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$.

4.17. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

4.18. $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

4.19. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4.20. $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$.

4.21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

4.22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}$.

4.23. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln\cos x\,dx$.

4.24. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,dx$.

4.25. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

4.26. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx$.

4.27. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\,dx$.

4.28. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}\,dx$.

4.29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$.

4.30. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$.

4.31. $\displaystyle\int_2^9 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Задача 5. Найти неопределенные интегралы.

5.1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx.$

5.2. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,dx.$

5.3. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}\,dx.$

5.4. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\,dx.$

5.5. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}\,dx.$

5.6. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\,dx.$

5.7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx.$

5.8. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}\,dx.$

5.9. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx.$

5.10. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\,dx.$

5.11. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}\,dx.$

5.12. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}\,dx.$

5.13. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}\,dx.$

5.14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}\,dx.$

5.15. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}\,dx.$

5.16. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}\,dx.$

5.17. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}\,dx.$

5.18. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}\,dx.$

5.19. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}\,dx.$

5.20. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}\,dx.$

5.21. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}\,dx.$

5.22. $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}\,dx.$

5.23. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx.$

5.24. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}\,dx.$

5.25. $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}\,dx.$

5.26. $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}\,dx.$

5.27. $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}\,dx.$

5.28. $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}\,dx.$

5.29. $\int \frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}\,dx.$

5.30. $\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}\,dx.$

5.31. $\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}\,dx.$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

6.1. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}\,dx.$

6.2. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}\,dx.$

6.3. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

6.4. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}\,dx.$

6.5. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

6.6. $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}\,dx.$

6.7. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx.$

6.8. $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}\,dx.$

6.9. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}\,dx.$

6.10. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}\,dx.$

6.11. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

6.12. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

6.13. $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

6.14. $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}\,dx.$

6.15. $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}\,dx.$

6.16. $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}\,dx.$

6.17. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}\,dx.$

6.18. $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}\,dx.$

6.19. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}\,dx.$

6.20. $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}\,dx.$

6.21. $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

6.22. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

6.23. $\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

6.24. $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

6.25. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

6.26. $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

6.27. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,dx.$

6.28. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}\,dx.$

6.29. $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

6.30. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

6.31. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

7.1. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,dx.$

7.2. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

7.3. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,dx.$

7.4. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

7.5. $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

7.6. $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\,dx.$

7.7. $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx.$

7.8. $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}\,dx.$

7.9. $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$

7.10. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$

7.11. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}\,dx.$

7.12. $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}\,dx.$

7.13. $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx.$

7.14. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}\,dx.$

7.15. $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

7.16. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.17. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.18. $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.19. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,dx.$

7.20. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,dx.$

7.21. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx.$

7.22. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}\,dx.$

7.23. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.24. $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.25. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.26. $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.27. $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.28. $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}\,dx.$

7.29. $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

7.30. $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}\,dx.$

7.31. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

Задача 8. Вычислить определенные интегралы.

8.1. $\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}.$

8.2. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{2+\cos x}.$

8.3. $\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}.$

8.4. $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^3}.$

8.5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx.$

8.6. $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}\,2}^{2\,\mathrm{arctg}\,3} \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}.$

8.7. $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/3)}^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}.$

8.8. $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}.$

8.9. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}.$

8.10. $\int\limits_{0}^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}\,dx.$

8.11. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}.$

8.12. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)\,dx}{1+\cos x+\sin x}.$

8.13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$.

8.14. $\displaystyle\int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}\,dx$.

8.15. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$.

8.16. $\displaystyle\int_0^{2\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

8.17. $\displaystyle\int_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x-\sin x}$.

8.18. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.20. $\displaystyle\int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

8.21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$.

8.22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

8.23. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.24. $\displaystyle\int_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.25. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.26. $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.27. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$.

8.28. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

8.29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{2+\sin x}$.

8.30. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

8.31. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{5+3\sin x}$.

Задача 9. Вычислить определенные интегралы.

9.1. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg}x+5)\sin 2x}$.

9.2. $\displaystyle\int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2\operatorname{ctg}x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$.

9.3. $\displaystyle\int_0^{\arccos(1/\sqrt{7})} \frac{3+2\operatorname{tg}x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\,dx$.

9.4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\,dx$.

9.5. $\displaystyle\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8+\operatorname{tg} x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx.$

9.6. $\displaystyle\int\limits_0^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}\,dx.$

9.7. $\displaystyle\int\limits_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6\operatorname{tg} x\,dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}.$

9.8. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg} x-22}{4-\operatorname{tg} x}\,dx.$

9.9. $\displaystyle\int\limits_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^{0} \frac{3\operatorname{tg} x+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}\,dx.$

9.10. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1+\operatorname{ctg} x}{(\sin x+2\cos x)^2}\,dx.$

9.11. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}\,dx.$

9.12. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}\,dx.$

9.13. $\displaystyle\int\limits_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4+\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}\,dx.$

9.14. $\displaystyle\int\limits_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12+\operatorname{tg} x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}\,dx.$

9.15. $\displaystyle\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6+\operatorname{tg} x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx.$

9.16. $\displaystyle\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}.$

9.17. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{7+3\operatorname{tg} x}{(\sin x+2\cos x)^2}\,dx.$

9.18. $\displaystyle\int\limits_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\operatorname{tg} x+5}{(5-\operatorname{tg} x)\sin 2x}\,dx.$

9.19. $\displaystyle\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^{0} \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg} x+7}\,dx.$

9.20. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{5\operatorname{tg} x+2}{2\sin 2x+5}\,dx.$

9.21. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4\operatorname{tg} x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}\,dx.$

9.22. $\displaystyle\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{7/8}} \frac{6\sin^2 x\,dx}{4+3\cos 2x}.$

9.23. $\displaystyle\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^{0} \frac{11-3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3}\,dx.$

9.24. $\displaystyle\int\limits_0^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\operatorname{tg} x-5}{(4\cos x-\sin x)^2}\,dx.$

9.25. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{36\,dx}{(6-\operatorname{tg} x)\sin 2x}.$

9.26. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4-7\operatorname{tg} x}{2+3\operatorname{tg} x}\,dx.$

9.27. $\displaystyle\int\limits_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2-\operatorname{tg} x}{(\sin x+3\cos x)^2}\,dx.$

9.28. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{2/3}} \frac{8\operatorname{tg} x\,dx}{3\cos^2 x+8\sin^2 x-7}.$

9.29. $\displaystyle\int\limits_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12\,dx}{(6+5\,\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}$.

9.30. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{4+3\cos 2x}\,dx$.

9.31. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\,\mathrm{tg}^2 x-1}{\mathrm{tg}^2 x+5}\,dx$.

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

10.1. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x\,dx$.

10.2. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x\,dx$.

10.3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x\,dx$.

10.4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 (x/4) \cos^6 (x/4)\,dx$.

10.5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 (x/2)\,dx$.

10.6. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^8 x\,dx$.

10.7. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,dx$.

10.8. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x\,dx$.

10.9. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x\,dx$.

10.10. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8 (x/4)\,dx$.

10.11. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^8 (x/2)\,dx$.

10.12. $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,dx$.

10.13. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\,dx$.

10.14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x\,dx$.

10.15. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8 x\,dx$.

10.16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^8 (x/4)\,dx$.

10.17. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 (x/2) \cos^2 (x/2)\,dx$.

10.18. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\,dx$.

10.19. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\,dx$.

10.20. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 x\,dx$.

10.21. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^8 x\,dx.$

10.22. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6 (x/4) \cos^2 (x/4)\,dx.$

10.23. $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4 (x/2) \cos^4 (x/2)\,dx.$

10.24. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\,dx.$

10.25. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x\,dx.$

10.26. $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x\,dx.$

10.27. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x\,dx.$

10.28. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 (x/4) \cos^4 (x/4)\,dx.$

10.29. $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2 (x/2) \cos^6 (x/2)\,dx.$

10.30. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \cos^8 x\,dx.$

10.31. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x\,dx.$

Задача 11. Вычислить определенные интегралы.

11.1. $\int\limits_0^{1} \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}\,dx.$

11.2. $\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$

11.3. $\int\limits_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\,dx.$

11.4. $\int\limits_6^{9} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\,dx.$

11.5. $\int\limits_0^{5} e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$

11.6. $\int\limits_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\,dx.$

11.7. $\int\limits_0^{1} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$

11.8. $\int\limits_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}\,dx.$

11.9. $\int\limits_1^{8} \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}\,dx.$

11.10. $\int\limits_1^{2} \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\,dx.$

11.11. $\int\limits_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}\,dx.$

11.12. $\int\limits_0^{2} \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2})\,dx}{(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$

11.13. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x\,dx}{2+\sqrt{2x+1}}$.

11.14. $\int\limits_{0}^{4} e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$.

11.15. $\int\limits_{1/8}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,dx$.

11.16. $\int\limits_{-5/3}^{1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}\,dx$.

11.17. $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}\,dx$.

11.18. $\int\limits_{0}^{7} \frac{\sqrt{x+25}\,dx}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}$.

11.19. $\int\limits_{0}^{2} \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2})\,dx}{(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}$.

11.20. $\int\limits_{0}^{2} e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}$.

11.21. $\int\limits_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,dx$.

11.22. $\int\limits_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,dx$.

11.23. $\int\limits_{9}^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,dx$.

11.24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1})\,dx}{(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}$.

11.25. $\int\limits_{1}^{64} \frac{(2+\sqrt[3]{x})\,dx}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}$.

11.26. $\int\limits_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$.

11.27. $\int\limits_{0}^{6} \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}}\,dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}$.

11.28. $\int\limits_{1}^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

11.29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1})\,dx}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}$.

11.30. $\int\limits_{0}^{3} \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}}\,dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$.

11.31. $\int\limits_{0}^{2} \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2})\,dx}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}$.

Задача 12. Вычислить определенные интегралы.

12.1. $\int\limits_{0}^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$.

12.2. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

12.3. $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

12.4. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

12.5. $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

12.6. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\, dx$.

12.7. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

12.8. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

12.9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4\, dx}{(2-x^2)^{3/2}}$.

12.10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

12.11. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$.

12.12. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$.

12.13. $\int\limits_{0}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\, dx$.

12.14. $\int\limits_{0}^{5/2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

12.15. $\int\limits_{0}^{5} x^2\sqrt{25-x^2}\, dx$.

12.16. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$.

12.17. $\int\limits_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

12.18. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\, dx$.

12.19. $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4\, dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$.

12.20. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$.

12.21. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

12.22. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

12.23. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$.

12.24. $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\, dx$.

12.25. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx$.

12.26. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\, dx$.

12.27. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

12.28. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{x^4\, dx}{(4-x^2)^{3/2}}$.

12.29. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

12.30. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

12.31. $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Задача 13. Найти неопределенные интегралы.

13.1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

13.2. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

13.3. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}\,dx$.

13.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}\,dx$.

13.5. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}\,dx$.

13.6. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}\,dx$.

13.7. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}}\,dx$.

13.8. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx$.

13.9. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,dx$.

13.10. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

13.11. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[8]{x^7}}\,dx$.

13.12. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\sqrt[12]{x^7}}\,dx$.

13.13. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}}\,dx$.

13.14. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}\,dx$.

13.15. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\,dx$.

13.16. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}\,dx$.

13.17. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}\,dx}{x\sqrt[10]{x^9}}$.

13.18. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}\,dx}{x\sqrt[5]{x^3}}$.

13.19. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\sqrt[5]{x}}\,dx$.

13.20. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}\,dx$.

13.21. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[5]{x^4})}}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}}\,dx$.

13.22. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}\,dx$.

13.23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}\,dx.$

13.24. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx.$

13.25. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^4})^3}\,dx}{x^2\sqrt[5]{x^3}}.$

13.26. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

13.27. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx.$

13.28. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx.$

13.29. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

13.30. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}\,dx.$

13.31. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx.$

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

14.1. $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.

14.2. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$. $(0\leqslant x\leqslant 3)$.

14.3. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

14.4. $y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$.

14.5. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

14.6. $y=x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

14.7. $y=\cos x\sin^2 x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$.

14.8. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 2$.

14.9. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^3$.

14.10. $y=\arccos x$, $y=0$, $x=0$.

14.11. $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$.

14.12. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$.

14.13. $y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 6)$.

14.14. $x=\arccos y$, $x=0$, $y=0$.

14.15. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$.

14.16. $y=x^2\sqrt{8-x^2}$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2})$.

14.17. $x=\sqrt{e^y-1}$, $x=0$, $y=\ln 2$.

14.18. $y=x\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

14.19. $y=x/(1+\sqrt{x})$, $y=0$, $x=1$.

14.20. $y=1/(1+\cos x)$, $y=0$, $x=\pi/2$, $x=-\pi/2$.

14.21. $x=(y-2)^3$, $x=4y-8$.

14.22. $y=\cos^5 x\sin 2x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$.

14.23. $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $y=0$, $x=1$.

14.24. $x=4-y^2$, $x=y^2-2y$.

14.25. $x=\dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x=0$, $y=1$, $y=e^3$.

14.26. $y=\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x=1$.

14.27. $y=x^2\sqrt{16-x^2}$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$.

14.28. $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

14.29. $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$.

14.30. $y=x^2\cos x$, $y=0$, $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$.

14.31. $x=4-(y-1)^2$, $x=y^2-4y+3$.

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

15.1. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2$ $(x\geqslant 2)$.

15.2. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=2$ $(y\geqslant 2)$.

15.3. $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $y=4$ $(0<x<8\pi,\ y\geqslant 4)$.

15.4. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2$ $(x\geqslant 2)$.

15.5. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3$ $(y\geqslant 3)$.

15.6. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3$ $(0<x<4\pi,\ y\geqslant 3)$.

15.7. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=6\sqrt{3}$ $(x\geqslant 6\sqrt{3})$.

15.8. $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y=\sqrt{3}$ $(y\geqslant \sqrt{3})$.

15.9. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3$ $(0<x<6\pi,\ y\geqslant 3)$.

15.10. $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=4$ $(x\geqslant 4)$.

15.11. $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=3$ $(y\geqslant 3)$.

15.12. $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases}$ $y=9$ $(0<x<12\pi,\ y\geqslant 9)$.

15.13. $\begin{cases} y=32\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=4$ $(x\geqslant 4)$.

15.14. $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=8\sin t, \end{cases}$ $y=4$ $(y\geqslant 4)$.

15.15. $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases}$ $y=6$ $(0<x<12\pi,\ y\geqslant 6)$.

15.16. $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3}$ $(x\geqslant 3\sqrt{3})$.

15.17. $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ $y=2\sqrt{3}$ $(y\geqslant 2\sqrt{3})$.

15.18. $\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \end{cases}$ $y=15$ $(0<x<20\pi,\ y\geqslant 15)$.

15.19. $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x=1 \ (x\geqslant 1)$.

15.20. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y=4 \ (y\geqslant 4)$.

15.21. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$
$y=1 \ (0<x<2\pi,\ y\geqslant 1)$.

15.22. $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$
$x=1 \ (x\geqslant 1)$.

15.23. $\begin{cases} x=9\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$
$y=2 \ (y\geqslant 2)$.

15.24. $\begin{cases} x=8(t-\sin t) \\ y=8(1-\cos t) \end{cases}$
$y=12 \ (0<x<16\pi,\ y\geqslant 12)$.

15.25. $\begin{cases} x=24\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$
$x=9\sqrt{3} \ (x\geqslant 9\sqrt{3})$.

15.26. $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=8\sin t, \end{cases}$
$y=4\sqrt{3} \ (y\geqslant 4\sqrt{3})$.

15.27. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$
$y=2 \ (0<x<4\pi,\ y\geqslant 2)$.

15.28. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x=2 \ (x\geqslant 2)$.

15.29. $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y=5 \ (y\geqslant 5)$.

15.30. $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$
$y=6 \ (0<x<8\pi,\ y\geqslant 6)$.

15.31. $x=32\cos^3 t$,
$y=3\sin^3 t$,
$x=12\sqrt{3} \ (x\geqslant 12\sqrt{3})$.

Задача 16. **Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.**

16.1. $r=4\cos 3\varphi$, $r=2 \ (r\geqslant 2)$.

16.2. $r=\cos 2\varphi$.

16.3. $r=\sqrt{3}\cos\varphi$, $r=\sin\varphi$, $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.

16.4. $r=4\sin 3\varphi$, $r=2 \ (r\geqslant 2)$.

16.5. $r=2\cos\varphi$, $r=2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.

16.6. $r=\sin 3\varphi$.

16.7. $r=6\sin 3\varphi$, $r=3 \ (r\geqslant 3)$.

16.8. $r=\cos 3\varphi$.

16.9. $r=\cos\varphi$,
$r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$
$(-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.

16.10. $r=\sin\varphi$,
$r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$
$(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4)$.

16.11. $r=6\cos 3\varphi$, $r=3 \ (r\geqslant 3)$.

16.12. $r=1/2+\sin\varphi$.

16.13. $r=\cos\varphi$,
$r=\sin\varphi$
$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.

16.14. $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$,
$r=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)$
$(\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4)$.

16.15. $r=\cos\varphi$, $r=2\cos\varphi$.

16.16. $r=\sin\varphi$, $r=2\sin\varphi$.

16.17. $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.

16.18. $r=1/2+\cos\varphi$.

16.19. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.

16.20. $r=(5/2)\sin\varphi$, $r=(3/2)\sin\varphi$.

16.21. $r=(3/2)\cos\varphi$, $r=(5/2)\cos\varphi$.

16.22. $r=4\cos 4\varphi$.

16.23. $r=\sin 6\varphi$.

16.24. $r=2\cos\varphi$, $r=3\cos\varphi$.

16.25. $r=\cos\varphi+\sin\varphi$.

16.26. $r=2\sin 4\varphi$.

16.27. $r=2\cos 6\varphi$.

16.28. $r=\cos\varphi-\sin\varphi$.

16.29. $r=3\sin\varphi$, $r=5\sin\varphi$.

16.30. $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

16.31. $r=6\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

17.1. $y=\ln x$, $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{15}$.

17.2. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2}$, $1\leqslant x\leqslant 2$.

17.3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\leqslant x\leqslant 7/9$.

17.4. $y=\ln\dfrac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$.

17.5. $y=-\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/6$.

17.6. $y=e^x+6$, $\ln\sqrt{8}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{15}$.

17.7. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $1/4\leqslant x\leqslant 1$.

17.8. $y=\ln(x^2-1)$, $2\leqslant x\leqslant 3$.

17.9. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\leqslant x\leqslant 8/9$.

17.10. $y=\ln(1-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant 1/4$.

17.11. $y=2+\operatorname{ch} x$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

17.12. $y=1-\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/6$.

17.13. $y=e^x+13$, $\ln\sqrt{15}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{24}$.

17.14. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1/4$.

17.15. $y=2-e^x$, $\ln\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{8}$.

17.16. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{15}{16}$.

17.17. $y=1-\ln\sin x$, $\pi/3\leqslant x\leqslant\pi/2$.

17.18. $y=1-\ln(x^2-1)$, $3\leqslant x\leqslant 4$.

17.19. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5$, $1/9\leqslant x\leqslant 1$.

17.20. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+1$, $0\leqslant x\leqslant 9/16$.

17.21. $y=\ln\sin x$, $\pi/3\leqslant x\leqslant\pi/2$.

17.22. $y=\ln 7-\ln x$, $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$.

17.23. $y=\operatorname{ch} x+3$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

17.24. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 3/4$.

17.25. $y=\ln\cos x+2$, $0\leqslant x\leqslant\pi/6$.

17.26. $y=e^x+26$, $\ln\sqrt{8}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{24}$.

17.27. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+3$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

17.28. $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4$, $0\leqslant x\leqslant 1/2$.

17.29. $y=(e^{2x}+e^{-2x}+3)/4$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

17.30. $y=e^x+e$, $\ln\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{15}$.

17.31. $y=(1-e^x-e^{-x})/2$, $0\leqslant x\leqslant 3$.

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

18.1. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi.$

18.2. $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

18.3. $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2.$

18.4. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi$

18.5. $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/2.$

18.6. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi.$

18.7. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(t-\cos t), \end{cases}$ $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi.$

18.8. $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}\cos 2t, \\ y=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\pi/2\leqslant t\leqslant 2\pi/3.$

18.9. $\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t), \\ y=3(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/3.$

18.10. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/3.$

18.11. $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=6\sin^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/3.$

18.12. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $\pi/2\leqslant t\leqslant \pi.$

18.13. $\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t), \\ y=2{,}5(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi/2\leqslant t\leqslant \pi.$

18.14. $\begin{cases} x=3{,}5(2\cos t-\cos 2t) \\ y=3{,}5(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/2.$

18.15. $\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t), \\ y=6(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi.$

18.16. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/2.$

18.17. $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/6.$

18.18. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

18.19. $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi/2\leqslant t\leqslant 2\pi/3.$

18.20. $\begin{cases} x=2(2\cos t-\cos 2t), \\ y=2(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/3.$

18.21. $\begin{cases} x=8(\cos t+t\sin t), \\ y=8(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/4.$

18.22. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

18.23. $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}$ $\pi/6\leqslant t\leqslant \pi/4.$

18.24. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 3\pi/2.$

18.25. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi/2.$

18.26. $\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t), \\ y=4(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi.$

18.27. $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t), \\ y=2(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

18.28. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 3\pi$.

18.29. $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi/4$.

18.30. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $\pi/6\leqslant t\leqslant\pi/4$.

18.31. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi$.

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

19.1. $\rho=3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

19.2. $\rho=2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

19.3. $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

19.4. $\rho=5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

19.5. $\rho=6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

19.6. $\rho=3e^{3\varphi/4}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

19.7. $\rho=4e^{4\varphi/3}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

19.8. $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

19.9. $\rho=5e^{5\varphi/12}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

19.10. $\rho=12e^{12\varphi/5}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

19.11. $\rho=1-\sin\varphi$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant-\pi/6$.

19.12. $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant-\pi/2$.

19.13. $\rho=3(1+\sin\varphi)$, $-\pi/6\leqslant\varphi\leqslant 0$.

19.14. $\rho=4(1-\sin\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$.

19.15. $\rho=5(1-\cos\varphi)$, $-\pi/3\leqslant\varphi\leqslant 0$.

19.16. $\rho=6(1+\sin\varphi)$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant 0$.

19.17. $\rho=7(1-\sin\varphi)$, $-\pi/6\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$.

19.18. $\rho=8(1-\cos\varphi)$, $-2\pi/3\leqslant\varphi\leqslant 0$.

19.19. $\rho=2\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 3/4$.

19.20. $\rho=2\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 4/3$.

19.21. $\rho=2\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 5/12$.

19.22. $\rho=2\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 12/5$.

19.23. $\rho=4\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 3/4$.

19.24. $\rho=3\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 4/3$.

19.25. $\rho=5\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 12/5$.

19.26. $\rho=2\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$.

19.27. $\rho=8\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$.

19.28. $\rho=6\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

19.29. $\rho=2\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$.

19.30. $\rho=8\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$.

19.31. $\rho=6\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$.

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

20.1. $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$, $z=y$, $z=0$ $(y\geqslant 0)$.

20.2. $z=x^2+4y^2$, $z=2$.

20.3. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.

20.4. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=-1$, $z=12$.

20.5. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$, $z=1$, $z=0$.

20.6. $x^2+y^2=9$, $z=y$, $z=0$, $(y\geqslant 0)$.

20.7. $z=x^2+9y^2$, $z=3$.

20.8. $\dfrac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.

20.9. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{64}=-1$, $z=16$.

20.10. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$, $z=2$, $z=0$.

20.11. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y\sqrt{3},\ z=0,\ (y\geqslant 0)$.

20.12. $z=2x^2+8y^2,\ z=4$.

20.13. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$.

20.14. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1,\ z=12$.

20.15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1,\ z=3,\ z=0$.

20.16. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1,\ z=y\sqrt{3},\ z=0\ (y\geqslant 0)$.

20.17. $z=x^2+5y^2,\ z=5$.

20.18. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ z=0,\ z=4$.

20.19. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1,\ z=20$.

20.20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1,\ z=4,\ z=0$.

20.21. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1,\ z=\frac{y}{\sqrt{3}},\ z=0,\ (y\geqslant 0)$.

20.22. $z=4x^2+9y^2,\ z=6$.

20.23. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ z=0,\ z=3$.

20.24. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1,\ z=20$.

20.25. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{100}=1,\ z=5,\ z=0$.

20.26. $\frac{x^2}{27}+y^2=1,\ z=\frac{y}{\sqrt{3}},\ z=0\ (y\geqslant 0)$.

20.27. $z=2x^2+18y^2,\ z=6$.

20.28. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$.

20.29. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{64}=-1,\ z=16$.

20.30. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1,\ z=6,\ z=0$.

20.31. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{196}=1,\ z=7,\ z=0$.

Задача 21. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1 — 16 ось вращения Ox, в вариантах 17 — 31 ось вращения Oy.

21.1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0$.

21.2. $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0$.

21.3. $y=3\sin x,\ y=\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant \pi$.

21.4. $y=5\cos x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x\geqslant 0$.

21.5. $y=\sin^2 x,\ x=\pi/2,\ y=0$.

21.6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1$.

21.7. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1$.

21.8. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0$.

21.9. $y=2x-x^2,\ y=-x+2$.

21.10. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1$.

21.11. $y=x^2,\ y^2-x=0$.

21.12. $x^2+(y-2)^2=1$.

21.13. $y=1-x^2,\ x=0,\ x=\sqrt{y-2},\ x=1$.

21.14. $y=x^2,\ y=1,\ x=2$.

21.15. $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$.

21.16. $y=\sin(\pi x/2),\ y=x^2$.

21.17. $y=\arccos(x/3),\ y=\arccos x,\ y=0$.

21.18. $y=\arcsin(x/5),\ y=\arcsin x,\ y=\pi/2$.

21.19. $y=x^2,\ x=2,\ y=0$.

21.20. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1$.

21.21. $y=\sqrt{x-1},\ y=0,\ y=1,\ x=0{,}5$.

21.22. $y=\ln x,\ x=2,\ y=0$.

21.23. $y=(x-1)^2,\ y=1$.

21.24. $y^2=x-2,\ y=0,\ y=x^3,\ y=1$.

21.25. $y=x^3,\ y=x^2$.

21.26. $y=\arccos\frac{x}{5},\ y=\arccos\frac{x}{3},\ y=0$.

21.27. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

21.28. $y=x^2-2x+1$, $x=2$, $y=0$.

21.29. $y=x^3$, $y=x$.

21.30. $y=\arccos x$, $y=\arcsin x$, $x=0$.

21.31. $y=(x-1)^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Задача 22

Варианты 1 — 10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис. 2). Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2.

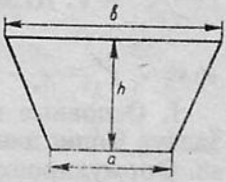

Рис. 2

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

22.1. $a=4{,}5$ м, $b=6{,}6$ м, $h=3{,}0$ м.

22.2. $a=4{,}8$ м, $b=7{,}2$ м, $h=3{,}0$ м.

22.3. $a=5{,}1$ м, $b=7{,}8$ м, $h=3{,}0$ м.

22.4. $a=5{,}4$ м, $b=8{,}4$ м, $h=3{,}0$ м.

22.5. $a=5{,}7$ м, $b=9{,}0$ м, $h=4{,}0$ м.

22.6. $a=6{,}0$ м, $b=9{,}6$ м, $h=4{,}0$ м

22.7. $a=6{,}3$ м, $b=10{,}2$ м, $h=4{,}0$м .

22.8. $a=6{,}6$ м, $b=10{,}8$ м, $h=4{,}0$ м.

22.9. $a=6{,}9$ м, $b=11{,}4$ м, $h=5{,}0$ м.

22.10. $a=7{,}2$ м, $b=12{,}0$ м, $h=5{,}0$ м.

Варианты 11 — 20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_з=6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2.

22.11. $m=7{,}0$ т, $H=200$ км.

22.12. $m=7{,}0$ т, $H=250$ км.

22.13. $m=6{,}0$ т, $H=300$ км.

22.14. $m=6{,}0$ т, $H=350$ км.

22.15. $m=5{,}0$ т, $H=400$ км.

22.16. $m=5{,}0$ т, $H=450$ км.

22.17. $m=4{,}0$ т, $H=500$ км.

22.18. $m=4{,}0$ т, $H=550$ км.

22.19. $m=3{,}0$ т, $H=600$ км.

22.20. $m=3{,}0$ т, $H=650$ км.

Варианты 21 — 31

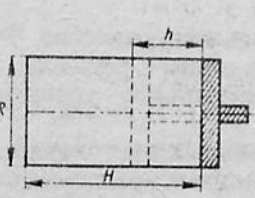

Рис. 3

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением 103, 3 кПа. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 3).

Указание. Уравнение состояния газа $pV=\text{const}$, где p — давление, V — объем.

16.11. $y''+6y'+8y=4e^{-2x}/(2+e^{2x})$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

16.12. $y''+9y=9/\sin 3x$, $y(\pi/6)=4$, $y'(\pi/6)=3\pi/2$.

16.13. $y''+9y=9/\cos 3x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

16.14. $y''-y'=e^{-x}/(2+e^{-x})$, $y(0)=\ln 27$, $y'(0)=\ln 9-1$.

16.15. $y''+4y=4\operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4)=3$, $y'(\pi/4)=2$.

16.16. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{3+e^{-x}}$, $y(0)=1+8\ln 2$, $y'(0)=14\ln 2$.

16.17. $y''-6y'+8y=4e^{2x}/(1+e^{-2x})$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

16.18. $y''+16y=16/\sin 4x$, $y(\pi/8)=3$, $y'(\pi/8)=2\pi$.

16.19. $y''+16y=16/\cos 4x$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

16.20. $y''-2y'=4e^{-2x}/(1+e^{-2x})$, $y(0)=\ln 4$, $y'(0)=\ln 4-2$.

16.21. $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}(x/2)$, $y(\pi)=2$, $y'(\pi)=1/2$.

16.22. $y''-3y'+2y=1/(2+e^{-x})$, $y(0)=1+3\ln 3$, $y'(0)=5\ln 3$.

16.23. $y''+3y'+2y=e^{-x}/(2+e^{x})$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

16.24. $y''+4y=4/\sin 2x$, $y(\pi/4)=2$, $y'(\pi/4)=\pi$.

16.25. $y''+4y=4/\cos 2x$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

16.26. $y''+y'=e^{x}/(2+e^{x})$, $y(0)=\ln 27$, $y'(0)=1-\ln 9$.

16.27. $y''+y=2\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2)=1$, $y'(\pi/2)=2$.

16.28. $y''-3y'+2y=1/(1+e^{-x})$, $y(0)=1+2\ln 2$, $y'(0)=3\ln 2$.

16.29. $y''-3y'+2y=e^{x}/(1+e^{-x})$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

16.30. $y''+y=1/\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $y'(\pi/2)=\pi/2$.

16.31. $y''+y=1/\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

VI. РЯДЫ

Теоретические вопросы

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
7. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.
12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
14. Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.
15. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.
16. Разложение по степеням x функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.

Теоретические упражнения

1. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Указание. Рассмотреть неравенства $0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

3. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|b_n|$ тоже сходится.

Указание. Доказать и использовать неравенство $|ab| \leqslant a^2 + b^2$.

4. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ тоже сходится.

5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Можно ли утверждать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$?

Рассмотреть пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right]$.

6. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на этом отрезке.

7. Может ли функциональный ряд на отрезке:
а) сходиться равномерно и не сходиться абсолютно,
б) сходиться абсолютно и не сходиться равномерно?
Рассмотреть примеры:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, отрезок $[a, b]$ произвольный;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, отрезок [0, 1].

8. Показать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}$ всюду непрерывна.

9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$. Можно ли его почленно дифференцировать в этом интервале?

10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0, то он сходится абсолютно $\forall x > x_0$.

Расчетные задания

Задача 1. Найти сумму ряда.

1.1. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2-14n+48}$. 1.2. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2-13n+40}$.

1.3. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2-12n+35}$. 1.4. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2-11n+28}$.

1.5. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2-10n+24}$. 1.6. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2-9n+18}$.

1.7. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2-8n+15}$. 1.8. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2-7n+10}$.

1.9. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2-6n+8}$. 1.10. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2-5n+4}$.

1.11. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2-4n+3}$. 1.12. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$.

1.13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2+4n+3}$. 1.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2+7n+10}$.

1.15. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2-14n+48}$. 1.16. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2-11n+28}$.

1.17. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2-12n+35}$. 1.18. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2-9n+18}$.

1.19. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2-10n+24}$. 1.20. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2-7n+10}$.

1.21. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{60}{n^2-8n+15}$. 1.22. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2-5n+4}$.

1.23. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}$. 1.24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2+n-2}$.

1.25. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2-4n+3}$. 1.26. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$.

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2+4n+3}$. 1.28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{36}{n^2+n-2}$.

1.29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{72}{n^2+6n+8}$.

1.30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{54}{n^2+5n+4}$.

1.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{72}{n^2+5n+4}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n^2}{n(n+1)(n+2)}$.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\sin n}{n-\ln n}$.

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^3+2}$.

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}$.

2.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^3-n}}$.

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

2.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{n^2+2}$.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

2.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3(2+\cos n\pi)}$.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{\sqrt[4]{n^3}}$.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}$.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^4+3}$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+\cos n\pi)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}$.

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$.

2.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$.

2.24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2-\cos n}{\sqrt{n^2-n}}$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg}^2 n}{n(n+1)}$.

2.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2+\cos n}{\sqrt[4]{n^6-1}}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n(n+2)}$.

2.28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2-\sin n}{\sqrt[3]{n^3-1}}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2}{n^3+n}$.

2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)$.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{n+1}$.

3.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

3.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2+3}{n^2-n}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n-1}}{n^3}}-1\right)$.

3.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\arcsin\frac{n+1}{n^3-2}$.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

3.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n}\operatorname{tg}\frac{n-1}{n^3-n}$.

3.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+2}\operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2-n+2}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^3+2}{n^3+1}$.

3.19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^3\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{n}$.

3.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$.

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

3.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$.

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2\pi}{2n+1}$.

3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$.

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

3.29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}$.

3.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

4.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^3 n!}{(2n)!}$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$.

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}$.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^2}{(n+2)!}$.

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(3n)!}$.

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$.

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$.

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

4.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n}$.

4.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

4.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$.

4.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n+3}$.

4.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

4.28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

4.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

4.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

4.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n n^3$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$.

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{5^n}$.

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n$.

5.14. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

5.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

5.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

5.18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$.

5.19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

5.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2}$.

5.21. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$.

5.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}$.

5.23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$.

5.24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

5.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

5.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

5.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

5.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

5.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 3^{n+2}}{5^n}$.

5.30. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

5.31. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

6.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (3n+1)}$.

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (2n+1)}$.

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2 (2n+1)}$.

6.4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2 (4n-7)}$.

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2 (5n+2)}$.

6.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2 (n\sqrt{5}+2)}$.

6.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2 (n\sqrt{3}+1)}$.

6.8. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln (n-3)}$.

6.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln (2n)}$.

6.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln (2n)}$.

6.11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}$.

6.12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln (n+1)}$.

6.13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln (3n+1)}$.

6.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}$.

6.15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2 (2n)}$.

6.16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2 (n+1)}$.

6.17. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n-1)}$.

6.18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}}$.

6.19. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

6.20. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

6.21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

6.22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}$.

6.23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

6.24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

6.25. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\ln^2(n/2)}$.

6.26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+5)\ln n}$.

6.27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

6.28. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$.

6.29. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2)\ln(n/2)}$.

6.30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

6.31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд.

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

7.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

7.4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n (\ln \ln n)}$.

7.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

7.6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

7.7. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

7.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

7.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$.

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n$.

7.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$.

7.12. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$.

7.13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

7.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

7.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}$.

7.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n}\cos(\pi/3n)}$.

7.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^n(n+1)}$.

7.18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$.

7.19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{2^n}$.

7.20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

7.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

7.22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)}$.

7.23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

7.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}$.

7.25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

7.26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^n\frac{\pi}{2n}$.

7.27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$.

7.28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

7.29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

7.30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

7.31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$.

Задача 8. Вычислить сумму ряда с точностью α.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}$, $\alpha=0{,}01$.

8.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha=0{,}01$.

8.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$, $\alpha=0{,}001$.

8.4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

8.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\alpha=0{,}01$.

8.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\alpha=0{,}0001$.

8.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$, $\alpha=0{,}1$.

8.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$, $\alpha=0{,}1$.

8.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $\alpha=0{,}001$.

8.10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$, $\alpha=0{,}0001$.

8.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\alpha=0{,}001$.

8.12. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, $\alpha=0{,}01$.

8.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^n}$, $\alpha=0{,}0001$.

8.14. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $\alpha=0{,}1$.

8.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\alpha=0{,}001$.

8.16. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}$, $\alpha=0{,}01$.

8.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n}$, $\alpha=0{,}00001$.

8.18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n)!n!}$, $\alpha=0{,}001$.

8.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

8.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha=0{,}0001$.

8.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!}$, $\alpha=0{,}00001$.

8.22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

8.23. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

8.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$, $\alpha=0{,}01$.

8.25. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)^n}$, $\alpha=0{,}001$.

8.26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}$, $\alpha=0{,}001$.

8.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$, $\alpha=0{,}01$.

8.28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2(n+3)}$, $\alpha=0{,}01$.

8.29. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2}$, $\alpha=0{,}001$.

8.30. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^3}$, $\alpha=0{,}01$.

8.31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha=0{,}001$.

Задача 9. Найти область сходимости ряда.

9.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^n+1}$.

9.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$.

9.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1)^{x+2}}$.

9.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$.

9.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$.

9.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{n^2\sin\frac{x^2+1}{n}}$.

9.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^{3x-x^2}}$.

9.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin 3^{-nx}$.

9.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

9.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\operatorname{arctg}2^{nx}$.

9.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{x^2+1}+4}$.

9.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}$.

9.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}+1}$.

9.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n e^{n(x^2-4x+3)+x\sqrt{n}}$.

9.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-nx}}$.

9.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\sin\frac{x^2+1}{n}}$.

9.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$.

9.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}$.

9.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\sqrt{n^3}+n)^{x+1}}$.

9.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin 3^{nx}$.

9.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+e^x)}$.

9.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\operatorname{arctg}2^{-nx}$.

9.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$.

9.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2}+x\sqrt{n}}$.

9.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}$.

9.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$.

9.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^{x^2+2}+3}$.

9.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}$.

9.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+e^x)(n^2+1)}$.

9.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(x\sqrt{n}-1)^2}$.

9.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}}$.

Задача 10. Найти область сходимости ряда.

10.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$.

10.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n$.

10.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

10.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n$.

10.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$.

10.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

10.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}(x+6)^n$.

10.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$.

10.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}$.

10.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

10.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

10.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}$.

10.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}$.

10.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

10.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n$.

10.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}$.

10.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}$.

10.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

10.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}(x-3)^n$.

10.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

10.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n$.

10.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}$.

10.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n$.

10.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}$.

10.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!}(x+4)^{2n+1}$.

10.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n}(x+2)^n$.

10.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3}(x-4)^{3n}$.

10.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}(x+1)^n$.

10.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

10.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2}(x-3)^n$.

10.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$.

Задача 11. Найти область сходимости ряда.

11.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}$.

11.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2}\sin^{3n} x$.

11.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}$.

11.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$.

11.5. $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x$.

11.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} 2^{\frac{n}{x-2}}$.

11.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}$.

11.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x)$.

11.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+e)}{n+e}$.

11.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$.

11.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\operatorname{tg}^{2n} x$.

11.12. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n}{\cos x}}$.

11.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}$.

11.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}\sin^4(3x)$.

11.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{\frac{n}{x-2}}$.

11.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$.

11.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x$.

11.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}$.

11.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2-2x+3)^n}$.

11.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x)$.

11.21. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \sin x}$.

11.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{2^n(n+1)}$.

11.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x$.

11.24. $\sum_{n=1}^{\infty} n 5^{\frac{n}{3-x}}$.

11.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2(x^2-4x+5)^n}$.

11.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x$.

11.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x-e)}{n-e}$.

11.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2x+2)^n}{2^n(n^2+2)}$.

11.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n(2x)$.

11.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}$.

11.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}$.

Задача 12. Найти сумму ряда.

12.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$.

12.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}$.

12.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}$.

12.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

12.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}$.

12.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^5)^{n-1}}{n}$.

12.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

12.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}$.

12.9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}$.

12.10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

12.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{nx^{n-1}}$.

12.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{n-1}}{n}$.

12.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$.

12.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^{5n}}$.

12.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n+1}$.

12.16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}$.

12.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{3n-3}}$.

12.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^4)^{n-1}}{n}$.

12.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+1)}$.

12.20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}$.

12.21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^3)^n}{n+1}$.

12.22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}$.

12.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^{5n-5}}$.

12.24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n+1}$.

12.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n(n+1)}$.

12.26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{4n}}$.

12.27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^5)^n}{n+1}$.

12.28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}$.

12.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}$.

12.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^3)^{n-1}}{n}$.

12.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{n-1} x}{n}$.

Задача 13. Найти сумму ряда.

13.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+5)x^{n-1}$.

13.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+5)x^{2n}$.

13.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n-1}$.

13.4. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{3n}$.

13.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)x^{n-1}$.

13.6. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}$.

13.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n-1}$.

13.8. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{5n}$.

13.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n-1}$.

13.10. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{6n}$.

13.11. $\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}$.

13.12. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{6n}$.

13.13. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+4)x^{n-2}$.

13.14. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{5n}$.

13.15. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+3)x^{n-2}$.

13.16. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{4n}$.

13.17. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)x^{n-2}$.

13.18. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{3n+3}$.

13.19. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+1)x^{n-2}$.

13.20. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n+2}$.

13.21. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}$.

13.22. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+1)x^{n-3}$.

13.23. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{3n}$.

13.24. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+2)x^{n-3}$.

13.25. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}$.

13.26. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+3)x^{n-3}$.

13.27. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{5n}$.

13.28. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+4)x^{n-3}$.

13.29. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{6n}$.

13.30. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+5)x^{n-3}$.

13.31. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n}$.

Задача 14. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

14.1. $9/(20-x-x^2)$.

14.2. $x^2/\sqrt{4-5x}$.

14.3. $\ln(1-x-6x^2)$.

14.4. $2x\cos^2(x/2)-x$.

14.5. $(\operatorname{sh}2x)/x-2$.

14.6. $7/(12+x-x^2)$.

14.7. $x/\sqrt[3]{27-2x}$.

14.8. $\ln(1+x-6x^2)$.

14.9. $(x-1)\sin 5x$.

14.10. $(\operatorname{ch}3x-1)/x^2$.

14.11. $6/(8+2x-x^2)$.

14.12. $1/\sqrt[4]{16-3x}$.

14.13. $\ln(1-x-12x^2)$.

14.14. $(3+e^{-x})^2$.

14.15. $(\arcsin x)/x-1$.

14.16. $7/(12-x-x^2)$.

14.17. $x^2\sqrt{4-3x}$.

14.18. $\ln(1+2x-8x^2)$.

14.19. $2x\sin^2(x/2)-x$.

14.20. $(x-1)\operatorname{sh}x$.

14.21. $5/(6+x-x^2)$.

14.22. $x\sqrt[3]{27-2x}$.

14.23. $\ln(1+x-12x^2)$.

14.24. $(\sin 3x)/x-\cos 3x$.

14.25. $(\operatorname{arctg}x)/x$.

14.26. $5/(6-x-x^2)$.

14.27. $\sqrt[4]{16-5x}$.

14.28. $\ln(1-x-20x^2)$.

14.29. $(2-e^x)^2$.

14.30. $(x-1)\operatorname{ch}x$.

14.31. $\dfrac{3}{2-x-x^2}$.

Задача 15. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

15.1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$.

15.2. $\int\limits_0^{0,1} \sin(100x^2)\,dx$.

15.3. $\int\limits_0^{1} \cos x^2\,dx$.

15.4. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

15.5. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$.

15.6. $\int\limits_0^{1} \dfrac{\ln(1+x/5)}{x}\,dx$.

15.7. $\int\limits_0^{1,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

15.8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx$.

15.9. $\int\limits_0^{0,2} \sin(25x^2)\,dx$.

15.10. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2)\,dx$.

15.11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

15.12. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$.

15.13. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}\,dx$.

15.14. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

15.15. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$.

15.16. $\int\limits_0^{0,4} \sin(5x/2)^2\,dx$.

15.17. $\int\limits_0^{0,2} \cos(25x^2)\,dx$.

15.18. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

15.19. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}\,dx$.

15.20. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}\,dx$.

15.21. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

15.22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}\,dx$.

15.23. $\int\limits_0^{0,5} \sin(4x^2)\,dx$.

15.24. $\int\limits_0^{0,4} \cos(5x/2)^2\,dx$.

15.25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

15.26. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

15.27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

15.28. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

15.29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}\,dx$.

15.30. $\int\limits_0^{1} \sin x^2\,dx$.

15.31. $\int\limits_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx$.

VII. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Определения двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.

2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.

3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.

4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).

5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).

6. Замена переменных в двойном интеграле.

7. Якобиан, его геометрический смысл.

8. Двойной интеграл в полярных координатах.

9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

10. Тройной интеграл в сферических координатах.

Теоретические упражнения

1. Пользуясь определением двойного интеграла, доказать, что $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} x^m y^n \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, если m и n — натуральные числа и, по меньшей мере, одно из них нечетно.

2. С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция.

3. Оценить интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},\quad x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2,$$

т. е. указать, между какими значениями заключена его величина.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, если область D — прямоугольник $\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, а $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

5. Доказать равенство $\iint\limits_D f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int\limits_c^d g(y)\,dy$, если область D — прямоугольник $\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$.

6. Доказать формулу Дирихле

$$\int\limits_0^a \mathrm{d}x\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^a \mathrm{d}y\int\limits_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad a>0.$$

7. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство

$$\int_0^a dy \int_0^y f(x)\,dx = \int_0^a (a-x)f(x)\,dx.$$

8. Какой из интегралов больше

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y, z)\,dz \text{ или } \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\,dz,$$

если $f(x, y, z) > 0$?

Расчетные задания

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1.1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f\,dx.$

1.2. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx.$

1.3. $\int_0^1 dy \int_0^y f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx.$

1.4. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f\,dx.$

1.5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_x^0 f\,dy.$

1.6. $\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_0^{\arccos y} f\,dx.$

1.7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{-y}} f\,dx.$

1.8. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f\,dx.$

1.9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\,dy.$

1.10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy.$

1.11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\,dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\,dy.$

1.12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\,dx.$

1.13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\,dx.$

1.14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\,dy.$

1.15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx.$

1.16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\,dx.$

1.17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx.$

1.18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\,dx.$

1.19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy.$

1.20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\,dx.$

1.21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx.$

1.22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\,dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy.$

1.23. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f\,dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f\,dy.$

1.24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f\,dx.$

1.25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f\,dy.$

1.26. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy.$

1.27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f\,dy.$

1.28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f\,dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy.$

1.29. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx.$

1.30. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f\,dy.$

1.31. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\,dy.$

Задача 2. Вычислить.

2.1. $\iint\limits_{D} (12x^2y^2 + 16x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.2. $\iint\limits_{D} (9x^2y^2 + 48x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.3. $\iint\limits_{D} (36x^2y^2 - 96x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.4. $\iint\limits_{D} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.5. $\iint\limits_D (27x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0).$

2.6. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2\ (x\geqslant 0).$

2.7. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.8. $\iint\limits_D (27x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.9. $\iint\limits_D (4xy+3x^2y^2)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.10. $\iint\limits_D (12xy+9x^2y^2)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.11. $\iint\limits_D (8xy+9x^2y^2)\,dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.12. $\iint\limits_D (24xy+18x^2y^2)\,dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.13. $\iint\limits_D (12xy+27x^2y^2)\,dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0).$

2.14. $\iint\limits_D (8xy+18x^2y^2)\,dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2\ (x\geqslant 0).$

2.15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}\,xy+\frac{9}{11}\,x^2y^2\right)dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.16. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}\,xy+9x^2y^2\right)dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.17. $\iint\limits_D (24xy-48x^3y^3)\,dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.18. $\iint\limits_D (6xy+24x^3y^3)\,dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.19. $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)\,dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.20. $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)\,dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.21. $\iint\limits_D (44xy+16x^3y^3)\,dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0).$

2.22. $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3\ (x\geqslant 0).$

2.23. $\iint\limits_D (xy-4x^3y^3)\,dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.24. $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dx\,dy,$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.26. $\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^4y^4)\,dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dx\,dy.$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.28. $\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^4y^4)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.29. $\iint\limits_D (54x^2y^2+150x^4y^4)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0).$

2.30. $\iint\limits_D (xy-9x^5y^5)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2\ (x\geqslant 0).$

2.31. $\iint\limits_D (54x^2y^2+150x^4y^4)\,dx\,dy;$

$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

Задача 3. Вычислить.

3.1. $\iint\limits_D ye^{xy/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4.$

3.2. $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}.$

3.3. $\iint\limits_D y\cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2.$

3.4. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: x=0,\ y=2,\ y=x.$

3.5. $\iint\limits_D y\sin xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2.$

3.6. $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: x=0,\ y=\sqrt{\pi/2},\ y=x/2.$

3.7. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=1/2,\ x=1.$

3.8. $\iint\limits_D 4y^2\sin xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$D: x=0,\ y=\sqrt{\pi/2},\ y=x.$

3.9. $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dx\,dy$;

$D: y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1.$

3.10. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/8}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2}.$

3.11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xy\,dx\,dy$;

$D: y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3.$

3.12. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

3.13. $\iint\limits_D ye^{xy/4}\,dx\,dy$;

$D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8.$

3.14. $\iint\limits_D 4y^2\sin 2xy\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

3.15. $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\,dx\,dy$;

$D: y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2.$

3.16. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/2}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x.$

3.17. $\iint\limits_D y\sin xy\,dx\,dy$;

$D: y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1.$

3.18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2}.$

3.19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}\,dx\,dy$;

$D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{2}.$

3.20. $\iint\limits_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\ y=\frac{2}{3}x.$

3.21. $\iint\limits_D y\cos xy\,dx\,dy$;

$D: y=\pi,\ y=3\pi,\ x=1/2,\ x=1.$

3.22. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/2}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=1,\ y=\frac{x}{2}.$

3.23. $\iint\limits_D y\sin 2xy\,dx\,dy$;

$D: y=\pi/2,\ y=3\pi/2,\ x=1/2,\ x=3.$

3.24. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x.$

3.25. $\iint_D 6ye^{xy/3}\,dx\,dy$;

$D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6.$

3.26. $\iint_D y^2 \sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

3.27. $\iint_D y\cos 2xy\,dx\,dy$;

$D: y=\pi/2,\ y=3\pi/2,\ x=1/2,\ x=2.$

3.28. $\iint_D y^2 e^{-xy/8}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=4,\ y=2x.$

3.29. $\iint_D 3y\sin xy\,dx\,dy$;

$D: y=\pi/2,\ y=3\pi,\ x=1,\ x=3.$

3.30. $\iint_D y^2\cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy$;

$D: x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

3.31. $\iint_D 12ye^{6xy}\,dx\,dy$;

$D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=1/6,\ x=1/3.$

Задача 4. Вычислить.

4.1. $\iiint_V 2y^2e^{xy}\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=0,\ y=1,\ y=x,\\ z=0,\ z=1.\end{cases}$

4.2. $\iiint_V x^2z\sin(xyz)\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=2,\ y=\pi,\ z=1,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$

4.3. $\iiint_V y^2\operatorname{ch}(2xy)\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=0,\ y=-2,\ y=4x,\\ z=0,\ z=2.\end{cases}$

4.4. $\iiint_V 8y^2ze^{2xyz}\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=-1,\ y=2,\ z=1,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$

4.5. $\iiint_V x^2\operatorname{sh}(3xy)\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=1,\ y=2x,\ y=0,\\ z=0,\ z=36.\end{cases}$

4.6. $\iiint_V y^2z\cos xyz\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=1,\ y=\pi,\ z=2,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$

4.7. $\iiint_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=0,\ y=-1,\ y=x/2,\\ z=0,\ z=-\pi^2.\end{cases}$

4.8. $\iiint_V x^2z\sin\frac{xyz}{4}\,dx\,dy\,dz$;

$V\begin{cases}x=1,\ y=2\pi,\ z=4,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$

4.9. $\iiint\limits_V y^2 e^{-xy}\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-2,\ y=4x, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

4.10. $\iiint\limits_V 2y^2 z e^{xyz}\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=1,\ z=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.11. $\iiint\limits_V y^2\,\mathrm{ch}(2xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=x, \\ z=0,\ z=8. \end{cases}$

4.12. $\iiint\limits_V x^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=2,\ y=1,\ z=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.13. $\iiint\limits_V y^2 e^{xy/2}\,dx\,dy\,dz.$

$V \begin{cases} x=0,\ y=2,\ y=2x, \\ z=0,\ z=-1. \end{cases}$

4.14. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\dfrac{xyz}{3}\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=3,\ y=1,\ z=2\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.15. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{2}\right)dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ y=x, \\ z=0,\ z=2\pi^2. \end{cases}$

4.16. $\iiint\limits_V 2x^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=-1,\ z=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.17. $\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=2x, \\ z=0,\ z=\pi^2. \end{cases}$

4.18. $\iiint\limits_V 2x^2 z\,\mathrm{sh}(2xyz)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=2,\ y=1/2,\ z=1/2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.19. $\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(2xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=-1,\ y=x,\ y=0, \\ z=0,\ z=8. \end{cases}$

4.20. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\dfrac{xyz}{2}\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=4,\ z=\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.21. $\iiint\limits_V y^2\,\mathrm{ch}(xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ y=x, \\ z=0,\ z=2. \end{cases}$

4.22. $\iiint\limits_V y^2 z\,\mathrm{ch}(xyz)\,dx\,dy\,dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=1,\ z=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.23. $\iiint\limits_V x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}xy\right)dx\,dy\,dz;$

4.24. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\dfrac{xyz}{9}\,dx\,dy\,dz;$

$V\begin{cases}x=2,\ y=x,\ y=0,\\ z=0,\ z=\pi.\end{cases}$

$V\begin{cases}x=9,\ y=1,\ z=2\pi,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$

4.25. $\iiint\limits_V x^2 \sin(\pi xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V: x=1,\ y=2x,\ y=0,$
$z=0,\ z=4\pi.$

4.26. $\iiint\limits_V y^2 z\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{xyz}{2}\right) dx\,dy\,dz;$

$V: x=2,\ y=-1,\ z=2,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

4.27. $\iiint\limits_V y^2\ \mathrm{ch}(3xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V: x=0,\ y=2,\ y=6x,$
$z=0,\ z=-3.$

4.28. $\iiint\limits_V 2y^2 z\ \mathrm{ch}(2xyz)\,dx\,dy\,dz;$

$V: x=\dfrac{1}{2},\ y=2,\ z=-1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

4.29. $\iiint\limits_V x^2 \sin(4\pi xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V: x=1,\ y=x/2,\ y=0,$
$z=0,\ z=8\pi.$

4.30. $\iiint\limits_V 8y^2 z e^{-xyz}\,dx\,dy\,dz;$

$V: x=2,\ y=-1,\ z=2,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

4.31. $\iiint\limits_V x^2\ \mathrm{sh}(xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V: x=2,\ y=x/2,\ y=0,\ z=0,\ z=1.$

Задача 5. Вычислить.

5.1. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=10x,\ y=0,\ x=1,$
$z=xy,\ z=0.$

5.2. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}\right)^4};$

$V: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.3. $\iiint\limits_V 15(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=x+y,\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.4. $\iiint\limits_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=5(x^2+y^2),\ z=0.$

5.5. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=9x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.6. $\iiint\limits_V (27+54y^3)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.7. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=15x,\ y=0,\ x=1,$

$z=xy,\ z=0.$

5.8. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^5};$

$V: \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,$

$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.9. $\iiint\limits_V (3x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=10y,\ x+y=1,$

$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.10. $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=x^2+3y^2,\ z=0,$

$y=x,\ y=0,\ x=1.$

5.11. $\iiint\limits_V (4+8z^3)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.12. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=36x,\ y=0,\ x=1,$

$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.13. $\iiint\limits_V 21xz\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=2,$

$z=xy,\ z=0.$

5.14. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^6};$

$V: x/10+y/8+z/3=1,$

$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.15. $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=10x,\ x+y=1,$

$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.16. $\iiint\limits_V (60y+90z)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=x^2+y^2,\ z=0.$

5.17. $\iiint\limits_V \left(\dfrac{10}{3}x+\dfrac{5}{3}\right)dx\,dy\,dz;$

$V: y=9x,\ y=0,\ x=1,$

$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.18. $\iiint\limits_V (9+18z)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=4x,\ y=0,\ x=1,$

$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.19. $\iiint\limits_V 3y^2\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=2x,\ y=0,\ x=2,$

$z=xy,\ z=0.$

5.20. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}\right)^4};$

$V: x/2+y/4+z/6=1,$

$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.21. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz;$

5.22. $\iiint\limits_V (8y+12z)\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=10(x+3y),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=3x^2+2y^2,\ z=0.$

5.23. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.24. $\iiint\limits_V (x+y)\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=30x^2+60y^2,\ z=0.$

5.25. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5};$

$V: x/6+y/4+z/16=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.26. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

5.27. $\iiint\limits_V y^2\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=10(3x+y),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.28. $\iiint\limits_V \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dx\,dy\,dz;$

$V: y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=x^2+15y^2,\ z=0.$

5.29. $\iiint\limits_V (x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz;$

$V: z=20(2x+y),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.30. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)^6};$

$V: x/8+y/3+z/5=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.31. $\iiint\limits_V x^2z\,dx\,dy\,dz;$

$V: y=3x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

6.1. $y=3/x,\ y=4e^x,\ y=3,\ y=4.$

6.2. $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2}.$

6.3. $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ (y\leqslant 0).$

6.4. $x=8-y^2,\ x=-2y.$

6.5. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^x,\ y=3,\ y=8.$

6.6. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{1}{2x},\ x=16.$

6.7. $x=5-y^2,\ x=-4y.$

6.8. $x^2+y^2=12,\ -\sqrt{6}\,y=x^2\ (y\leqslant 0).$

6.9. $y=\sqrt{12-x^2},\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\ x=0\ (x\geqslant 0).$

6.10. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=9.$

6.11. $y=\sqrt{24-x^2},\ 2\sqrt{3}\,y=x^2,\ x=0\ (x\geqslant 0).$

6.12. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0\ (x\geqslant 0)$.

6.13. $y=20-x^2,\ y=-8x$.

6.14. $y=\sqrt{18-x^2},\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$.

6.15. $y=32-x^2,\ y=-4x$.

6.16. $y=2/x,\ y=5e^x,\ y=2,\ y=5$.

6.17. $x^2+y^2=36,\ 3\sqrt{2}y=x^2\ (y\geqslant 0)$.

6.18. $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4$.

6.19. $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2},\ x=0\ (x\geqslant 0)$.

6.20. $y=25/4-x^2,\ y=x-5/2$.

6.21. $y=\sqrt{x},\ y=1/x,\ x=16$.

6.22. $y=2/x,\ y=7e^x,\ y=2,\ y=7$.

6.23. $x=27-y^2,\ x=-6y$.

6.24. $x=\sqrt{72-y^2},\ 6x=y^2,\ y=0\ (y\geqslant 0)$.

6.25. $y=\sqrt{6-x^2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$.

6.26. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=4$.

6.27. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0\ (x\leqslant 0)$.

6.28. $y=\dfrac{1}{x},\ y=6e^x,\ y=1,\ y=6$.

6.29. $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=9$.

6.30. $y=11-x^2,\ y=-10x$.

6.31. $x^2+y^2=12,\ x\sqrt{6}=y^2\ (x\geqslant 0)$.

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

7.1. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

7.2. $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x/\sqrt{3}$.

7.3. $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

7.4. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x$.

7.5. $y^2-8y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

7.6. $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x$.

7.7. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0$.

7.8. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-10x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\sqrt{3}x$.

7.9. $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0$.

7.10. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

7.11. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x,\ x=0$.

7.12. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

7.13. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x,\ x=0$.

7.14. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

7.15. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ x=0.$

7.16. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

7.17. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.18. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

7.19. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.20. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x.$

7.21. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

7.22. $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

7.23. $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

7.24. $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

7.25. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

7.26. $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.27. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x,\ x=0.$

7.28. $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.29. $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ x=0.$

7.30. $x^2-6x+y^2=0,$
$x^2-10x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.31. $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ x=0.$

Задача 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

8.1. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geqslant 0);$
$\mu=7x^2+y.$

8.2. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

8.3. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geqslant 0);$
$\mu=7x^2/2+5y.$

8.4. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$

8.5. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\geqslant 0);$
$\mu=7x^2/8+2y.$

8.6. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

8.7. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ (y\geqslant 0);$
$\mu=7x^2/2+6y.$

8.8. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);$
$\mu=(2x-3y)/(x^2+y^2).$

8.9. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geqslant 0);$
$\mu=x+3y^2.$

8.10. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);$
$\mu=(x-y)/(x^2+y^2).$

8.11. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=x\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=3x+6y^2$.

8.12. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(2y-x)/(x^2+y^2)$.

8.13. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=2x+3y^2$.

8.14. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(2y-3x)/(x^2+y^2)$.

8.15. $D: x=\dfrac{1}{2},\ y=0,\ y^2=8x\ (y\geqslant 0)$,
$\mu=7x+3y^2$.

8.16. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(2y-5x)/(x^2+y^2)$.

8.17. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=7x^2+2y$.

8.18. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(x+3y)/(x^2+y^2)$.

8.19. $D: x=2,\ y^2=2x,\ y=0\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=7x^2/4+y/2$.

8.20. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(x+2y)/(x^2+y^2)$.

8.21. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=7x^2/4+y$.

8.22. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0)$;
$\mu=(2x-y)/(x^2+y^2)$.

8.23. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=7x^2/2+8y$.

8.24. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0)$;
$\mu=(x-4y)/(x^2+y^2)$.

8.25. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=6x+3y^2$.

8.26. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0)$;
$\mu=(3x-y)/(x^2+y^2)$.

8.27. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=4x+6y^2$.

8.28. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(y-4x)/(x^2+y^2)$.

8.29. $D: x=1/2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=4x+9y^2$.

8.30. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$;
$\mu=(y-2x)/(x^2+y^2)$.

8.31. $D: x=1/4,\ y=0,\ y^2=16x\ (y\geqslant 0)$;
$\mu=16x+9y^2/2$.

Задача 9. Пластинка D задана неравенствами, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

9.1. $D: x^2+y^2/4\leqslant 1$;
$\mu=y^2$.

9.2. $D: 1\leqslant x^2/9+y^2/4\leqslant 2$.
$y\geqslant 0,\ y\leqslant (2/3)\ x$;
$\mu=y/x$.

9.3. $D: x^2/9+y^2/25\leqslant 1$,
$y\geqslant 0$;
$\mu=x^2y$.

9.4. $D: x^2/9+y^2/25\leqslant 1,\ y\geqslant 0$;
$\mu=7x^2y/18$.

9.5. $D: 1\leqslant x^2/4+y^2\leqslant 4$,
$y\geqslant 0,\ y\leqslant x/2$;
$\mu=8y/x^3$.

9.6. $D: x^2/9+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0$;
$\mu=7xy^6$.

9.7. $D: x^2/4+y^2\leqslant 1$;
$\mu=4y^2$.

9.8. $D: 1\leqslant x^2/4+y^2/9\leqslant 4$,
$x\geqslant 0,\ y\geqslant 3x/2$;
$\mu=x/y$.

9.9. $D: 1\leqslant x^2/16+y^2/4\leqslant 4$,
$x\geqslant 0,\ y\geqslant x/2$,
$\mu=x/y$.

9.10. $D: x^2/4+y^2/9\leqslant 1$,
$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$;
$\mu=x^3y$.

9.11. $D: x^2/4+y^2 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 6x^3y^3.$

9.12. $D: 1 \leqslant x^2/4+y^2 \leqslant 25,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant x/2;$
$\mu = x/y^3.$

9.13. $D: x^2/9+y^2/4 \leqslant 1;$
$\mu = x^2y^2.$

9.14. $D: x^2/16+y^2 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 5xy^7.$

9.15. $D: x^2/4+y^2 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 30x^3y^7.$

9.16. $D: 1 \leqslant x^2/9+y^2/4 \leqslant 3,$
$y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{2}{3}x;$
$\mu = y/x.$

9.17. $D: x^2+y^2/25 \leqslant 1,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 7x^4y.$

9.18. $D: x^2+y^2/9 \leqslant 1,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 35x^4y^3.$

9.19. $D: x^2/4+y^2/9 \leqslant 1;$
$\mu = x^2.$

9.20. $D: 1 \leqslant x^2+y^2/16 \leqslant 9,$
$y \geqslant 0,\ y \leqslant 4x;$
$\mu = y/x^3.$

9.21. $D: x^2/9+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0;$
$\mu = 11xy^8.$

9.22. $D: 1 \leqslant x^2/4+y^2/16 \leqslant 5,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 2x;$
$\mu = x/y.$

9.23. $D: 1 \leqslant x^2/9+y^2/4 \leqslant 5,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 2x/3;$
$\mu = x/y.$

9.24. $D: x^2/4+y^2/9 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$
$\mu = x^5y.$

9.25. $D: x^2/4+y^2/25 \leqslant 1;$
$\mu = x^4.$

9.26. $D: x^2+y^2/4 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 15x^5y^3.$

9.27. $D: 1 \leqslant x^2/4+y^2/9 \leqslant 36,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant \frac{3}{2}x;$
$\mu = 9x/y^3.$

9.28. $D: x^2/100+y^2 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,$
$\mu = 6xy^9.$

9.29. $D: x^2/16+y^2 \leqslant 1,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$
$\mu = 105x^3y^9.$

9.30. $D: 1 \leqslant x^2/9+y^2/16 \leqslant 2,$
$y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{4}{3}x;$
$\mu = 27y/x^5.$

9.31. $D: 1 \leqslant x^2/16+y^2 \leqslant 3,$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant x/4;$
$\mu = x/y^5.$

Задача 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

10.1. $y = 16\sqrt{2x},\ y = \sqrt{2x},$
$z = 0,\ x+z = 2.$

10.2. $y = 5\sqrt{x},\ y = 5x/3,$
$z = 0,\ z = 5+5\sqrt{x}/3.$

10.3. $x^2+y^2 = 2,\ y = \sqrt{x},\ y = 0,$
$z = 0,\ z = 15x.$

10.4. $x+y = 2,\ y = \sqrt{x},$
$z = 12y,\ z = 0.$

10.5. $x = 20\sqrt{2y},\ x = 5\sqrt{2y},$
$z = 0,\ z+y = 1/2.$

10.6. $x = 5\sqrt{y}/2,\ x = 5y/6,$
$z = 0,\ z = \frac{5}{6}(3+\sqrt{y}).$

10.7. $x^2+y^2 = 2,\ x = \sqrt{y},\ x = 0,$
$z = 0,\ z = 30y.$

10.8. $x+y = 2,\ x = \sqrt{y},$
$z = 12x/5,\ z = 0.$

10.9. $y=17\sqrt{2x}$, $y=2\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=1/2$.

10.10. $y=5\sqrt{x}/3$, $y=5x/9$, $z=0$, $z=5(3+\sqrt{x})/9$.

10.11. $x^2+y^2=8$, $y=\sqrt{2x}$, $y=0$, $z=0$, $z=15x/11$.

10.12. $x+y=4$, $y=\sqrt{2x}$, $z=3y$, $z=0$.

10.13. $x=\frac{5}{6}\sqrt{y}$, $x=\frac{5}{18}y$, $z=0$, $z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{y})$.

10.14. $x=19\sqrt{2y}$, $x=4\sqrt{2y}$, $z=0$, $z+y=2$.

10.15. $x^2+y^2=8$, $x=\sqrt{2y}$, $x=0$, $z=30y/11$, $z=0$.

10.16. $x+y=4$, $x=\sqrt{2y}$, $z=3x/5$, $z=0$.

10.17. $y=6\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{3x}$, $z=0$, $x+z=3$.

10.18. $y=\frac{5}{6}\sqrt{x}$, $y=\frac{5}{18}x$, $z=0$, $z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{x})$.

10.19. $x^2+y^2=18$, $y=\sqrt{3x}$, $y=0$, $z=0$, $z=5x/11$.

10.20. $x+y=6$, $y=\sqrt{3x}$, $z=4y$, $z=0$.

10.21. $x=7\sqrt{3y}$, $x=2\sqrt{3y}$, $z=0$, $z+y=3$.

10.22. $x=5\sqrt{y}/3$, $x=5y/9$, $z=0$, $z=5(3+\sqrt{y})/9$.

10.23. $x^2+y^2=18$, $x=\sqrt{3y}$, $x=0$, $z=0$, $z=10y/11$.

10.24. $x+y=6$, $x=\sqrt{3y}$, $z=4x/5$, $z=0$.

10.25. $y=\sqrt{15x}$, $y=\sqrt{15}x$, $z=0$, $z=\sqrt{15}(1+\sqrt{x})$.

10.26. $x^2+y^2=50$, $y=\sqrt{5x}$, $y=0$, $z=0$, $z=3x/11$.

10.27. $x+y=8$, $y=\sqrt{4x}$, $z=3y$, $z=0$.

10.28. $x=16\sqrt{2y}$, $x=\sqrt{2y}$, $z+y=2$, $z=0$.

10.29. $x=15\sqrt{y}$, $x=15y$, $z=0$, $z=15(1+\sqrt{y})$.

10.30. $x^2+y^2=50$, $x=\sqrt{5y}$, $x=0$, $z=0$, $z=6y/11$.

10.31. $x=17\sqrt{2y}$, $x=2\sqrt{2y}$, $z=0$, $z+y=1/2$.

Задача 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

11.1. $x^2+y^2=2y$, $z=5/4-x^2$, $z=0$.

11.2. $x^2+y^2=y$, $x^2+y^2=4y$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

11.3. $x^2+y^2=8\sqrt{2}x$, $z=x^2+y^2-64$, $z=0$ $(z\geqslant 0)$.

11.4. $x^2+y^2+4x=0$, $z=8-y^2$, $z=0$.

11.5. $x^2+y^2=6x,\ x^2+y^2=9x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ (y\leqslant 0).$

11.6. $x^2+y^2=6\sqrt{2}\,y,$
$z=x^2+y^2-36,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.7. $x^2+y^2=2y,$
$z=\frac{9}{4}-x^2,\ z=0.$

11.8. $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

11.9. $x^2+y^2+2\sqrt{2}\,y=0,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.10. $x^2+y^2=4x,$
$z=10-y^2,\ z=0.$

11.11. $x^2+y^2=7x,\ x^2+y^2=10x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ (y\leqslant 0).$

11.12. $x^2+y^2=8\sqrt{2}\,y,$
$z=x^2+y^2-64,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.13. $x^2+y^2=2y,$
$z=\frac{13}{4}-x^2,\ z=0.$

11.14. $x^2+y^2=3y,\ x^2+y^2=6y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

11.15. $x^2+y^2=6\sqrt{2}\,x,$
$z=x^2+y^2-36,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.16. $x^2+y^2=2\sqrt{2}\,y,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.17. $x^2+y^2=4x,$
$z=12-y^2,\ z=0.$

11.18. $x^2+y^2=8x,\ x^2+y^2=11x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ (y\leqslant 0).$

11.19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}\,x,$
$z=x^2+y^2-16,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.20. $x^2+y^2=4y,$
$z=4-x^2,\ z=0.$

11.21. $x^2+y^2=4y,\ x^2+y^2=7y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

11.22. $x^2+y^2=4\sqrt{2}\,y,$
$z=x^2+y^2=16,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.23. $x^2+y^2+2x=0,$
$z=17/4-y^2,\ z=0,$

11.24. $x^2+y^2=9x,\ x^2+y^2=12x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ (y\geqslant 0).$

11.25. $x^2+y^2+2\sqrt{2}\,x=0,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.26. $x^2+y^2=4y,$
$z=6-x^2,\ z=0.$

11.27. $x^2+y^2=10x,\ x^2+y^2=13x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ (y\geqslant 0).$

11.28. $x^2+y^2=2\sqrt{2}\,x,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ (z\geqslant 0).$

11.29. $x^2+y^2=2x$,
$z=21/4-y^2$, $z=0$.

11.30. $x^2+y^2=5y$, $x^2+y^2=8y$,
$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

11.31. $x^2+y^2+2x=0$,
$z=25/4-y^2$, $z=0$.

Задача 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

12.1. $y=5x^2+2$, $y=7$,
$z=3y^2-7x^2-2$,
$z=3y^2-7x^2-5$.

12.2. $y=5x^2-2$, $y=-4x^2+7$,
$z=4+9x^2+5y^2$,
$z=-1+9x^2+5y^2$.

12.3. $x=-5y^2+2$, $x=-3$,
$z=3x^2+y^2+1$,
$z=3x^2+y^2-5$.

12.4. $x=2y^2-3$, $x=-7y^2+6$,
$z=1+\sqrt{x^2+16y^2}$,
$z=-3+\sqrt{x^2+16y^2}$.

12.5. $y=-6x^2+8$, $y=2$,
$z=x-x^2-y^2-1$,
$z=x-x^2-y^2-5$.

12.6. $y=5x^2-1$, $y=-3x^2+1$,
$z=-2+\sqrt{3x^2+y^2}$,
$z=-5+\sqrt{3x^2+y^2}$.

12.7. $x=5y^2-9$, $x=-4$,
$z=x^2+4x-y^2-4$,
$z=x^2+4x-y^2+2$.

12.8. $y=6x^2-1$, $y=5$,
$z=2x^2+x-y^2$,
$z=2x^2+x-y^2+4$.

12.9. $x=5y^2-1$, $x=-3y^2+1$,
$z=2-\sqrt{x^2+6y^2}$,
$z=-1-\sqrt{x^2+6y^2}$.

12.10. $x=-3y^2+7$, $x=4$,
$z=2+\sqrt{6x^2+y^2}$,
$z=3+\sqrt{6x^2+y^2}$.

12.11. $y=-5x^2+3$, $y=-2$,
$y=2x^2-3y-6y^2-1$,
$z=2x^2-3y-6y^2+2$.

12.12. $y=x^2-5$, $y=-x^2+3$,
$z=4+\sqrt{5x^2+8y^2}$,
$z=1+\sqrt{5x^2+8y^2}$.

12.13. $x=3y^2-5$, $x=-2$,
$z=2-\sqrt{x^2+16y^2}$,
$z=8-\sqrt{x^2+16y^2}$.

12.14. $x=y^2-2$, $x=-4y^2+3$,
$z=\sqrt{16-x^2-y^2}+2$,
$z=\sqrt{16-x^2-y^2}-1$.

12.15. $y=2x^2-1$, $y=1$,
$z=x^2-5y^2-3$,
$z=x^2-5y^2-6$.

12.16. $y=x^2-2$, $y=-4x^2+3$,
$z=2+\sqrt{x^2+y^2}$,
$z=-1+\sqrt{x^2+y^2}$.

12.17. $x=-4y^2+1$, $x=-3$,
$z=x^2-7y^2-1$,
$z=x^2-7y^2+2$.

12.18. $x=7y^2-6$, $x=-2y^2+3$,
$z=3+5x^2-8y^2$,
$z=-2+5x^2-8y^2$.

12.19. $y=1-2x^2$, $y=-1$,
$z=x^2+2y+y^2-2$,
$z=x^2+2y+y^2+1$.

12.20. $y=x^2-7$, $y=-8x^2+2$,
$z=3-12y^2+5x^2$,
$z=-2-12y^2+5x^2$.

12.21. $x=2y^2+3,\ x=5,$
$z=1+\sqrt{9x^2+4y^2},$
$z=4+\sqrt{9x^2+4y^2}.$

12.22. $y=3x^2+4,\ y=7,$
$z=5-\sqrt{2x^2+3y^2},$
$z=1-\sqrt{2x^2+3y^2}.$

12.23. $x=5y^2-2,\ x=-4y^2+7,$
$z=4-\sqrt{2x^2+3y^2},$
$z=-1-\sqrt{2x^2+3y^2}.$

12.24. $x=-2y^2+5,\ x=3,$
$z=5-\sqrt{x^2+25y^2},$
$z=2-\sqrt{x^2+25y^2}.$

12.25. $y=-3x^2+5,\ y=2,$
$x=3+\sqrt{5x^2+y^2},$
$z=-1+\sqrt{5x^2+y^2}.$

12.26. $y=3x^2-5,\ y=-6x^2+4,$
$z=2+10x^2-y^2,$
$z=-2+10x^2-y^2.$

12.27. $x=4y^2+2,\ x=6,$
$z=x^2+4y^2+y+1,$
$z=x^2+4y^2+y+4.$

12.28. $x=3y^2-2,\ x=-4y^2+5,$
$z=4-7x^2-9y^2,$
$z=1-7x^2-9y^2.$

12.29. $y=2x^2-5,\ y=-3,$
$z=2+\sqrt{x^2+4y^2},$
$z=-1+\sqrt{x^2+4y^2}.$

12.30. $y=2x^2-3,\ y=-7x^2+6,$
$z=1-5x^2-6y^2,$
$z=-3-5x^2-6y^2.$

12.31. $y=-2x^2+7,\ y=5,$
$z=1-2x^2+3y^2,$
$z=4-2x^2+3y^2.$

Задача 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

13.1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2},$
$9z/2=x^2+y^2.$

13.2. $z=15\sqrt{x^2+y^2}/2,$
$z=17/2-x^2-y^2.$

13.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2},$
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/255}.$

13.4. $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=1,$
$x^2+y^2=60$
(внутри цилиндра).

13.5. $z=\sqrt{\dfrac{16}{9}-x^2-y^2},$
$2z=x^2+y^2.$

13.6. $z=3\sqrt{x^2+y^2},$
$z=10-x^2-y^2.$

13.7. $z=\sqrt{25-x^2-y^2},$
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/99}.$

13.8. $z=\sqrt{100-x^2-y^2},\ z=6,$
$x^2+y^2=51$
(внутри цилиндра).

13.9. $z=21\sqrt{x^2+y^2}/2,$
$z=23/2-x^2-y^2.$

13.10. $z=\sqrt{16-x^2-y^2},$
$6z=x^2+y^2.$

13.11. $z=\sqrt{9-x^2-y^2},$
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/80}.$

13.12. $z=\sqrt{81-x^2-y^2},\ z=5,$
$x^2+y^2=45$
(внутри цилиндра).

13.13. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,
$3z/2=x^2+y^2$.

13.14. $x=6\sqrt{x^2+y^2}$,
$z=16-x^2-y^2$.

13.15. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$,
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/63}$.

13.16. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $z=4$,
$x^2+y^2=39$ (внутри цилиндра).

13.17. $z=\sqrt{144-x^2-y^2}$,
$18z=x^2+y^2$.

13.18. $z=3\sqrt{x^2+y^2}/2$,
$z=5/2-x^2-y^2$.

13.19. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$,
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/35}$.

13.20. $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$, $z=3$,
$x^2+y^2=33$ (внутри цилиндра).

13.21. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$,
$9z=x^2+y^2$.

13.22. $z=9\sqrt{x^2+y^2}$,
$z=22-x^2-y^2$.

13.23. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$,
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/15}$.

13.24. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=2$,
$x^2+y^2=27$ (внутри цилиндра).

13.25. $z=\sqrt{4/9-x^2-y^2}$,
$z=x^2+y^2$.

13.26. $z=12\sqrt{x^2+y^2}$,
$z=28-x^2-y^2$.

13.27. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$,
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/8}$.

13.28. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$, $z=1$,
$x^2+y^2=21$ (внутри цилиндра).

13.29. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$,
$12z=x^2+y^2$.

13.30. $z=9\sqrt{x^2+y^2}/2$,
$z=11/2-x^2-y^2$.

13.31. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$,
$z=\sqrt{(x^2+y^2)/3}$.

Задача 14. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

14.1. $z=2-12(x^2+y^2)$,
$z=24x+2$.

14.2. $z=10[(x-1)^2+y^2]+1$,
$z=21-20x$.

14.3. $z=8(x^2+y^2)+3$,
$z=16x+3$.

14.4. $z=2-20[(x+1)^2+y^2]$,
$z=-40x-38$.

14.5. $z=4-14(x^2+y^2)$,
$z=4-28x$.

14.6. $z=28[(x+1)^2+y^2]+3$,
$z=56x+59$.

14.7. $z=32(x^2+y^2)+3$,
$z=3-64x$.

14.8. $z=4-6[(x-1)^2+y^2]$,
$z=12x-8$.

14.9. $z=2-4(x^2+y^2)$,
$z=8x+2$.

14.10. $z=22[(x-1)^2+y^2]+3$,
$z=47-44x$.

14.11. $z=24(x^2+y^2)+1$,
$z=48x+1$.

14.12. $z=2-18[(x+1)^2+y^2]$,
$z=-36x-34$.

14.13. $z=-16(x^2+y^2)-1$,
$z=-32x-1$.

14.14. $z=30[(x+1)^2+y^2]+1$,
$z=60x+61$.

14.15. $z=26(x^2+y^2)-2,$
$z=-52x-2.$

14.16. $z=-2[(x-1)^2+y^2]-1,$
$z=4x-5.$

14.17. $z=-2(x^2+y^2)-1,$
$z=4y-1.$

14.18. $z=26[(x-1)^2+y^2]-2,$
$z=50-52x.$

14.19. $z=30(x^2+y^2)+1,$
$z=60y+1.$

14.20. $z=-16[(x+1)^2+y^2]-1,$
$z=-32x-33.$

14.21. $z=2-18(x^2+y^2),$
$z=2-36y.$

14.22. $x=24[(x+1)^2+y^2]+1,$
$z=48x+49.$

14.23. $z=22(x^2+y^2)+3,$
$z=3-44y.$

14.24. $z=2-4[(x-1)^2+y^2],$
$z=8x-6.$

14.25. $z=4-6(x^2+y^2),$
$z=12y+4.$

14.26. $z=32[(x-1)^2+y^2]+3,$
$z=67-64x.$

14.27. $z=28(x^2+y^2)+3,$
$z=56y+3.$

14.28. $z=4-14[(x+1)^2+y^2],$
$z=-28x-24.$

14.29. $z=2-20(x^2+y^2),$
$z=2-40y.$

14.30. $z=8[(x+1)^2+y^2]+3,$
$z=16x+19.$

14.31. $z=10(x^2+y^2)+1,$
$z=1-20y.$

Задача 15. Найти объем тела, заданного неравенствами.

15.1. $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 49,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}\leqslant z\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$-x\leqslant y\leqslant 0.$

15.2. $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 64,$
$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}\leqslant z\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$-\sqrt{3}\,x\leqslant y\leqslant 0.$

15.3. $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 64,$
$z\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -x/\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 0.$

15.4. $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 36,$
$z\geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ 0\leqslant y\leqslant +x/\sqrt{3}.$

15.5. $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 36,$
$z\geqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ -\sqrt{3}\,x\leqslant y\leqslant\sqrt{3}\,x.$

15.6. $25\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 100,$
$z\leqslant -\sqrt{(x^2+y^2)/99},\ \sqrt{3}\,x\leqslant y\leqslant -\sqrt{3}\,x.$

15.7. $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 49,$
$0\leqslant z\leqslant\sqrt{(x^2+y^2)/24},$
$y\leqslant -x/\sqrt{3},\ y\leqslant -\sqrt{3}\,x.$

15.8. $25\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 121,$
$-\sqrt{(x^2+y^2)/24}\leqslant z\leqslant 0,$
$y\geqslant -x\sqrt{3},\ y\geqslant -\sqrt{3}\,x.$

15.9. $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 64,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}\leqslant z\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}.$
$x\leqslant y\leqslant 0.$

15.10. $16\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 100,$
$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}\leqslant z\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$\sqrt{3}\,x\leqslant y\leqslant 0.$

15.11. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,$

$$z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\ -\sqrt{3}\,x \leqslant y \leqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

15.12. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,$

$$z \geqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}},\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}\,x.$$

15.13. $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 49,$

$$z \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}},\ y \leqslant 0,\ y \leqslant \sqrt{3}\,x.$$

15.14. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 121,$

$$z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \sqrt{3}\,x,\ y \geqslant 0.$$

15.15. $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,$

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}},$$

$$y \leqslant \sqrt{3}\,x,\ y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

15.16. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,$

$$-\sqrt{(x^2+y^2)/24} \leqslant z \leqslant 0,$$

$$y \geqslant \sqrt{3}\,x,\ y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

15.17. $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81,$

$$-\sqrt{(x^2+y^2)/3} \leqslant z \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)/35},$$

$$0 \leqslant y \leqslant -x.$$

15.18. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,$

$$-\sqrt{(x^2+y^2)/3} \leqslant z \leqslant -\sqrt{(x^2+y^2)/15},$$

$$0 \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x.$$

15.19. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,$

$$z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\ \sqrt{3}\,x \leqslant y \leqslant x/\sqrt{3}.$$

15.20. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,$

$$z \geqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}},\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\,x.$$

15.21. $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,$

$$z \geqslant \sqrt{(x^2+y^2)/99},\ y \leqslant x/\sqrt{3},\ y \leqslant -x/\sqrt{3}.$$

15.22. $49 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,$

$$z \leqslant -\sqrt{(x^2+y^2)/99},\ y \geqslant x/\sqrt{3},\ y \geqslant -x/\sqrt{3}.$$

15.23. $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81,$

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)/24},$$

$$y \leqslant 0,\ y \leqslant x/\sqrt{3}.$$

15.24. $49 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 169,$

$$-\sqrt{(x^2+y^2)/24} \leqslant z \leqslant 0,$$

$$y \geqslant 0, y \geqslant x/\sqrt{3}.$$

15.25. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$,
$-\sqrt{(x^2+y^2)/3} \leqslant z \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)/35}$,
$0 \leqslant y \leqslant x$.

15.26. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 196$,
$-\sqrt{(x^2+y^2)/3} \leqslant z \leqslant -\sqrt{(x^2+y^2)/15}$,
$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\,x$.

15.27. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 196$,
$z \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)/3}$, $x/\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0$.

15.28. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144$,
$z \geqslant -\sqrt{(x^2+y^2)/63}$, $0 \leqslant y \leqslant x/\sqrt{3}$.

15.29. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81$,
$z \geqslant \sqrt{(x^2+y^2)/99}$, $y \leqslant 0$, $y \leqslant -\sqrt{3}\,x$.

15.30. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 169$,
$z \leqslant -\sqrt{(x^2+y^2)/99}$, $y \geqslant 0$, $y \geqslant -\sqrt{3}\,x$.

15.31. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$,
$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)/24}$,
$y \leqslant 0$, $y \leqslant -x/\sqrt{3}$.

Задача 16. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ — плотность. Найти массу тела.

16.1. $64(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$,
$y=0$, $z=0$ $(y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$,
$\mu=5(x^2+y^2)/4$.

16.2. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$,
$(x^2+y^2 \leqslant 1)$, $x=0$ $(x \geqslant 0)$;
$\mu=4|z|$.

16.3. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2z$,
$x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$;
$\mu=10x$.

16.4. $x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2$, $x^2+y^2=\frac{4}{7}z$,
$x=0$, $y=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$;
$\mu=80yz$.

16.5. $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=4z^2$,
$x=0$, $y=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$;
$\mu=20z$.

16.6. $36(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$,
$x=0$, $z=0$ $(x \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$;
$\mu=\frac{5}{6}(x^2+y^2)$.

16.7. $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$,
$(x^2+y^2 \leqslant 4)$;
$\mu=2|z|$.

16.8. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=8z$,
$x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$;
$\mu=5x$.

16.9. $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2$, $x^2+y^2=\frac{2}{5}z$,
$x=0$, $y=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$;
$\mu=28xz$.

16.10. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$
$x=0$, $y=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$;
$\mu=6z$.

16.11. $25(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,$
$x=0\ y=0,\ z=0,$
$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=2(x^2+y^2).$

16.12. $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4,$
$(x^2+y^2\leqslant 4),\ y=0\ (y\geqslant 0);$
$\mu=|z|.$

16.13. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=6z,$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=90y.$

16.14. $x^2+y^2=z^2/25,\ x^2+y^2=z/5,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=14yz.$

16.15. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=9z^2,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=10z.$

16.16. $9(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,$
$x=0,\ y=0,\ z=0,$
$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=5(x^2+y^2)/3.$

16.17. $x^2+y^2+z^2=4,$
$x^2+y^2=1,\ (x^2+y^2\leqslant 1);$
$\mu=6|z|.$

16.18. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=z,$
$x=0,\ y=0,\ z=0,$
$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=10y.$

16.19. $x^2+y^2=z^2/49,\ x^2+y^2=z/7,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=10xz.$

16.20. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=4z^2,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=10z.$

16.21. $16(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=5(x^2+y^2).$

16.22. $x^2+y^2+z^2=16,$
$x^2+y^2=4\ (x^2+y^2\leqslant 4);$
$\mu=|z|.$

16.23. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=4z,$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=5y.$

16.24. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=z,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=35yz.$

16.25. $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=z^2,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=32z.$

16.26. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=4,$
$x=0,\ y=0,\ z=0$
$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=5(x^2+y^2)/2.$

16.27. $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4,$
$(x^2+y^2\leqslant 4),\ z=0\ (z\geqslant 0);$
$\mu=2z.$

16.28. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=3z,$
$x=0,\ y=0,\ z=0,$
$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$
$\mu=15x.$

16.29. $x^2+y^2=4z^2/49,\ x^2+y^2=2z/7,$
$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$
$\mu=20xz.$

16.30. $x^2+y^2+z^2=16,$
$x^2+y^2=9z^2,$
$x=0,\ y=0,$
$(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=5z.$

16.31. $4(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1,$
$y=0,\ z=0\ (y\geqslant 0,\ z\geqslant 0);$
$\mu=10(x^2+y^2).$

VIII. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Теоретические вопросы

1. Скалярное поле. Производная по направлению.
2. Градиент, его свойства. Инвариантное определение градиента.
3. Векторное поле. Поток векторного поля через поверхность, его физический смысл.
4. Формула Остроградского.
5. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Инвариантное определение дивергенции. Свойства дивергенции.
6. Соленоидальное поле, его основные свойства.
7. Линейный интеграл в векторном поле, его свойства и физический смысл.
8. Циркуляция векторного поля, ее гидродинамический смысл.
9. Формула Стокса.
10. Ротор векторного поля, его свойства. Инвариантное определение ротора.
11. Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования.
12. Потенциальное поле. Условия потенциальности.

Теоретические упражнения

1. Найти производную скалярного поля $u=u\ (x,\ y\ z)$ по направлению градиента скалярного поля $v=v\ (x,\ y,\ z)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=\mathbf{Cr}$, где $\mathbf{C}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Каковы поверхности уровня этого поля и как они расположены по отношению к вектору $\mathbf{C}$?

3. Доказать, что если S — замкнутая кусочно-гладкая поверхность и $\mathbf{C}$ — ненулевой постоянный вектор, то

$$\oiint_S \cos\,(\widehat{\mathbf{n},\ \mathbf{C}})\ \mathrm{d}S=0,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор, нормальный к поверхности S.

4. Доказать формулу

$$\oiint_S \varphi \mathbf{a}\mathbf{n}^\circ\ \mathrm{d}S=\iiint_V (\varphi\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}+\mathbf{a}\ \mathrm{grad}\ \varphi)\ \mathrm{d}V,$$

где $\varphi=\varphi\ (x,\ y,\ z)$; S — поверхность, ограничивающая объем V; $\mathbf{n}^\circ$ — орт внешней нормали к поверхности S. Установить условия применимости формулы.

5. Доказать, что если функция $u\ (x,\ y,\ z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \text{ то } \oint\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к кусочно-гладкой замкнутой поверхности S.

6. Доказать, что если функция $u\ (x,\ y,\ z)$ является многочленом второй степени и S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, то интеграл $\oint\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S$ пропорционален объему, ограниченному поверхностью S.

7. Пусть $\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$, где $P,\ Q,\ R$ — линейные функции от $x,\ y,\ z$, и пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint_\Gamma \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{r}$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром Γ.

8. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}$. Определить ротор и дивергенцию поля линейных скоростей $\mathbf{v}=[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ точек тела (здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор).

Расчетные задания

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u\ (x,\ y,\ z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

1.1. $u=4\ln(3+x^2)-8xyz$, S: $x^2-2y^2+2z^2=1$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.2. $u=x\sqrt{y}+y\sqrt{z}$; S: $4z+2x^2-y^2=8$, $M\ (2,\ 4,\ 4)$.

1.3. $u=-2\ln(x^2-5)-4xyz$, S: $x^2+2y^2-2z^2=1$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.4. $u=\frac{1}{4}x^2y-\sqrt{x^2+5z^2}$, S: $z^2=x^2+4y^2-4$, $M\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

1.5. $u=xz^2-\sqrt{x^3y}$, S: $x^2-y^2-3z+12=0$, $M\ (2,\ 2,\ 4)$.

1.6. $u=x\sqrt{y}-yz^2$, S: $x^2+y^2=4z+9$, $M\ (2,\ 1,\ -1)$.

1.7. $u=7\ln(1/13+x^2)-4xyz$, S: $7x^2-4y^2+4z^2=7$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.8. $u=\mathrm{arctg}\,(y/x)+xz$, S: $x^2+y^2-2z=10$, $M\ (2,\ 2,\ -1)$.

1.9. $u=\ln(1+x^2)-xy\sqrt{z}$, S: $4x^2-y^2+z^2=16$, M $(1,\ -2,\ 4)$.

1.10. $u=\sqrt{x^2+y^2}-z$, S: $x^2+y^2=24z+1$, $M\ (3,\ 4,\ 1)$.

1.11. $u=x\sqrt{y}-(z+y)\sqrt{x}$, S: $x^2-y^2+z^2=4$, $M\ (1,\ 1,\ -2)$.

1.12. $u=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$, S: $z=x^2-y^2$, $M\ (1,\ 1,\ 0)$.

1.13. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, S: $2x^2-y^2+z^2-7=0$, $M\ (0,\ -3,\ 4)$.

1.14. $u=\ln(1+x^2+y^2)-\sqrt{x^2+z^2}$, S: $x^2-6x+9y^2+z^2=4z+23$, $M\ (3,\ 0,\ -4)$.

Найти производную скалярного поля $u\ (x,\ y,\ z)$ в точке M по направлению вектора $\mathbf{l}$.

1.15. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$,
$\mathbf{l}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.16. $u=x+\ln(z^2+y^2)$,
$\mathbf{l}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M\ (2,\ 1,\ 1)$.

1.17. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$,
$\mathbf{l}=2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ 5,\ -2)$.

1.18. $u=y\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg} z$,
$\mathbf{l}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M\ (0,\ 1,\ 1)$.

1.19. $u=x(\ln y-\operatorname{arctg} z)$,
$\mathbf{l}=8\mathbf{i}+4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$,
$M\ (-2,\ 1,\ -1)$.

1.20. $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$,
$\mathbf{l}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ 3,\ 2)$,

1.21. $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$,
$\mathbf{l}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$,
$M\ (\pi/2,\ 3\pi/2,\ 3)$.

1.22. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$,
$\mathbf{l}=5\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\sqrt{5}\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ 1,\ 2)$.

1.23. $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$,
$\mathbf{l}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ -3,\ 4)$.

1.24. $u=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}$,
$\mathbf{l}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$,
$M\ (4,\ 1,\ -2)$.

1.25. $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$,
$\mathbf{l}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ 1,\ 0)$.

1.26. $u=2\sqrt{x+y}+y\operatorname{arctg} z$,
$\mathbf{l}=4\mathbf{i}-3\mathbf{k}$,
$M\ (3,\ -2,\ 1)$.

1.27. $u=z^2+2\operatorname{arctg}(x-y)$,
$\mathbf{l}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ 2,\ -1)$.

1.28. $u=\ln(x^2+y^2)+xyz$,
$\mathbf{l}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ -1,\ 2)$.

1.29. $u=xy-\dfrac{x}{z}$,
$\mathbf{l}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M\ (-4,\ 3,\ -1)$.

1.30. $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$,
$\mathbf{l}=-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$M\ (1,\ -3,\ 4)$.

1.31. $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$,
$\mathbf{l}=3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$,
$M\ (2,\ 1,\ 1)$.

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u\ (x,\ y,\ z)$ и $v\ (x,\ y,\ z)$ в точке M.

2.1. $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\,z^3$, $u=\dfrac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2.2. $v=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$, $u=x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2.3. $v=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u=\frac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2.4. $v=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}z}$, $u=\frac{z}{x^3y^2}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.5. $v=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$, $u=\frac{x^2}{yz^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2.6. $v=3\sqrt{2}x^2-\frac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$, $u=\frac{z^2}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

2.7. $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$, $u=\frac{xz^2}{y}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$.

2.8. $v=\frac{\sqrt{6}}{2x}-\frac{\sqrt{6}}{2y}+\frac{2}{3z}$, $u=\frac{yz^2}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2.9. $v=3\sqrt{2}x^2-\frac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$, $u=\frac{xy^2}{z^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

2.10. $v=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}z}$, $u=\frac{x^3y^2}{z}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.11. $v=-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}$, $u=\frac{1}{x^2yz}$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.12. $v=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u=\frac{x^2}{y^2z^3}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.13. $v=x^2+9y^2+6z^2$, $u=xyz$, $M\left(1; \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.14. $v=\frac{2}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{\sqrt{6}}{4z}$, $u=\frac{y^3}{x^2z}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

2.15. $v=\sqrt{2}x^2-\frac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$, $u=xy^2z$, $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.16. $v=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}$, $u=\frac{x}{yz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2.17. $v=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u=\frac{y^2z^3}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.18. $v=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u=\frac{y^2z^3}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.19. $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$, $u=\frac{y}{xz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$.

2.20. $v=x^2-y^2-3z^2$, $u=\frac{yz^2}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2.21. $v=\frac{3x^2}{\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}z^2$, $u=\frac{z^2}{x^2y^2}$, $M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

2.22. $v=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $u=\frac{x^2}{y^2z^3}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.23. $v=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$, $u=x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2.24. $v=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u=\frac{xy^2}{z^3}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2.25. $v=\sqrt{2}x^2-\frac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$, $u=\frac{1}{xy^2z}$, $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.26. $v=x^2+9y^2+6z^2$, $u=\frac{1}{xyz}$, $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.27. $v=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u=\frac{x}{y^2z^3}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.28. $v=-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}$, $u=x^2yz$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.29. $v=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $u=\frac{y^2z^3}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.30. $v=-\frac{3x^3}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}y^3}{3}+8\sqrt{3}z^3$, $u=\frac{x^2z}{y^3}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

2.31. $v=x^2-y^2-3z^2$, $u=\frac{x}{yz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 3. Найти векторные линии в векторном поле $\mathbf{a}$.

3.1. $\mathbf{a}=4y\mathbf{i}-9x\mathbf{j}$.

3.2. $\mathbf{a}=2y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}$.

3.3. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}$.

3.4. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}$.

3.5. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}$.

3.6. $\mathbf{a}=3x\mathbf{i}+6z\mathbf{k}$.

3.7. $\mathbf{a}=4z\mathbf{i}-9x\mathbf{k}$.

3.8. $\mathbf{a}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{k}$.

3.9. $\mathbf{a}=4y\mathbf{j}+8z\mathbf{k}$.

3.10. $\mathbf{a}=y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$.

3.11. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+8z\mathbf{k}$.

3.12. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+3z\mathbf{k}$.

3.13. $\mathbf{a}=4z\mathbf{j}-9y\mathbf{k}$.

3.14. $\mathbf{a}=2z\mathbf{j}+3y\mathbf{k}$.

3.15. $\mathbf{a}=5x\mathbf{i}+10y\mathbf{j}$.

3.16. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+6y\mathbf{j}$.

3.17. $\mathbf{a}=y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$.

3.18. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

3.19. $\mathbf{a}=9y\mathbf{i}-4x\mathbf{j}$.

3.20. $\mathbf{a}=5y\mathbf{i}+7x\mathbf{j}$.

3.21. $\mathbf{a}=6x\mathbf{i}+12z\mathbf{k}$.

3.22. $\mathbf{a}=2y\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$.

3.23. $\mathbf{a}=4x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

3.24. $\mathbf{a}=9z\mathbf{i}-4x\mathbf{k}$.

3.25. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+z\mathbf{k}$.

3.26. $\mathbf{a}=5z\mathbf{i}+7x\mathbf{k}$.

3.27. $\mathbf{a}=7y\mathbf{j}+14z\mathbf{k}$.

3.28. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+6z\mathbf{k}$.

3.29. $\mathbf{a}=4x\mathbf{i}+z\mathbf{k}$.

3.30. $\mathbf{a}=5z\mathbf{j}+7y\mathbf{k}$.

3.31. $\mathbf{a}=9z\mathbf{j}-4y\mathbf{k}$.

Задача 4. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через часть поверхности S, вырезаемую плоскостями P_1, P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

4.1. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=2$.

4.2. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=4$.

4.3. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=3$.

4.4. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=1$.

4.5. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=5$.

4.6. $\mathbf{a}=(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=2$.

4.7. $\mathbf{a}=(x+y)\mathbf{i}-(x-y)\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=4$.

4.8. $\mathbf{a}(x^3+xy^2)\mathbf{i}+(y^3+x^2y)\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=3$.

4.9. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\sin z\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=5$.

4.10. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2=1$,
$P_1: z=0$, $P_2: z=1$.

Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через часть поверхности S, вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

4.11. $\mathbf{a}=(x+xy^2)\mathbf{i}+(y-yx^2)\mathbf{j}+(z-3)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=1$.

4.12. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=4$.

4.13. $\mathbf{a}=xy\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=1$.

4.14. $\mathbf{a}=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+(z^2-1)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=4$.

4.15. $\mathbf{a}=y^2x\mathbf{i}-yx^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=5$.

4.16. $\mathbf{a}=(xz+y)\mathbf{i}+(yz-x)\mathbf{j}+(z^2-2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=3$.

4.17. $\mathbf{a}=xyz\mathbf{i}-x^2z\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=2$.

4.18. $\mathbf{a}=(x+xy)\mathbf{i}+(y-x^2)\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=3$.

4.19. $\mathbf{a}=(x+y)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}+(z-2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=2$.

4.20. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=1$.

4.21. $\mathbf{a}=(x+xz)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-x^2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geqslant 0)$, $P: z=0$.

4.22. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+(y+yz^2)\mathbf{j}+(z-zy^2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=4$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.

4.23. $\mathbf{a}=(x+z)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(z-x-y)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=4$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.24. $\mathbf{a}=(x+xy)\mathbf{i}+(y-x^2)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=1$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.25. $\mathbf{a}=(x+z)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=1$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.26. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+(y+yz)\mathbf{j}+(z-y^2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=1$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.27. $\mathbf{a}=(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=1$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.28. $\mathbf{a}=(x+xz^2)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-zx^2)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=9$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.29. $\mathbf{a}=(x+y)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=4$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.30. $\mathbf{a}=(x+xy^2)\mathbf{i}+(y-yx^2)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=9$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.
4.31. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(z-y)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=9$, $P: z=0$ $(z\geqslant 0)$.

Задача 5. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

5.1. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x+y+z=1$.
5.2. $\mathbf{a}=y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x+y+z=1$.
5.3. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x+y+z=1$.
5.4. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$P: x+y+z=1$.
5.5. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}$,
$P: x+y+z=1$.
5.6. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y+z=1$.
5.7. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y+z=1$.
5.8. $\mathbf{a}=y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y+z=1$.
5.9. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x+y/2+z/3=1$.
5.10. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x+y/2+z/3=1$.
5.11. $\mathbf{a}=3x\mathbf{i}+2z\mathbf{k}$,
$P: x+y/2+z/3=1$.
5.12. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x/3+y+z/2=1$.
5.13. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,
$P: x/3+y+z/2=1$.
5.14. $\mathbf{a}=-2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$,
$P: x/3+y+z/2=1$.
5.15. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y/3+z=1$.
5.16. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+5z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y/3+z=1$.
5.17. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/2+z=1$.
5.18. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/2+z=1$.
5.19. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/2+z=1$.
5.20. $\mathbf{a}=-x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+12z\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/2+z=1$.
5.21. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+8z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+z/2=1$.
5.22. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+z/2=1$.
5.23. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+5z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+\dfrac{z}{2}=1$.
5.24. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+5z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+\dfrac{z}{2}=1$.
5.25. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: 2x+3y+z=1$.
5.26. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: 2x+3y+z=1$.
5.27. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: 2x+3y+z=1$.
5.28. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$,
$P: 2x+3y+z=1$.
5.29. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+9y\mathbf{j}+8z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+3z=1$.
5.30. $\mathbf{a}=8x\mathbf{i}+11y\mathbf{j}+17z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+3z=1$.
5.31. $\mathbf{a}=-x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$P: x+2y+3z=1$.

Задача 6. Найти поток векторного поля **a** через часть плоскости P, расположенную в 1 октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

6.1. $\mathbf{a}=7x\mathbf{i}+(5\pi y+2)\mathbf{j}+4\pi z\mathbf{k}$,
$P: x+y/2+4z=1$.

6.2. $\mathbf{a}=2\pi x\mathbf{i}+(7y+2)\mathbf{j}+7\pi z\mathbf{k}$,
$P: x+y/2+z/3=1$.

6.3. $\mathbf{a}=9\pi x\mathbf{i}+\mathbf{j}-3z\mathbf{k}$,
$P: x/3+y+z=1$.

6.4. $\mathbf{a}=(2x+1)\mathbf{i}-y\mathbf{j}+3\pi z\mathbf{k}$,
$P: x/3+y+2z=1$.

6.5. $\mathbf{a}=7x\mathbf{i}+9\pi y\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$P: x+y/3+z=1$.

6.6. $\mathbf{a}=\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+11\pi z\mathbf{k}$,
$P: x+y+z/3=1$.

6.7. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+(\pi z-1)\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/2+z/3=1$.

6.8. $\mathbf{a}=5\pi x\mathbf{i}+(9y+1)+4\pi z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y/3+z/2=1$.

6.9. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-y\mathbf{j}+\dfrac{3\pi}{2}z\mathbf{k}$,
$P: x/3+y+z/4=1$.

6.10. $\mathbf{a}=9\pi x\mathbf{i}+(5y+1)\mathbf{j}+2\pi z\mathbf{k}$,
$P: 3x+y+z/9=1$.

6.11. $\mathbf{a}=7\pi x\mathbf{i}+2\pi y\mathbf{j}+(7z+2)\mathbf{k}$,
$P: x+y+z/2=1$.

6.12. $\mathbf{a}=\pi y\mathbf{j}+(4-2z)\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/3+z/4=1$.

6.13. $\mathbf{a}=(3\pi-1)x\mathbf{i}+(9\pi y+1)\mathbf{j}+6\pi z\mathbf{k}$,
$P: \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{9}=1$.

6.14. $\mathbf{a}=\pi x\mathbf{i}+\dfrac{\pi}{2}y\mathbf{j}+(4-2z)\mathbf{k}$,
$P: x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$.

6.15. $\mathbf{a}=(5y+3)\mathbf{j}+11\pi z\mathbf{k}$,
$P: x+y/3+4z=1$.

6.16. $\mathbf{a}=9\pi y\mathbf{j}+(7z+1)\mathbf{k}$,
$P: x+y+z=1$.

6.17. $\mathbf{a}=\pi y\mathbf{j}+(1-2z)\mathbf{k}$,
$P: x/4+y/3+z=1$.

6.18. $\mathbf{a}=(27\pi-1)x\mathbf{i}+(34\pi y+3)\mathbf{j}+20\pi z\mathbf{k}$,
$P: 3x+\dfrac{y}{9}+z=1$.

6.19. $\mathbf{a}=\pi x\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\pi z\mathbf{k}$,
$P: x/2+y/3+z=1$.

6.20. $\mathbf{a}=4\pi x\mathbf{i}+7\pi y\mathbf{j}+(2z+1)\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/3+2z=1$.

6.21. $\mathbf{a}=3\pi x\mathbf{i}+6\pi y\mathbf{j}+10\mathbf{k}$,
$P: 2x+y+z/3=1$.

6.22. $\mathbf{a}=\pi x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/6+z=1$.

6.23. $\mathbf{a}=(21\pi-1)x\mathbf{i}+62\pi y\mathbf{j}+(1-2\pi z)\mathbf{k}$,
$P: 8x+y/2+z/3=1$.

6.24. $\mathbf{a}=\pi x\mathbf{i}+2\pi y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,
$P: x/2+y/4+z/3=1$.

6.25. $\mathbf{a}=9\pi x\mathbf{i}+2\pi y\mathbf{j}+8\mathbf{k}$,
$P: 2x+8y+z/3=1$.

6.26. $\mathbf{a}=7\pi x\mathbf{i}+(4y+1)\mathbf{j}+2\pi z\mathbf{k}$,
$P: x/3+2y+z=1$.

6.27. $\mathbf{a}=6\pi x\mathbf{i}+3\pi y\mathbf{j}+10\mathbf{k}$,
$P: 2x+y/2+z/3=1$.

6.28. $\mathbf{a}=(\pi-1)x\mathbf{i}+2\pi y\mathbf{j}+(1-\pi z)\mathbf{k}$,
$P: \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

6.29. $\mathbf{a}=\frac{\pi}{2}x\mathbf{i}+\pi y\mathbf{j}+(4-2z)\mathbf{k}$,

$P: x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

6.30. $\mathbf{a}=7\pi x\mathbf{i}+4\pi y\mathbf{j}+2(z+1)\mathbf{k}$,
$P: x/3+y/4+z=1$.

6.31. $\mathbf{a}=5\pi x\mathbf{i}+(1-2y)\mathbf{j}+4\pi z\mathbf{k}$,
$P: x/2+4y+z/3=1$.

Задача 7. Найти поток векторного поля **a** через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

7.1. $\mathbf{a}=(e^z+2x)\mathbf{i}+e^x\mathbf{j}+e^y\mathbf{k}$, $S: x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.2. $\mathbf{a}=(3z^2+x)\mathbf{i}+(e^x-2y)\mathbf{j}+(2z-xy)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$, $z=1$, $z=4$.

7.3. $\mathbf{a}=(\ln y+7x)\mathbf{i}+(\sin z-2y)\mathbf{j}+(e^y-2z)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z-2$.

7.4. $\mathbf{a}=(\cos z+3x)\mathbf{i}+(x-2y)\mathbf{j}+(3z+y^2)\mathbf{k}$, $S: z^2=36\ (x^2+y^2)$, $z=6$.

7.5. $\mathbf{a}=(e^{-z}-x)\mathbf{i}+(xz+3y)\mathbf{j}+(z+x^2)\mathbf{k}$, $S: 2x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.6. $\mathbf{a}=(6x-\cos y)\mathbf{i}-(e^x+z)\mathbf{j}-(2y+3z)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$, $z=1$, $z=2$.

7.7. $\mathbf{a}=(4x-2y^2)\mathbf{i}+(\ln z-4y)\mathbf{j}+(x+3z/4)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2x+3$.

7.8. $\mathbf{a}=(1+\sqrt{z})\mathbf{i}+(4y-\sqrt{x})\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, $S: z^2=4\ (x^2+y^2)$, $z=3$.

7.9. $\mathbf{a}=(\sqrt{z}-x)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(y^2-z)\mathbf{k}$, $S: 3x-2y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.10. $\mathbf{a}=(yz+x)\mathbf{i}+(x^2+y)\mathbf{j}+(xy^2+z)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2z$.

7.11. $\mathbf{a}=(e^{2y}+x)\mathbf{i}+(x-2y)\mathbf{j}+(y^2+3z)\mathbf{k}$, $S: x-y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.12. $\mathbf{a}=(\sqrt{z}-2x)\mathbf{i}+(e^x+3y)\mathbf{j}+\sqrt{y+x}\,\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$, $z=2$, $z=5$.

7.13. $\mathbf{a}=(e^z+x/4)\mathbf{i}+(\ln x+y/4)\mathbf{j}+\frac{z}{4}\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2x+2y-2z-2$.

7.14. $\mathbf{a}=(3x-2z)\mathbf{i}+(z-2y)\mathbf{j}+(1+2z)\mathbf{k}$, $S: z^2=4\ (x^2+y^2)$, $z=2$.

7.15. $\mathbf{a}=(e^y+2x)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(2z-1)\mathbf{k}$, $S: x+2y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.16. $\mathbf{a}=(x+y^2)\mathbf{i}+(xz+y)\mathbf{j}+(\sqrt{x^2+1}+z)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$, $z=2$, $z=3$.

7.17. $\mathbf{a}=(e^y+2x)\mathbf{i}+(xz-y)\mathbf{j}+(1/4)(e^{xy}-z)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2y+3$.

7.18. $\mathbf{a}=(\sqrt{z}+y)\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+(3z+5x)\mathbf{k}$, $S: z^2=8\ (x^2+y^2)$, $z=2$.

7.19. $\mathbf{a}=(8yz-x)\mathbf{i}+(x^2-1)\mathbf{j}+(xy-2z)\mathbf{k}$, $S: 2x+3y-z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.20. $\mathbf{a}=(y+z^2)\mathbf{i}+(x^2+3y)\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2x$.

7.21. $\mathbf{a}=(2yz-x)\mathbf{i}+(xz+2y)\mathbf{j}+(x^2+z)\mathbf{k}$, $S: y-x+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7.22. $\mathbf{a}=(\sin z+2x)\mathbf{i}+(\sin x-3y)\mathbf{j}+(\sin y+2z)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2=z^2$, $z=3$, $z=6$.

7.23. $\mathbf{a}=(\cos z+x/4)\mathbf{i}+(e^x+y/4)+\left(\frac{z}{4}-1\right)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=2z+3$.

7.24. $\mathbf{a}=(\sqrt{z}+1+x)\mathbf{i}+(2x+y)\mathbf{j}+(\sin x+z)\mathbf{k}$,

$S: \begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$

7.25. $\mathbf{a}=(5x-6y)\mathbf{i}+(11x^2+2y)\mathbf{j}+(x^2-4z)\mathbf{k}$,

$S: \begin{cases} x+y+2z=2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

7.26. $\mathbf{a}=(y^2+z^2+6x)\mathbf{i}+(e^x-2y+x)\mathbf{j}+(x+y-z)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=1,\ z=3. \end{cases}$$

7.27. $\mathbf{a}=\frac{1}{2}(x+z)\mathbf{i}+\frac{1}{4}(x\cdot z-y)\mathbf{j}+(xy-2)\mathbf{k}$,

$S: x^2+y^2+z^2=4x-2y+4z-8.$

7.28. $\mathbf{a}=(3yz-x)\mathbf{i}+(x^2-y)\mathbf{j}+(6z-1)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} z^2=9\ (x^2+y^2), \\ z=3. \end{cases}$$

7.29. $\mathbf{a}=(yz-2x)\mathbf{i}+(\sin x+y)\mathbf{j}+(x-2z)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x+2y-3z=6, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$$

7.30. $\mathbf{a}=(8x+1)\mathbf{i}+(zx-4y)\mathbf{j}+(e^x-z)\mathbf{k}$,

$S: x^2+y^2+z^2=2y.$

7.31. $\mathbf{a}=(2y-5x)\mathbf{i}+(x-1)\mathbf{j}+(2\sqrt{xy}+2z)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$$

Задача 8. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

8.1. $\mathbf{a}=(x+z)\mathbf{i}+(z+y)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=x,\ z=0\ (z\geqslant 0). \end{cases}$$

8.2. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+z\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} z=3x^2+2y^2+1, \\ x^2+y^2=4,\ z=0. \end{cases}$$

8.3. $\mathbf{a}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} y=x^2,\ y=4x^2,\ y=1\ (x\geqslant 0), \\ z=y,\ z=0. \end{cases}$$

8.4. $\mathbf{a}=3x\mathbf{i}-z\mathbf{j}$,

$$S:\begin{cases} z=6-x^2-y^2, \\ z^2=x^2+y^2\ (z\geqslant 0). \end{cases}$$

8.5. $\mathbf{a}=(z+y)\mathbf{i}+y\mathbf{j}-x\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2+z^2=2y, \\ y=2. \end{cases}$$

8.6. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-(x+2y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1,\ z=0, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$$

8.7. $\mathbf{a}=2(z-y)\mathbf{i}+(x-z)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} z=x^2+3y^2+1,\ z=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

8.8. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+z\mathbf{j}-y\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} z=4-2(x^2+y^2), \\ z=2(x^2+y^2). \end{cases}$$

8.9. $\mathbf{a}=z\mathbf{i}-4y\mathbf{j}+2x\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$$

8.10. $\mathbf{a}=4x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} 3x+2y=12,\ 3x+y=6,\ y=0, \\ x+y+z=6,\ z=0. \end{cases}$$

8.11. $\mathbf{a}=8x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x+y=1,\ x=0,\ y=0, \\ z=x^2+y^2,\ z=0. \end{cases}$$

8.12. $\mathbf{a}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} 4z=x^2+y^2, \\ z=4. \end{cases}$$

8.13. $\mathbf{a}=6x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} z=3-2(x^2+y^2), \\ z^2=x^2+y^2\ (z\geqslant 0). \end{cases}$$

8.14. $\mathbf{a}=(z+y)\mathbf{i}+(x-z)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ 3x+4y+z=12,\ z=1. \end{cases}$$

8.15. $\mathbf{a}=(y+2z)\mathbf{i}-y\mathbf{j}+3x\mathbf{k}$,

8.16. $\mathbf{a}=(y+6x)\mathbf{i}+5(x+z)\mathbf{j}+4y\mathbf{k}$,

$S:\begin{cases}3z=27-2(x^2+y^2),\\ z^2=x^2+y^2\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

$S:\begin{cases}y=x,\ y=2x,\ y=2,\\ z=x^2+y^2,\ z=0.\end{cases}$

8.17. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x,\ z=0\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

8.18. $\mathbf{a}=z\mathbf{i}+(3y-x)\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x^2+y^2+2,\ z=0.\end{cases}$

8.19. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=x^2+y^2,\\ z=0.\end{cases}$

8.20. $\mathbf{a}=(x+y+z)\mathbf{i}+(2y-x)\mathbf{j}+(3z+y)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}y=x,\ y=2x,\ x=1,\\ z=x^2+y^2,\\ z=0.\end{cases}$

8.21. $\mathbf{a}=7x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(x-y+5z)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=x^2+2y^2,\\ y=x,\ y=2x,\ x=1.\end{cases}$

8.22. $\mathbf{a}=17x\mathbf{i}+7y\mathbf{j}+11z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=2(x^2+y^2),\\ y=x^2,\ y=x.\end{cases}$

8.23. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ z=2x.\end{cases}$

8.24. $\mathbf{a}=(2x+y)\mathbf{j}+(y+2z)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}z=2-4(x^2+y^2),\\ z=4(x^2+y^2).\end{cases}$

8.25. $\mathbf{a}=(2y-3z)\mathbf{i}+(3x+2z)\mathbf{j}+(x+y+z)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=4-x-y,\ z=0.\end{cases}$

8.26. $\mathbf{a}=-2x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=2y,\\ z=x^2+y^2,\ z=0.\end{cases}$

8.27. $\mathbf{a}=(2y-15x)\mathbf{i}+(z-y)\mathbf{j}-(x-3y)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}z=3x^2+y^2+1,\ z=0,\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

8.28. $\mathbf{a}=(y+z)\mathbf{i}+(x-2y+z)\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x^2+y^2,\ z=0.\end{cases}$

8.29. $\mathbf{a}=(3x-y-z)\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$S: z=x^2+y^2,\ z=2y.$

8.30. $\mathbf{a}=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(z+x)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}y=2x,\ y=4x,\ x=1,\\ z=y^2,\ z=0.\end{cases}$

8.31. $\mathbf{a}=(x+z)\mathbf{i}+y\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}z=8-x^2-y^2,\\ z=x^2+y^2.\end{cases}$

Задача 9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

9.1. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}z=x^2+y^2,\ z=1,\\ x=0,\ y=0\ \text{(первый октант)}.\end{cases}$

9.2. $\mathbf{a}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+(y^2+x^2)\mathbf{j}+(y^2+z^2)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0,\ z=1.\end{cases}$

9.3. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=z^2\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

9.4. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=0\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

9.5. $\mathbf{a}=xz\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1-z,\\ z=0.\end{cases}$

9.6. $\mathbf{a}=3xz\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x+y+z=2,\ x=1,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$

9.7. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2,\\ z=0\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

9.8. $\mathbf{a}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2+z^2=1.$

9.9. $\mathbf{a}=(zx+y)\mathbf{i}+(zy-x)\mathbf{j}-(x^2+y^2)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=0\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

9.10. $\mathbf{a}=y^2x\mathbf{i}+z^2y\mathbf{j}+x^2z\mathbf{k}$,
$S: x^2+y^2+z^2=1.$

9.11. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x=0,\ y=0,\ z=0\\ (\text{первый октант}).\end{cases}$

9.12. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ z=4.\end{cases}$

9.13. $\mathbf{a}=(zx+y)\mathbf{i}+(xy-z)\mathbf{j}+(x^2+yz)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ z=0,\ z=1.\end{cases}$

9.14. $\mathbf{a}=xy^2\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1,\\ x=0,\ y=0\\ (\text{первый октант}).\end{cases}$

9.15. $\mathbf{a}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+y^2=z^2\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

9.16. $\mathbf{a}=3x^2\mathbf{i}-2x^2y\mathbf{j}+(2x-1)z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0,\ z=1.\end{cases}$

9.17. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{4},\\ z=0,\ z=2.\end{cases}$

9.18. $\mathbf{a}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0,\ z=1.\end{cases}$

9.19. $\mathbf{a}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x=0,\ y=0,\ z=0\\ (\text{первый октант}).\end{cases}$

9.20. $\mathbf{a}=z\mathbf{i}+yz\mathbf{j}-xy\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0,\ z=1.\end{cases}$

9.21. $\mathbf{a}=(zx+y)\mathbf{i}-(2y-x)\mathbf{j}-(x^2+y^2)\mathbf{k}$,
$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=0\ (z\geqslant 0).\end{cases}$

9.22. $\mathbf{a}=(x^2+xy)\mathbf{i}+(y^2+yz)\mathbf{j}+(z^2+xz)\mathbf{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2=z^2 \ (z\geqslant 0). \end{cases}$$

9.23. $\mathbf{a}=3x^2\mathbf{i}-2x^2y\mathbf{j}+(1-2x)\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0, \ z=1. \end{cases}$$

9.24. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}$,
$$S:\begin{cases} z=1-x-y, \\ x=0, \ y=0, \ z=0. \end{cases}$$

9.25. $\mathbf{a}=(y^2+xz)\mathbf{i}+(yx-z)\mathbf{j}+(yz+x)\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0, \ z=\sqrt{2}. \end{cases}$$

9.26. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} z=x^2+y^2, \ z=1, \\ x=0, \ y=0 \\ \text{(первый октант).} \end{cases}$$

9.27. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+2zy\mathbf{j}+2z^2\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1-z, \\ z=0. \end{cases}$$

9.28. $\mathbf{a}=2xy\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}, \\ z=0 \ (z\geqslant 0). \end{cases}$$

9.29. $\mathbf{a}=y^2x\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}/3$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0 \ (z\geqslant 0). \end{cases}$$

9.30. $\mathbf{a}=-x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=4. \end{cases}$$

9.31. $\mathbf{a}=(y^2+z^2)\mathbf{i}+(xy+y^2)\mathbf{j}+(xz+z)\mathbf{k}$,
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0, \ z=1. \end{cases}$$

Задача 10. Найти работу силы $\mathbf{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

10.1. $\mathbf{F}=(x^2-2y)\mathbf{i}+(y^2-2x)\mathbf{j}$,
L: отрезок MN,
$M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

10.2. $\mathbf{F}=(x^2+2y)\mathbf{i}+(y^2+2x)\mathbf{j}$,
L: отрезок MN,
$M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

10.3. $\mathbf{F}=(x^2+2y)\mathbf{i}+(y^2+2x)\mathbf{j}$,
$L: 2-\dfrac{x^2}{8}=y$,
$M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

10.4. $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+2x\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=4 \ (y\geqslant 0)$,
$M(2, 0)$, $N(-2, 0)$.

10.5. $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}-y^3\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=4 \ (x\geqslant 0, \ y\geqslant 0)$,
$M(2, 0)$, $N(0, 2)$.

10.6. $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$,
$L: y=x^2$,
$M(-1, 1)$, $N(1, 1)$.

10.7. $\mathbf{F}=x^2y\mathbf{i}-y\mathbf{j}$,
L: отрезок MN,
$M(-1, 0)$, $N(0, 1)$.

10.8. $\mathbf{F}=(2xy-y)\mathbf{i}+(x^2+x)\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=9 \ (y\geqslant 0)$,
$M(3, 0)$, $N(-3, 0)$.

10.9. $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$,
$L: x^2+\dfrac{y^2}{9}=1 \ (x\geqslant 0, \ y\geqslant 0)$,
$M(1, 0)$, $N(0, 3)$.

10.10. $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=1 \ (y\geqslant 0)$,
$M(1, 0)$, $N(-1, 0)$.

10.11. $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+(x^2-y^2)\mathbf{j}$,

10.12. $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$,

$L: y=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2; \end{cases}$
$M(2, 0)$, $N(0, 0)$.

$L: x^2+y^2=2$ $(y\geqslant 0)$,
$M(\sqrt{2}, 0)$, $N(-\sqrt{2}, 0)$.

10.13. $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,
$M(1, 0)$, $N(0, 1)$,

10.14. $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$,
$L: 2x^2+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$,
$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

10.15. $\mathbf{F}=(x^2+y^2)(\mathbf{i}+2\mathbf{j})$,
$L: x^2+y^2=R^2$ $(y\geqslant 0)$,
$M(R, 0)$, $N(-R, 0)$.

10.16. $\mathbf{F}=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\,\mathbf{i}+(y-x\sqrt{x^2+y^2})\,\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$,
$M(1, 0)$, $N(-1, 0)$.

10.17. $\mathbf{F}=x^2yi-xy^2j$,
$L: x^2+y^2=4$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,
$M(2, 0)$, $N(0, 2)$.

10.18. $\mathbf{F}=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\,\mathbf{i}+(y-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=16$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,
$M(4, 0,)$ $N(0, 4)$.

10.19. $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=9$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,
$M(3, 0)$, $N(0, 3)$.

10.20. $\mathbf{F}=(x+y)^2\,\mathbf{i}-(x^2+y^2)\,\mathbf{j}$,
L: отрезок MN,
$M(1, 0)$, $N(0, 1)$.

10.21 $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}$,
L: отрезок MN,
$M(2, 0)$, $N(0, 2)$.

10.22. $\mathbf{F}=x^2\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=9$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,
$M(3, 0,)$, $N(0, 3)$.

10.23. $\mathbf{F}=(y^2-y)\,\mathbf{i}+(2xy+x)\,\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=9$ $(y\geqslant 0)$,
$M(3, 0)$, $N(-3, 0)$.

10.24. $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}$,
$L: y=\sin x$,
$M(\pi, 0)$, $N(0, 0)$.

10.25. $\mathbf{F}=(xy-y^2)\,\mathbf{i}+x\mathbf{j}$,
$L: y=2x^2$,
$M(0, 0)$, $N(1, 2)$.

10.26. $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$,
L: отрезок MN,
$M(1, 0)$, $N(0, 3)$.

10.27. $\mathbf{F}=(xy-x)\,\mathbf{i}+\frac{x^2}{2}\,\mathbf{j}$,
$L: y=2\sqrt{x}$,
$M(0, 0)$, $N(1, 2)$.

10.28. $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$,
$L: x^2+\frac{y^2}{9}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,
$M(1, 0)$, $N(0, 3)$.

10.29. $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$,
$L: y=x^3$,
$M(0, 0)$, $N(2, 8)$.

10.30. $\mathbf{F}=(x^2-y^2)\,\mathbf{i}+(x^2+y^2)\,\mathbf{j}$,
$L: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $(y\geqslant 0)$,
$M(3, 0)$, $N(-3, 0)$.

10.31. $\mathbf{F}=(x-y)\,\mathbf{i}+\mathbf{j}$,
$L: x^2+y^2=4$ $(y\geqslant 0)$,
$M(2, 0)$, $N(-2, 0)$.

Задача 11. Найти циркуляцию векторного поля **a** вдоль контура Г (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

11.1. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\\ z=\sin t.\end{cases}$$

11.2. $\mathbf{a}=-x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt[3]{4}\cos t,\ y=\sqrt[3]{4}\sin t,\\ z=3.\end{cases}$$

11.3. $\mathbf{a}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=\sin t,\\ z=2\ (1-\cos t).\end{cases}$$

11.4. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=(\sqrt{2}\sin t)/2,\\ z=(\sqrt{2}\cos t)/2.\end{cases}$$

11.5. $\mathbf{a}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=4\cos t,\ y=4\sin t,\\ z=1-\cos t.\end{cases}$$

11.6. $\mathbf{a}=2y\mathbf{i}-3x\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ y=2\sin t,\\ z=2-2\cos t-2\sin t.\end{cases}$$

11.7. $\mathbf{a}=2z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ y=2\sin t,\\ z=1.\end{cases}$$

11.8. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=\sin t,\\ z=3.\end{cases}$$

11.9. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ x=2\sin t,\\ z=2\cos t-2\sin t-1.\end{cases}$$

11.10. $\mathbf{a}=3y\mathbf{i}-3x\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ y=3\sin t,\\ z=3-3\cos t-3\sin t.\end{cases}$$

11.11. $\mathbf{a}=-x^2y^3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t,\\ z=1.\end{cases}$$

11.12. $\mathbf{a}=6z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ y=3\sin t,\\ z=3.\end{cases}$$

11.13. $\mathbf{a}=z\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\ y=2\sin t,\\ z=\sqrt{2}\cos t.\end{cases}$$

11.14. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+2z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=3\sin t,\\ z=2\cos t-3\sin t-2.\end{cases}$$

11.15. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-\dfrac{1}{3}z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=(\cos t)/2,\ y=(\sin t)/3,\\ z=\cos t-(\sin t)/3-1/4.\end{cases}$$

11.16. $\mathbf{a}=4y\mathbf{i}-3x\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=4\cos t,\ y=4\sin t,\\ z=4-4\cos t-4\sin t.\end{cases}$$

11.17. $\mathbf{a}=-z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=5\cos t,\ y=5\sin t,\\ z=4.\end{cases}$$

11.18. $\mathbf{a}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ y=2\sin t,\\ z=0.\end{cases}$$

11.19. $\mathbf{a}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ y=3\sin t,\\ z=2\ (1-\cos t).\end{cases}$$

11.20. $\mathbf{a}=2y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=\sin t,\\ z=4-\cos t-\sin t.\end{cases}$$

11.21. $\mathbf{a}=xz\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=\sin t,\\ z=\sin t.\end{cases}$$

11.22. $\mathbf{a}=-x^2y^3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=\sin t,\\ z=5.\end{cases}$$

11.23. $\mathbf{a}=7z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$,

11.24. $\mathbf{a}=xy\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=6\cos t,\ y=6\sin t, \\ z=1/3. \end{cases}$

11.25. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=2\cos t,\ y=3\sin t, \\ z=4\cos t-3\sin t-3. \end{cases}$

11.26. $\mathbf{a}=(y-z)\,\mathbf{i}+(z-x)\,\mathbf{j}+(x-y)\,\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=2\cos t,\ y=2\sin t, \\ y=3\ (1-\cos t). \end{cases}$

11.27. $\mathbf{a}=-2z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=(\cos t)/3,\ y=(\sin t)/3, \\ z=8. \end{cases}$

11.28. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-3z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=\cos t,\ y=4\sin t, \\ z=2\cos t-4\sin t+3. \end{cases}$

11.29. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}-2z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=3\cos t,\ y=4\sin t, \\ z=6\cos t-4\sin t+1. \end{cases}$

11.31. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}/3-3x\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=2\cos t,\ y=2\sin t, \\ z=1-2\cos t-2\sin t. \end{cases}$

$\Gamma:\begin{cases} x=\cos t,\ y=\sin t, \\ z=\sin t. \end{cases}$

11.30. $\mathbf{a}=-x^2y^3\mathbf{i}+4j+x\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x=2\cos t,\ y=2\sin t, \\ z=4. \end{cases}$

Задача 12. Найти модуль циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль контура Γ.

12.1. $\mathbf{a}=(x^2-y)\,\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$

12.2. $\mathbf{a}=xz\mathbf{i}-\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} z=5\ (x^2+y^2)-1, \\ z=4. \end{cases}$

12.3. $\mathbf{a}=yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=9\ \ (z>0). \end{cases}$

12.4. $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+yz\mathbf{j}-x\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

12.5. $\mathbf{a}=(x-y)\,\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=5. \end{cases}$

12.6. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} z=3\ (x^2+y^2)+1, \\ z=4. \end{cases}$

12.7. $\mathbf{a}=yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=16\ \ (z>0). \end{cases}$

12.8. $\mathbf{a}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

12.9. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+(1-x)\,\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=1\ \ (z>0). \end{cases}$

12.10. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=4. \end{cases}$

12.11. $\mathbf{a}=4x\mathbf{i}+2\mathbf{j}-xy\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} z=2\ (x^2+y^2)+1, \\ z=7. \end{cases}$

12.12. $\mathbf{a}=2y\mathbf{i}-3x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=1. \end{cases}$

12.13. $\mathbf{a}=-3z\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+2y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x-3y-2z=1.\end{cases}$$

12.14. $\mathbf{a}=2y\mathbf{i}+5z\mathbf{j}+3x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}2x^2+2y^2=1,\\ x+y+z=3.\end{cases}$$

12.15. $\mathbf{a}=2y\mathbf{i}+\mathbf{j}-2yz\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0,\\ z=2.\end{cases}$$

12.16. $\mathbf{a}=(x-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2-4z^2=0,\\ z=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

12.17. $\mathbf{a}=xz\mathbf{i}-\mathbf{j}+y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ z=1.\end{cases}$$

12.18. $\mathbf{a}=2yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}-x^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ x^2+y^2=9\ \ (z>0).\end{cases}$$

12.19. $\mathbf{a}=4x\mathbf{i}-yz\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=1.\end{cases}$$

12.20. $\mathbf{a}=-y\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0,\\ z=1.\end{cases}$$

12.21. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}z=x^2+y^2-1,\\ z=3.\end{cases}$$

12.22. $\mathbf{a}=2yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ x^2+y^2=16\ \ (z>0).\end{cases}$$

12.23. $\mathbf{a}=(2-xy)\mathbf{i}-yz\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x+y+z=1.\end{cases}$$

12.24. $\mathbf{a}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x^2+y^2=1\ \ (z>0).\end{cases}$$

12.25. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0,\\ z=2.\end{cases}$$

12.26. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ z=4.\end{cases}$$

12.27. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}z=4\ \ (x^2+y^2)+2,\\ z=6.\end{cases}$$

12.28. $\mathbf{a}=3z\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+2y\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ 2x-3y-2z=1.\end{cases}$$

12.29. $\mathbf{a}=(x+y)\mathbf{i}-x\mathbf{j}+6\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=2.\end{cases}$$

12.30. $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+3xz\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0,\\ z=3.\end{cases}$$

12.31. $\mathbf{a}=yz\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,
$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x^2+y^2=9.\end{cases}$$

IX. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.
3. Определители, их свойства.

4. Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.

5. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.

6. Плоскость. Уравнение плоскости.

7. Расстояние от точки до плоскости.

8. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

Теоретические упражнения

1. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и $\vec{AB}=\alpha\mathbf{a}/2$, $\vec{BC}=4(\beta\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\vec{CD}=-4\beta\mathbf{b}$, $\vec{DA}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$.

2. Разложить вектор $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{n}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{p}=2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$.

3. Найти угол между единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, если известно, что векторы $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b}=5\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны.

4. Доказать компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, зная, что

$$[\mathbf{ab}]+[\mathbf{bc}]+[\mathbf{ca}]=0.$$

5. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точки $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

6. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_2}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

7. Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ параллельно плоскостям $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

8. Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

9. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор $\mathbf{S}$, определяется формулой $d=|[\mathbf{S}, \overrightarrow{AB}]|/|\mathbf{S}|$.

10. Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A\ (x_1, y_1, z_1)$ и $B\ (x_2, y_2, z_2)$. Их направляющие векторы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой $d=|\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\overrightarrow{AB}|/|[\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2]|$.

Расчетные задания

Задача 1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p**, **q**, **r**.

1.1. $\mathbf{x}=\{-2, 4, 7\}$, $\mathbf{p}=\{0, 1, 2\}$, $\mathbf{q}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 2, 4\}$.
1.2. $\mathbf{x}=\{6, 12, -1\}$, $\mathbf{p}=\{1, 3, 0\}$, $\mathbf{q}=\{2, -1, 1\}$, $\mathbf{r}=\{0, -1, 2\}$.
1.3. $\mathbf{x}=\{1, -4, 4\}$, $\mathbf{p}=\{2, 1, -1\}$, $\mathbf{q}=\{0, 3, 2\}$, $\mathbf{r}=\{1, -1, 1\}$.
1.4. $\mathbf{x}=\{-9, 5, 5\}$, $\mathbf{p}=\{4, 1, 1\}$, $\mathbf{q}=\{2, 0, -3\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 2, 1\}$.
1.5. $\mathbf{x}=\{-5, -5, 5\}$, $\mathbf{p}=\{-2, 0, 1\}$, $\mathbf{q}=\{1, 3, -1\}$, $\mathbf{r}=\{0, 4, 1\}$.
1.6. $\mathbf{x}=\{13, 2, 7\}$, $\mathbf{p}=\{5, 1, 0\}$, $\mathbf{q}=\{2, -1, 3\}$, $\mathbf{r}=\{1, 0, -1\}$.
1.7. $\mathbf{x}=\{-19, -1, 7\}$, $\mathbf{p}=\{0, 1, 1\}$, $\mathbf{q}=\{-2, 0, 1\}$, $\mathbf{r}=\{3, 1, 0\}$.
1.8. $\mathbf{x}=\{3, -3, 4\}$, $\mathbf{p}=\{1, 0, 2\}$, $\mathbf{q}=\{0, 1, 1\}$, $\mathbf{r}=\{2, -1, 4\}$.
1.9. $\mathbf{x}=\{3, 3, -1\}$, $\mathbf{p}=\{3, 1, 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1, 2, 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 0, 2\}$.
1.10. $\mathbf{x}=\{-1, 7, -4\}$, $\mathbf{p}=\{-1, 2, 1\}$, $\mathbf{q}=\{2, 0, 3\}$, $\mathbf{r}=\{1, 1, -1\}$.
1.11. $\mathbf{x}=\{6, 5, -14\}$, $\mathbf{p}=\{1, 1, 4\}$, $\mathbf{q}=\{0, -3, 2\}$, $\mathbf{r}=\{2, 1, -1\}$.
1.12. $\mathbf{x}=\{6, -1, 7\}$, $\mathbf{p}=\{1, -2, 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1, 1, 3\}$, $\mathbf{r}=\{1, 0, 4\}$.
1.13. $\mathbf{x}=\{5, 15, 0\}$, $\mathbf{p}=\{1, 0, 5\}$, $\mathbf{q}=\{-1, 3, 2\}$, $\mathbf{r}=\{0, -1, 1\}$.
1.14. $\mathbf{x}=\{2, -1, 11\}$, $\mathbf{p}=\{1, 1, 0\}$, $\mathbf{q}=\{0, 1, -2\}$, $\mathbf{r}=\{1, 0, 3\}$.
1.15. $\mathbf{x}=\{11, 5, -3\}$, $\mathbf{p}=\{1, 0, 2\}$, $\mathbf{q}=\{-1, 0, 1\}$, $\mathbf{r}=\{2, 5, -3\}$.
1.16. $\mathbf{x}=\{8, 0, 5\}$, $\mathbf{p}=\{2, 0, 1\}$, $\mathbf{q}=\{1, 1, 0\}$, $\mathbf{r}=\{4, 1, 2\}$.
1.17. $\mathbf{x}=\{3, 1, 8\}$, $\mathbf{p}=\{0, 1, 3\}$, $\mathbf{q}=\{1, 2, -1\}$, $\mathbf{r}=\{2, 0, -1\}$.
1.18. $\mathbf{x}=\{8, 1, 12\}$, $\mathbf{p}=\{1, 2, -1\}$, $\mathbf{q}=\{3, 0, 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 1, 1\}$.
1.19. $\mathbf{x}=\{-9, -8, -3\}$, $\mathbf{p}=\{1, 4, 1\}$, $\mathbf{q}=\{-3, 2, 0\}$, $\mathbf{r}=\{1, -1, 2\}$.
1.20. $\mathbf{x}=\{-5, 9, -13\}$, $\mathbf{p}=\{0, 1, -2\}$, $\mathbf{q}=\{3, -1, 1\}$, $\mathbf{r}=\{4, 1, 0\}$.
1.21. $\mathbf{x}=\{-15, 5, 6\}$, $\mathbf{p}=\{0, 5, 1\}$, $\mathbf{q}=\{3, 2, -1\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 1, 0)$.
1.22. $\mathbf{x}=\{8, 9, 4\}$, $\mathbf{p}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{q}=\{0, -2, 1\}$, $\mathbf{r}=\{1, 3, 0\}$.
1.23. $\mathbf{x}=\{23, -14, -30\}$, $\mathbf{p}=\{2, 1, 0\}$, $\mathbf{q}=\{1, -1, 0\}$, $\mathbf{r}=\{-3, 2, 5\}$.
1.24. $\mathbf{x}=\{3, 1, 3\}$, $\mathbf{p}=\{2, 1, 0\}$, $\mathbf{q}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{r}=\{4, 2, 1\}$.

1.25. $\mathbf{x}=\{-1, 7, 0\}$, $\mathbf{p}=\{0, 3, 1\}$, $\mathbf{q}=\{1, -1, 2\}$, $\mathbf{r}=\{2, -1, 0\}$.
1.26. $\mathbf{x}=\{11, -1, 4\}$, $\mathbf{p}=\{1, -1, 2\}$, $\mathbf{q}=\{3, 2, 0\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 1, 1\}$.
1.27. $\mathbf{x}=\{-13, 2, 18\}$, $\mathbf{p}=\{1, 1, 4\}$, $\mathbf{q}=\{-3, 0, 2\}$, $\mathbf{r}=\{1, 2, -1\}$.
1.28. $\mathbf{x}=\{0, -8, 9\}$, $\mathbf{p}=\{0, -2, 1\}$, $\mathbf{q}=\{3, 1, -1\}$, $\mathbf{r}=\{4, 0, 1\}$.
1.29. $\mathbf{x}=\{8, -7, -13\}$, $\mathbf{p}=\{0, 1, 5\}$, $\mathbf{q}=\{3, -1, 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1, 0, 1\}$.
1.30. $\mathbf{x}=\{2, 7, 5\}$, $\mathbf{p}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{q}=\{1, -2, 0\}$, $\mathbf{r}=\{0, 3, 1\}$.
1.31. $\mathbf{x}=\{15, -20, -1\}$, $\mathbf{p}=\{0, 2, 1\}$, $\mathbf{q}=\{0, 1, -1\}$, $\mathbf{r}=\{5, -3, 2\}$.

Задача 2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, построенные по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$?

2.1. $\mathbf{a}=\{1, -2, 3\}$, $\mathbf{b}=\{3, 0, -1\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-\mathbf{a}$.
2.2. $\mathbf{a}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{b}=\{-2, 3, 5\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$.
2.3. $\mathbf{a}=\{-2, 4, 1\}$, $\mathbf{b}=\{1, -2, 7\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$.
2.4. $\mathbf{a}=\{1, 2, -3\}$, $\mathbf{b}=\{2, -1, -1\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=8\mathbf{a}-\mathbf{b}$.
2.5. $\mathbf{a}=\{3, 5, 4\}$, $\mathbf{b}=\{5, 9, 7\}$, $\mathbf{c}_1=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.
2.6. $\mathbf{a}=\{1, 4, -2\}$, $\mathbf{b}=\{1, 1, -1\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{a}+2\mathbf{b}$.
2.7. $\mathbf{a}=\{1, -2, 5\}$, $\mathbf{b}=\{3, -1, 0\}$, $\mathbf{c}_1=4a-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.
2.8. $\mathbf{a}=\{3, 4, -1\}$, $\mathbf{b}=\{2, -1, 1\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.
2.9. $\mathbf{a}=\{-2, -3, -2\}$, $\mathbf{b}=\{1, 0, 5\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+9\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=-\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.
2.10. $\mathbf{a}=\{-1, 4, 2\}$, $\mathbf{b}=\{3, -2, 6\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}$.
2.11. $\mathbf{a}=\{5, 0, -1\}$, $\mathbf{b}=\{7, 2, 3\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}$.
2.12. $\mathbf{a}=\{0, 3, -2\}$, $\mathbf{b}=\{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}$.
2.13. $\mathbf{a}=\{-2, 7, -1\}$, $\mathbf{b}=\{-3, 5, 2\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$.
2.14. $\mathbf{a}=\{3, 7, 0\}$, $\mathbf{b}=\{1, -3, 4\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.
2.15. $\mathbf{a}=\{-1, 2, -1\}$, $\mathbf{b}=\{2, -7, 1\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}$.
2.16. $\mathbf{a}=\{7, 9, -2\}$, $\mathbf{b}=\{5, 4, 3\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$.
2.17. $\mathbf{a}=\{5, 0, -2\}$, $\mathbf{b}=\{6, 4, 3\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-10\mathbf{a}$.
2.18. $\mathbf{a}=\{8, 3, -1\}$, $\mathbf{b}=\{4, 1, 3\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=2\mathbf{b}-4\mathbf{a}$.
2.19. $\mathbf{a}=\{3, -1, 6\}$, $\mathbf{b}=\{5, 7, 10\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.
2.20. $\mathbf{a}=\{1, -2, 4\}$, $\mathbf{b}=\{7, 3, 5\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.
2.21. $\mathbf{a}=\{3, 7, 0\}$, $\mathbf{b}=\{4, 6, -1\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-7\mathbf{b}$.
2.22. $\mathbf{a}=\{2, -1, 4\}$, $\mathbf{b}=\{3, -7, -6\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.
2.23. $\mathbf{a}=\{5, -1, -2\}$, $\mathbf{b}=\{6, 0, 7\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-6\mathbf{a}$.
2.24. $\mathbf{a}=\{-9, 5, 3\}$, $\mathbf{b}=\{7, 1, -2\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}$.
2.25. $\mathbf{a}=\{4, 2, 9\}$, $\mathbf{b}=\{0, -1, 3\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{b}-3\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.
2.26. $\mathbf{a}=\{2, -1, 6\}$, $\mathbf{b}=\{-1, 3, 8\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$.
2.27. $\mathbf{a}=\{5, 0, 8\}$, $\mathbf{b}=\{-3, 1, 7\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=12\mathbf{b}-9\mathbf{a}$.
2.28. $\mathbf{a}=\{-1, 3, 4\}$, $\mathbf{b}=\{2, -1, 0\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}$.
2.29. $\mathbf{a}=\{4, 2, -7\}$, $\mathbf{b}=\{5, 0, -3\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.
2.30. $\mathbf{a}=\{2, 0, -5\}$, $\mathbf{b}=\{1, -3, 4\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.
2.31. $\mathbf{a}=\{-1, 2, 8\}$, $\mathbf{b}=\{3, 7, -1\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=9\mathbf{b}-12\mathbf{a}$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3.1. $A\ (1, -2, 3)$, $B\ (0, -1, 2)$, $C\ (3, -4, 5)$.
3.2. $A\ (0, -3, 6)$, $B\ (-12, -3, -3)$, $C\ (-9, -3, -6)$.
3.3. $A\ (3, 3, -1)$, $B\ (5, 5, -2)$, $C\ (4, 1, 1)$.
3.4. $A\ (-1, 2, -3)$, $B\ (3, 4, -6)$, $C\ (1, 1, -1)$.

3.5. $A(-4, -2, 0)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(3, -2, 1)$.
3.6. $A(5, 3, -1)$, $B(5, 2, 0)$, $C(6, 4, -1)$.
3.7. $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$, $C(2, 3, 0)$.
3.8. $A(2, -4, 6)$, $B(0, -2, 4)$, $C(6, -8, 10)$.
3.9. $A(0, 1, -2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(4, 1, 1)$.
3.10. $A(3, 3, -1)$, $B(1, 5, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
3.11. $A(2, 1, -1)$, $B(6, -1, -4)$, $C(4, 2, 1)$.
3.12. $A(-1, -2, 1)$, $B(-4, -2, 5)$, $C(-8, -2, 2)$.
3.13. $A(6, 2, -3)$, $B(6, 3, -2)$, $C(7, 3, -3)$.
3.14. $A(0, 0, 4)$, $B(-3, -6, 1)$, $C(-5, -10, -1)$.
3.15. $A(2, -8, -1)$, $B(4, -6, 0)$, $C(-2, -5, -1)$.
3.16. $A(3, -6, 9)$, $B(0, -3, 6)$, $C(9, -12, 15)$.
3.17. $A(0, 2, -4)$, $B(8, 2, 2)$, $C(6, 2, 4)$.
3.18. $A(3\ 3, -1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
3.19. $A(-4, 3, 0)$, $B(0, 1, 3)$, $C(-2, 4, -2)$.
3.20. $A(1, -1, 0)$, $B(-2, -1, 4)$, $C(8, -1, -1)$.
3.21. $A(7, 0, 2)$, $B(7, 1, 3)$, $C(8, -1, 2)$.
3.22. $A(2, 3, 2)$, $B(-1, -3, -1)$, $C(-3, -7, -3)$.
3.23. $A(2, 2, 7)$, $B(0, 0, 6)$, $C(-2, 5, 7)$.
3.24. $A(-1, 2, -3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-3, 4, -5)$.
3.25. $A(0, 3, -6)$, $B(9, 3, 6)$, $C(12, 3, 3)$.
3.26. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(4, 1, -3)$.
3.27. $A(-2, 1, 1)$, $B(2, 3, -2)$, $C(0, 0, 3)$.
3.28. $A(1, 4, -1)$, $B(-2, 4, -5)$, $C(8, 4, 0)$.
3.29. $A(0, 1, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(1, 2, 0)$.
3.30. $A(-4, 0, 4)$, $B(-1, 6, 7)$, $C(1, 10, 9)$.
3.31. $A(-2, 4, -6)$, $B(0, 2, -4)$, $C(-6, 8, -10)$.

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

4.1. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=1$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/6$.

4.2. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=4$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.3. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=1/5$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/2$.

4.4. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+5\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=4$, $|\mathbf{q}|=1/2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=5\pi/6$.

4.5. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-2q$, $\mathbf{b}=2\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=2$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=3\pi/4$.

4.6. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=2$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.7. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=3$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/2$.

4.8. $\mathbf{a}=4\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=7$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.9. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-4\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=1$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/6$.

4.10. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+4\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=7$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.11. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=10$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/2$.

4.12. $\mathbf{a}=4\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=5$, $|\mathbf{q}|=4$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.13. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=6$, $|\mathbf{q}|=7$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.14. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=3$, $|\mathbf{q}|=4$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.15. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=2$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.16. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=4$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/6$.

4.17. $\mathbf{a}=5\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=1$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.18. $\mathbf{a}=7\mathbf{p}-2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=1/2$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/2$.

4.19. $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=3$, $|\mathbf{q}|=4$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.20. $\mathbf{a}=10\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=4$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/6$.

4.21. $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=8$, $|\mathbf{q}|=1/2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.22. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+4\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$; $|\mathbf{p}|=2{,}5$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/2$.

4.23. $\mathbf{a}=7\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=3$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=3\pi/4$.

4.24. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=3$, $|\mathbf{q}|=5$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=2\pi/3$.

4.25. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=7$, $|\mathbf{q}|=2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.26. $\mathbf{a}=5\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=5$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=5\pi/6$.

4.27. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-4\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=2$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/4$.

4.28. $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=5\mathbf{q}+\mathbf{p}$; $|\mathbf{p}|=1/2$, $|\mathbf{q}|=4$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=5\pi/6$.

4.29. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=2$, $|\mathbf{q}|=1$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/3$.

4.30. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=5\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=2$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=\pi/2$.

4.31. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}|=4$, $|\mathbf{q}|=3$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}})=3\pi/4$.

Задача 5. Компланарны ли векторы a, b и c?

5.1. $\mathbf{a}=\{2, 3, 1\}$, $\mathbf{b}=\{-1, 0, -1\}$, $\mathbf{c}=\{2, 2, 2\}$.
5.2. $\mathbf{a}=\{3, 2, 1\}$, $\mathbf{b}=\{2, 3, 4\}$, $\mathbf{c}=\{3, 1, -1\}$.
5.3. $\mathbf{a}=\{1, 5, 2\}$, $\mathbf{b}=\{-1, 1, -1\}$, $\mathbf{c}=\{1, 1, 1\}$.
5.4. $\mathbf{a}=\{1, -1, -3\}$, $\mathbf{b}=\{3, 2, 1\}$, $\mathbf{c}=\{2, 3, 4\}$.
5.5. $\mathbf{a}=\{3, 3, 1\}$, $\mathbf{b}=\{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c}=\{1, 1, 1\}$.
5.6. $\mathbf{a}=\{3, 1, -1\}$, $\mathbf{b}=\{-2, -1, 0\}$, $\mathbf{c}=\{5, 2, -1\}$.
5.7. $\mathbf{a}=\{4, 3, 1\}$, $\mathbf{b}=\{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c}=\{2, 2, 2\}$.
5.8. $\mathbf{a}=\{4, 3, 1\}$, $\mathbf{b}=\{6, 7, 4\}$, $\mathbf{c}=\{2, 0, -1\}$.
5.9. $\mathbf{a}=\{3, 2, 1\}$, $\mathbf{b}=\{1, -3, -7\}$, $\mathbf{c}=\{1, 2, 3\}$.
5.10. $\mathbf{a}=\{3, 7, 2\}$, $\mathbf{b}=\{-2, 0, -1\}$, $\mathbf{c}=\{2, 2, 1\}$.
5.11. $\mathbf{a}=\{1, -2, 6\}$, $\mathbf{b}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{c}=\{2, -6, 17\}$.
5.12. $\mathbf{a}=\{6, 3, 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1, -2, -1\}$, $\mathbf{c}=\{2, 1, 2\}$.
5.13. $\mathbf{a}=\{7, 3, 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1, -2, -1\}$, $\mathbf{c}=\{4, 2, 4\}$.
5.14. $\mathbf{a}=\{2, 3, 2\}$, $\mathbf{b}=\{4, 7, 5\}$, $\mathbf{c}=\{2, 0, -1\}$.

5.15. $\mathbf{a}=\{5, 3, 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1, 0, -1\}$, $\mathbf{c}=\{4, 2, 4\}$.
5.16. $\mathbf{a}=\{3, 10, 5\}$, $\mathbf{b}=\{-2, -2, -3\}$, $\mathbf{c}=\{2, 4, 3\}$.
5.17. $\mathbf{a}=\{-2, -4, -3\}$, $\mathbf{b}=\{4, 3, 1\}$, $\mathbf{c}=\{6, 7, 4\}$.
5.18. $\mathbf{a}=\{3, 1, -1\}$, $\mathbf{b}=\{1, 0, -1\}$, $\mathbf{c}=\{8, 3, -2\}$.
5.19. $\mathbf{a}=\{4, 2, 2\}$, $\mathbf{b}=\{-3, -3, -3\}$, $\mathbf{c}=\{2, 1, 2\}$.
5.20. $\mathbf{a}=\{4, 1, 2\}$, $\mathbf{b}=\{9, 2, 5\}$, $\mathbf{c}=\{1, 1, -1\}$.
5.21. $\mathbf{a}=\{5, 3, 4\}$, $\mathbf{b}=\{4, 3, 3\}$, $\mathbf{c}=\{9, 5, 8\}$.
5.22. $\mathbf{a}=\{3, 4, 2\}$, $\mathbf{b}=\{1, 1, 0\}$, $\mathbf{c}=\{8, 11, 6\}$.
5.23. $\mathbf{a}=\{4, -1, -6\}$, $\mathbf{b}=\{1, -3, -7\}$, $\mathbf{c}=\{2, -1, -4\}$.
5.24. $\mathbf{a}=\{3, 1, 0\}$, $\mathbf{b}=\{-5, -4, -5\}$, $\mathbf{c}=\{4, 2, 4\}$.
5.25. $\mathbf{a}=\{3, 0, 3\}$, $\mathbf{b}=\{8, 1, 6\}$, $\mathbf{c}=\{1, 1, -1\}$.
5.26. $\mathbf{a}=\{1, -1, 4\}$, $\mathbf{b}=\{1, 0, 3\}$, $\mathbf{c}=\{1, -3, 8\}$.
5.27. $\mathbf{a}=\{6, 3, 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1, -2, -1\}$, $\mathbf{c}=\{2, 1, 2\}$.
5.28. $\mathbf{a}=\{4, 1, 1\}$, $\mathbf{b}=\{-9, -4, -9\}$, $\mathbf{c}=\{6, 2, 6\}$.
5.29. $\mathbf{a}=\{-3, 3, 3\}$, $\mathbf{b}=\{-4, 7, 6\}$, $\mathbf{c}=\{3, 0, -1\}$.
5.30. $\mathbf{a}=\{-7, 10, -5\}$, $\mathbf{b}=\{0, -2, -1\}$, $\mathbf{c}=\{-2, 4, -1\}$.
5.31. $\mathbf{a}=\{7, 4, 6\}$, $\mathbf{b}=\{2, 1, 1\}$, $\mathbf{c}=\{19, 11, 17\}$.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

6.1. A_1 (1, 3, 6), A_2 (2, 2, 1), A_3 (−1, 0, 1), A_4 (−4, 6, −3).
6.2. A_1 (−4, 2, 6), A_2 (2, −3, 0), A_3 (−10, 5, 8), A_4 (−5, 2, −4).
6.3. A_1 (7, 2, 4), A_2 (7, −1, −2), A_3 (3, 3, 1), A_4 (−4, 2, 1).
6.4. A_1 (2, 1, 4), A_2 (−1, 5, −2), A_3 (−7, −3, 2), A_4 (−6, −3, 6).
6.5. A_1 (−1, −5, 2), A_2 (−6, 0, −3), A_3 (3, 6, −3), A_4 (−10, 6, 7).
6.6. A_1 (0, −1, −1), A_2 (−2, 3, 5), A_3 (1, −5, −9), A_4 (−1, −6, 3).
6.7. A_1 (5, 2, 0), A_2 (2, 5, 0), A_3 (1, 2, 4), A_4 (−1, 1, 1).
6.8. A_1 (2, −1, −2), A_2 (1, 2, 1), A_3 (5, 0, −6), A_4 (−10, 9, −7).
6.9. A_1 (−2, 0, −4), A_2 (−1, 7, 1), A_3 (4, −8, −4), A_4 (1, −4, 6).
6.10. A_1 (14, 4, 5), A_2 (−5, −3, 2), A_3 (−2, −6, −3), A_4 (−2, 2, −1).
6.11. A_1 (1, 2, 0), A_2 (3, 0, −3), A_3 (5, 2, 6), A_4 (8, 4, −9).
6.12. A_1 (2, −1, 2), A_2 (1, 2, −1), A_3 (3, 2, 1), A_4 (−4, 2, 5).
6.13. A_1 (1, 1, 2), A_2 (−1, 1, 3), A_3 (2, −2, 4), A_4 (−1, 0, −2).
6.14. A_1 (2, 3, 1), A_2 (4, 1, −2), A_3 (6, 3, 7), A_4 (7, 5, −3).
6.15. A_1 (1, 1, −1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (3, 2, 1), A_4 (5, 9, −8).
6.16. A_1 (1, 5, −7), A_2 (−3, 6, 3), A_3 (−2, 7, 3), A_4 (−4, 8, −12).
6.17. A_1 (−3, 4, −7), A_2 (1, 5, −4), A_3 (−5, −2, 0), A_4 (2, 5, 4).
6.18. A_1 (−1, 2, −3), A_2 (4, −1, 0), A_3 (2, 1, −2), A_4 (3, 4, 5).
6.19. A_1 (4, −1, 3), A_2 (−2, 1, 0), A_3 (0, −5, 1), A_4 (3, 2, −6).
6.20. A_1 (1, −1, 1), A_2 (−2, 0, 3), A_3 (2, 1, −1), A_4 (2, −2, −4).
6.21. A_1 (1, 2, 0,), A_2 (1, −1, 2), A_3 (0, 1, −1), A_4 (−3, 0, 1).
6.22. A_1 (1, 0, 2), A_2 (1, 2, −1), A_3 (2, −2, 1), A_4 (2, 1, 0).
6.23. A_1 (1, 2, −3), A_2 (1, 0, 1), A_3 (−2, −1, 6), A_4 (0, −5, −4).
6.24. A_1 (3, 10, −1), A_2 (−2, 3, −5), A_3 (−6, 0, −3), A_4 (1, −1, 2).
6.25. A_1 (−1, 2, 4), A_2 (−1, −2, −4), A_3 (3, 0, −1), A_4 (7, −3, 1).
6.26. A_1 (0, −3, 1), A_2 (−4, 1, 2), A_3 (2, −1, 5), A_4 (3, 1, −4).

6.27. A_1 (1, 3, 0,), A_2 (4, −1, 2), A_3 (3, 0, 1), A_4 (−4, 3, 5).
6.28. A_1 (−2, −1, −1), A_2 (0, 3, 2), A_3 (3, 1, −4), A_4 (−4, 7, 3).
6.29. A_1 (−3, −5, 6), A_2 (2, 1, −4), A_3 (0, −3, −1), A_4 (−5, 2, −8).
6.30. A_1 (2, −4, −3), A_2 (5, −6, 0), A_3 (−1, 3, −3), A_4 (−10, −8, 7).
6.31. A_1 (1, −1, 2), A_2 (2, 1, 2), A_3 (1, 1, 4), A_4 (6, −3, 8).

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

7.1. M_1 (−3, 4, −7), M_2 (1, 5, −4), M_3 (−5, −2, 0), M_0 (−12, 7, −1).
7.2. M_1 (−1, 2, −3), M_2 (4, −1, 0), M_3 (2, 1, −2), M_0 (1, −6, −5).
7.3. M_1 (−3, −1, 1), M_2 (−9, 1, −2), M_3 (3, −5, 4), M_0 (−7, 0, −1).
7.4. M_1 (1, −1, 1), M_2 (−2, 0, 3), M_3 (2, 1, −1), M_0 (−2, 4, 2).
7.5. M_1 (1, 2, 0), M_2 (1, −1, 2), M_3 (0, 1, −1), M_0 (2, −1, 4).
7.6. M_1 (1, 0, 2), M_2 (1, 2, −1), M_3 (2, −2, 1), M_0 (−5, −9, 1).
7.7. M_1 (1, 2, −3), M_2 (1, 0, 1), M_3 (−2, −1, 6), M_0 (3, −2, −9).
7.8. M_1 (3, 10, −1), M_2 (−2, 3, −5), M_3 (−6, 0, −3), M_0 (−6, 7, −10).
7.9. M_1 (−1, 2, 4), M_2 (−1, −2, −4), M_3 (3, 0, −1), M_0 (−2, 3, 5).
7.10. M_1 (0, −3, 1), M_2 (−4, 1, 2), M_3 (2, −1, 5), M_0 (−3, 4, −5).
7.11. M_1 (1, 3, 0), M_2 (4, −1, 2), M_3 (3, 0, 1), M_0 (4, 3, 0).
7.12. M_1 (−2, −1, −1), M_2 (0, 3, 2), M_3 (3, 1, −4), M_0 (−21, 20, −16).
7.13. M_1 (−3, −5, 6), M_2 (2, 1, −4), M_3 (0, −3, −1), M_0 (3, 6, 68).
7.14. M_1 (2, −4, −3), M_2 (5, −6, 0), M_3 (−1, 3, −3), M_0 (2, −10, 8).
7.15. M_1 (1, −1, 2), M_2 (2, 1, 2), M_3 (1, 1, 4), M_0 (−3, 2, 7).
7.16. M_1 (1, 3, 6), M_2 (2, 2, 1), M_3 (−1, 0, 1), M_0 (5, −4, 5).
7.17. M_1 (−4, 2, 6), M_2 (2, −3, 0,) M_3 (−10, 5, 8), M_0 (−12, 1, 8).
7.18. M_1 (7, 2, 4), M_2 (7, −1, −2), M_3 (−5, −2, −1), M_0 (10, 1, 8).
7.19. M_1 (2, 1, 4), M_2 (3, 5, −2), M_3 (−7, −3, 2), M_0 (−3, 1, 8).
7.20. M_1 (−1, −5, 2), M_2 (−6, 0, −3), M_3 (3, 6, −3), M_0 (10, −8, −7).
7.21. M_1 (0, −1, −1), M_2 (−2, 3, 5), M_3 (1, −5, −9), M_0 (−4, −13, 6).
7.22. M_1 (5, 2, 0), M_2 (2, 5, 0), M_3 (1, 2, 4), M_0 (−3, −6, −8).
7.23. M_1 (2, −1, −2), M_2 (1, 2, 1), M_3 (5, 0, −6), M_0 (14, −3, 7).
7.24. M_1 (−2, 0, −4), M_2 (−1, 7, 1), M_3 (4, −8, −4), M_0 (−6, 5, 5).
7.25. M_1 (14, 4, 5), M_2 (−5, −3, 2), M_3 (−2, −6, −3), M_0 (−1, −8, 7).
7.26. M_1 (1, 2, 0), M_2 (3, 0, −3), M_3 (5, 2, 6), M_0 (−13, −8, 16).
7.27. M_1 (2, −1, 2), M_2 (1, 2, −1), M_3 (3, 2, 1), M_0 (−5, 3, 7).
7.28. M_1 (1, 1, 2), M_2 (−1, 1, 3), M_3 (2, −2, 4), M_0 (2, 3, 8).
7.29. M_1 (2, 3, 1), M_2 (4, 1, −2), M_3 (6, 3, 7), M_0 (−5, −4, 8).
7.30. M_1 (1, 1, −1), M_2 (2, 3, 1), M_3 (3, 2, 1), M_0 (−3, −7, 6).
7.31. M_1 (1, 5, −7), M_2 (−3, 6, 3), M_3 (−2, 7, 3), M_0 (1, −1, 2).

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

8.1. A (1, 0, −2), B (2, −1, 3), C (0, −3, 2).
8.2. A (−1, 3, 4), B (−1, 5, 0), C (2, 6, 1).
8.3. A (4, −2, 0), B (1, −1, −5), C (−2, 1, −3).
8.4. A (−8, 0, 7), B (−3, 2, 4), C (−1, 4, 5).
8.5. A (7, −5, 1), B (5, −1, −3), C (3, 0, −4).

8.6. $A(-3, 5, -2)$, $B(-4, 0, 3)$, $C(-3, 2, 5)$.
8.7. $A(1, -1, 8)$, $B(-4, -3, 10)$, $C(-1, -1, 7)$.
8.8. $A(-2, 0, -5)$, $B(2, 7, -3)$, $C(1, 10, -1)$.
8.9. $A(1, 9, -4)$, $B(5, 7, 1)$, $C(3, 5, 0)$.
8.10. $A(-7, 0, 3)$, $B(1, -5, -4)$, $C(2, -3, 0)$.
8.11. $A(0, -3, 5)$, $B(-7, 2, 6)$, $C(-3, 2, 4)$.
8.12. $A(5, -1, 2)$, $B(2, -4, 3)$, $C(4, -1, 3)$.
8.13. $A(-3, 7, 2)$, $B(3, 5, 1)$, $C(4, 5, 3)$.
8.14. $A(0, -2, 8)$, $B(4, 3, 2)$, $C(1, 4, 3)$.
8.15. $A(1, -1, 5)$, $B(0, 7, 8)$, $C(-1, 3, 8)$.
8.16. $A(-10, 0, 9)$, $B(12, 4, 11)$, $C(8\ 5, 15)$.
8.17. $A(3, -3, -6)$, $B(1, 9, -5)$, $C(6, 6, -4)$.
8.18. $A(2, 1, 7)$, $B(9, 0, 2)$, $C(9, 2, 3)$.
8.19. $A(-7, 1, -4)$, $B(8, 11, -3)$, $C(9, 9, -1)$.
8.20. $A(1, 0, -6)$, $B(-7, 2, 1)$, $C(-9, 6, 1)$.
8.21. $A(-3, 1, 0)$, $B(6, 3, 3)$, $C(9, 4, -2)$.
8.22. $A(-4, -2, 5)$, $B(3, -3, -7)$, $C(9, 3, -7)$.
8.23. $A(0, -8, 10)$, $B(-5, 5, 7)$, $C(-8, 0, 4)$.
8.24. $A(1, -5, -2)$, $B(6, -2, 1)$, $C(2, -2, -2)$.
8.25. $A(0, 7, -9)$, $B(-1, 8, -11)$, $C(-4, 3, -12)$.
8.26. $A(-3, -1, 7)$, $B(0, 2, -6)$, $C(2, 3, -5)$.
8.27. $A(5, 3, -1)$, $B(0, 0, -3)$, $C(5, -1, 0)$.
8.28. $A(-1, 2, -2)$, $B(13, 14, 1)$, $C(14, 15, 2)$.
8.29. $A(7, -5, 0)$, $B(8, 3, -1)$, $C(8, 5, 1)$.
8.30. $A(-3, 6, 4)$, $B(8, -3, 5)$, $C(0, -3, 7)$.
8.31. $A(2, 5, -3)$, $B(7, 8, -1)$, $C(9, 7, 4)$.

Задача 9. Найти угол между плоскостями.

9.1. $x-3y+5=0$, $2x-y+5z-16=0$.
9.2. $x-3y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
9.3. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+9=0$.
9.4. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.
9.5. $6x+2y-4z+17=0$, $9x+3y-6z-4=0$.
9.6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
9.7. $3y-z=0$, $2y+z=0$.
9.8. $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$.
9.9. $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.
9.10. $2x-y+5z+16=0$, $x+2y+3z+8=0$.
9.11. $2x+2y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
9.12. $3x+y+z-4=0$, $y+z+5=0$.
9.13. $3x-2y-2z-16=0$, $x+y-3z-7=0$.
9.14. $2x+2y+z+9=0$, $x-y+3z-1=0$.
9.15. $x+2y+2z-3=0$, $2x-y+2z+5=0$.
9.16. $3x+2y-3z-1=0$, $x+y+z-7=0$.
9.17. $x-3y-2z-8=0$, $x+y-z+3=0$.
9.18. $3x-2y+3z+23=0$, $y+z+5=0$.
9.19. $x+y+3z-7=0$, $y+z-1=0$.

9.20. $x-2y+2z+17=0$, $x-2y-1=0$.

9.21. $x+2y-1=0$, $x+y+6=0$.

9.22. $2x-z+5=0$, $2x+3y-7=0$.

9.23. $5x+3y+z-18=0$, $2y+z-9=0$.

9.24. $4x+3z-2=0$, $x+2y+2z+5=0$.

9.25. $x+4y-z+1=0$, $2x+y+4z-3=0$.

9.26. $2y+z-9=0$, $x-y+2z-1=0$.

9.27. $2x-6y+14z-1=0$, $5x-15y+35z-3=0$.

9.28. $x-y+7z-1=0$, $2x-2y-5=0$.

9.29. $3x-y-5=0$, $2x+y-3=0$.

9.30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0$, $x-y+z\sqrt{2}-1=0$.

9.31. $x+2y-2z-7=0$, $x+y-35=0$.

Задача 10. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.

10.1. $A(0, 0, z)$, $B(5, 1, 0)$, $C(0, 2, 3)$.
10.2. $A(0, 0, z)$, $B(3, 3, 1)$, $C(4, 1, 2)$.
10.3. $A(0, 0, z)$, $B(3, 1, 3)$, $C(1, 4, 2)$.
10.4. $A(0, 0, z)$, $B(-1, -1, -6)$, $C(2, 3, 5)$.
10.5. $A(0, 0, z)$, $B(-13, 4, 6)$, $C(10, -9, 5)$.
10.6. $A(0, 0, z)$, $B(-5, -5, 6)$, $C(-7, 6, 2)$.
10.7. $A(0, 0, z)$, $B(-18, 1, 0)$, $C(15, -10, 2)$.
10.8. $A(0, 0, z)$, $B(10, 0, -2)$, $C(9, -2, 1)$.
10.9. $A(0, 0, z)$, $B(-6, 7, 5)$, $C(8, -4, 3)$.
10.10. $A(0, 0, z)$, $B(6, -7, 1)$, $C(-1, 2, 5)$.
10.11. $A(0, 0, z)$, $B(7, 0, -15)$, $C(2, 10, -12)$.
10.12. $A(0, y, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(0, 2, 4)$.
10.13. $A(0, y, 0)$, $B(1, 6, 4)$, $C(5, 7, 1)$.
10.14. $A(0, y, 0)$, $B(-2, 8, 10)$, $C(6, 11, -2)$.
10.15. $A(0, y, 0)$, $B(-2, -4, 6)$, $C(7, 2, 5)$.
10.16. $A(0, y, 0)$, $B(2, 2, 4)$, $C(0, 4, 2)$.
10.17. $A(0, y, 0)$, $B(0, -4, 1)$, $C(1, -3, 5)$.
10.18. $A(0, y, 0)$, $B(0, 5, -9)$, $C(-1, 0, 5)$.
10.19. $A(0, y, 0)$, $B(-2, 4, -6)$, $C(8, 5, 1)$.
10.20. $A(0, y, 0)$, $B(7, 3, -4)$, $C(1, 5, 7)$.
10.21. $A(0, y, 0)$, $B(0, -2, 4)$, $C(-4, 0, 4)$.
10.22. $A(x, 0, 0)$, $B(0, 1, 3)$, $C(2, 0, 4)$.
10.23. $A(x, 0, 0)$, $B(4, 0, 5)$, $C(5, 4, 2)$.
10.24. $A(x, 0, 0)$, $B(8, 1, -7)$, $C(10, -2, 1)$.
10.25. $A(x, 0, 0)$, $B(3, 5, 6)$, $C(1, 2, 3)$.
10.26. $A(x, 0, 0)$, $B(4, 5, -2)$, $C(2, 3, 4)$.
10.27. $A(x, 0, 0)$, $B(-2, 0, 6)$, $C(0, -2, -4)$.
10.28. $A(x, 0, 0)$, $B(1, 5, 9)$, $C(3, 7, 11)$.
10.29. $A(x, 0, 0)$, $B(4, 6, 8)$, $C(2, 4, 6)$.
10.30. $A(x, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 6, 10)$.
10.31. $A(x, 0, 0)$, $B(-2, -4, -6)$, $C(-1, -2, -3)$.

Задача 11. Пусть k — коэффициент гомотетии с центром в начале координат. Верно ли, что точка A принадлежит образу плоскости α?

11.1. $A(1, 2, -1)$, $\alpha: 2x+3y+z-1=0$, $k=2$.
11.2. $A(2, 1, 2)$, $\alpha: x-2y+z+1=0$, $k=-2$.
11.3. $A(-1, 1, 1)$, $\alpha: 3x-y+2z+4=0$, $k=1/2$.
11.4. $A(-2, 4, 1)$, $\alpha: 3x+y+2z+2=0$, $k=3$.
11.5. $A(1, 1/3, -2)$, $\alpha: x-3y+z+6=0$, $k=1/3$.
11.6. $A(1/2, 1/3, 1)$, $\alpha: 2x-3y+3z-2=0$, $k=1, 5$.
11.7. $A(2, 0, -1)$, $\alpha: x-3y+5z-1=0$, $k=-1$.
11.8. $A(1, -2, 1)$, $\alpha: 5x+y-z+6=0$, $k=2/3$.
11.9. $A(2, -5, 4)$, $\alpha: 5x+2y-z+3=0$, $k=4/3$.
11.10. $A(2, -3, 1)$, $\alpha: x+y-2z+2=0$, $k=5/2$.
11.11. $A(-2, 3, -3)$, $\alpha: 3x+2y-z-2=0$, $k=3/2$.
11.12. $A(1/4, 1/3, 1)$, $\alpha: 4x-3y+5z-10=0$, $k=1/2$.
11.13. $A(0, 1, -1)$, $\alpha: 6x-5y+3z-4=0$, $k=-3/4$.
11.14. $A(2, 3, -2)$, $\alpha: 3x-2y+4z-6=0$, $k=-4/3$.
11.15. $A(-2, -1, 1)$, $\alpha: x-2y+6z-10=0$, $k=3/5$.
11.16. $A(5, 0, -1)$, $\alpha: 2x-y+3z-1=0$, $k=3$.
11.17. $A(1, 1, 1)$, $\alpha: 7x-6y+z-5=0$, $k=-2$.
11.18. $A(1/3, 1, 1)$, $\alpha: 3x-y+5z-6=0$, $k=5/6$.
11.19. $A(2, 5, 1)$, $\alpha: 5x-2y+z-3=0$, $k=1/3$.
11.20. $A(-1, 2, 3)$, $\alpha: x-3y+z+2=0$, $k=2{,}5$.
11.21. $A(4, 3, 1)$, $\alpha: 3x-4y+5z-6=0$, $k=5/6$.
11.22. $A(3, 5, 2)$, $\alpha: 5x-3y+z-4=0$, $k=1/2$.
11.23. $A(4, 0, -3)$, $\alpha: 7x-y+3z-1=0$, $k=3$.
11.24. $A(-1, 1, -2)$, $\alpha: 4x-y+3z-6=0$, $k=-5/3$.
11.25. $A(2, -5, -1)$, $\alpha: 5x+2y-3z-9=0$, $k=1/3$.
11.26. $A(-3, -2, 4)$, $\alpha: 2x-3y+z-5=0$, $k=-4/5$.
11.27. $A(5, 0, -6)$, $\alpha: 6x-y-z+7=0$, $k=2/7$.
11.28. $A(1, 2, 2)$, $\alpha: 3x-z+5=0$, $k=-1/5$.
11.29. $A(3, 2, 4)$, $\alpha: 2x-3y+z-6=0$, $k=2/3$.
11.30. $A(7, 0, -1)$, $\alpha: x-y-z-1=0$, $k=4$.
11.31. $A(0, 3, -1)$, $\alpha: 2x-y+3z-1=0$, $k=2$.

Задача 12. Написать канонические уравнения прямой.

12.1. $2x+y+z-2=0$, $2x-y-3z+6=0$.
12.2. $x-3y+2z+2=0$, $x+3y+z+14=0$.
12.3. $x-2y+z-4=0$, $2x+2y-z-8=0$.
12.4. $x+y+z-2=0$, $x-y-2z+2=0$.
12.5. $2x+3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$.
12.6. $3x+y-z-6=0$, $3x-y+2z=0$.
12.7. $x+5y+2z+11=0$, $x-y-z-1=0$.
12.8. $3x+4y-2z+1=0$, $2x-4y+3z+4=0$.
12.9. $5x+y-3z+4=0$, $x-y+2z+2=0$.
12.10. $x-y-z-2=0$, $x-2y+z+4=0$.

12.11. $4x+y-3z+2=0,\ 2x-y+z-8=0.$

12.12. $3x+3y-2z-1=0,\ 2x-3y+z+6=0.$

12.13. $6x-7y-4z-2=0,\ x+7y-z-5=0.$

12.14. $8x-y-3z-1=0,\ x+y+z+10=0.$

12.15. $6x-5y-4z+8=0,\ 6x+5y+3z+4=0.$

12.16. $x+5y-z-5=0,\ 2x-5y+2z+5=0.$

12.17. $2x-3y+z+6=0,\ x-3y-2z+3=0.$

12.18. $5x+y+2z+4=0,\ x-y-3z+2=0.$

12.19. $4x+y+z+2=0,\ 2x-y-3z-8=0.$

12.20. $2x+y-3z-2=0,\ 2x-y+z+6=0.$

12.21. $x+y-2z-2=0,\ x-y+z+2=0.$

12.22. $x+5y-z+11=0,\ x-y+2z-1=0.$

12.23. $x-y+z-2=0,\ x-2y-z+4=0.$

12.24. $6x-7y-z-2=0,\ x+7y-4z-5=0.$

12.25. $x+5y+2z-5=0,\ 2x-5y-z+5=0.$

12.26. $x-3y+z+2=0,\ x+3y+2z+14=0.$

12.27. $2x+3y-2z+6=0,\ x-3y+z+3=0.$

12.28. $3x+4y+3z+1=0,\ 2x-4y-2z+4=0.$

12.29. $3x+3y+z-1=0,\ 2x-3y-2z+6=0.$

12.30. $6x-5y+3z+8=0,\ 6x+5y-4z+4=0.$

12.31. $2x-3y-2z+6=0,\ x-3y+z+3=-0.$

Задача 13. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

13.1. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4},\ x+2y+3z-14=0.$

13.2. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5},\ x+2y-5z+20=0.$

13.3. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2},\ x-3y+7z-24=0.$

13.4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2},\ 2x-y+4z=0.$

13.5. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0},\ 3x+y-5z-12=0.$

13.6. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2},\ x+3y-5z+9=0.$

13.7. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1},\ x-2y+5z+17=0.$

13.8. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1},\ x-2y+4z-19=0.$

13.9. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{-1},\ 2x-y+3z+23=0.$

13.10. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+3}{0},\ 2x-3y-5z-7=0.$

13.11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$, $4x+2y-z-11=0$.

13.12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$, $3x-2y-4z-8=0$.

13.13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$, $x+2y-z-2=0$.

13.14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$, $5x-y+4z+3=0$.

13.15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$, $x+3y+5z-42=0$.

13.16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$, $7x+y+4z-47=0$.

13.17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$, $2x+3y+7z-52=0$.

13.18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$, $3x+4y+7z-16=0$.

13.19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$, $2x-5y+4z+24=0$.

13.20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$, $x-2y-3z+18=0$.

13.21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$, $x+7y+3z+11=0$.

13.22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$, $3x+7y-5z-11=0$.

13.23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$, $4x+y-6z-5=0$.

13.24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$, $5x+9y+4z-25=0$.

13.25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0$.

13.26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$, $3x-2y+5z-3=0$.

13.27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$.

13.28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$.

13.29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$.

13.30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$, $5x+7y+9z-32=0$.

13.31. $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$, $2x+y+7z-3=0$.

Задача 14. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1 — 15) или плоскости (для вариантов 16 — 31).

14.1. $M(0, -3, -2)$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z}{1}$.

14.2. $M(2, -1, 1)$, $\frac{x-4,5}{1}=\frac{y+3}{-0,5}=\frac{z-2}{1}$.

14.3. $M(1, 1, 1)$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1,5}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

14.4. $M(1, 2, 3)$, $\frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}$.

14.5. $M(1, 0, -1)$, $\frac{x-3,5}{2}=\frac{y-1,5}{2}=\frac{z}{0}$.

14.6. $M(2, 1, 0)$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z+0,5}{1}$.

14.7. $M(-2, -3, 0)$, $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}$.

14.8. $M(-1, 0, -1)$, $\frac{x}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-2}{1}$.

14.9. $M(0, 2, 1)$, $\frac{x-1,5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

14.10. $M(3, -3, -1)$, $\frac{x-6}{5}=\frac{y-3,5}{4}=\frac{z+0,5}{0}$.

14.11. $M(3, 3, 3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

14.12. $M(-1, 2, 0)$, $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+0,7}{-0,2}=\frac{z-2}{2}$.

14.13. $M(2, -2, -3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+0,5}{0}=\frac{z+1,5}{0}$.

14.14. $M(-1, 0, 1)$, $\frac{x+0,5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}$.

14.15. $M(0, -3, -2)$, $\frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}$.

14.16. $M(1, 0, 1)$, $4x+6y+4z-25=0$.

14.17. $M(-1, 0, -1)$, $2x+6y-2z+11=0$. 14.18. $M(0, 2, 1)$, $2x+4y-3=0$.

14.19. $M(2, 1, 0)$, $y+z+2=0$. **14.20.** $M(-1, 2, 0)$, $4x-5y-z-7=0$.
14.21. $M(2, -1, 1)$, $x-y+2z-2=0$. **14.22.** $M(1, 1, 1)$, $x+4y+3z+5=0$.
14.23. $M(1, 2, 3)$, $2x+10y+10z-1=0$.
14.24. $M(0, -3, -2)$, $2x+10y+10z-1=0$.
14.25. $M(1, 0, -1)$, $2y+4z-1=0$.
14.26. $M(3, -3, -1)$, $2x-4y-4z-13=0$.
14.27. $M(-2, -3, 0)$, $x+5y+4=0$. **14.28.** $M(2, -2, -3)$, $y+z+2=0$.
14.29. $M(-1, 0, 1)$, $2x+4y-3=0$. **14.30.** $M(3, 3, 3)$, $8x+6y+8z-25=0$.
14.31. $M(-2, 0, 3)$, $2x-2y+10z+1=0$.

X. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Теоретические вопросы

1. Линейное пространство. Базис. Координаты.
2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.
3. Линейный оператор. Матрица оператора.
4. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
5. Действия над линейными операторами.
6. Собственные векторы и собственные значения.
7. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
8. Сопряженные и самосопряженные операторы. Их матрицы.
9. Ортогональное преобразование; свойства; матрица.
10. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Теоретические упражнения

1. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1-2x_2+x_3=0$.
2. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.
3. Найти координаты многочлена $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+$ $+a_3x^3$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.
4. Линейный оператор A в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу

$$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}.$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе (e_1, e_1+e_2, $e_1+e_2+e_3$).

5. Найти ядро и образ оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6. Пусть x и y — собственные векторы линейного оператора A, относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $z=\alpha x+\beta y$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ не является собственным вектором оператора A.

7. Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)$, $Ax=(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3)$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8. Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

Расчетные задания

Задача 1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое действительное число α?

1.1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых — целые числа;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha\cdot a$.

1.2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha\cdot a$.

1.3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha\cdot a$.

1.4. Множество всех векторов трехмерного пространства;
сумма: $[a\cdot b]$, произведение: $\alpha\cdot a$.

1.5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha\cdot|a|$.

1.6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов x, y, z;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha\cdot a$.

1.7. Множество всех функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, принимающих положительные значения;
сумма: $f(t)\cdot g(t)$, произведение: $f^{\alpha}(t)$.

1.8. Множество всех непрерывных функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$;
сумма: $f(t)+g(t)$, произведение: $\alpha\cdot f(t)$.

1.9. Множество всех четных функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$;
сумма: $f(t)\cdot g(t)$, произведение: $\alpha\cdot f(t)$.

1.10. Множество всех нечетных функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$;

сумма: $f(t)+g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

1.11. Множество всех линейных функций $a=f(x_1, x_2)$, $b=g(x_1, x_2)$;

сумма: $f(x_1, x_2)+g(x_1, x_2)$, произведение: $\alpha f(x_1, x_2)$.

1.12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.13. Множество всех многочленов степени меньшей или равной трем от переменных x, y;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a=\{x_1, x_2, ..., x_n)$, $b=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$;

сумма: $\{x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n\}$, произведение: $\{\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n\}$.

1.15. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $b=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$;

сумма: $\{x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n\}$, произведение: $\{\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n\}$.

1.16. Множество всех сходящихся последовательностей $a=\{u_n\}$, $b=\{v_n\}$;

сумма: $\{u_n+v_n\}$, произведение: $\{\alpha u_n\}$.

1.17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.18. Множество всех многочленов от одной переменной степени n;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.19. Множество всех диагональных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, .., n$;

сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.20. Множество всех невырожденных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, ..., n$;

сумма: $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.21. Множество всех квадратных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, ..., n$;

сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.22. Множество всех диагональных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, ..., n$;

сумма: $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.23. Множество всех прямоугольных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i=1, 2, ..., m$; $k=1, 2, ..., n$;

сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.24. Множество всех симметрических матриц
$a=\|a_{ik}\|$ $(a_{ki}=a_{ik})$, $b=\|b_{ik}\|$ $(b_{ki}=b_{ik})$, $i, k=1, 2, ..., n$;
сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.25. Множество всех целых чисел;
сумма: $a+b$, произведение: αa.

1.26. Множество всех действительных чисел;
сумма: $a+b$, произведение: αa.

1.27. Множество всех положительных чисел;
сумма: $a\cdot b$, произведение: a^{α}.

1.28. Множество всех отрицательных чисел;
сумма: $-|a|\cdot|b|$, произведение: $-|a|^{\alpha}$.

1.29. Множество всех действительных чисел;
сумма: $a\cdot b$, прозведение: $\alpha\cdot a$.

1.30. Множество всех дифференцируемых функций
$a=f(t)$, $b=g(t)$;
сумма: $f(t)+g(t)$, произведение: $\alpha\cdot f(t)$.

1.31. Множество всех дифференцируемых функций
$a=f(t)$, $b=g(t)$;
сумма: $f(t)\cdot g(t)$, произведение: $\alpha\cdot f(t)$.

Задача 2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

2.1. $\mathbf{a}=\{1, 4, 6\}$, $\mathbf{b}=\{1, -1, 1\}$, $\mathbf{c}=\{1, 1, 3\}$.
2.2. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.
2.3. $\mathbf{a}=\{2, -3, 1\}$, $\mathbf{b}=\{3, -1, 5\}$, $\mathbf{c}=\{1, -4, 3\}$.
2.4. 2, $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.5. $\mathbf{a}=\{5, 4, 3\}$, $\mathbf{b}=\{3, 3, 2\}$, $\mathbf{c}=\{8, 1, 3\}$.
2.6. 1, x, $\sin x$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.7. $\mathbf{a}=\{1, 1, 1\}$, $\mathbf{b}=\{0, 1, 1\}$, $\mathbf{c}=\{0, 0, 1\}$.
2.8. e^x, e^{2x}, e^{3x} на $(-\infty, +\infty)$.
2.9. $\mathbf{a}=\{1, -1, 2\}$, $\mathbf{b}=\{-1, 1, -1\}$, $\mathbf{c}=\{2, -1, 1\}$.
2.10. x, x^2, $(1+x)^2$, на $(-\infty, +\infty)$.
2.11. $\mathbf{a}=\{1, 2, 3\}$, $\mathbf{b}=\{4, 5, 6\}$, $\mathbf{c}=\{7, 8, 9\}$.
2.12. 1, x, x^2, $(1+x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.13. $\mathbf{a}=\{1, 1, 1\}$, $\mathbf{b}=\{1, 2, 3\}$, $\mathbf{c}=\{1, 3, 6\}$.
2.14. $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$, на $(-\pi/2, \pi/2)$.
2.15. $\mathbf{a}=\{3, 4, -5\}$, $\mathbf{b}=\{8, 7, -2\}$, $\mathbf{c}=\{2, -1, 8\}$.
2.16. e^x, e^{-x}, e^{2x} на $(-\infty, +\infty)$.
2.17. $\mathbf{a}=\{3, 2, -4\}$, $\mathbf{b}=\{4, 1, -2\}$, $\mathbf{c}=\{5, 2, -3\}$.
2.18. $1+x+x^2$, $1+2x+x^2$, $1+3x+x^2$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.19. $\mathbf{a}=\{0, 1, 1\}$, $\mathbf{b}=\{1, 0, 1\}$, $\mathbf{c}=\{1, 1, 0\}$.
2.20. 1, e^x, $\operatorname{sh} x$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.21. $\mathbf{a}=\{5, -6, 1\}$, $\mathbf{b}=\{3, -5, -2\}$, $\mathbf{c}=\{2, -1, 3\}$.
2.22. $1/x$, x, 1 на $(0, 1)$.
2.23. $\mathbf{a}=\{7, 1, -3\}$, $\mathbf{b}=\{2, 2, -4\}$, $\mathbf{c}=\{3, -3, 5\}$.

2.24. 1, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi/2)$.
2.25. $a\{1, 2, 3\}$, $b=\{6, 5, 9\}$, $c=\{7, 8, 9\}$.
2.26. x, $1+x$, $(1+x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.27. $a=\{2, 1, 0\}$, $b=\{-5, 0, 3\}$, $c=\{3, 4, 3\}$.
2.28. e^x, xe^x, x^2e^x на $(-\infty, +\infty)$.
2.29. $a=\{2, 0, 2\}$, $b=\{1, -1, 0\}$, $c=\{0, -1, -2\}$.
2.30. e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ на $(-\infty, +\infty)$.
2.31. $a=\{-2, 1, 5\}$, $b=\{4, -3, 0\}$, $c=\{0, -1, 10\}$.

Задача 3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

3.1. $\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2 \quad +34x_4-5x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7, \\ x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+9x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2+2x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2+11x_3-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0,\\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0,\\ x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1,\\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0,\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4-5x_5=0,\\ x_1+3x_2-x_3+6x_4-x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=1,\\ 2x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3-3x_4-x_5=0,\\ x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0,\\ x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1,\\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0,\\ x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2,\\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5,\\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0,\\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7,\\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=3. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0,\\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0,\\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0,\\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_5=1,\\ 3x_1-2x_2-2x_3-4x_4+2x_5=1. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0,\\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0,\\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2,\\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5,\\ x_1+5x_2+x_3-x_4=3. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0,\\ 2x_1-2x_2-6x_3-4x_4+x_5=0,\\ 3x_1-2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_5=1,\\ 4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3,\\ 3x_1-5x_2-x_3+x_4-4x_5=2. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 4x_1-3x_2+8x_3+9x_4=1. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+4x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_5=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+4x_4-x_5=2. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3+10x_4+x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_4=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=4. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_5=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-4x_4+3x_5=5. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2-2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_4=7, \\ x_1-4x_2-x_3-3x_4=3. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3+x_4+3x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3+x_5=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+9x_4-x_5=0, \\ 2x_1+7x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+4x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+5x_5=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-3x_4+2x_5=2. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0,\\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0,\\ x_1+x_2+x_3-7x_5=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-x_2+4x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=1,\\ 2x_1-x_2-3x_3-x_4=1.\end{cases}$

3.24. $\begin{cases}6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0,\\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_5=1,\\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1.\end{cases}$

3.25. $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+5x_4=0,\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0,\\ 5x_1+7x_2-4x_3-9x_4=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3+3x_4=2,\\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5,\\ 2x_1-5x_2-3x_3-x_4=3.\end{cases}$

3.26. $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0,\\ 2x_1+2x_2+5x_3-x_4+3x_5=0,\\ x_1+x_2+4x_3-5x_4+6x_5=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3+3x_5=0,\\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1,\\ 2x_1-3x_2-x_3+4x_4-3x_5=1.\end{cases}$

3.27. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0,\\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0,\\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+4x_4=0,\\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_4=1,\\ 3x_1-2x_2-2x_3-2x_4=1.\end{cases}$

3.28. $\begin{cases}6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0,\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_5=7,\\ x_1-2x_2+3x_3-2x_4+3x_5=3.\end{cases}$

3.29. $\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3+4x_4=1,\\ 4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3,\\ 3x_1-5x_2-x_3-3x_4=2.\end{cases}$

3.30. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0,\\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0,\\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2,\\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5,\\ x_1+5x_2+x_3-4x_4+3x_5=3.\end{cases}$

3.31. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_4=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=2. \end{cases}$

Задача 4. Найти координаты вектора **x** в базисе ($\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$), если он задан в базисе ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$).

4.1. $\mathbf{x}=\{6, -1, 3\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.2. $\mathbf{x}=\{1, 2, 4\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(3/2)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.3. $\mathbf{x}=\{1, 3, 6\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(4/3)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.4. $\mathbf{x}=\{2, 4, 1\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(3/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3 \end{cases}$

4.5. $\mathbf{x}=\{6, 3, 1\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(4/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=4\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.6. $\mathbf{x}=\{1, 4, 8\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(5/4)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.7. $\mathbf{x}=\{8, 4, 1\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(5/4)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.8. $\mathbf{x}=\{2, 5, 10\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(6/5)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.9. $\mathbf{x}=\{10, 5, 1\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(6/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=6\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.10. $\mathbf{x}=\{1, 6, 12\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(7/6)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.11. $\mathbf{x}=\{-12, 6, 1\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(7/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=7\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.12. $\mathbf{x}=\{-1, 7, 14\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(8/7)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.13. $\mathbf{x}=\{-3, 2, 4\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(1/2)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.14. $\mathbf{x}=\{2, 4, 3\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(1/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.15. $\mathbf{x}=\{2, 6, -3\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(2/3)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.16. $\mathbf{x}=\{12, 3, -1\}$.
$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(2/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$

4.17. $\mathbf{x}=\{1, -4, 8\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(3/4)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.18. $\mathbf{x}=\{1, 4, -8\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(3/4)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.19. $\mathbf{x}=\{7, -5, 10\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(4/5)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.20. $\mathbf{x}=\{5, -5, 4\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(4/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-4\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.21. $\mathbf{x}=\{1, -6, 6\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(5/6)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.22. $\mathbf{x}=\{6, 6, 2\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(5/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.23. $\mathbf{x}=\{1, 7, -7\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(6/7)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.24. $\mathbf{x}=\{7, 7, 2\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(6/7)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-6\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.25. $\mathbf{x}=\{3, -8, 8\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(7/8)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.26. $\mathbf{x}=\{1, -9, 9\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(8/9)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.27. $\mathbf{x}=\{9, 9, 2\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(8/9)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-8\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.28. $\mathbf{x}=\{3, -10, 10\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-9\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(9/10)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.29. $\mathbf{x}=\{10, 10, 7\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(9/10)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=-9\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.30. $\mathbf{x}=\{1, 9, 18\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+10\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(10/9)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

4.31. $\mathbf{x}=\{1, 10, 10\}$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+11\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(11/10)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Задача 5. Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

5.1. $Ax=(6x_1-5x_2-4x_3,\ -3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3)$,
$Bx=(6-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2)$,
$Cx=(x_3^4,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3)$.

5.2. $Ax=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 2x_1-x_2,\ x_2+2)$,
$Bx=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 0,\ x_2^4+2x_3)$,
$Cx=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 2x_1-x_2,\ x_2+2x_3)$.

5.3. $Ax=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1,\ x_1+2x_2^4+3x_3)$,
$Bx=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1,\ x_1+2x_2+3x_3)$,
$Cx=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1,\ x_1+2x_2+3)$.

5.4. $Ax=(3x_1+2x_2+x_3,\ x_3,\ 2x_1-3x_2-4x_3)$,
$Bx=(3x_1+2x_2+x_3,\ 1,\ 2x_1-3x_2-4)$,
$Cx=(3x_1+2x_2+x_3,\ x_3,\ 2x_1^4-3x_2-4x_3)$.

5.5. $Ax=(x_1,\ x_1-2x_2-3,\ 4x_1-5x_2-6)$,
$Bx=(x_1,\ x_1-2x_2-3x_3,\ 4x_1^4-5x_2-6x_3)$,
$Cx=(x_1,\ x_1-2x_2-3x_3,\ 4x_1-5x_2-6x_3)$.

5.6. $Ax=(2x_1+x_2,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2^2-5x_3)$,
$Bx=(2x_1+x_2,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2-5x_3)$,
$Cx=(2x_1+x_2,\ x_2-2,\ 3x_1-4x_2-5)$.

5.7. $Ax=(x_1,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3)$,
$Bx=(x_1,\ x_1+2x_2+3,\ 4x_1+5x_2+6)$,
$Cx=(x_1,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1^4+5x_2+6x_3)$.

5.8. $Ax=(3x_1-2x_2-x_3,\ 1,\ x_1+2x_2+3)$,
$Bx=(3x_1-2x_2-x_3,\ 0,\ x_1^3+2x_2+3x_3)$,
$Cx=(3x_1-2x_2-x_3,\ x_3,\ x_1+2x_2+3x_3)$.

5.9. $Ax=(2x_1-x_2,\ x_3,\ x_1+2x_2+3x_3^4)$,
$Bx=(2x_1-x_2,\ x_3,\ x_1+2x_2+3x_3)$,
$Cx=(2x_1-x_2,\ 1,\ x_1+2x_2+3)$.

5.10. $Ax=(x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3,\ 5x_1+6x_2+7x_3)$,
$Bx=(x_3,\ 2x_1+3x_2+4,\ 5x_1+6x_2+7)$,
$Cx=(x_3,\ 0,\ 5x_1^4+6x_2+7x_3)$.

5.11. $Ax=(6x_1-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ 0)$,
$Bx=(6x_1-5x_2-4,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ 0)$,
$Cx=(6x_1-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3^2,\ 0)$.

5.12. $Ax=(5x_1-4x_2-3,\ 2x_1-x_2,\ x_3^2)$,
$Bx=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 2x_1-x_2,\ 1)$,
$Cx=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 2x_1-x_2,\ x_3)$.

5.13. $Ax=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1^2,\ x_2+2x_3)$,
$Bx=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1,\ x_2+2x_3)$,
$Cx=(4x_1-3x_2-2,\ x_1,\ x_2+2)$.

5.14. $Ax=(3x_1+2x_2+x_3,\ 0,\ x_1-2x_2-3x_3)$,
$Bx=(3x_1+2x_2+1,\ 0,\ x_1-2x_2-3)$,
$Cx=(3x_1+2x_2+x_3,\ 0,\ x_1^2-2x_2-3x_3)$.

5.15. $Ax=(x_1,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2-5)$,
$Bx=(x_1,\ x_2^2-2x_3,\ 3x_1-4x_2-5)$,
$Cx=(x_1,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2-5x_3)$.

5.16. $Ax=(2x_1+x_2,\ x_3^2,\ 2x_1-3x_2-4x_3)$,
$Bx=(2x_1+x_2,\ x_3,\ 2x_1-3x_2-4x_3)$,
$Cx=(2x_1+x_2,\ x_3,\ 2x_1-3x_2-4)$.

5.17. $Ax=(x_1,\ x_2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3)$,
$Bx=(x_1,\ x_2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5)$,
$Cx=(x_1,\ x_2^2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3)$.

5.18. $Ax=(3x_1-2x_2-1,\ 0,\ x_1+2x_2+3x_3)$,
$Bx=(3x_1^2-2x_2-x_3,\ 0,\ 0)$,
$Cx=(3x_1-2x_2-x_3,\ 0,\ x_1+2x_2+3x_3)$.

5.19. $Ax=(2x_1^2-x_2,\ x_3,\ 2x_2+3x_3)$,
$Bx=(2x_1-x_2,\ x_3,\ 2x_2+3x_3)$,
$Cx=(2x_1-x_2,\ x_3,\ 2x_2+3)$.

5.20. $Ax=(0,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3)$,

$Bx=(0,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6)$,
$Cx=(0,\ x_1^2+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3)$.

5.21. $Ax=(6x_1-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2)$,
$Bx=(6x_1-5x_2-4,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2)$,
$Cx=(6x_1-5x_2-4x_3^3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ 0)$.

5.22. $Ax=(5x_1-4x_2-3,\ 2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3)$,
$Bx=(5x_1-4x_2-3x_3^3,\ 2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3)$,
$Cx=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3)$.

5.23. $Ax=(4x_1-3x_2^3-2x_3,\ x_1+x_3,\ 0)$,
$Bx=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3)$,
$Cx=(4x_1-3x_2-2,\ x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3)$.

5.24. $Ax=(3x_1+4x_2+5x_3,\ 6x_1+7x_2+8x_3,\ 9x_1+x_3)$,
$Bx=(3x_1+4x_2+5,\ 6x_1+7x_2+8,\ 9x_1+x_3)$,
$Cx=(3x_1+4x_2+5x_3^3,\ 6x_1+7x_2+8x_3,\ 0)$.

5.25. $Ax=(2x_1+3x_2+4,\ 5x_1+6x_2+7,\ 8x_1+x_3)$,
$Bx=(2x_1+3x_2+4x_3^3,\ 5x_1+6x_2+7x_3,\ 0)$,
$Cx=(2x_1+3x_2+4x_3,\ 5x_1+6x_2+7x_3,\ 8x_1+x_3)$.

5.26. $Ax=(x_1^3+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3,\ 0)$,
$Bx=(x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3,\ 5x_1+6x_2+7x_3)$,
$Cx=(x_1+1,\ 2x_1+3x_2+4,\ 5x_1+6x_2+7x_3)$.

5.27. $Ax=(3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3)$,
$Bx=(3x_1-2x_2-1,\ x_2+2,\ 3x_1+4x_2+5x_3)$,
$Cx=(3x_1-2x_2-x_3^3,\ x_2+2x_3,\ 0)$.

5.28. $Ax=(2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3,\ 4x_1+5x_2+6x_3)$,
$Bx=(2x_1-x_2^3,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 0)$,
$Cx=(2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3)$.

5.29. $Ax=(x_1^3+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3,\ 7x_1+8x_2)$,
$Bx=(x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3,\ 7x_1+8x_2)$,
$Cx=(x_1+2x_2+3,\ 4x_1+5x_2+6,\ 7x_1+8x_2)$.

5.30. $Ax=(x_2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3,\ 6x_1+7x_2+8x_3)$,
$Bx=(x_2+2,\ 3x_1+4x_2+5,\ 6x_1+7x_2+8x_3)$,
$Cx=(x_2^3+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3,\ 6x_1+7x_2+8x_3)$.

5.31. $Ax=(x_1^3,\ x_1-x_3,\ x_2+x_3)$,
$Bx=(1,\ x_1-x_3,\ x_2+x_3)$,
$Cx=(x_1,\ x_1-x_3,\ x_2+x_3)$.

Задача 6. Пусть $x=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, $Ax=\{x_2-x_3,\ x_1,\ x_1+x_3\}$, $Bx=\{x_2,\ 2x_3,\ x_1\}$. Найти:

6.1. ABx. **6.2.** A^2x. **6.3.** $(A^2-B)x$.
6.4. B^4x. **6.5.** B^2x. **6.6.** $(2A+3B^2)x$.
6.7. $(A^2+B^2)x$. **6.8.** $(B^2+A)x$. **6.9.** BAx.
6.10. $B(2A-B)x$. **6.11.** $A(2B-A)x$. **6.12.** $2(AB+2A)x$.
6.13. $(A-B)^2x$. **6.14.** $(B-2A^2)x$. **6.15.** BA^2x.
6.16. $(3A^2+B)x$. **6.17.** $(A^2+B)x$. **6.18.** $(A^2-B^2)x$.
6.19. $(2B-A^2)x$. **6.20.** B^3x. **6.21.** $(B^2-2A)x$.
6.22. $(A(B+A))x$. **6.23.** $(AB^2)x$. **6.24.** $(A(B-A))x$.
6.25. $2(B+2A^2+B^2)x$. **6.26.** $(B(A-B))x$. **6.27.** $(B-A+B^2)x$.
6.28. $(B(A+B))x$. **6.29.** $(A+BA-B)x$. **6.30.** $(3B+2A^2)x$.
6.31. $(B(2A+B))x$.

Задача 7. Найти матрицу линейного оператора в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

7.1. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7.2. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.3. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7.4. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.5. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.6. $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.7. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.8. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.9. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.10. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.11. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.12. $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.13. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.14. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.15. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.16. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.17. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.18. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.19. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.20. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.21. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.22. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.23. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.24. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.25. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.26. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.27. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

7.28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.29. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.30. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$), образ и ядро оператора:

8.1. Проектирования на ось Ox.
8.2. Проектирования на плоскость $z=0$.
8.3. Проектирования на ось Oz.
8.4. Зеркального отражения относительно плоскости Oyz.
8.5. Проектирования на ось Oy.
8.6. Проектирования на плоскость $y=0$.
8.7. Зеркального отражения относительно плоскости $x-y=0$.
8.8. Зеркального отражения относительно плоскости $y+z=0$.
8.9. Проектирования на плоскость $y-z=0$.
8.10. Проектирования на плоскость $y=\sqrt{3}x$.
8.11. Проектирования на плоскость Oyz.
8.12. Зеркального отражения относительно плоскости $x-z=0$.
8.13. Зеркального отражения относительно плоскости Oxy.
8.14. Поворота относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении.
8.15. Проектирования на плоскость $x-y=0$.
8.16. Проектирования на плоскость $y+z=0$.
8.17. Зеркального отражения относительно плоскости $x+y=0$.
8.18. Зеркального отражения относительно плоскости $y-z=0$.
8.19. Проектирования на плоскость $x+y=0$.
8.20. Проектирования на плоскость $x-z=0$.
8.21. Зеркального отражения относительно плоскости $x+z=0$.
8.22. Поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$.
8.23. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}y+z=0$.
8.24. Зеркального отражения относительно плоскости Oxz.
8.25. Поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$.
8.26. Проектирования на плоскость $x+z=0$.
8.27. Проектирования на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.
8.28. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+z=0$.
8.29. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$.
8.30. Поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.
8.31. Проектирования на плоскость $x-\sqrt{3}z=0$.

Задача 9. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

9.1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9.5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9.6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9.7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9.8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9.9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

9.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9.11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

9.16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.19. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.20. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.21. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

9.22. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

9.23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9.27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9.28. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

9.29. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

9.30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

9.31. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

10.1. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$.
10.2. $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$.
10.3. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$.
10.4. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-2x_3^2$.
10.5. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.
10.6. $x_1^2+4x_1x_2+4x_2x_3+x_3^2$.
10.7. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$.
10.8. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$.
10.9. $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$.
10.10. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_3^2$.
10.11. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+12x_2x_3+4x_3^2$.
10.12. $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$.
10.13. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+8x_2x_3+x_3^2$.
10.14. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$.
10.15. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$.
10.16. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+16x_2x_3+7x_3^2$.
10.17. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$.
10.18. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$.
10.19. $x_1^2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$.
10.20. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.
10.21. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$.
10.22. $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$.
10.23. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$.
10.24. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$.
10.25. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$.
10.26. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$.
10.27. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$.
10.28. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$.
10.29. $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$.
10.30. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2$.
10.31. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$.

Задача 11. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

11.1. $4x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.
11.2. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$.
11.3. $2x_1^2+2x_2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.
11.4. $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$.
11.5. $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

11.6. $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2\sqrt{3}x_2x_3$.
11.7. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.
11.8. $3x_1^2+x_2^2-\frac{3}{2}x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_2-x_1x_3+\sqrt{3}x_2x_3$.
11.9. $-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$.
11.10. $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$.
11.11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2+\frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.
11.12. $3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$.
11.13. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$.
11.14. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
11.15. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$.
11.16. $-(1/2)x_1^2+5x_2^2-(1/2)x_3^2-4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3$.
11.17. $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$.
11.18. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$.
11.19. $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3+2\sqrt{2}x_2x_3$.
11.20. $-4x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.
11.21. $10x_1^2+14x_2^2+7x_3^2-10x_1x_2-\sqrt{2}x_1x_3-5\sqrt{2}x_2x_3$.
11.22. $(3/2)x_1^2-5x_2^2+(3/2)x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3-4x_2x_3$.
11.23. $x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$.
11.24. $2x_2^2-3x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2-4x_1x_3+4\sqrt{3}x_2x_3$.
11.25. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_2+\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
11.26. $x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$.
11.27. $5x_1^2+13x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$.
11.28. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\frac{2}{3}x_1x_2+\frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
11.29. $5x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3+4\sqrt{2}x_2x_3$.
11.30. $-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$.
11.31. $-3x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$.

Задача 12. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

12.1. $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$.
12.2. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.
12.3. $4xy+4x-4y=0$.
12.4. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$.
12.5. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$.
12.6. $-2xy-2x-2y+1=0$.
12.7. $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0$.
12.8. $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0$.

12.9. $4xy+4x-4y-2=0.$
12.10. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0.$
12.11. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0.$
12.12. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$
12.13. $2xy+2x+2y-3=0.$
12.14. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0.$
12.15. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0.$
12.16. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0.$
12.17. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0.$
12.18. $4xy+4x+4y+1=0.$
12.19. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0.$
12.20. $-4xy-4x+4y+6=0.$
12.21. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0.$
12.22. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0.$
12.23. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0.$
12.24. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0.$
12.25. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0.$
12.26. $-4xy+8x+8y+1=0.$
12.27. $2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0.$
12.28. $x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0.$
12.29. $4xy+4x-4y+4=0.$
12.30. $3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0.$
12.31. $x^2+y^2-4xy+4x-2y+1=0.$

XI. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Теоретические вопросы

1. Основные уравнения. Постановка краевых задач.
2. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения с однородными граничными условиями методом Фурье.
3. Сведение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями.
4. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения.
5. Уравнение Лапласа. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и в круговом секторе методом Фурье.

Теоретические упражнения

1. Показать, что функция

$$u(x, y)=\frac{\varphi(x)+\psi(y)}{x-y},$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, является решением уравнения

$$u_{xy}=\frac{u_x-u_y}{x-y}.$$

2. Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью. На его конце $x=0$ поддерживается температура, равная нулю, а на конце $x=l$ температура изменяется по закону $u(l, t)=Ae^{-t}$ (A — постоянная). Начальная температура $u(x, 0)=A\frac{x}{l}$. Найти распределение температуры в стержне при $t>0$.

3. Решить задачу об остывании тонкого однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x, 0)=\varphi(x)$, один конец теплоизолирован, а другой поддерживается при постоянной температуре.

4. Найти стационарное распределение температуры в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями, если на каждой из окружностей поддерживается постоянная температура.

5. Найти стационарное распределение температуры в сферическом слое, ограниченном сферами, которые имеют общий центр, если на каждой из сфер поддерживается постоянная температура.

6. Подобрать решение задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0\ (0<x<1,\ 0<y<1),$$

$$u\Big|_{x=0}=0,\ u\Big|_{x=1}=y\ (0\leqslant y\leqslant 1),$$

$$u\Big|_{y=0}=0,\ u\Big|_{y=1}=x\ (0\leqslant x\leqslant 1).$$

7. Найти гармоническую функцию внутри кругового сектора $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$, удовлетворяющую граничным условиям $u(r, 0)=u(r, \alpha)=0$, $u(R, \varphi)=A\varphi$ (A — постоянная).

8. Найти решения волнового уравнения типа плоской волны

$$u=f(t-Ax-By-Cz)$$

и сферической волны

$$u=\frac{f(t-A\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

9. Доказать, что если функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ являются решениями смешанных задач для одного и того же волнового

уравнения с одними и теми же нулевыми граничными условиями и начальными условиями вида соответственно

$$u_1\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

и

$$u_2\Big|_{t=0}=0,\qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),$$

то сумма $u_1(x, t)+u_2(x, t)=u(x, t)$ является решением смешанной задачи для этого волнового уравнения с теми же нулевыми граничными условиями и с начальными условиями вида

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).$$

Расчетные задания

Задача 1. Решить смешанную задачу.

1.1. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(8, t)=0$.

1.2. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=2\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(1, t)=0$.

1.3. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=3\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(7, t)=0$.

1.4. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=4\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(2, t)=0$.

1.5. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(6, t)=0$.

1.6. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=6\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

1.7. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=7\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(5, t)=0$.

1.8. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=8\sin 3\pi x+9\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(4, t)=0$.

1.9. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=9\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(4, t)=0$.

1.10. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=10\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(5, t)=0$.

1.11. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=11\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

1.12. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=12\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(6, t)=0$.

1.13. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=13\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(2, t)=0$.

1.14. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=14\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(7, t)=0$.

1.15. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=15\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(1, t)=0$.

1.16. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=16\sin 3\pi x+9\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(8, t)=0$.

1.17. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=17\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(2, t)=0$.

1.18. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=18\sin 3\pi x+3\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(7, t)=0$.

1.19. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=19\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

1.20. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=20\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(6, t)=0$.

1.21. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=21\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(4, t)=0$.

1.22. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=22\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(5, t)=0$.

1.23. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=23\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(5, t)=0$.

1.24. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=24\sin 2\pi x+9\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(4, t)=0$.

1.25. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=25\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(6, t)=0$.

1.26. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=26\sin 3\pi x+3\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

1.27. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=27\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(7, t)=0$.

1.28. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=28\sin 2\pi x+5\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(2, t)=0$.

1.29. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=29\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(8, t)=0$.

1.30. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=30\sin 3\pi x+7\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(1, t)=0$.

1.31. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=31\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(9, t)=0$.

Задача 2. Решить смешанную задачу.

2.1. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=\cos 3\pi x+2\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(8, t)=0$.

2.2. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=2\cos 2\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(2, t)=0$.

2.3. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=3\cos 3\pi x+4\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(7, t)=0$.

2.4. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=4\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(3, t)=0$.

2.5. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=5\cos 2\pi x+6\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(6, t)=0$.

2.6. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=6\cos 2\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(4, t)=0$.

2.7. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=7\cos 3\pi x+8\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(5, t)=0$.

2.8. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=8\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(5, t)=0$.

2.9. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=9\cos 2\pi x+10\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(4, t)=0$.

2.10. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=10\cos 2\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(6, t)=0$.

2.11. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=11\cos 3\pi x+12\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(3, t)=0$.

2.12. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=12\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(7, t)=0$.

2.13. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=13\cos 2\pi x+14\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(2, t)=0$.

2.14. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=14\cos 2\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(8, t)=0$.

2.15. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=15\cos 3\pi x+16\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(1, t)=0$.

2.16. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=16\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(9, t)=0$.

2.17. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=17\cos 3\pi x+18\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(2, t)=0$.

2.18. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=18\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(6, t)=0$.

2.19. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=19\cos 2\pi x+20\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(3, t)=0$.

2.20. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=20\cos 2\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(5, t)=0$.

2.21. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=21\cos 3\pi x+22\cos 4\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(4, t)=0$.

2.22. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=22\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(4, t)=0$.

2.23. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=23\cos 2\pi x+24\cos 3\pi x$; $u_x(0, t)=u_x(5, t)=0$.

2.24. $u_t=7u_{xx}$; $u(x,0)=24\cos 2\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(3,t)=0$.

2.25. $u_t=4u_{xx}$; $u(x,0)=25\cos 3\pi x+26\cos 4\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(6,t)=0$.

2.26. $u_t=8u_{xx}$; $u(x,0)=26\cos 3\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(2,t)=0$.

2.27. $u_t=3u_{xx}$; $u(x,0)=27\cos 2\pi x+28\cos 3\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(7,t)=0$.

2.28. $u_t=9u_{xx}$; $u(x,0)=28\cos 2\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$.

2.29. $u_t=9u_{xx}$; $u(x,0)=29\cos 2\pi x+30\cos 3\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$.

2.30. $u_t=3u_{xx}$; $u(x,0)=30\cos 2\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(7,t)=0$.

2.31. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=31\cos 3\pi x+\cos 4\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(6,t)=0$.

Задача 3. Решить смешанную задачу.

3.1. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=19\sin 5\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(0{,}5;t)=0$.

3.2. $u_t=5u_{xx}$; $u(x,0)=8\cos \pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(1{,}5;,t)=0$.

3.3. $u_t=8u_{xx}$; $u(x,0)=17\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;,t)=0$.

3.4. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=6\cos 9\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.5. $u_t=4u_{xx}$; $u(x,0)=15\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(4{,}5;t)=0$.

3.6. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=4\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.7. $u_t=3u_{xx}$; $u(x,0)=13\sin 5\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;t)=0$.

3.8. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=2\cos 7\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(1{,}5;t)=0$.

3.9. $u_t=5u_{xx}$; $u(x,0)=19\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(0{,}5;t)=0$.

3.10. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=8\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(1{,}5;t)=0$.

3.11. $u_t=6u_{xx}$; $u(x,0)=17\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;t)=0$.

3.12. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=6\cos 7\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.13. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=15\sin 9\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(4{,}5;t)=0$.

3.14. $u_t=3u_{xx}$; $u(x,0)=4\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.15. $u_t=7u_{xx}$; $u(x,0)=13\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;t)=0$.

3.16. $u_t=9u_{xx}$; $u(x,0)=12\cos 3\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(1{,}5;t)=0$.

3.17. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=9\sin 7\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;,t)=0$.

3.18. $u_t=5u_{xx}$; $u(x,0)=18\cos \pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.19. $u_t=8u_{xx}$; $u(x,0)=7\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(4{,}5;t)=0$.

3.20. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=16\cos 9\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.21. $u_t=4u_{xx}$; $u(x,0)=5\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;t)=0$.

3.22. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=14\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(1{,}5;t)=0$.

3.23. $u_t=3u_{xx}$; $u(x,0)=3\sin 5\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(0{,}5;t)=0$.

3.24. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=12\cos 7\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(1{,}5;t)=0$.

3.25. $u_t=5u_{xx}$; $u(x,0)=9\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(2{,}5;t)=0$.

3.26. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=18\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.27. $u_t=6u_{xx}$; $u(x,0)=7\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$, $u_x(4{,}5;t)=0$.

3.28. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=16\cos 7\pi x$; $u_x(0,t)=0$, $u(3{,}5;t)=0$.

3.29. $u_t=u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 9\pi x$; $u(0, t)=0$, $u_x(2{,}5; t)=0$.

3.30. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=14\cos 5\pi x$; $u_x(0, t)=0$, $u(1{,}5; t)=0$.

3.31. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=3\sin 3\pi x$; $u(0, t)=0$, $u_x(0{,}5; t)=0$.

Задача 4. Решить смешанную задачу.

4.1. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 2\pi x-1+3x$; $u(0, t)=-1$, $u(2, t)=5$.

4.2. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=6\sin 3\pi x+2-3x$; $u(0, t)=2$, $u(3, t)=-7$.

4.3. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=7\sin 2\pi x-3+4x$; $u(0, t)=-3$, $u(1, t)=1$.

4.4. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=8\sin 4\pi x+4-5x$; $u(0, t)=4$, $u(2, t)=-6$.

4.5. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=9\sin 3\pi x-5+2x$; $u(0, t)=-5$, $u(3, t)=1$.

4.6. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=8\sin 3\pi x+6-2x$; $u(0, t)=6$, $u(4, t)=-2$.

4.7. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=7\sin 2\pi x-7+3x$; $u(0, t)=-7$, $u(3, t)=2$.

4.8. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=6\sin 3\pi x+8-3x$; $u(0, t)=8$, $u(4, t)=-4$.

4.9. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 4\pi x-9+5x$; $u(0, t)=-9$, $u(2, t)=1$.

4.10. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=4\sin 5\pi x+9-4x$; $u(0, t)=9$, $u(3, t)=-3$.

4.11. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=3\sin 6\pi x-8+5x$; $u(0, t)=-8$, $u(2, t)=2$.

4.12. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=2\sin 4\pi x+7-5x$; $u(0, t)=7$, $u(1, t)=2$.

4.13. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=3\sin 3\pi x-6+4x$; $u(0, t)=-6$, $u(3, t)=6$.

4.14. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=4\sin 4\pi x+5-4x$; $u(0, t)=5$, $u(2, t)=-3$.

4.15. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 2\pi x-4+3x$; $u(0, t)=-4$, $u(1, t)=-1$.

4.16. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=6\sin 3\pi x+3+2x$; $u(0, t)=3$; $u(2, t)=7$.

4.17. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=7\sin 4\pi x-2+x$; $u(0, t)=-2$, $u(3, t)=1$.

4.18. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=8\sin 7\pi x+1-x$; $u(0, t)=1$, $u(2, t)=-1$.

4.19. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=9\sin 3\pi x-1-2x$; $u(0, t)=-1$, $u(1, t)=-3$.

4.20. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=8\sin 4\pi x+3-4x$; $u(0, t)=3$, $u(2, t)=-5$.

4.21. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=7\sin 3\pi x-5+6x$; $u(0, t)=-5$, $u(1, t)=1$.

4.22. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=6\sin 2\pi x+7-5x$; $u(0, t)=7$, $u(2, t)=-3$.

4.23. $u_t=9u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 3\pi x-9+4x$; $u(0, t)=-9$, $u(3, t)=3$.

4.24. $u_t=8u_{xx}$; $u(x, 0)=4\sin 3\pi x+8-3x$; $u(0, t)=8$, $u(2, t)=2$.

4.25. $u_t=7u_{xx}$; $u(x, 0)=3\sin 2\pi x-6+2x$; $u(0, t)=-6$, $u(3, t)=0$.

4.26. $u_t=6u_{xx}$; $u(x, 0)=2\sin 4\pi x+4+x$; $u(0, t)=4$, $u(4, t)=8$.

4.27. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=3\sin 3\pi x-2-x$; $u(0, t)=-2$, $u(3, t)=-5$.

4.28. $u_t=3u_{xx}$; $u(x, 0)=4\sin 5\pi x+3-2x$; $u(0, t)=3$, $u(2, t)=-1$.

4.29. $u_t=2u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 7\pi x-1-3x$; $u(0, t)=-1$, $u(1, t)=-4$.

4.30. $u_t=4u_{xx}$; $u(x, 0)=6\sin 4\pi x+2-4x$; $u(0, t)=2$, $u(2, t)=-6$.

4.31. $u_t=5u_{xx}$; $u(x, 0)=7\sin 3\pi x-4-5x$; $u(0, t)=-4$, $u(1, t)=-9$.

Задача 5. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальным и граничными условиями

$$u(x, 0)=0;\ u(0, t)=0,\ u(\pi, t)=0.$$

5.1. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\sin 2t\sin 3x.$

5.2. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+e^{-2t}\sin 4x.$

5.3. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+10\cos 3t\sin 2x.$

5.4. $u_t=2u_{xx}+7e^{-18t}\sin 3x.$

5.5. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+10\sin 3t\sin 4x.$

5.6. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+2e^{-3t}\sin 2x.$

5.7. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+2\cos t\sin 3x.$

5.8. $u_t=3u_{xx}+8e^{-48t}\sin 4x.$

5.9. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+5\sin 2t\sin 2x.$

5.10. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+3e^{-4t}\sin 3x.$

5.11. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+10\cos 3t\sin 4x.$

5.12. $u_t=5u_{xx}+6e^{-45t}\sin 3x.$

5.13. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+2\sin t\sin 3x.$

5.14. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+4e^{-5t}\sin 4x.$

5.15. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+10\cos 3t\sin 3x.$

5.16. $u_t=4u_{xx}+5e^{-64t}\sin 4x.$

5.17. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+2\sin t\sin 4x.$

5.18. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+e^{-2t}\sin 2x.$

5.19. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\cos 2t\sin 3x.$

5.20. $u_t=7u_{xx}+4e^{-63t}\sin 3x.$

5.21. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+10\sin 3t\sin 2x.$

5.22. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+2e^{-3t}\sin 3x.$

5.23. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+5\cos 2t\sin 4x.$

5.24. $u_t=5u_{xx}+3e^{-20t}\sin 2x.$

5.25. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+10\sin 3t\sin 3x.$

5.26. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+3e^{-4t}\sin 4x.$

5.27. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+5\cos 2t\sin 2x.$

5.28. $u_t=6u_{xx}+2e^{-24t}\sin 2x.$

5.29. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+5\sin 2t\sin 4x.$

5.30. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+4e^{-5t}\sin 2x.$

5.31. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+2\cos t\sin 4x.$

Задача 6. Решить смешанную задачу.

6.1. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+5\cos 2t\sin 2x;\ u(x,0)=\sin 4x;\ u(0,t)=u(\pi,t)=0.$

6.2. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\sin 2t\sin 3x;\ u(x,0)=2\sin 9x;\ u(0,t)=u(\pi,t)=0.$

6.3. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+10\cos 3t\sin 4x;\ u(x, 0)=3\sin 16x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.4. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+10\sin 3t\sin 5x;\ u(x, 0)=4\sin 10x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.5. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+17\cos 4t\sin 6x;\ u(x, 0)=5\sin 18x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.6. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+17\sin 4t\sin 2x;\ u(x, 0)=6\sin 8x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.7. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+26\cos 5t\sin 3x;\ u(x, 0)=7\sin 6x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.8. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+26\sin 5t\sin 4x;\ u(x, 0)=8\sin 12x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.9. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+37\cos 6t\sin 5x;\ u(x, 0)=9\sin 20x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.10. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+37\sin 6t\sin 6x;\ u(x, 0)=10\sin 12x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.11. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+26\cos 5t\sin 2x;\ u(x, 0)=11\sin 6x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.12. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+26\sin 5t\sin 3x;\ u(x, 0)=12\sin 12x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.13. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+17\cos 4t\sin 4x;\ u(x, 0)=13\sin 8x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.14. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+17\sin 4t\sin 5x;\ u(x, 0)=14\sin 15x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.15. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+10\cos 3t\sin 6x;\ u(x, 0)=15\sin 18x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.16. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+10\sin 3t\sin 2x;\ u(x, 0)=16\sin 4x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.17. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\cos 2t\sin 3x;\ u(x, 0)=17\sin 9x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.18. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+5\sin 2t\sin 4x;\ u(x, 0)=18\sin 16x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.19. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+10\cos 3t\sin 5x;\ u(x, 0)=19\sin 10x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.20. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+10\sin 3t\sin 6x;\ u(x, 0)=20\sin 18x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.21. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+17\cos 4t\sin 2x;\ u(x, 0)=21\sin 8x;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$

6.22. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+17\sin 4t\sin 3x$; $u(x,0)=22\sin 6x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.23. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+26\cos 5t\sin 4x$; $u(x,0)=23\sin 12x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.24. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+26\sin 5t\sin 5x$; $u(x,0)=24\sin 20x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.25. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+37\cos 6t\sin 6x$; $u(x,0)=25\sin 12x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.26. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+37\sin 6t\sin 2x$; $u(x,0)=26\sin 6x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.27. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+26\sin 5t\sin 3x$; $u(x,0)=27\sin 12x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.28. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+26\cos 5t\sin 4x$; $u(x,0)=28\sin 8x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.29. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+17\sin 4t\sin 6x$; $u(x,0)=29\sin 18x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.30. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+17\cos 4t\sin 5x$; $u(x,0)=30\sin 20x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

6.31. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+10\sin 3t\sin 4x$; $u(x,0)=31\sin 8x$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

Задача 7. Решить смешанную задачу.

7.1. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+5\sin 2t\sin 6x$; $u(x,0)=\sin 12x+\pi+3x$; $u(0,t)=\pi$, $u(\pi,t)=4\pi$.

7.2. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+5\cos 2t\sin 2x$; $u(x,0)=2\sin 6x-\pi+2x$; $u(0,t)=-\pi$, $u(\pi,t)=\pi$.

7.3. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+10\sin 3t\sin 3x$; $u(x,0)=3\sin 12x+2\pi-x$; $u(0,t)=2\pi$, $u(\pi,t)=\pi$.

7.4. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+10\cos 3t\sin 4x$; $u(x,0)=4\sin 8x-2\pi+x$; $u(0,t)=-2\pi$, $u(\pi,t)=-\pi$.

7.5. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+17\sin 4t\sin 5x$; $u(x,0)=5\sin 15x+3\pi-2x$; $u(0,t)=3\pi$, $u(\pi,t)=\pi$.

7.6. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+17\cos 4t\sin 6x$; $u(x,0)=6\sin 24x-4\pi+2x$; $u(0,t)=-4\pi$, $u(\pi,t)=-2\pi$.

7.7. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+26\sin 5t\sin 2x$; $u(x,0)=7\sin 8x+4\pi-3x$; $u(0,t)=4\pi$, $u(\pi,t)=\pi$.

7.8. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+26\cos 5t\sin 3x$; $u(x,0)=8\sin 9x-3\pi+3x$; $u(0,t)=-3\pi$, $u(\pi,t)=0$.

7.9. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+37\sin 6t\sin 4x$; $u(x, 0)=9\sin 8x+5\pi-4x$; $u(0, t)=5\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.10. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+37\cos 6t\sin 5x$; $u(x, 0)=10\sin 10x-5\pi+4x$; $u(0, t)=-5\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.11. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+26\sin 5t\sin 6x$; $u(x, 0)=11\sin 18x+\pi-2x$; $u(0, t)=\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.12. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+26\cos 5t\sin 2x$; $u(x, 0)=12\sin 4x+2\pi-3x$; $u(0, t)=2\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.13. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+17\sin 4t\sin 3x$; $u(x, 0)=13\sin 6x+3\pi-4x$; $u(0, t)=3\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.14. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+17\cos 4t\sin 4x$; $u(x, 0)=14\sin 8x+4\pi-5x$; $u(0, t)=4\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.15. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+10\sin 3t\sin 5x$, $u(x, 0)=15\sin 15x+5\pi-6x$; $u(0, t)=5\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.16. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+10\cos 3t\sin 3x$; $u(x, 0)=16\sin 6x-5\pi+6x$; $u(0, t)=-5\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.17. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+5\sin 2t\sin 2x$; $u(x, 0)=17\sin 6x-4\pi+5x$; $u(0, t)=-4\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.18. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\cos 2t\sin 3x$; $u(x, 0)=18\sin 9x-3\pi+4x$; $u(0, t)=-3\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.19. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+10\sin 3t\sin 4x$; $u(x, 0)=19\sin 12x-2\pi+3x$; $u(0, t)=-2\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.20. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+10\cos 3t\sin 5x$; $u(x, 0)=20\sin 10x-\pi+2x$; $u(0, t)=-\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.21. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+17\sin 4t\sin 6x$; $u(x, 0)=21\sin 12x+5\pi-3x$; $u(0, t)=5\pi$, $u(\pi, t)=2\pi$.

7.22. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+17\cos 4t\sin 2x$; $u(x, 0)=22\sin 8x-5\pi+4x$; $u(0, t)=-5\pi$, $u(\pi, t)=-\pi$.

7.23. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+26\sin 5t\sin 3x$; $u(x, 0)=23\sin 12x+4\pi-4x$; $u(0, t)=4\pi$, $u(\pi, t)=0$.

7.24. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+26\cos 5t\sin 4x$; $u(x, 0)=24\sin 16x-4\pi+5x$; $u(0, t)=-4\pi$, $u(\pi, t)=\pi$.

7.25. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+37\sin 6t\sin 5x$; $u(x, 0)=25\sin 15x+3\pi-5x$; $u(0, t)=3\pi$, $u(\pi, t)=-2\pi$.

7.26. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+37\cos 6t\sin 6x$; $u(x, 0)=26\sin 18x-3\pi+6x$; $u(0, t)=-3\pi$, $u(\pi, t)=3\pi$.

7.27. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+26\sin 5t\sin 2x$; $u(x, 0)=27\sin 10x+2\pi-6x$; $u(0, t)=2\pi$, $u(\pi, t)=-4\pi$.

7.28. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+26\cos 5t\sin 3x$; $u(x,0)=28\sin 15x-2\pi+2x$; $u(0,t)=-2\pi$, $u(\pi,t)=0$.

7.29. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+17\sin 4t\sin 4x$; $u(x,0)=29\sin 20x+\pi-x$; $u(0,t)=\pi$, $u(\pi,t)=0$.

7.30. $u_t=\frac{1}{25}u_{xx}+17\cos 4t\sin 5x$; $u(x,0)=30\sin 20x-\pi+x$; $u(0,t)=-\pi$, $u(\pi,t)=0$.

7.31. $u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+10\sin 3t\sin 6x$; $u(x,0)=31\sin 24x+\pi+x$; $u(0,t)=\pi$, $u(\pi,t)=2\pi$.

Задача 8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круговом секторе $0<r<1$, $0<\varphi<\alpha$ (r, φ — полярные координаты, $\alpha<2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

8.1. $u(1,\varphi)=\sin 6\varphi$; $u(r,0)=u(r,\pi/3)=0$.
8.2. $u(1,\varphi)=2\cos 2\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,\pi)=0$.
8.3. $u(1,\varphi)=3\cos 15\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,\pi/6)=0$.
8.4. $u(1,\varphi)=4\sin 14\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,\pi/4)=0$.
8.5. $u(1,\varphi)=5\sin 3\varphi$; $u(r,0)=u(r,2\pi/3)=0$.
8.6. $u(1,\varphi)=6\cos 6\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,7\pi/6)=0$.
8.7. $u(1,\varphi)=7\cos 10\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,\pi/4)=0$.
8.8. $u(1,\varphi)=8\sin 7\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,\pi/2)=0$.
8.9. $u(1,\varphi)=9\sin 4\varphi$; $u(r,0)=u(r,3\pi/4)=0$.
8.10. $u(1,\varphi)=10\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,5\pi/4)=0$.
8.11. $u(1,\varphi)=11\cos 5\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,\pi/2)=0$.
8.12. $u(1,\varphi)=12\sin 3\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,3\pi/2)=0$.
8.13. $u(1,\varphi)=13\sin 6\varphi$; $u(r,0)=u(r,5\pi/6)=0$.
8.14. $u(1,\varphi)=14\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,4\pi/3)=0$.
8.15. $u(1,\varphi)=15\cos\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,3\pi/2)=0$.
8.16. $u(1,\varphi)=16\sin 21\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,\pi/6)=0$.
8.17. $u(1,\varphi)=17\sin 9\varphi$; $u(r,0)=u(r,\pi/3)=0$.
8.18. $u(1,\varphi)=18\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,\pi)=0$.
8.19. $u(1,\varphi)=19\cos 21\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,\pi/6)=0$.
8.20. $u(1,\varphi)=20\sin 15\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,\pi/6)=0$.
8.21. $u(1,\varphi)=21\sin 6\varphi$; $u(r,0)=u(r,2\pi/3)=0$.
8.22. $u(1,\varphi)=22\cos 12\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,\pi/3)=0$.
8.23. $u(1,\varphi)=23\cos 14\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,\pi/4)=0$.
8.24. $u(1,\varphi)=24\sin 10\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,\pi/4)=0$.
8.25. $u(1,\varphi)=25\sin 3\varphi$; $u(r,0)=u(r,\pi)=0$.
8.26. $u(1,\varphi)=26\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,5\pi/3)=0$.
8.27. $u(1,\varphi)=27\cos 7\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u(r,\pi/2)=0$.
8.28. $u(1,\varphi)=28\sin 5\varphi$; $u(r,0)=0$, $u_\varphi(r,\pi/2)=0$.
8.29. $u(1,\varphi)=29\sin 3\varphi$; $u(r,0)=u(r,5\pi/3)=0$.
8.30. $u(1,\varphi)=30\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,7\pi/4)=0$.
8.31. $u(1,\varphi)=31\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,3\pi/2)=0$.

Задача 9. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\leqslant r<1$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ (r, φ — полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующие значения:

9.1. $u(1, \varphi)=\cos 9\varphi$.

9.2. $u(1, \varphi)=2\sin 8\varphi$.

9.3. $u(1, \varphi)=3\cos 7\varphi$.

9.4. $u(1, \varphi)=4\sin 6\varphi$.

9.5. $u(1, \varphi)=5\cos 5\varphi$.

9.6. $u(1, \varphi)=6\sin 4\varphi$.

9.7. $u(1, \varphi)=7\cos 3\varphi$.

9.8. $u(1, \varphi)=8\sin 2\varphi$.

9.9. $u(1, \varphi)=9\cos 2\varphi$.

9.10. $u(1, \varphi)=10\sin 3\varphi$.

9.11. $u(1, \varphi)=11\cos 4\varphi$.

9.12. $u(1, \varphi)=12\sin 5\varphi$.

9.13. $u(1, \varphi)=13\cos 6\varphi$.

9.14. $u(1, \varphi)=14\sin 7\varphi$.

9.15. $u(1, \varphi)=15\cos 8\varphi$.

9.16. $u(1, \varphi)=16\sin 9\varphi$.

9.17. $u(1, \varphi)=17\cos 9\varphi$.

9.18. $u(1, \varphi)=18\sin 8\varphi$.

9.19. $u(1, \varphi)=19\cos 7\varphi$.

9.20. $u(1, \varphi)=20\sin 6\varphi$.

9.21. $u(1, \varphi)=21\cos 5\varphi$.

9.22. $u(1, \varphi)=22\sin 4\varphi$.

9.23. $u(1, \varphi)=23\cos 3\varphi$.

9.24. $u(1, \varphi)=24\sin 2\varphi$.

9.25. $u(1, \varphi)=25\cos 2\varphi$.

9.26. $u(1, \varphi)=26\sin 3\varphi$.

9.27. $u(1, \varphi)=27\cos 4\varphi$.

9.28. $u(1, \varphi)=28\sin 5\varphi$.

9.29. $u(1, \varphi)=29\cos 6\varphi$.

9.30. $u(1, \varphi)=30\sin 7\varphi$.

9.31. $u(1, \varphi)=31\cos 8\varphi+32\sin 9\varphi$.

Задача 10. Решить смешанную задачу.

10.1. $u_{tt}=81u_{xx}$;
$u(x, 0)=\sin\pi x$; $u_t(x, 0)=0$; $u(0, t)=u(5, t)=0$.

10.2. $u_{tt}=64u_{xx}$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=8\pi\sin\pi x$; $u(0, t)=u(6, t)=0$.

10.3. $u_{tt}=49u_{xx}$;
$u(x, 0)=3\sin 2\pi x$, $u_t(x, 0)=0$; $u(0, t)=u(4, t)=0$.

10.4. $u_{tt}=36u_{xx}$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=12\pi\sin 2\pi x$; $u(0, t)=u(5, t)=0$.

10.5. $u_{tt}=25u_{xx}$;
$u(x, 0)=5\sin 3\pi x$; $u_t(x, 0)=0$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

10.6. $u_{tt}=16u_{xx}$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=12\pi\sin 3\pi x$; $u(0, t)=u(4, t)=0$.

10.7. $u_{tt}=9u_{xx}$;
$u(x, 0)=7\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0)=0$; $u(0, t)=u(2, t)=0$.

10.8. $u_{tt}=4u_{xx}$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=8\pi\sin 4\pi x$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

10.9. $u_{tt}=u_{xx}$;
$u(x, 0)=9\sin 5\pi x$, $u_t(x, 0)=0$; $u(0, t)=u(1, t)=0$.

10.10. $u_{tt}=u_{xx}$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=5\pi\sin 5\pi x$; $u(0, t)=u(3, t)=0$.

10.11. $u_{tt}=4u_{xx}$;
$u(x, 0)=11\sin 6\pi x$; $u_t(x, 0)=0$; $u(0, t)=u(2, t)=0$.

10.12. $u_{tt}=9u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=18\pi\sin 6\pi x;\ u(0,t)=u(1,t)=0.$

10.13. $u_{tt}=16u_{xx}$;

$u(x,0)=13\sin 5\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

10.14. $u_{tt}=25u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=25\pi\sin 5\pi x;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

10.15. $u_{tt}=36u_{xx}$;

$u(x,0)=15\sin 4\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

10.16. $u_{tt}=49u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=28\pi\sin 4\pi x;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

10.17. $u_{tt}=64u_{xx}$;

$u(x,0)=17\sin 3\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(5,t)=0.$

10.18. $u_{tt}=81u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=27\pi\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

10.19. $u_{tt}=u_{xx}$;

$u(x,0)=19\sin 7\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

10.20. $u_{tt}=4u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=14\pi\sin 7\pi x;\ u(0,t)=u(1,t)=0.$

10.21. $u_{tt}=9u_{xx}$;

$u(x,0)=21\sin 6\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

10.22. $u_{tt}=16u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=24\pi\sin 6\pi x;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

10.23. $u_{tt}=25u_{xx}$;

$u(x,0)=23\sin 5\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

10.24. $u_{tt}=36u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=30\pi\sin 5\pi x;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

10.25. $u_{tt}=49u_{xx}$;

$u(x,0)=25\sin 4\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(5,t)=0.$

10.26. $u_{tt}=64u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=32\pi\sin 4\pi x;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

10.27. $u_{tt}=81u_{xx}$;

$u(x,0)=27\sin 3\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(6,t)=0.$

10.28. $u_{tt}=u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=3\pi\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(5,t)=0.$

10.29. $u_{tt}=4u_{xx}$;

$u(x,0)=29\sin 2\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(7,t)=0.$

10.30. $u_{tt}=9u_{xx}$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=6\pi\sin 2\pi x;\ u(0,t)=u(6,t)=0.$

10.31. $u_{tt}=16u_{xx}$;

$u(x,0)=31\sin\pi x,\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(8,t)=0.$

Задача 11. Решить смешанную задачу.

11.1. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(5,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=\sin\pi x$, $u_t(x,\ 0)=18\pi\sin 2\pi x$.

11.2. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(6,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=2\sin\pi x$, $u_t(x,\ 0)=8\pi\sin\pi x$.

11.3. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(4,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=3\sin 2\pi x$, $u_t(x,\ 0)=21\pi\sin 3\pi x$.

11.4. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(5,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=4\sin 2\pi x$, $u_t(x,\ 0)=12\pi\sin 2\pi x$.

11.5. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(3,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=5\sin 3\pi x$, $u_t(x,\ 0)=20\pi\sin 4\pi x$.

11.6. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(4,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=6\sin 3\pi x$, $u_t(x,\ 0)=12\pi\sin 3\pi x$.

11.7. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(2,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=7\sin 4\pi x$, $u_t(x,\ 0)=15\pi\sin 5\pi x$.

11.8. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(3,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=8\sin 4\pi x$, $u_t(x,\ 0)=8\pi\sin 4\pi x$.

11.9. $u_{tt}=u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(1,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=9\sin 5\pi x$, $u_t(x,\ 0)=6\pi\sin 6\pi x$.

11.10. $u_{tt}=u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(3,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=10\sin 5\pi x$, $u_t(x,\ 0)=5\pi\sin 5\pi x$.

11.11. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(2,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=11\sin 6\pi x$, $u_t(x,\ 0)=12\pi\sin 6\pi x$.

11.12. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(1,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=12\sin 6\pi x$, $u_t(x,\ 0)=18\pi\sin 6\pi x$.

11.13. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(3,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=13\sin 5\pi x$, $u_t(x,\ 0)=20\pi\sin 5\pi x$.

11.14. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(2,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=14\sin 5\pi x$, $u_t(x,\ 0)=25\pi\sin 5\pi x$.

11.15. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(4,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=15\sin 4\pi x$, $u_t(x,\ 0)=24\pi\sin 4\pi x$.

11.16. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(3,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=16\sin 4\pi x$, $u_t(x,\ 0)=28\pi\sin 4\pi x$.

11.17. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(5,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=17\sin 3\pi x$, $u_t(x,\ 0)=24\pi\sin 3\pi x$.

11.18. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(4,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=18\sin 3\pi x$, $u_t(x,\ 0)=27\pi\sin 3\pi x$.

11.19. $u_{tt}=u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(2,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=19\sin 7\pi x$, $u_t(x,\ 0)=7\pi\sin 7\pi x$.

11.20. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0,\ t)=u(1,\ t)=0$;
$u(x,\ 0)=20\sin 7\pi x$, $u_t(x,\ 0)=14\pi\sin 7\pi x$.

11.21. $u_{tt}=9u_{xx};\ u(0,\ t)=u(3,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=21\sin 6\pi x,\ u_t(x,\ 0)=18\pi\sin 6\pi x.$

11.22. $u_{tt}=16u_{xx};\ u(0,\ t)=u(2,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=22\sin 6\pi x,\ u_t(x,\ 0)=24\pi\sin 6\pi x.$

11.23. $u_{tt}=25u_{xx};\ u(0,\ t)=u(4,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=23\sin 5\pi x,\ u_t(x,\ 0)=25\pi\sin 5\pi x.$

11.24. $u_{tt}=36u_{xx};\ u(0,\ t)=u(3,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=24\sin 5\pi x,\ u_t(x,\ 0)=30\pi\sin 5\pi x.$

11.25. $u_{tt}=49u_{xx};\ u(0,\ t)=u(5,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=25\sin 4\pi x,\ u_t(x,\ 0)=28\pi\sin 4\pi x.$

11.26. $u_{tt}=64u_{xx};\ u(0,\ t)=u(4,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=26\sin 4\pi x,\ u_t(x,\ 0)=32\pi\sin 4\pi x.$

11.27. $u_{tt}=81u_{xx};\ u(0,\ t)=u(6,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=27\sin 3\pi x,\ u_t(x,\ 0)=27\pi\sin 3\pi x.$

11.28. $u_{tt}=u_{xx};\ u(0,\ t)=u(5,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=28\sin 3\pi x,\ u_t(x,\ 0)=3\pi\sin 3\pi x.$

11.29. $u_{tt}=4u_{xx};\ u(0,\ t)=u(7,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=29\sin 2\pi x,\ u_t(x,\ 0)=4\pi\sin 2\pi x.$

11.30. $u_{tt}=9u_{xx};\ u(0,\ t)=u(6,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=30\sin 2\pi x,\ u_t(x,\ 0)=6\pi\sin 2\pi x.$

11.31. $u_{tt}=16u_{xx};\ u(0,\ t)=u(8,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=31\sin\pi x,\ u_t(x,\ 0)=4\pi\sin\pi x.$

Задача 12. Решить смешанную задачу.

12.1. $u_{tt}=64u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(6,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=8\pi\cos\pi x.$

12.2. $u_{tt}=81u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(5,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=2\cos\pi x,\ u_t(x,\ 0)=0.$

12.3. $u_{tt}=36u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(5,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=12\pi\cos 2\pi x.$

12.4. $u_{tt}=49u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(4,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=4\cos 2\pi x,\ u_t(x,\ 0)=0.$

12.5. $u_{tt}=16u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(4,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=12\pi\cos 3\pi x.$

12.6. $u_{tt}=25u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(3,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=6\cos 3\pi x,\ u_t(x,\ 0)=0.$

12.7. $u_{tt}=4u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(3,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=8\pi\cos 4\pi x.$

12.8. $u_{tt}=9u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(2,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=8\cos 4\pi x,\ u_t(x,\ 0)=0.$

12.9. $u_{tt}=u_{xx};\ u_x(0,\ t)=u_x(3,\ t)=0;$

$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=5\pi\cos 5\pi x.$

12.10. $u_{tt}=u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(1, t)=0;$

$u(x, 0)=10\cos 5\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.11. $u_{tt}=9u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(1, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=18\pi\cos 6\pi x.$

12.12. $u_{tt}=4u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(2, t)=0;$

$u(x, 0)=12\cos 6\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.13. $u_{tt}=25u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(2, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=25\pi\cos 5\pi x.$

12.14. $u_{tt}=16u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(3, t)=0;$

$u(x, 0)=14\cos 5\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.15. $u_{tt}=49u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(3, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=28\pi\cos 4\pi x.$

12.16. $u_{tt}=36u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(4, t)=0;$

$u(x, 0)=16\cos 4\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.17. $u_{tt}=81u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(4, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=27\pi\cos 3\pi x.$

12.18. $u_{tt}=64u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(5, t)=0;$

$u(x, 0)=18\cos 3\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.19. $u_{tt}=4u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(1, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t=(x, 0)=14\pi\cos 7\pi x.$

12.20. $u_{tt}=u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(2, t)=0;$

$u(x, 0)=20\cos 7\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.21. $u_{tt}=16u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(2, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=24\pi\cos 6\pi x.$

12.22. $u_{tt}=9u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(3, t)=0;$

$u(x, 0)=22\cos 6\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.23. $u_{tt}=36u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(3, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=30\pi\cos 5\pi x.$

12.24. $u_{tt}=25u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(4, t)=0;$

$u(x, 0)=24\cos 5\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.25. $u_{tt}=64u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(4, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=32\pi\cos 4\pi x.$

12.26. $u_{tt}=49u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(5, t)=0;$

$u(x, 0)=26\cos 4\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.27. $u_{tt}=u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(5, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=3\pi\cos 3\pi x.$

12.28. $u_{tt}=81u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(6, t)=0;$

$u(x, 0)=28\cos 3\pi x,\ u_t(x, 0)=0.$

12.29. $u_{tt}=9u_{xx};\ u_x(0, t)=u_x(6, t)=0;$

$u(x, 0)=0,\ u_t(x, 0)=6\pi\cos 2\pi x.$

12.30. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u_x(0, t)=u_x(7, t)=0$;
$u(x, 0)=30\cos 2\pi x$, $u_t(x, 0)=0$.

12.31. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u_x(0, t)=u_x(7, t)=0$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=4\pi\cos\pi x$.

Задача 13. Решить смешанную задачу.

13.1. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(x, 0)=\sin 9\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u(0, t)=0$, $u_x(0{,}5; t)=0$.

13.2. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(x, 0)=2\cos 7\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u_x(0, t)=0$, $u(0{,}5; t)=0$.

13.3. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=18\pi\sin 9\pi x$;
$u(0, t)=0$, $u_x(1{,}5; t)=0$.

13.4. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=14\pi\cos 7\pi x$;
$u_x(0, t)=0$, $u(1{,}5; t)=0$.

13.5. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(x, 0)=5\sin 5\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u(0, t)=0$, $u_x(2{,}5; t)=0$.

13.6. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(x, 0)=6\cos 3\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u_x(0, t)=0$, $u(2{,}5; t)=0$.

13.7. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=15\pi\sin 5\pi x$;
$u(0, t)=0$, $u_x(3{,}5; t)=0$.

13.8. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=9\pi\cos 3\pi x$;
$u_x(0, t)=0$, $u(3{,}5; t)=0$.

13.9. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(x, 0)=9\sin 9\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u(0, t)=0$, $u_x(4{,}5; t)=0$.

13.10. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(x, 0)=10\cos 7\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u_x(0, t)=0$, $u(4{,}5; t)=0$.

13.11. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=36\pi\sin 9\pi x$;
$u(0, t)=0$, $u_x(0{,}5; t)=0$.

13.12. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=28\pi\cos 7\pi x$;
$u_x(0, t)=0$, $u(0{,}5; t)=0$.

13.13. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(x, 0)=13\sin 5\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u(0, t)=0$, $u_x(1{,}5; t)=0$.

13.14. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(x, 0)=14\cos 3\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u_x(0, t)=0$, $u(1{,}5; t)=0$.

13.15. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=25\pi\sin 5\pi x$;
$u(0, t)=0$, $u_x(2{,}5; t)=0$.

13.16. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=15\pi\sin 3\pi x$;
$u_x(0, t)=0$, $u(2{,}5; t)=0$.

13.17. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(x, 0)=17\sin 9\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;
$u(0, t)=0$, $u_x(3{,}5; t)=0$.

13.18. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(x, 0)=18\cos 7\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u_x(0, t)=0$, $u(3{,}5; t)=0$.

13.19. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=54\pi\sin 9\pi x$;

$u(0, t)=0$, $u_x(4{,}5; t)=0$.

13.20. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=42\pi\cos 7\pi x$;

$u_x(0, t)=0$, $u(4{,}5; t)=0$.

13.21. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(x, 0)=21\sin 9\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u(0, t)=0$, $u_x(1{,}5; t)=0$.

13.22. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(x, 0)=22\cos 7\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u_x(0, t)=0$, $u(1{,}5; t)=0$.

13.23. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=63\pi\sin 9\pi x$;

$u(0, t)=0$, $u_x(2{,}5; t)=0$.

13.24. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=49\pi\cos 7\pi x$;

$u_x(0, t)=0$, $u(2{,}5; t)=0$.

13.25. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(x, 0)=25\sin 5\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u(0, t)=0$, $u_x(3{,}5; t)=0$.

13.26. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(x, 0)=26\cos 3\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u_x(0, t)=0$, $u(3{,}5; t)=0$.

13.27. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=40\pi\sin 5\pi x$;

$u(0, t)=0$, $u_x(4{,}5; t)=0$.

13.28. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=24\pi\cos 3\pi x$;

$u_x(0, t)=0$, $u(4{,}5; t)=0$.

13.29. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(x, 0)=29\sin 7\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u(0, t)=0$, $u_x(0{,}5; t)=0$.

13.30. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(x, 0)=30\cos 5\pi x$, $u_t(x, 0)=0$;

$u_x(0, t)=0$, $u(1{,}5; t)=0$.

13.31. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=9\pi\sin\pi x$;

$u(0, t)=0$, $u_x(2{,}5; t)=0$.

Задача 14. Решить смешанную задачу.

14.1. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0, t)=-8$, $u(2, t)=2$;

$u(x, 0)=\sin 6\pi x-8+5x$, $u_t(x, 0)=0$.

14.2. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0, t)=7$, $u(1, t)=2$;

$u(x, 0)=7-5x$, $u_t(x, 0)=12\pi\sin 4\pi x$.

14.3. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0, t)=-6$, $u(3, t)=6$;

$u(x, 0)=3\sin 3\pi x-6+4x$, $u_t(x, 0)=0$.

14.4. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0, t)=5t$, $u(2, t)=-3t$;

$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=12\pi\sin 4\pi x+5-4x$.

14.5. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0, t)=-4$, $u(1, t)=-1$;

$u(x, 0)=5\sin 2\pi x-4+3x$, $u_t(x, 0)=0$.

14.6. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0, t)=3$, $u(2, t)=7$;

$u(x, 0)=3+2x$, $u_t(x, 0)=12\pi\sin 3\pi x$.

14.7. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0, t)=-2$, $u(3, t)=1$;
$u(x, 0)=7\sin 4\pi x-2+x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.8. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0, t)=t$, $u(2, t)=-t$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=28\pi\sin 7\pi x+1-x$.
14.9. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(0, t)=-1$, $u(1, t)=-3$;
$u(x, 0)=9\sin 3\pi x-1-2x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.10. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(0, t)=3$, $u(2, t)=-5$;
$u(x, 0)=3-4x$, $u_t(x, 0)=20\pi\sin 4\pi x$.
14.11. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(0, t)=-5$, $u(1, t)=1$;
$u(x, 0)=11\sin 3\pi x-5+6x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.12. $u_{tt}=25u_{xx}$; $u(0, t)=7t$, $u(2, t)=-3t$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=10\pi\sin 2\pi x+7-5x$.
14.13. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(0, t)=-9$, $u(3, t)=3$;
$u(x, 0)=13\sin 3\pi x-9+4x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.14. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(0, t)=8$, $u(2, t)=2$;
$u(x, 0)=8-3x$, $u_t(x, 0)=18\pi\sin 3\pi x$.
14.15. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(0, t)=-6$, $u(3, t)=0$;
$u(x, 0)=15\sin 2\pi x-6+2x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.16. $u_{tt}=36u_{xx}$; $u(0, t)=4t$, $u(4, t)=8t$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=24\pi\sin 4\pi x+4+x$.
14.17. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0, t)=-2$, $u(3, t)=-5$;
$u(x, 0)=17\sin 3\pi x-2-x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.18. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0, t)=3$, $u(2, t)=-1$;
$u(x, 0)=3-2x$, $u_t(x, 0)=35\pi\sin 5\pi x$.
14.19. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0, t)=-1$, $u(1, t)=-4$;
$u(x, 0)=19\sin 7\pi x-1-3x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.20. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0, t)=2t$, $u(2, t)=-6t$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=28\pi\sin 4\pi x+2-4x$.
14.21. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0, t)=-4$, $u(1, t)=-9$;
$u(x, 0)=21\sin 3\pi x-4-5x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.22. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0, t)=2$, $u(3, t)=-7$;
$u(x, 0)=2-3x$, $u_t(x, 0)=24\pi\sin 3\pi x$.
14.23. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0, t)=-3$, $u(1, t)=1$;
$u(x, 0)=23\sin 2\pi x-3+4x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.24. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0, t)=4t$, $u(2, t)=-6t$;
$u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=32\pi\sin 4\pi x+4-5x$.
14.25. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0, t)=-5$, $u(3, t)=1$;
$u(x, 0)=25\sin 3\pi x-5+2x$, $u_t(x, 0)=0$.
14.26. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0, t)=6$, $u(4, t)=-2$;
$u(x, 0)=6-2x$, $u_t(x, 0)=27\pi\sin 3\pi x$.
14.27. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0, t)=-7$, $u(3, t)=2$;
$u(x, 0)=27\sin 2\pi x-7+3x$, $u_t(x, 0)=0$.

14.28. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0, t)=8t$, $u(4, t)=-4t$;
$u(x, 0)$, $u_t(x, 0)=27\pi\sin 3\pi x+8-3x$.

14.29. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0, t)=-9$, $u(2, t)=1$;
$u(x, 0)=29\sin 4\pi x-9+5x$, $u_t(x, 0)=0$.

14.30. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0, t)=9$, $u(3, t)=-3$;
$u(x, 0)=9-4x$, $u_t(x, 0)=10\pi\sin 5\pi x$.

14.31. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0, t)=-1$, $u(2, t)=5$;
$u(x, 0)=31\sin 2\pi x-1+3x$, $u_t(x, 0)=0$.

Задача 15. Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x, 0)=u_t(x, 0)=0;\ u(0, t)=u(\pi, t)=0.$$

15.1. $u_{tt}=u_{xx}+65e^{-8t}\sin x$.

15.2. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+3\sin 2t\sin 2x$.

15.3. $u_{tt}=u_{xx}+16\cos 8t\sin 8x$.

15.4. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+8\sin 3t\sin 3x$.

15.5. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+50e^{-7t}\sin 4x$.

15.6. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+3\cos 2t\sin 5x$.

15.7. $u_{tt}=4u_{xx}+28\cos 14t\sin 7x$.

15.8. $u_{tt}=\frac{1}{36}u_{xx}+8\cos 3t\sin 6x$.

15.9. $u_{tt}=\frac{1}{49}u_{xx}+37e^{-6t}\sin 7x$.

15.10. $u_{tt}=\frac{1}{64}u_{xx}+15\sin 4t\sin 8x$.

15.11. $u_{tt}=9u_{xx}+36\cos 18t\sin 6x$.

15.12. $u_{tt}=\frac{1}{81}u_{xx}+15\cos 4t\sin 9x$.

15.13. $u_{tt}=u_{xx}+26e^{-5t}\sin x$.

15.14. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+24\sin 5t\sin 2x$.

15.15. $u_{tt}=16u_{xx}+40\cos 20t\sin 5x$.

15.16. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+24\cos 5t\sin 3x$.

15.17. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+17e^{-4t}\sin 4x$.

15.18. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+35\sin 6t\sin 5x$.

15.19. $u_{tt}=25u_{xx}+40\cos 20t\sin 4x$.

15.20. $u_{tt}=\frac{1}{36}u_{xx}+35\cos 6t\sin 5x$.

15.21. $u_{tt}=\frac{1}{49}u_{xx}+10e^{-3t}\sin 7x$.

15.22. $u_{tt}=\frac{1}{64}u_{xx}+48\sin 7t\sin 8x$.

15.23. $u_{tt}=36u_{xx}+36\cos 18t\sin 3x$.

15.24. $u_{tt}=\frac{1}{81}u_{xx}+48\cos 7t\sin 9x$.

15.25. $u_{tt}=u_{xx}+5e^{-2t}\sin x$.

15.26. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+63\sin 8t\sin 2x$.

15.27. $u_{tt}=49u_{xx}+28\cos 14t\sin 2x$.

15.28. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+63\cos 8t\sin 3x$.

15.29. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+2e^{-t}\sin 4x$.

15.30. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+80\sin 9t\sin 5x$.

15.31. $u_{tt}=64u_{xx}+16\cos 8t\sin x$.

Справочный материал

1. Задача Штурма — Лиувилля:
дифференциальное уравнение $X''+\lambda^2X=0$;
граничные условия $X(0)=X(l)=0$.

Разыскиваются значения параметра $\lambda=\lambda_n$ (собственные числа), при которых существуют ненулевые решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, а также разыскиваются и сами ненулевые решения (собственные функции).

Рассматриваются и задачи Штурма — Лиувилля с граничными условиями вида

$$X'(0)=X'(l)=0,\ X(0)=X'(l)=0,\ X'(0)=X(l)=0.$$

2. Смешанная задача для волнового уравнения на отрезке $[0, l]$ с однородными граничными условиями:

дифференциальное уравнение $u_{tt}=a^2u_{xx}$;

начальные условия $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u_t(x, 0)=\psi(x)$;

граничные условия $u(0, t)=u(l, t)=0$.

Рассматриваются также однородные граничные условия следующих видов:

$$u_x(0, t)=u_x(l, t)=0,\ u(0, t)=u_x(l, t)=0,\ u_x(0, t)=u(l, t)=0.$$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t)=A_n\cos a\lambda_n t+B_n\sin a\lambda_n t;$$

λ_n — собственные числа задачи Штурма — Лиувилля; A_n, B_n — коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

3. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x, t).$$

Ее решение можно получить в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x),$$

где $u_n(t)$ — решения задач Коши

$$u_n''+a^2\lambda_n^2u_n=f_n(t),\ u_n(0)=\varphi_n,\ u_n'(0)=\psi_n;$$

$f_n(t)$, φ_n, ψ_n — коэффициенты разложений

$$f(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),\ \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_nX_n(x),\ \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \psi_nX_n(x).$$

4. Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$ с однородными граничными условиями:

дифференциальное уравнение $u_t=a^2u_{xx}$;

начальное условие $u(x, 0)=\varphi(x)$;

граничные условия $u(0, t)=u(l, t)=0$

или одно из

$$u_x(0, t)=u_x(l, t)=0,\ u(0, t)=u_x(l, t)=0,\ u_x(0, t)=u(l, t)=0.$$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t};$$

λ_n — собственные числа задачи Штурма — Лиувилля; C_n — коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

5. Смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t).$$

Ее решение можно получить в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x),$$

где $u_n(t)$ — решения задач Коши

$$u_n' + a^2 \lambda_n^2 u_n = f_n(t), \ u_n(0) = \varphi_n;$$

$f_n(t)$, φ_n — коэффициенты разложений

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x).$$

6. Смешанные задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями

$$u(0, t) = A(t), \ u(l, t) = B(t).$$

Каждая из этих задач сводится к задаче с однородными граничными условиями для функции

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x, t),$$

где

$$w(x, t) = A(t) + \frac{B(t) - A(t)}{l} x.$$

Решение получается в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

10. Основные формулы векторного анализа

Если $u=u(x, y, z)$, $\mathbf{a}=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}$, то

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix};$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=0,\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0;$$

формула Остроградского

$$\oiint\limits_S \mathbf{a}\mathbf{n}^\circ\, dS=\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV,$$

S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\mathbf{n}^\circ$ — орт внешней нормали к поверхности S;

формула Стокса

$$\oint\limits_\Gamma \mathbf{a}\,d\mathbf{r}=\iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\,\mathbf{n}^\circ\, dS,$$

Γ — замкнутая линия, являющаяся краем поверхности S, $\mathbf{n}^\circ$ — орт нормали к поверхности S (согласуется с направлением интегрирования по Γ).

ОГЛАВЛЕНИЕ