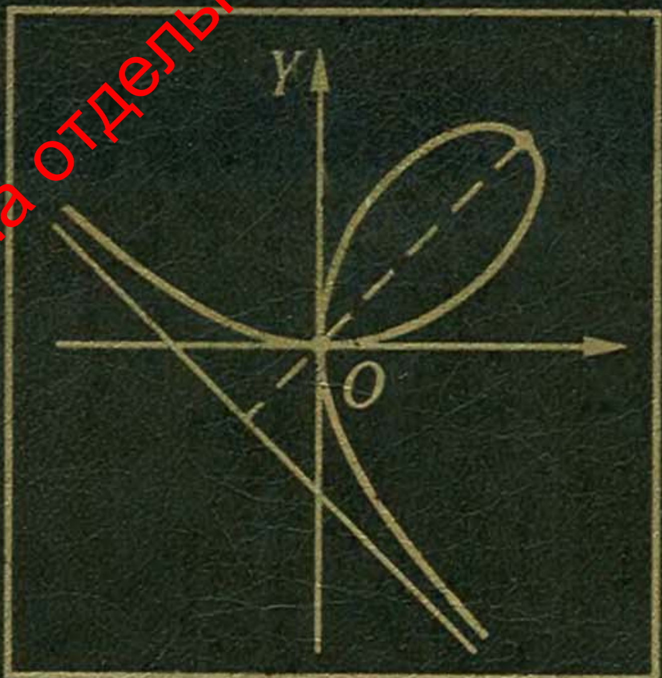
Н. С ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

том 1



Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ ПЕРВЫЙ

ИЗДАНИЕ СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений.

МОСКВА
"ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС"
2002

ББК 517.8
Г11
УДК 519.2(075.8)

Пискунов Н.С.

Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т. I: — М.: Интеграл-Пресс, 2002. — 416 с.

ISBN 5-89602-012-0 (т. I)

ISBN 5-89602-014-7

Учебник составлен в соответстви с программой по курсу математики для втузов в объеме 300–450 часов. В каждый раздел включено достаточное количество задач, примеров и упражнений, многие из которых иллюстрируют связь математики с другими дисциплинами.

В настоящее время является основным учебником по курсу математики для большинства Российских вузов. Многократно переиздавался в СССР и за рубежом.

Учебное издание

Пискунов Николай Семенович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ т. I

Формат 60 × 90 1/16. Объем 26 п. л. Тираж 7000 экз. Издательство «Интеграл-Пресс». 127247, г. Москва, ул. 800-летия Москвы, 4 корп. 2, пом. прав. ЛР №065120 от 18.04.97. Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП ППП «Типография «Наука» Академиздатцентра «Наука» РАН. 121009, Москва, Шубинский пер., 6. Заказ № 5579.

ISBN 5-89602-012-0

9 785896 020127

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

ГЛАВА V

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА VI

КРИВИЗНА КРИВОЙ

ГЛАВА VII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА IX

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА X
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА XI
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА XII
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Девятое издание данного учебника отличается от его 8-го издания. Это издание полностью соответствует программе по математике для втузов, расчитанной на 400-450 часов.

В учебник включены две новые гл. XX и XXI.

Гл. XX «Элементы теории вероятностей и математической статистики» содержит материал, предусмотренный соответствующим разделом обязательной программы по математике МВССО СССР.

Гл. XXI «Матрицы. Матричная запись систем и решений систем линейных дифференциальных уравнений» также содержит материал, предусмотренный обязательной программой. Но, кроме того, в этой главе обращено большое внимание на матричную запись систем линейных дифференциальных уравнений и решений систем линейных дифференциальных уравнений. Использована матричная запись последовательных приближенных решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Этот материал необходимо поместить в курсе дифференциального и интегрального исчисления для втузов потому, что в настоящее время во многих книгах по электротехнике, радиотехнике, автоматике исследование решений систем дифференциальных уравнений производится с использованием аппарата теории матриц.

Написаны новые §§ 26, 27, 28 гл. XVI. Здесь рассмотрен метод последовательных приблежений решения дифференциальных уравнений, доказывается теорема о существовании решения дифференциального уравнения и теорема единственности. Обращено внимание на строгость изложения всей главы о дифференциальных уравнениях.

Параграф 31 гл. XIII «Понятие о теории устойчивости Ляпунова» значительно расширен. В этом издании он называется так: «Понятие о теории устойчивости Ляпунова. Поведение траекторий дифференциального уравнения в окрестности особой точки». Здесь параллельно с рассмотрением устойчивости решений систем дифференциальных уравнений рассмотрено поведение траекторий вблизи особой точки на фазовой плоскости. Это необходимо было сделать потому, что при изучении соответствующих вопросов в курсах электротехники, радиотехники, автоматики этими понятиями необходимо свободно пользоваться. Заново написаны некоторые параграфы с изложением теории комплексных чисел. Существенно расширен § 2 гл. XI, где дано доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции. Написан дополнительный § 11 гл. XI «Интегрирование комплексной функции действительной переменной». Написаны новые §§ 24 и 25, гл. XVI, посвященные рядам с комплексными членами и степенным рядам с комплексной переменной. Написан новый § 12 гл. XVII, посвященный рядам Фурье в комплексной форме. Расширено изложение вопроса об интеграле Фурье. Освещены понятия, используемые в специальной прикладной литературе (спектр, спектральная функция). Написаны новые § 15 «Ряд Фурье по ортогональной системе функций» и § 16 «Понятие о линейном функциональном пространстве. Аналогия между разложением функций в ряд Фурье и разложением векторов» в гл. XVII. Этот материал изложен таким образом, чтобы студенты и инженеры могли понимать материал других дисциплин, опирающихся на этот математический аппарат.

В гл. XIX написан новый § 20 «Дельта-функция и ее изображение».

В гл. VIII помещен § 19 «Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов». Содержанием этого параграфа ранее являлось Приложение I, помещавшееся в конце первого тома этого учебника.

В гл. VII даны § 10 «Интерполяционная формула Ньютона» и § 11 «Численное дифференцирование». Содержанием этих параграфов ранее являлось Приложение II.

Произведены некоторые дополнения в гл. V, VII, IX, XII, XIII.

Глава XIII «Дифференциальные уравнения» целиком перенесена во второй том.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В пятом издании сохранен без изменений весь текст четвертого издания, но этот материал разделен на два тома (для удобства использования настоящего и предыдущего изданий учебника нумерация глав тоже оставлена без изменения).

Содержание всего учебника определяется программами курса математики для втузов, рассчитанными на 300–450 часов. Учебник предназначается для изучения курса математики как в стационарных, так и в заочных втузах. Это учитывалось при изложении материала; в частности, с этой целью в учебнике разобрано много примеров, иллюстрирующих изложенный теоретически материал и дающих образцы решения задач.

Первый том содержит материал, соответствующий программе 1-го курса втуза, за исключением главы XII «Дифференциальные уравнения», которая, как правило, проходится на 2-м курсе. Но так как в некоторых втузах предварительные сведения о дифференциальных уравнениях, необходимые для последующих дисциплин, даются на 1-м курсе, то часть этой главы (§§ 1–28) и помещена в первом томе.

Отметим, что материал, содержащийся в программе втузов, рассчитанный на число часов порядка 300, почти полностью содержится в первом томе (но в нем содержится и материал, выходящий за рамки этой программы).

Второй том — конец главы XIII (§§ 29–34), главы XIV–XIX — содержит материал, соответствующий программе 2-го курса втуза.

Первые две главы первого тома — «Число. Переменная. Функция» и «Предел. Непрерывность функции» написаны в пределах возможного кратко. Некоторые вопросы, обычно излагаемые в этих главах, без ущерба для дела перенесены в третью и последующие главы. Это дало возможность раньше перейти к основному понятию дифференциального исчисления — производной, что требуют другие дисциплины втузовского курса (целесообразность такого расположения материала подтверждается опытом работы).

В связи с включением во втузовскую программу по высшей математике вопросов, необходимых для обеспечения курсом математики втузовских дисциплин, связанных с автоматикой и вычислительной техникой, в учебнике подробно изложены соответствующие разделы: « Численное интегрирование дифференциальных уравнений»*), «Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений», «Понятие о теории устойчивости Ляпунова», «Оператор Гамильтона», «Интеграл Фурье» и т. д.

В гл. XVIII рассмотрены основные уравнения математической физики. Обращено большое внимание на выяснение характера физических явлений, приводящих к уравнениям различных типов и соответствующим краевым задачам. Большое внимание уделено численным методам решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В главе XIX излагаются основные понятия операционного исчисления и операционный метод решения дифференциальных уравнений. Это требуется для многих последующих дисциплин, и особенно электротехнических.

В учебник включено большое количество задач и примеров для упражнений, многие из которых иллюстрируют связь математики с другими дисциплинами. Задачи и примеры специально подобраны по каждому разделу курса, что способствует усвоению излагаемого материала. Это обстоятельство также делает книгу удобной для самостоятельного изучения курса математики, в частности для студентов-заочников.

Шестое издание отличается от пятого только тем, что в конце первого тома дано приложение, где изложен важный для инженеров вопрос: «Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов».

Седьмое издание отличается от шестого только тем, что в конце первого тома дано приложение «Интерполяционная формула Ньютона. Численное дифференцирование».

*) Обычно излагаемые численные методы анализа также изложены в данном учебнике.

Глава I
ЧИСЛО, ПЕРЕМЕННАЯ, ФУНКЦИЯ

§ 1. Действительные числа. Изображение действительных чисел точками числовой оси

Одним из основных понятий математики является число. Понятие числа возникло в древности и на протяжении длительного времени подвергалось расширению и обобщению.

Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом нуль называются *рациональными числами.* Каждое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{p}{q}$ двух целых чисел p и q, например $\frac{5}{7}$, $1,25 = \frac{5}{4}$.

В частности, целое число p можно рассматривать как отношение двух целых чисел $\frac{p}{1}$, например

$$6 = \frac{6}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}.$$

Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей. Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются *иррациональными числами*: таковы числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$ и т. д.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных*) чисел. Действительные числа ***упорядочены по величине***, т.е. для каждой пары действительных чисел x и y имеет место одно, и только одно, из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. *Числовой осью* называется бесконечная прямая, на которой выбраны: 1) некоторая точка O, называемая началом отсчета, 2) положительное направление, которое указывается стрелкой, и 3) масштаб для измерения длин. Чаще всего мы будем располагать числовую ось горизонтально и положительное направление выбирать слева направо.

Если число x_1 положительно, то его изображают точкой M_1, лежащей справа от точки O на расстоянии $OM_1 = x_1$; если число x_2 отрицательно, то его изображают точкой M_2, лежащей слева от точки O на расстоянии $OM_2 = -x_2$ (рис. 1). Точка O изображает число нуль. Очевидно, что каждое действительное число изображается определенной точкой числовой оси. Два различных действительных числа изображаются различными точками числовой оси.

Справедливо также утверждение: каждая точка числовой оси является изображением только одного действительного числа (рационального или иррационального).

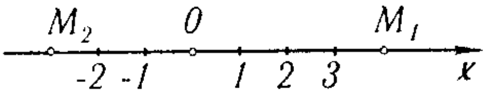


Рис. 1

Таким образом, между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждому числу соответствует единственная изображающая его точка и, наоборот, каждой точке соответствует единственное изображаемое ею число. Это дает возможность во многих рассуждениях в некотором смысле равнозначно употреблять понятие «число x» и понятие «точка x». Последним обстоятельством мы будем широко пользоваться в курсе.

Укажем без доказательства следующее важное свойство совокупности действительных чисел: *между двумя произвольными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.* В терминах геометрических это предложение формулируется так: *между двумя произвольными точками числовой оси найдутся как рациональные, так и иррациональные точки.*

В заключение отметим следующую теорему, представляющую в известном смысле «мостик между теорией и практикой».

Теорема. *Каждое иррациональное число α можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.*

В самом деле, пусть иррациональное число $\alpha > 0$ и пусть требуется вычислить α с точностью до $1/n$ (например, до $1/10$, до $1/100$ и т. д.).

Каково бы ни было α, оно заключается между двумя действительными числами N и $N+1$. Разделим отрезок между N и $N+1$ на n частей; тогда α окажется между рациональными числами $N + \frac{m}{n}$ и $N + \frac{m+1}{n}$. Так как разность этих чисел равна $1/n$, то, следовательно, каждое из них выражает α с заданной степенью точности: первое с недостатком, а второе — с избытком.

Пример. Иррациональное число $\sqrt{2}$ выражается рациональными числами:

$1,4$ и $1,5$ — с точностью до $1/10$,

$1,41$ и $1,42$ — с точностью до $1/100$,

$1,414$ и $1,415$ — с точностью до $1/1000$ и т.д.

§ 2. Абсолютная величина действительного числа

Введем нужное для дальнейшего понятие абсолютной величины действительного числа.

Определение. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям

$$|x| = x, \quad \text{если } x \geqslant 0;$$
$$|x| = -x, \quad \text{если } x < 0.$$

Примеры: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Из определения следует, что для любого x справедливо соотношение $x \leqslant |x|$.

Рассмотрим некоторые свойства абсолютных величин.

1. *Абсолютная величина алгебраической суммы нескольких действительных чисел не больше суммы абсолютных величин слагаемых*:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Доказательство. Пусть $x + y \geqslant 0$, тогда

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y| \text{ (так как } x \leqslant |x| \text{ и } y \leqslant |y|).$$

Пусть $x + y < 0$, тогда

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|,$$

ч. т. д.

Проведенное доказательство легко распространяется на любое число слагаемых.

Примеры:

$$|-2+3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ или } 1 < 5;$$
$$|-3-5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ или } 8 = 8.$$

2. *Абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого*:

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|, \quad |x| > |y|.$$

Доказательство. Положим $x - y = z$, тогда $x = y + z$ и по доказанному

$$|x| = |y + z| \leqslant |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

откуда

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

ч.т.д.

3. *Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей*:

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4. *Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Последние два свойства непосредственно следуют из определения абсолютной величины.

§ 3. Переменные и постоянные величины

В результате измерения таких физических величин, как время, длина, площадь, объем, масса, скорость, давление, температура и т. п., определяются численные значения физических величин. Математика занимается величинами, отвлекаясь от их конкретного содержания. В дальнейшем, говоря о величинах, мы будем иметь в виду их численные значения. В различных явлениях некоторые величины изменяются, т.е. меняются их численные значения, другие величины сохраняют свое численное значение. Так, при равномерном движении точки время и расстояние меняются; скорость остается постоянной.

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения. Величина, численные значения которой не меняются, называется *постоянной величиной*. В дальнейшем переменные величины мы будем обозначать буквами x, y, z, $u, \ldots$ и т. д., постоянные величины будем обозначать буквами a, b, $c, \ldots$ и т. д.

Замечание. В математике постоянная величина часто рассматривается как частный случай переменной, у которой все численные значения одинаковы.

Следует отметить, что при рассмотрении конкретных физических явлений может иметь место такое положение, что величина с одним и тем же названием в одном явлении оказывается постоянной, в другом — переменной. Например, скорость равномерного движения есть величина постоянная, а скорость равномерно ускоренного движения — величина переменная. Величины, которые сохраняют свое значение в любом явлении, называются *абсолютными постоянными*. Например, отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная $\pi = 3,14159\ldots$

Как мы увидим на протяжении всего курса, понятие переменной величины является основным понятием дифференциального и интегрального исчислений.

§ 4. Область изменения переменной величины

Переменная величина принимает различные числовые значения. В зависимости от характера рассматриваемой задачи совокупность этих значений может быть различная. Например, температура воды, подогреваемой в обычных условиях, будет меняться от комнатной температуры, равной 15–18°С, до точки кипения, 100°С. Переменная же величина $x = \cos\alpha$ может принимать все значения от -1 до $+1$.

Значения переменной величины геометрически изображаются точками числовой оси. Так, значения переменной $x = \cos\alpha$ при всевозможных значениях α изображаются совокупностью точек отрезка числовой оси, от -1 до 1, включая и точки -1 и 1 (рис. 2).

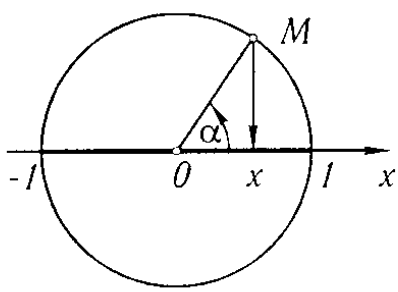


Рис. 2

Определение. Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной.

Отметим следующие области изменения переменной величины, которые часто будут встречаться в дальнейшем.

Промежутком, или *интервалом*, называется совокупность всех чисел x, заключенных между данными числами a и b ($a < b$), при этом сами эти числа ***не принадлежат*** рассматриваемой совокупности чисел; его обозначают так: (a, b) или с помощью неравенств $a < x < b$.

Отрезком, или *сегментом*, называется совокупность всех чисел x, заключенных между двумя данными числами a и b, причем оба числа a и b ***принадлежат*** рассматриваемой совокупности; его обозначают так: $[a, b]$ или с помощью неравенств $a \leqslant x \leqslant b$. Иногда отрезок называется *замкнутым промежутком*, или *замкнутым интервалом.*

Если одно из чисел a или b, например a, присоединяется к промежутку, а другое — нет, то получается *полузамкнутый промежуток*, его можно задать неравенствами $a \leqslant x < b$ и обозначить $[a, b)$.

Если присоединяется число b и не присоединяется число a, то получается полузамкнутый промежуток $(a, b]$, который можно задать неравенствами $a < x \leqslant b$.

Если переменная x принимает всевозможные значения, большие чем a, то такой интервал обозначают $(a, +\infty)$ и задают условными неравенствами $a < x < +\infty$. Так же рассматриваются бесконечные интервалы и полузамкнутые бесконечные интервалы, задаваемые условными неравенствами

$$a \leqslant x < +\infty, \quad -\infty < x < c, \quad -\infty < x \leqslant c, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Пример. Области изменения переменной $x = \cos\alpha$ при всевозможных значениях α есть отрезок $[-1, 1]$ и определяется неравенством $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Данные выше определения можно сформулировать, используя вместо понятия «число» понятие «точка», например:

Отрезком называется совокупность всех точек x, заключенных между данными точками a и b (*концами отрезка*), причем концы отрезка принадлежат рассматриваемой совокупности.

Окрестностью данной точки x_0 называется произвольный интервал (a, b), содержащий эту точку внутри себя, т.е. интервал (a, b), концы которого удовлетворяют условию $a < x_0 < b$. Часто рассматривается окрестность (a, b) точки x_0, для которой x_0 является серединой. Тогда x_0 называется *центром окрестности*, величина $(b-a)/2$ называется *радиусом окрестности*. На рис. 3 изображена окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 с радиусом ε.

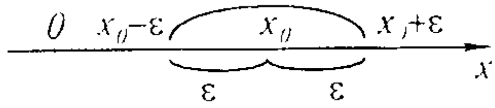


Рис. 3

§ 5. Упорядоченная переменная величина. Возрастающая и убывающая переменные величины. Ограниченная переменная величина

Будем говорить, что переменная x есть *упорядоченная переменная величина*, если известна область изменения этой переменной величины и про каждое из двух любых ее значений можно сказать, какое значение предыдущее и какое последующее. Здесь понятия «предыдущее» и «последующее» не связаны со временем, а являются способом «упорядочения» значений переменной величины, т.е. установления порядка соответствующих значений переменной величины.

Частным случаем упорядочения переменной величины является переменная величина, значения которой образуют *числовую последовательность* x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n, $\ldots$ Здесь при $k' < k$ значение $x_{k'}$ — «предшествующее», а значение x_k — «последующее» независимо от того, какое из этих значений больше.

Определение 1. Переменная величина называется *возрастающей*, если каждое последующее ее значение больше предыдущего ее значения. Переменная величина называется *убывающей*, если каждое ее последующее значение меньше предыдущего.

Возрастающие переменные величины и убывающие переменные величины называются *монотонно изменяющимися* переменными величинами или просто *монотонными величинами*.

Пример. При удвоении числа сторон правильного вписанного в круг многоугольника площадь s этого многоугольника является возрастающей переменной величиной. Площадь правильного описанного около круга многоугольника при удвоении числа сторон является убывающей переменной величиной. Заметим, что не всякая переменная величина является непременно возрастающей или убывающей. Так, например, переменная $x = \sin\alpha$, если α есть возрастающая величина на отрезке $[0, 2\pi]$, не является монотонной величиной. Она сначала возрастает от 0 до 1, затем убывает от 1 до -1, и, наконец, возрастает от -1 до 0.

Определение 2. Переменная величина x называется *ограниченной*, если существует такое постоянное $M > 0$, что все *последующие* значения переменной, *начиная с некоторого*, удовлетворяют условию

$$-M \leqslant x \leqslant M, \quad \text{т. е.} \ |x| \leqslant M.$$

Иначе говоря, переменная величина называется ограниченной, если можно указать такой отрезок $[-M, M]$, что все *последующие* значения переменной, *начиная с некоторого*, будут принадлежать этому отрезку. Однако не следует думать, что переменная величина будет принимать непременно все значения отрезка $[-M, M]$. Например, переменная величина, принимающая всевозможные рациональные значения на отрезке $[-2, 2]$, ограничена, тем не менее она не принимает всех значений на $[-2, 2]$, а именно иррациональных.

§ 6. Функция

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, при изучении движения пройденный путь рассматривается как переменная, изменяющаяся в зависимости от изменения времени. Здесь пройденный путь есть *функция* времени.

Рассмотрим другой пример. Известно, что площадь круга выражается через радиус так: $Q = \pi R^2$. Если радиус R будет принимать различные числовые значения, то площадь Q также будет принимать различные числовые значения. Таким образом, изменение одной переменной влечет изменение другой. Здесь площадь круга Q есть функция радиуса R. Сформулируем определение понятия «функция».

Определение 1. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y есть *функция* от x или, в символической записи, $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Зависимость переменных x и y называется *функциональной зависимостью*. Буква f в символической записи функциональной зависимости $y = f(x)$ указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y. Вместо записи $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ и т. д. иногда пишут $y = y(x)$, $u = u(x)$ и т. д., т.е. буквы y, u и т. д. обозначают и зависимую переменную, и символ совокупности операций над x.

Запись $y = C$, где C — постоянная, обозначает функцию, значение которой при любом значении x одно и то же и равно C.

Определение 2. Совокупность значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила $f(x)$, называется *областью определения функции* (или *областью существования функции*).

Пример 1. Функция $y = \sin x$ определена при всех значениях x. Следовательно, ее областью определения будет бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$.

Замечание 1. Если имеем функциональную зависимость двух переменных величин x и $y = f(x)$ и если x и $y = f(x)$ рассматривать как упорядоченные переменные величины, то из двух значений функции $y^* = f(x^*)$ и $y^{**} = f(x^{**})$, соответствующих двум значениям аргумента x^* и x^{**}, последующим значением функции будет то, которое соответствует последующему значению аргумента. Поэтому естественно, например, следующее определение.

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента x соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*. Аналогичным образом определяется *убывающая* функция.

Пример 2. Функция $Q = \pi R^2$ при $0 < R < +\infty$ есть функция возрастающая, так как большему значению R соответствует большее значение Q.

Замечание 2. Иногда в определении понятия функции допускают, что каждому значению x, принадлежащему некоторой области, соответствует не одно, а несколько значений y или даже бесконечное множество значений y. В этом случае функцию называют *многозначной* в отличие от определенной выше функции, которую называют *однозначной*. В дальнейшем, говоря о функции, мы будем иметь в виду только ***однозначные*** функции. Если в силу необходимости придется иногда иметь дело с многозначными функциями, то мы будем делать специальные оговорки.

§ 7. Способы задания функции

I. **Табличный способ задания функции.** При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента x_1, x_2, $\ldots$, x_n и соответствующие значения функции y_1, y_2, $\ldots$, y_n.

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Таковы, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.

В результате экспериментального изучения явлений также могут получиться таблицы, выражающие функциональную зависимость между измеряемыми величинами. Так, например, в результате измерения температуры воздуха на метеорологической площадке в определенный день получается следующая таблица:

Значение температуры T (в градусах) в зависимости от времени t (в часах)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	$-0,5$	1	3	$3,5$	4

Эта таблица определяет T как функцию t.

II. **Графический способ задания функции**. Если в прямоугольной системе координат на плоскости имеем некоторую совокупность точек $M(x, y)$, при этом никакие две точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy, то эта совокупность точек определяет некоторую однозначную функцию $y = f(x)$; значениями аргумента являются абсциссы точек, значениями функции — соответствующие ординаты (рис. 4).

Совокупность точек плоскости (xOy), абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции, называется *графиком данной функции*.

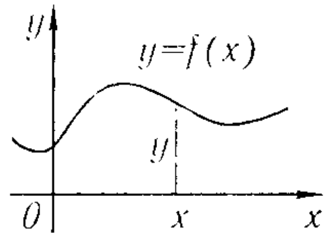


Рис. 4

III. **Аналитический способ задания функции**. Сначала разъясним понятие «аналитическое выражение». *Аналитическим выражением* будем называть символическое обозначение совокупности известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и буквами, обозначающими постоянные или переменные величины.

Отметим, что под совокупностью известных математических операций будем понимать не только математические операции, известные из курса средней школы (сложение, вычитание, извлечение корня и т. д.), но и те, которые будут определяться по мере изучения курса.

Аналитическими выражениями, например, являются:

$$x^4 - 2, \quad (\lg x - \sin x)/(5x^2 + 1), \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}$$

и т. д.

Если функциональная зависимость $y = f(x)$ такова, что f обозначает аналитическое выражение, то говорят, что функция y от x *задана аналитически*.

Примеры функций, заданных аналитически: 1) $y = x^4 - 2$, 2) $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$, 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, 4) $y = \sin x$, 5) $Q = \pi R^2$ и т. д.

Здесь функции заданы аналитически с помощью одной формулы (под формулой понимается равенство двух аналитических выражений). В таких случаях можно говорить о ***естественной*** области определения функции.

Естественной областью определения функции, заданной аналитически, является совокупность значений x, при которых имеет вполне определенное значение стоящее справа аналитическое выражение. Так, естественной областью определения функции $y = x^4 - 2$ является бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$, так как функция определяется при всех значениях x. Функция $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$ определена при всех значениях x, кроме значения $x = 1$, так как при этом значении знаменатель обращается в нуль. Для функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ естественной областью определения будет отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и т. д.

Замечание. Иногда бывает нужно рассматривать не всю естественную область определения функции, а только некоторую ее часть. Так, зависимость площади Q круга от радиуса R определяется функцией $Q = \pi R^2$. Областью определения данной функции при рассмотрении данного геометрического вопроса является бесконечный интервал $0 < R < +\infty$. Естественной же областью определения данной функции является бесконечный интервал $-\infty < R < +\infty$.

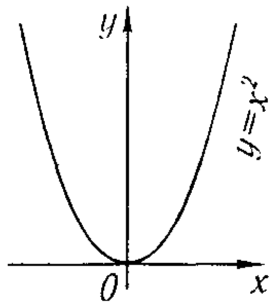


Рис. 5

Если функция $y = f(x)$ задана аналитически, то она может быть изображена графически на плоскости координат xOy. Так, графиком функции $y = x^2$ является парабола, изображенная на рис. 5.

§ 8. Основные элементарные функции. Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие, аналитическим способом заданные функции.

I. *Степенная функция*: $y = x^\alpha$, где α — действительное число*).

II. *Показательная функция*: $y = a^x$, где a — положительное число, не равное единице.

III. *Логарифмическая функция*: $y = \log_a x$, где основание логарифмов a — положительное число, не равное единице.

IV. *Тригонометрические функции*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Обратные тригонометрические функции*:

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,$$
$$y = \operatorname{arcctg} x,\ y = \operatorname{arcsec} x,\ y = \operatorname{arccosec} x.$$

Рассмотрим области определения и графики основных элементарных функций.

Степенная функция, $y = x^\alpha$.

1. α — целое положительное число. Функция определена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Графики функции в этом случае при некоторых значениях α имеют вид, изображенный на рис. 6 и 7.

---

*) При α иррациональном эта функция вычисляется путем логарифмирования и потенцирования: $\log y = \alpha \log x$. При этом предполагается, что $x > 0$.

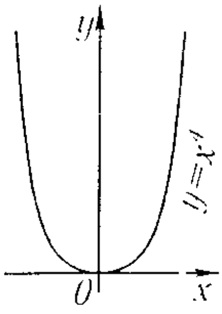


Рис. 6

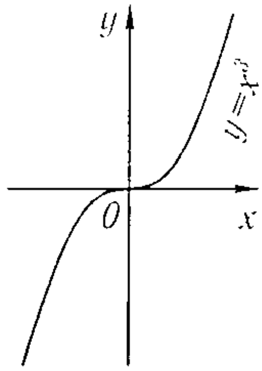


Рис. 7

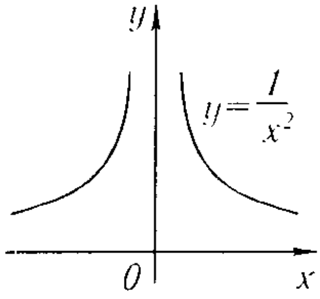


Рис. 8

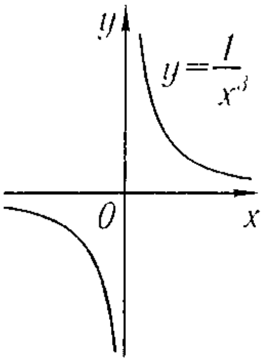


Рис. 9

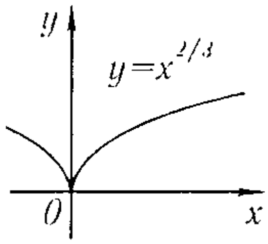


Рис. 10

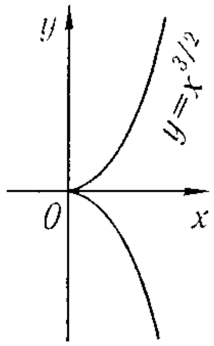


Рис. 11

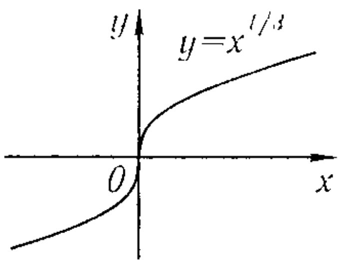


Рис. 12

2. α — целое отрицательное число. В этом случае функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Графики функций при некоторых значениях α имеют вид, изображенный на рис. 8 и 9.

На рис. 10, 11, 12 изображены графики степенной функции при дробно-рациональных значениях α.

Показательная функция, $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция определена при всех значениях x. График ее имеет вид, изображенный на рис. 13.

Логарифмическая функция, $y = \log_a x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция определена при $x > 0$. График ее изображен на рис. 14.

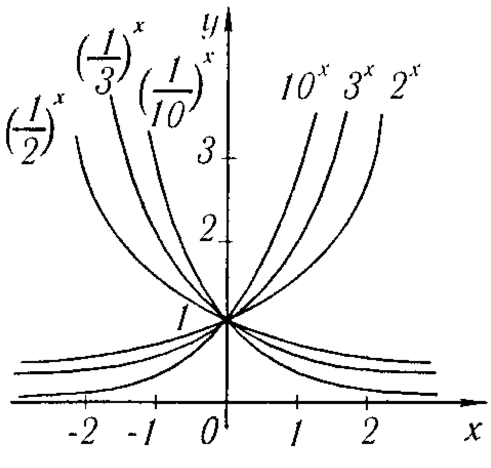


Рис. 13

Тригонометрические функции. Независимая переменная x в формулах $y = \sin x$ и т.д. выражается в радианах. Все перечисленные тригонометрические функции — периодические. Сформулируем более общее определение периодической функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число C, от прибавления (или вычитания) которого к аргументу x значение функции не изменяется: $f(x + C) = f(x)$. Наименьшее такое число называется *периодом* функции; в дальнейшем будем обозначать его $2l$.

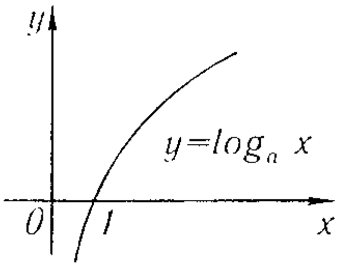


Рис. 14

Из определения непосредственно следует, что $y = \sin x$ есть периодическая функция с периодом 2π: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. Период $\cos x$ также равен 2π. Период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены при всех значениях x; функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sec x$ определены всюду, кроме точек

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

функции $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{cosec} x$ определены при всех значениях x, кроме точек

$$x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Графики тригонометрических функций изображены на рис. 15–19.

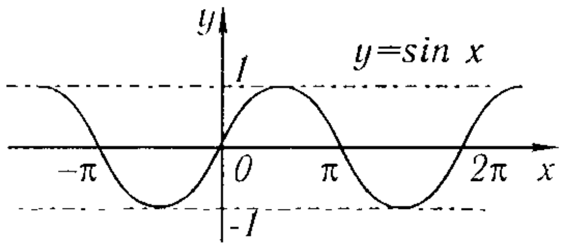


Рис. 15

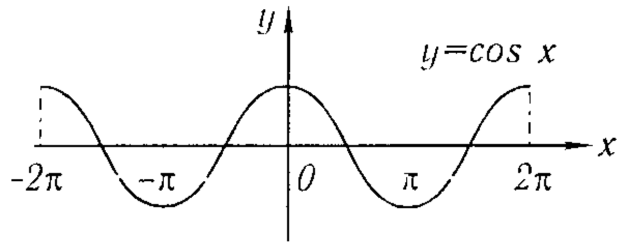


Рис. 16

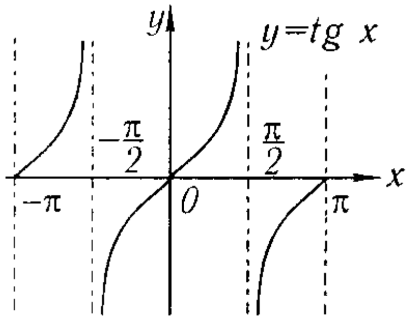


Рис. 17

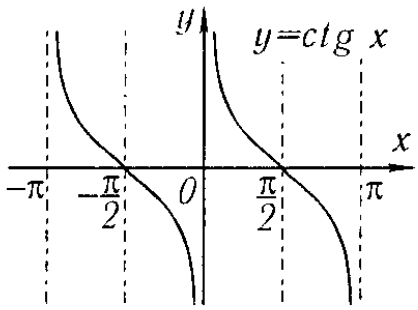


Рис. 18

Обратные тригонометрические функции будут нами подробно рассмотрены позднее.

Введем, далее, понятие функции от функции. Если y является функцией от u, а u в свою очередь зависит от переменной x, то y также зависит от x. Пусть $y = F(u)$ и $u = \varphi(x)$. Получаем функцию y от x

$$y = F[\varphi(x)].$$

Последняя функция называется *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Пример 1. Пусть $y = \sin u$, $u = x^2$. Функция $y = \sin(x^2)$ является сложной функцией x.

Замечание. Областью определения функции $y = F[\varphi(x)]$ является или вся область определения функции, $u = \varphi(x)$, или та ее часть, в которой определяются значения u, не выходящие из области определения функции $F(u)$.

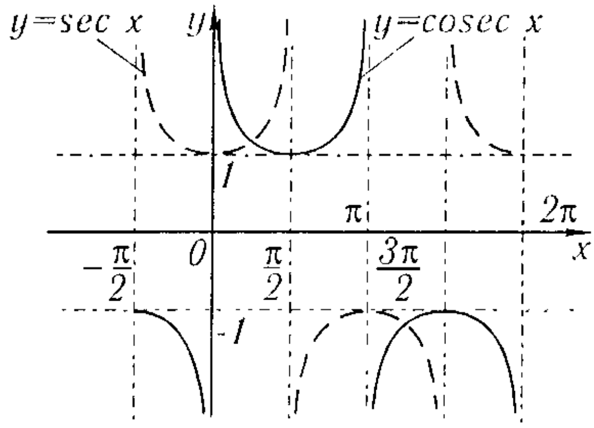


Рис. 19

Пример 2. Областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$) является отрезок $[-1, 1]$, так как $u < 0$ при $|x| > 1$ и, следовательно, функция $\sqrt{u}$ не определена при этих значениях x (хотя функция $u = 1 - x^2$ определена при всех значениях x). Графиком этой функции является верхняя половина окружности с центром в начале координат и радиусом единица.

Операция «функция от функции» может производиться не один, а любое число раз. Например, функция $y = \ln[\sin(x^2 + 1)]$ получается в результате следующих операций (определения следующих функций):

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Определим, далее, понятие элементарной функции.

Определение 2. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

На основании определения следует, что элементарные функции являются функциями, заданными аналитически.

Примеры элементарных функций:

$$y = |x| = \sqrt{x^2}, \quad y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}, \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\operatorname{tg} x}{10^x - x + 10}.$$

Пример неэлементарной функции:

Функция $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ($y = f(n)$) не является элементарной, так как количество операций, которое нужно произвести для получения y, увеличивается с увеличением n, т.е. не является ограниченным.

Замечание. Функция, изображенная на рис. 20, является элементарной, хотя она и задается с помощью двух формул:

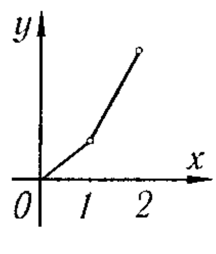


Рис. 20

$$f(x) = x, \ \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1, \ \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Эту функцию можно задать и одной формулой:

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}|x-1| = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^2}$$

для $0 \leqslant x \leqslant 2$. (См. также примеры 130–144 в упражнениях к гл. V.)

§ 9. Алгебраические функции

К числу алгебраических функций относятся элементарные функции следующего вида:

I. **Целая рациональная функция** или **многочлен**

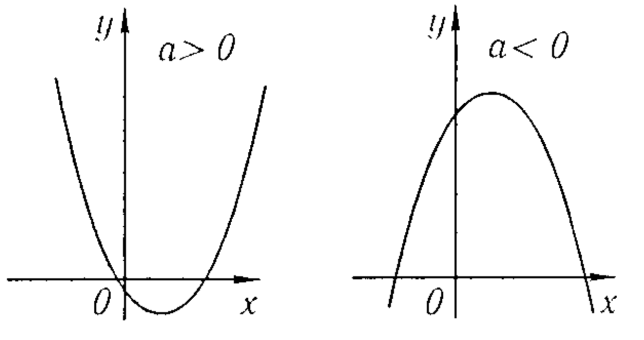
$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — постоянные числа, называемые *коэффициентами*; n — целое неотрицательное число, называемое *степенью многочлена*. Очевидно, что эта функция определена при всех значениях x, т.е. определена на бесконечном интервале.

Пример 1. $y = ax + b$ — *линейная функция*. При $b = 0$ линейная функция $y = ax$ выражает пропорциональную зависимость y от x. При $a = 0$, $y = b$ функция есть постоянная.

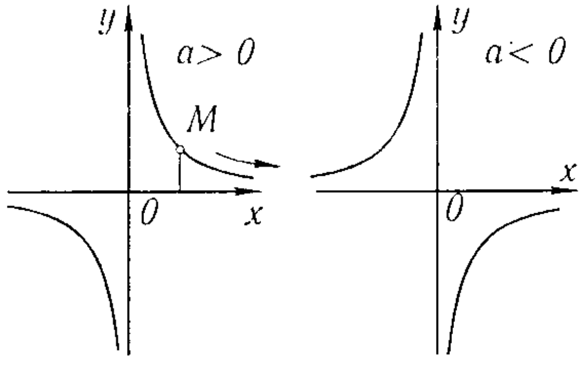
Пример 2. $y = ax^2 + bx + c$ — *квадратичная функция*. График квадратичной функции есть парабола (рис. 21).

Эти функции подробно рассматривались в аналитической геометрии.



a) b)

Рис. 21



a) b)

Рис. 22

II. **Дробная рациональная функция**. Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Дробной рациональной функцией является, например, функция $y = a/x$, выражающая обратную пропорциональную зависимость. Ее график изображен на рис. 22. Очевидно, что дробная рациональная функция определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль.

III. **Иррациональная функция**. Если в формуле $y = f(x)$ в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция y от x называется *иррациональной*. Примеры иррациональных функций: $y = \dfrac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}$, $y = \sqrt{x}$ и т. п.

Замечание 1. Перечисленные три вида алгебраических функций не исчерпывают всех алгебраических функций. *Алгебраической функцией* называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \tag{1}$$

где $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots$, $P_n(x)$ — некоторые многочлены от x.

Можно доказать, что каждая из функций перечисленных трех видов удовлетворяет некоторому уравнению вида (1), но не всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (1), является функцией одного из перечисленных видов.

Замечание 2. Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Примеры трансцендентных функций: $y = \cos x$, $y = 10^x$ и т. п.

§ 10. Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно определять с помощью так называемой *полярной системы координат*.

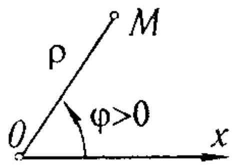


Рис. 23

На плоскости выбираем некоторую точку O, называемую *полюсом*, и выходящую из этой точки полупрямую, называемую *полярной осью*. Положение точки M на плоскости можно определить двумя числами: числом ρ, выражающим расстояние точки M от полюса, и числом φ — величиной угла, образованного отрезком OM с полярной осью. Положительным направлением отсчета угла φ считается направление против часовой стрелки. Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M (рис. 23).

Радиус-вектор ρ будем всегда считать неотрицательным. Если полярный угол φ брать в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то каждой точке плоскости, кроме полюса, соответствует вполне определенная пара чисел ρ и φ. Для полюса $\rho = 0$, φ — произвольное.

Установим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox — с полярной осью. Из рис. 24 непосредственно следует:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

и, обратно, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$.

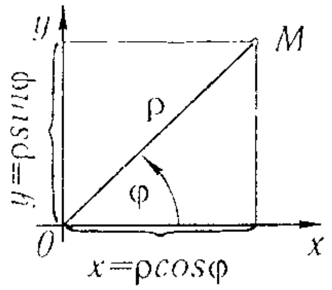


Рис. 24

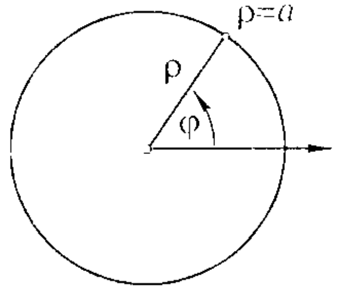


Рис. 25

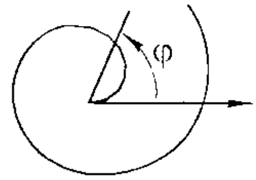


Рис. 26

Примечание. При нахождении φ нужно учитывать, в какой четверти находится точка, и брать соответствующее значение φ.

Уравнение $\rho = F(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую линию.

Пример 1. Уравнение $\rho = a$, где $a = \text{const}$, определяет в полярных координатах окружность с центром в полюсе и радиусом a. Уравнение этой окружности (рис. 25) в прямоугольной системе координат, расположенной так, как указано на рис. 24, будет:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ или } x^2 + y^2 = a^2.$$

Пример 2.

$$\rho = a\varphi, \text{ где } a = \text{const}.$$

Составим таблицу значений ρ при некоторых значениях φ:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78a$	$\approx 1,57a$	$\approx 2,36a$	$\approx 3,14a$	$\approx 4,71a$	$\approx 6,28a$	$\approx 9,42a$	$\approx 12,56a$

Соответствующая кривая изображена на рис. 26. Эта кривая называется *спиралью Архимеда.*

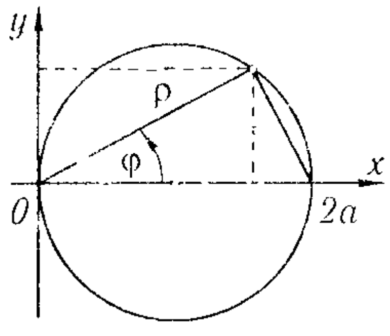


Рис. 27

Пример 3.

$$\rho = 2a\cos\varphi.$$

Это уравнение окружности радиуса a, центр которой находится в точке $\rho_0 = a$, $\varphi = 0$ (рис. 27). Напишем уравнение этой окружности в прямоугольных координатах. Подставляя в данное уравнение $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, будем иметь: $\sqrt{x^2+y^2} = 2a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Упражнения к главе I

1. Дана функция $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Проверить, что $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Вычислить значения: а) $f(4)$. *Отв.* 17. б) $f(\sqrt{2})$. *Отв.* 3. в) $f(a+1)$. *Отв.* $a^2 + 2a + 2$. г) $f(a) + 1$. *Отв.* $a^2 + 2$. д) $f(a^2)$. *Отв.* $a^4 + 1$. е) $[f(a)]^2$. *Отв.* $a^4 + 2a^2 + 1$. ж) $f(2a)$. *Отв.* $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = (x-1)(3x+5)^{-1}$. Написать выражения: $\varphi(1/x)$ и $1/\varphi(x)$. *Отв.* $\varphi(1/x) = (1-x)(3+5x)^{-1}$; $1/\varphi(x) = (3x+5)(x-1)^{-1}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Написать выражения: $\psi(2x)$ и $\psi(0)$. *Отв.* $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$. Проверить равенство $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$. Проверить равенство $\varphi(a)+\varphi(b) = \varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \lg x$; $\varphi(x) = x^3$. Написать выражения: а) $f[\varphi(2)]$. *Отв.* $3\lg 2$. б) $f[\varphi(a)]$. *Отв.* $3\lg a$. в) $\varphi[f(a)]$. *Отв.* $[\lg a]^3$.

8. Найти естественную область определения функции $y = 2x^2+1$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$.

9. Найти естественные области определения функций: а) $\sqrt{1-x^2}$. *Отв.* $-1 \leqslant x \leqslant +1$. б) $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. *Отв.* $-3 \leqslant x \leqslant 7$. в) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b}$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$. г) $\dfrac{a+x}{a-x}$. *Отв.* $x \neq a$. д) $\arcsin^2 x$. *Отв.* $-1 \leqslant x \leqslant 1$. е) $y = \lg x$. *Отв.* $x > 0$. ж) $y = a^x$ $(a > 0)$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$.

Построить графики функций:

10. $y = -3x+5$. **11.** $y = \dfrac{1}{2}x^2+1$. **12.** $y = 3-2x^2$. **13.** $y = x^2+2x-1$. **14.** $y = 1/(x-1)$. **15.** $y = \sin 2x$. **16.** $y = \cos 3x$. **17.** $y = x^2-4x+6$. **18.** $y = \dfrac{1}{1-x^2}$. **19.** $y = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **20.** $y = \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **21.** $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x$. **22.** $y = \operatorname{ctg}(x/4)$. **23.** $y = 3^x$. **24.** $y = 2^{-x^2}$. **25.** $y = \log_2(1/x)$. **26.** $y = x^3+1$. **27.** $y = 4-x^3$. **28.** $y = 1/x^2$. **29.** $y = x^4$. **30.** $y = x^5$. **31.** $y = \sqrt{x}$. **32.** $y = (\sqrt{x})^{-1}$. **33.** $y = \sqrt[3]{x}$. **34.** $y = |x|$. **35.** $y = \log_2|x|$. **36.** $y = \log_2(1-x)$. **37.** $y = 3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. **38.** $y = 4\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

39. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ следующим образом:

$$f(x) = 1+x \quad \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0;$$
$$f(x) = 1-2x \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

40. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; 2]$ следующим образом:

$$f(x) = x^3 \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$f(x) = x \quad \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Построить кривые, данные полярными уравнениями:

41. $\rho = a/\varphi$ (*гиперболическая спираль*). **42.** $\rho = a^\varphi$ (*логарифмическая спираль*). **43.** $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (*лемниската*). **44.** $\rho = a(1-\cos\varphi)$ (*кардиоида*). **45.** $\rho = a\sin 3\varphi$.

Глава II

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1. Предел переменной величины. Бесконечно большая переменная величина

В этом параграфе мы будем рассматривать упорядоченные переменные величины, изменяющиеся специальным образом, который определяется терминами «переменная величина стремится к пределу». Во всем дальнейшем курсе понятие предела переменной будет играть фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа — производная, интеграл и др.

Определение 1. Постоянное число a называется *пределом* переменной величины x, если для каждого наперед заданного произвольно малого положительного числа ε можно указать такое значение переменной x, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству

$$|x-a|<\varepsilon.$$

Если число a есть предел переменной величины x, то говорят, что x стремится к пределу a, и пишут:

$$x \to a \text{ или } \lim x = a^{*)}.$$

В терминах геометрических определение предела может быть сформулировано следующим образом:

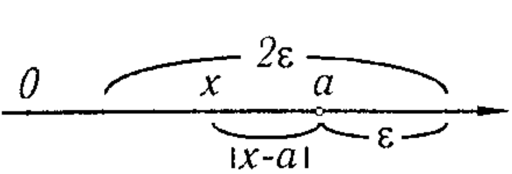


Рис. 28

Постоянное число a есть *предел* переменной, если для любой наперед заданной как угодно малой окрестности с центром в точке a и радиусом ε найдется такое значение x, что все точки, соответствующие последующим значениям переменной, будут находиться в этой окрестности (рис. 28). Рассмотрим несколько примеров переменных, стремящихся к пределу.

Пример 1. Переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1+1,\ x_2 = 1+\frac{1}{2},\ x_3 = 1+\frac{1}{3},\ \ldots,\ x_n = 1+\frac{1}{n},\ \ldots$$

---

*) «lim» есть сокращение латинского слова limes — предел.

Докажем, что эта переменная величина имеет предел, равный единице. Имеем

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера n, где $1/n < \varepsilon$, или $n > 1/\varepsilon$, будут удовлетворять неравенству

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

Заметим, что здесь переменная величина стремится к пределу, убывая.

Пример 2. Переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2},\ x_2 = 1 + \frac{1}{2^2},\ x_3 = 1 - \frac{1}{2^3},\ x_4 = 1 + \frac{1}{2^4},\ \ldots,\ x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Эта переменная имеет предел, равный единице. Действительно,

$$|x_n - 1| = |(1 + (-1)^n/2^n) - 1| = 1/2^n.$$

Для любого ε, начиная с номера n, удовлетворяющего соотношению $1/2^n < \varepsilon$, из которого следует

$$2^n > 1/\varepsilon,\ n \lg 2 > \lg(1/\varepsilon),\ \text{или } n > \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg 2},$$

все последующие значения x будут удовлетворять соотношению $|x_n - 1| < \varepsilon$. Отметим, что здесь значения переменной величины то больше, то меньше предела. Переменная величина стремится к пределу, «колеблясь вокруг него».

Замечание 1. Как указывалось в § 3, гл. I, постоянную величину с часто рассматривают как величину переменную, все значения которой одинаковы: $x = c$.

Очевидно, что предел постоянной будет равен самой постоянной, так как всегда выполняется неравенство $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ при любом ε.

Замечание 2. Из определения предела следует, что переменная величина не может иметь двух пределов. Действительно, если $\lim x = a$ и $\lim x = b$ $(a < b)$, то x должен удовлетворять сразу двум неравенствам:

$$|x - a| < \varepsilon \text{ и } |x - b| < \varepsilon$$

при произвольно малом ε, а это невозможно, если $\varepsilon < (b - a)/2$ (рис. 29).

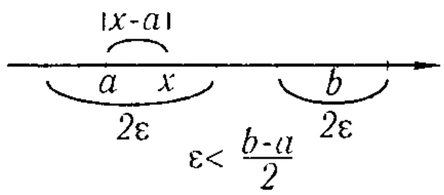


Рис. 29

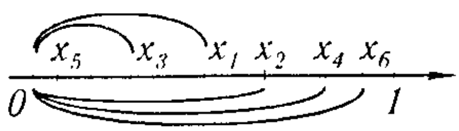


Рис. 30

Замечание 3. Не следует думать, что каждая переменная величина имеет предел. Пусть переменная величина x последовательно принимает следующие значения:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1 - \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{8},\ \ldots,\ x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}},\ x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(рис. 30). При достаточно большом k значение x_{2k} и все последующие значения с четными номерами будут отличаться как угодно мало от единицы, а следующее значение x_{2k+1} и все последующие значения x с нечетными номерами будут как угодно мало отличаться от нуля. Следовательно, переменная x не стремится к пределу.

В определении предела указано, что если переменная величина стремится к пределу a, то a — постоянное число. Но понятие «стремится» употребляется и для характеристики другого способа изменений переменной величины, что видно из следующего определения.

Определение 2. Переменная x стремится к бесконечности, если для каждого наперед заданного положительного числа M можно указать такое значение x, начиная с которого все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x| > M$.

Если переменная x стремится к бесконечности, то ее называют *бесконечно большой* переменной величиной и пишут $x \to \infty$.

Пример 3. Переменная величина x принимает значения

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ \ldots,\ x_n = (-1)^n n,\ \ldots$$

Это — бесконечно большая переменная величина, так как при произвольном $M > 0$ все значения переменной, начиная с некоторого, по абсолютной величине будут больше M.

Переменная величина x «стремится к плюс бесконечности», $x \to +\infty$, если при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $M < x$.

Примером переменной величины, стремящейся к плюс бесконечности, может служить переменная величина x, принимающая значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$, $x_n = n$, $\ldots$.

Переменная величина x «стремится к минус бесконечности», $x \to -\infty$, если при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $x < -M$.

Например, переменная x, принимающая значения $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $\ldots$, $x_n = -n$, $\ldots$, стремится к минус бесконечности.

§ 2. Предел функции

В этом параграфе будем рассматривать некоторые случаи изменения функции при стремлении аргумента x к некоторому пределу a или к бесконечности.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности. *Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b $(y \to b)$ при x, стремящемся к a $(x \to a)$*, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству*)

$$|x - a| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

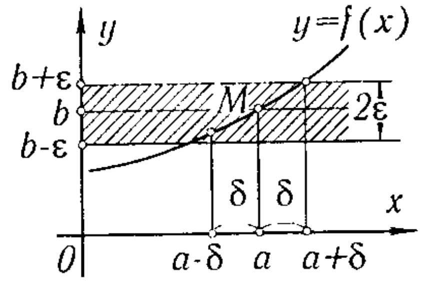


Рис. 31

Если b есть *предел функции* $f(x)$ при $x \to a$, то пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Если $f(x) \to b$ при $x \to a$, то на графике функции $y = f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (рис. 31): так как из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, то это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки a не далее чем на δ, точки M графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

Замечание 1. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ можно определить и следующим образом.

Пусть переменная величина x принимает значения так (упорядочена так), что если

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

то x^{**} есть последующее, а x^* — предыдущее значение; если же

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \text{ и } \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

то $\bar{x}^{**}$ есть последующее, а $\bar{x}^*$ — предыдущее.

Другими словами, из двух точек числовой прямой последующей является та точка, которая ближе к точке a; при равных расстояниях последующая — та, которая правее от точки a.

Пусть упорядоченная таким образом переменная величина x стремится к пределу a [$x \to a$ или $\lim x = a$].

Рассмотрим, далее, переменную величину $y = f(x)$. При этом будем считать, как и всюду в дальнейшем, что из двух значений функции последующим является то значение, которое соответствует последующему значению аргумента.

---

*) Здесь имеются в виду те значения x, удовлетворяющие неравенству $|x-a| < \delta$, которые принадлежат области определения функции. Аналогичные обстоятельства будут встречаться и в дальнейшем. Так, при рассмотрении поведения функции при $x \to \infty$ может случиться, что функция определена только при целых положительных значениях x. Следовательно, в этом случае $x \to \infty$, принимая только целые положительные значения. Оговорок об этом мы в дальнейшем делать не будем.

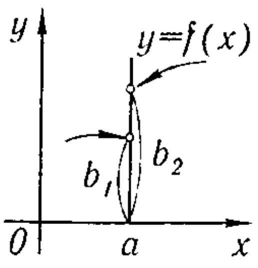


Рис. 32

Если определенная так переменная величина y при $x \to a$ стремится к некоторому пределу b, то будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

и говорить, что функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$.

Легко доказать, что оба определения предела функции эквивалентны.

Замечание 2. Если $f(x)$ стремится к пределу b_1 при x, стремящемся к некоторому числу a так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ и называют b_1 *пределом функции $f(x)$ в точке a слева*. Если x принимает только значения, бо́льшие, чем a, то пишут $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ и называют b_2 *пределом функции в точке a справа* (рис. 32).

Можно доказать, что если предел справа и предел слева существуют и равны, т.е. $b_1 = b_2 = b$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке a. И обратно, если существует предел функции b в точке a, то существуют пределы функции в точке a справа и слева и они равны.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 1) = 7$. Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$; для того чтобы выполнялось неравенство

$$|(3x + 1) - 7| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение следующих неравенств:

$$|3x - 6| < \varepsilon, \ |x - 2| < \varepsilon/3, \ -\varepsilon/3 < x - 2 < \varepsilon/3.$$

Таким образом, при любом ε для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \varepsilon/3 = \delta$, значение функции $3x + 1$ будет отличаться от 7 меньше, чем на ε. А это и значит, что 7 есть предел функции при $x \to 2$.

Замечание 3. Для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = a$. При нахождении предела рассматриваются значения функции в окрестности a, отличные от a; это положение наглядно иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4)/(x - 2) = 4$. Здесь функция $(x^2 - 4)/(x - 2)$ не определена при $x = 2$.

Нужно доказать, что при произвольном ε найдется такое δ, что будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

если $|x - 2| < \delta$. Но при $x \neq 2$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} - 4\right| = |(x + 2) - 4| < \varepsilon$$

или

$$|x - 2| < \varepsilon. \tag{2}$$

Таким образом, при произвольном ε неравенство (1) будет выполняться, если будет выполняться неравенство (2) (здесь $\delta = \varepsilon$). А это и значит, что данная функция при $x \to 2$ имеет пределом число 4.

Рассмотрим некоторые случаи изменения функции при $x \to \infty$.

Определение 2. *Функция $f(x)$ стремится к пределу b при* $x \to \infty$, если для каждого произвольно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример 3. Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 \text{ или, в иной записи, } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Нужно доказать, что при произвольном ε будет выполняться неравенство

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

если только $|x| > N$, причем N определяется выбором ε. Неравенство (3) эквивалентно следующему неравенству: $|1/x| < \varepsilon$, которое будет выполняться, если будет

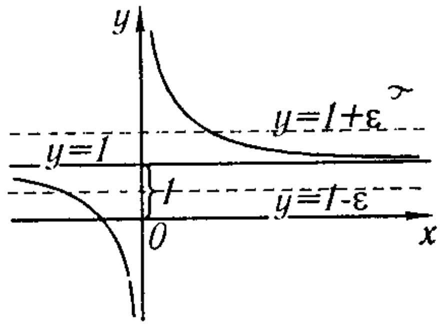


Рис. 33

$$|x| > 1/\varepsilon = N.$$

Это и значит, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ (рис. 33).

Зная смысл символов $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, очевидным является и смысл выражений:

«$f(x)$ стремится к b при $x \to +\infty$» и

«$f(x)$ стремится к b при $x \to -\infty$»,

которые символически записываются так:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

§ 3. Функция, стремящаяся к бесконечности. Ограниченные функции

Мы рассмотрели случаи, когда функция $f(x)$ стремится к некоторому пределу b при $x \to a$ или $x \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

Определение 1. Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, т.е. является *бесконечно большой* величиной при $x \to a$, если для каждого положительного числа M, как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений x, отличных от a, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

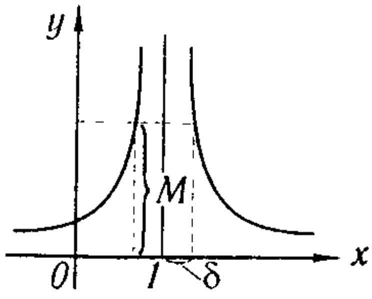


Рис. 34

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, то пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, соответственно пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x)^{-2} = +\infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь:

$$(1 - x)^{-2} > M,$$

если только

$$(1 - x)^2 < 1/M, \ |1 - x| < 1/\sqrt{M} = \delta.$$

Функция $(1 - x)^{-2}$ принимает только положительные значения (рис. 34).

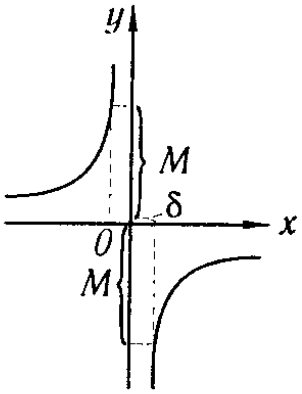


Рис. 35

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь:

$$|-1/x| > M.$$

если только

$$|x| = |x - 0| < 1/M = \delta.$$

Здесь $(-1/x) > 0$ при $x < 0$ и $(-1/x) < 0$ при $x > 0$ (рис. 35).

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то пишут:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

и, в частности, может быть:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Например,

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \text{ и т.п.}$$

Замечание 1. Функция $y = f(x)$ при $x \to a$ или при $x \to \infty$ может не стремится к конечному пределу или к бесконечности.

Пример 3. Функция $y = \sin x$, определенная на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, при $x \to \infty$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (рис. 36).

Пример 4. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$, определенная при всех значениях x, кроме значения $x = 0$, не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности при $x \to 0$. График этой функции изображен на рис. 37.

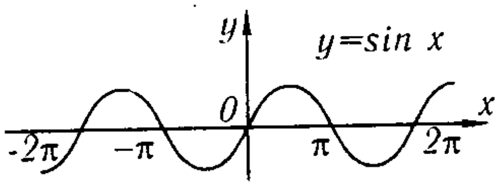


Рис. 36

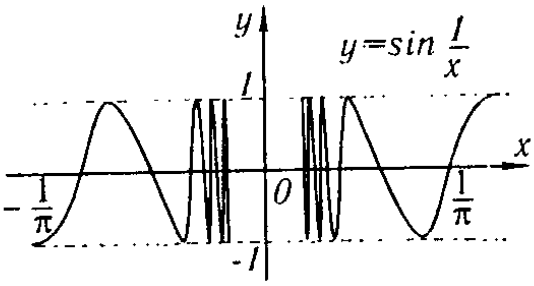


Рис. 37

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в данной области изменения аргумента x, если существует положительное число M такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполнятся неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Если же такого числа M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной* в данной области.

Пример 5. Функция $y = \sin x$, определенная в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, является ограниченной, так как при всех значениях x

$$|\sin x| \leqslant 1 = M.$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной при* $x \to a$, если существует окрестность с центром в точке a, в которой данная функция ограничена.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной при* $x \to \infty$, если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, функция $f(x)$ ограничена.

Вопрос об ограниченности функции, стремящейся к пределу, решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, при этом b есть конечное число, то функция $f(x)$ является ограниченной при $x \to a$.*

Доказательство. Из равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что в окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

или

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

А это и значит, что функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$.

Замечание 2. Из определения ограниченной функции $f(x)$ следует, что если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

или

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty,$$

т.е. если $f(x)$ есть бесконечно большая, то она является неограниченной. Обратное неверно: неограниченная функция может и не быть бесконечно большой.

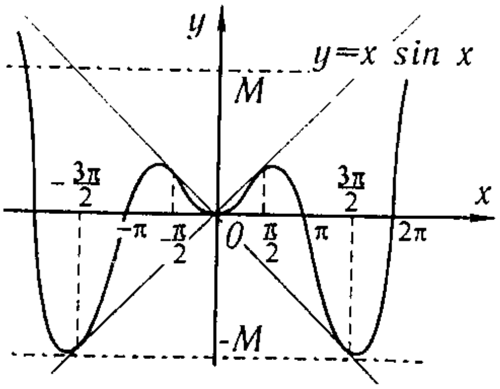


Рис. 38

Например, функция $y = x\sin x$ при $x \to \infty$ является неограниченной, так как для любого $M > 0$ можно найти такие значения x, что $|x \sin x| > M$. Но функция $y = x\sin x$ не является бесконечно большой, поскольку она обращается в нуль при $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$. График функции $y = x\sin x$ изображен на рис. 38.

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, *то функция* $y = 1/f(x)$ *есть ограниченная функция при* $x \to a$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что при произвольном $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности точки $x = a$ будем иметь $|f(x) - b| < \varepsilon$, или $\big||f(x)| - |b|\big| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$, или $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$.

Из последних неравенств следует:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon};$$

взяв, например, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$, получаем:

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}.$$

А это и значит, что функция $1/f(x)$ ограничена.

§ 4. Бесконечно малые и их основные свойства

В этом параграфе будем рассматривать функции, стремящиеся к нулю при некотором характере изменения аргумента.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Из определения предела следует, что если, например, $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то это значит, что для любого наперед заданного произвольно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, будет удовлетворяться условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример 1. Функция $\alpha = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1} \alpha = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$ (рис. 39).

Пример 2. Функция $\alpha = 1/x$ есть бесконечно малая при $x \to \infty$ (рис. 40) (см. пример 3 § 2).

Установим важное для дальнейшего соотношение:

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *представляется в виде суммы постоянного числа* b *и бесконечно малой* α:

$$y = b + \alpha, \tag{1}$$

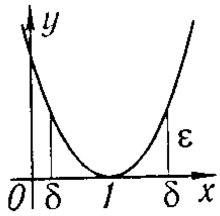


Рис. 39

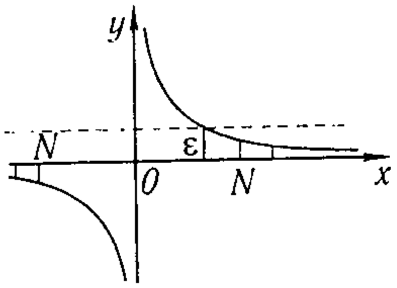


Рис. 40

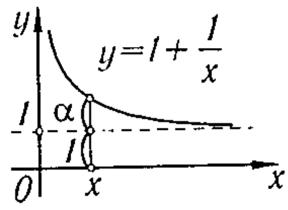


Рис. 41

то

$$\lim y = b \quad (\textit{при } x \to a \textit{ или } x \to \infty).$$

Обратно, если $\lim y = b$*, то можно написать* $y = b + \alpha$*, где* α *— бесконечно малая.*

Доказательство. Из равенства (1) следует $|y-b| = |\alpha|$. Но при произвольном ε все значения α, начиная с некоторого, удовлетворяют соотношению $|\alpha| < \varepsilon$, следовательно, для всех значений y, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство $|y-b| < \varepsilon$. А это и значит, что $\lim y = b$.

Обратно: если $\lim y = b$, то при произвольном ε для всех значений y, начиная с некоторого, будет $|y-b| < \varepsilon$. Но если обозначим $y - b = \alpha$, то, следовательно, для всех значений α, начиная с некоторого, будет $|\alpha| < \varepsilon$, а это значит, что α — бесконечно малая.

Пример 3. Пусть дана функция (рис. 41)

$$y = 1 + \frac{1}{x},$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty} y = 1,$$

и наоборот, так как

$$\lim_{x\to\infty} y = 1,$$

то переменную y можно представить в виде суммы предела 1 и бесконечно малой α, равной в данном случае $1/x$, т.е.

$$y = 1 + \alpha.$$

Теорема 2. *Если* $\alpha = \alpha(x)$ *стремится к нулю при* $x \to a$ *(или при* $x \to \infty$*) и не обращается в нуль, то* $y = 1/\alpha$ *стремится к бесконечности.*

Доказательство. При любом как угодно большом $M > 0$ будет выполняться неравенство $1/|\alpha| > M$, если только будет выполняться неравенство $|\alpha| < 1/M$. Последнее неравенство будет выполняться для всех значений α, начиная с некоторого, так как $\alpha(x) \to 0$.

Теорема 3. *Алгебраическая сумма двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится аналогично.

Пусть $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Докажем, что при произвольном как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при удовлетворении неравенства $|x-a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|u| < \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то найдется такое δ_1, что в окрестности с центром в точке a и радиусом δ_1 будет

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/2.$$

Так как $\beta(x)$ есть бесконечно малая, то найдется такое δ_2, что в окрестности с центром в точке a и радиусом δ_2 будет

$$|\beta(x)| < \varepsilon/2.$$

Возьмем δ равным меньшему из величин δ_1 и δ_2, тогда в окрестности точки a с радиусом δ будут выполняться неравенства $|\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$. Следовательно, в этой окрестности будет

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

т.е. $|u| < \varepsilon$, ч. т. д.

Аналогично проводится доказательство и для случая, когда

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0.$$

Замечание. В дальнейшем нам придется рассматривать такие суммы бесконечно малых величин, что с уменьшением каждого слагаемого число слагаемых увеличивается. В этом случае утверждение теоремы может оказаться и неверным. Рассмотрим, например, $u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{x \text{ слагаемых}}$, где x принимает только целые положительные значения ($x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$). Очевидно, что каждое слагаемое при $x \to \infty$ есть бесконечно малая, но сумма $u = 1$ не есть бесконечно малая.

Теорема 4. *Произведение функции бесконечно малой $\alpha = \alpha(x)$ на функцию ограниченную $z = z(x)$ при $x \to a$ (или $x \to \infty$) есть величина (функция) бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $x \to a$. Для некоторого $M > 0$ найдется такая окрестность точки $x = a$, в которой будет удовлетворяться неравенство $|z| < M$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность, в которой будет выполняться неравенство $|\alpha| < \varepsilon/M$. В наименьшей из этих двух окрестностей будет выполняться неравенство

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

А это и значит, что αz — бесконечно малая. Для случая $x \to \infty$ доказательство проводится аналогично. Из данной теоремы вытекают:

Следствие 1. *Если* $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, *то* $\lim \alpha\beta = 0$, так как $\beta(x)$ есть величина ограниченная. Это справедливо для любого конечного числа множителей.

Следствие 2. *Если* $\lim \alpha = 0$ *и* $c = \text{const}$, *то* $\lim c\alpha = 0$.

Теорема 5. *Частное $\alpha(x)/z(x)$ от деления величины бесконечно малой $\alpha(x)$ на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$. На основании теоремы 2 § 3 следует, что $1/z(\alpha)$ есть величина ограниченная. Поэтому дробь $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\dfrac{1}{z(x)}$ есть произведение величины бесконечно малой на величину ограниченную, т.е. величина бесконечно малая.

§ 5. Основные теоремы о пределах

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать совокупности функций, которые зависят от одного и того же аргумента x, при этом $x \to a$ или $x \to \infty$.

Мы будем проводить доказательство для одного из этих случаев, так как для другого доказательство проводится аналогично. Иногда мы вообще не будем писать ни $x \to a$, ни $x \to \infty$, подразумевая то или другое.

Теорема 1. *Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:*

$$\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$$

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится так же. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Тогда на основании теоремы 1 § 4 можем написать:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые. Следовательно,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как $(a_1 + a_2)$ есть постоянная величина, а $(\alpha_1 + \alpha_2)$ — величина бесконечно малая, то снова по теореме 1 § 4 заключаем, что

$$\lim(u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Теорема 2. *Предел произведения двух, трех и вообще определенного числа переменных равен произведению пределов этих переменных*

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k.$$

Доказательство. Для сокращения записи приведем доказательство для двух множителей. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Следовательно,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

Произведение $a_1 a_2$ есть величина постоянная. Величина $a_1\alpha_2 + {}$ $+ a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ на основании теорем § 4 есть величина бесконечно малая. Следовательно, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Действительно, если $\lim u_1 = a_1$, c — постоянная и, следовательно, $\lim c = c$, то $\lim(cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \cdot \lim u_1$, ч. т. д.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 = 5 \lim_{x\to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

Теорема 3. *Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \quad \textit{если} \ \lim v \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Следовательно, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, где α и β — бесконечно малые.

Напишем тождества

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)},$$

или

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

Дробь $\frac{a}{b}$ есть постоянное число, а дробь $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ по теоремам 4 и 5 § 4 есть бесконечно малая переменная величина, так как $\alpha b - \beta a$ есть бесконечно малая, а знаменатель $b(b+\beta)$ имеет предел $b^2 \neq 0$. Следовательно, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x + 5}{4\lim\limits_{x\to 1} x - 2} = \frac{3\cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Здесь мы воспользовались доказанной теоремой о пределе дроби, так как предел знаменателя при $x \to 1$ отличен от нуля. Если же предел знаменателя есть нуль, то теорема о пределе дроби не может быть применена. В этом случае требуется производить специальные рассмотрения.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2)$.

Здесь знаменатель и числитель при $x\to 2$ стремится к нулю и, следовательно, теорема 3 неприменима. Произведем следующее тождественное преобразование:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2. Поэтому, имея в виду определение предела, можем написать:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}x/(x-1)$. При $x\to 1$ знаменатель стремится к нулю, а числитель к нулю не стремится (числитель стремится к единице). Следовательно, предел обратной величины есть нуль, т.е.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0.$$

Отсюда на основании теоремы 2 предыдущего параграфа будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}x/(x-1)=\infty.$$

Теорема 4. *Если между соответствующими значениями трех функций $u=u(x)$, $z=z(x)$, $v=v(x)$ выполняются неравенства $u\leqslant z\leqslant v$, при этом $u(x)$ и $v(x)$ при $x\to a$ (или при $x\to\infty$) стремятся к одному и тому же пределу b, то $z=z(x)$ при $x\to a$ (или при $x\to\infty$) стремится к тому же пределу.*

Доказательство. Для определенности будем рассматривать изменение функции при $x\to a$. Из неравенств $u\leqslant z\leqslant v$ следуют неравенства

$$u-b\leqslant z-b\leqslant v-b;$$

по условию

$$\lim_{x\to a}u=b,\quad \lim_{x\to a}v=b.$$

Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ найдется некоторая окрестность с центром в точке a, в которой будет выполняться неравенство $|u-b|<\varepsilon$; так же найдется некоторая окрестность с центром в точке a, в которой будет выполняться неравенство $|v-b|<\varepsilon$. В меньшей из указанных окрестностей будут выполняться неравенства:

$$-\varepsilon<u-b<\varepsilon \text{ и } -\varepsilon<x-b<\varepsilon,$$

а, следовательно, будут выполняться неравенства

$$-\varepsilon<z-b<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{x\to a}z=b.$$

Теорема 5. *Если при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) функция y принимает неотрицательные значения $y \geqslant 0$ и при этом стремится к пределу b, то b есть неотрицательное число: $b \geqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, что $b < 0$, тогда $|y - b| \geqslant |b|$, т.е. модуль разности $|y - b|$ больше положительного числа $|b|$ и, следовательно, не стремится к нулю при $x \to a$. Но тогда y при $x \to a$ не стремится к b, что противоречит условию теоремы. Значит, предположение, что $b < 0$, приводит к противоречию. Следовательно, $b \geqslant 0$.

Аналогично доказывается, что если $y \leqslant 0$, то $\lim y \leqslant 0$.

Теорема 6. *Если между соответствующими значениями двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, стремящихся к пределам при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), выполняется неравенство $v \geqslant u$, то имеет место $\lim v \geqslant \lim u$.*

Доказательство. По условию $v - u \geqslant 0$, следовательно (по теореме 5), $\lim(v - u) \geqslant 0$, или $\lim v - \lim u \geqslant 0$, т.е. $\lim v \geqslant \lim u$.

Пример 6. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Из рис. 42 следует: если $OA = 1$, $x > 0$, то $AC = \sin x$, $\smile AB = x$, $\sin x < x$. Очевидно, что при $x < 0$ будет $|\sin x| < |x|$. Из этих неравенств на основании теорем 5 и 6 следует, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Пример 7. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x/2) = 0$.

Действительно, $|\sin(x/2)| < |\sin x|$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x/2) = 0$.

Пример 8. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$; заметим, что

$$\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2),$$

следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} (1 - 2\sin^2(x/2)) = 1 - 2\lim_{x \to 0} \sin^2(x/2) = 1 - 0 = 1.$$

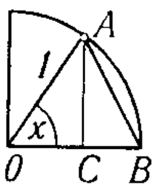


Рис. 42

В некоторых исследованиях вопроса о пределе переменных приходится решать две самостоятельные задачи:

1) доказывать, что предел переменной существует, и устанавливать границы, внутри которых рассматриваемый предел находится;

2) вычислять рассматриваемый предел с нужной степенью точности.

Иногда первый вопрос решается с помощью следующей, важной для дальнейшего теоремы.

Теорема 7. *Если переменная величина v возрастает, т.е. всякое ее последующее значение больше предыдущего, и если она ограничена, т.е. $v < M$, то эта переменная величина имеет предел $\lim v = a$, где $a \leqslant M$.*

Аналогичное утверждение имеет место и для убывающей ограниченной переменной величины.

Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим, так как оно основывается на теории действительных чисел, которую мы здесь не даем*).

В следующих двух параграфах будут получены пределы двух функций, имеющие большое применение в математике.

§ 6. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, так как числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Найдем предел этой функции при $x \to 0$. Рассмотрим окружность радиуса 1 (рис. 43); обозначим центральный угол MOB через x, при этом $0 < x < \pi/2$. Из рис. 43 непосредственно следует:

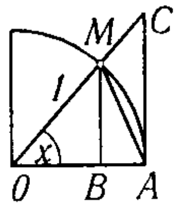


Рис. 43

$$\text{Площадь}\,\Delta MOA < \text{площади сектора}\,MOA < \text{площади}\,\Delta COA. \quad (1)$$

Площадь $\Delta MOA = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$.

Площадь сектора $MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \smile{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2}x$.

Площадь $\Delta COA = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

Неравенства (1) после сокращения на 1/2 переписываются так:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделим все члены на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

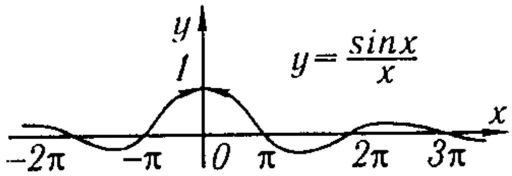


Рис. 44

Мы вывели это неравенство в предположении, что $x > 0$; замечая, что $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x) = \cos x$, заключаем, что оно верно и при $x < 0$. Но $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

Следовательно, переменная $\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя величинами, имеющими один и тот же предел, равный 1; таким образом, на основании теоремы 4 предыдущего параграфа

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

График функции $y = \frac{\sin x}{x}$ изображен на рис. 44.

---

*) Доказательство этой теоремы приведено, например, в книге Г.М. ***Фихтенгольца*** «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1968.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}k\frac{\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(kx\to 0)}}\frac{\sin(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k$ $(k=\text{const})$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const})$.

§ 7. Число e

Рассмотрим переменную величину

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где n — возрастающая переменная величина, принимающая значения натурального ряда чисел 1, 2, 3, ...

Теорема 1. *Переменная величина* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *при* $n\to\infty$ *имеет предел, заключенный между* 2 *и* 3.

Доказательство. По формуле бинома Ньютона можем написать:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Произведя очевидные алгебраические преобразования, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (2)$$

Из последнего равенства следует, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая переменная величина при возрастающем n.

Действительно, при переходе от значения n к значению $n+1$ каждое слагаемое последней суммы взрастает

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ \text{и т.д.}$$

и добавляется еще один член. (Все члены разложения — положительные.)

Покажем, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена. Замечая, что $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ и т.д., из выражения (2) получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Замечая далее, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\quad \ldots,\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

можем написать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1/2$ и первым членом $a=1$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=$$
$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Следовательно, для всех n получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3. \tag{3}$$

Этим установлено, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Итак, переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая и ограниченная, поэтому на основании теоремы 7 § 5 она имеет предел. Этот предел обозначается буквой e.

Определение. Предел переменной величины $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ называется*) *числом* e:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

---

*) Можно показать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$ при $n\to+\infty$, если n не является монотонно возрастающей переменной величиной.

Из неравенства (3) на основании теоремы 6 § 5 следует, что и число e удовлетворяет неравенству $2 \leqslant e \leqslant 3$. Теорема доказана.

Число e — иррациональное число. Позднее будет указан метод его вычисления с любой степенью точности. Его значение с десятью верными знаками после запятой:

$$e = 2,7182818284\ldots$$

Теорема 2. *Функция* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *стремится при* x*, стремящемся к бесконечности, к пределу* e*:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Было установлено, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ при $n \to \infty$, если n принимает целые положительные значения. Пусть теперь x стремится к бесконечности, принимая как дробные, так и отрицательные значения.

1) Пусть $x \to +\infty$. Каждое его значение заключено между двумя положительными целыми числами

$$n \leqslant x < n+1.$$

При этом будут выполняться неравенства:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Если $x \to \infty$, то, очевидно, и $n \to \infty$. Найдем пределы переменных, между которыми заключена переменная $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

следовательно (по теореме 4 § 5),

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4}$$

2) Пусть $x \to -\infty$. Введем новую переменную $t = -(x+1)$ или $x = -(t+1)$. При $t \to +\infty$ будет $x \to -\infty$. Можем написать:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) =$$
$$= e\cdot 1 = e.$$

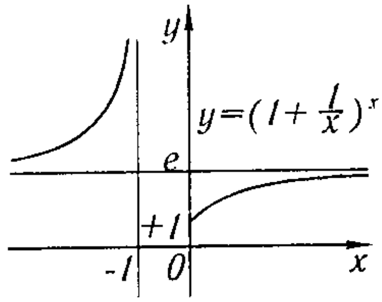


Рис. 45

Теорема доказана. График функции $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ изображен на рис. 45.

Если в равенстве (4) положить $1/x = \alpha$, то при $x \to \infty$ имеем $\alpha \to 0$ (но $\alpha \neq 0$) и мы получаем $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Примеры:

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = e\cdot 1 = e.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\cdot e\cdot e = e^3.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} =$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^4 = e^4\cdot 1 = e^4.$$

Замечание. Показательная функция с основанием e,

$$y = e^x,$$

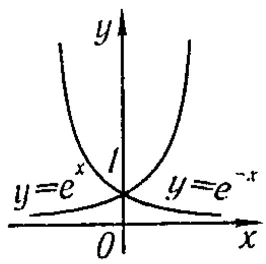


Рис. 46

играет исключительно большую роль в дальнейшем курсе математики. Эта функция играет большую роль при изучении различных явлений в механике (теория колебаний), в электротехнике и радиотехнике, в радиохимии и т.д. Эту функцию часто называют *экспонентой* (Exponential function). Графики показательной функции $y = e^x$ и показательной функции $y = e^{-x}$ изображены на рис. 46.

§ 8. Натуральные логарифмы

В § 8 главы I была определена логарифмическая функция $y = \log_a x$. Число a называется основанием логарифмов. Если $a = 10$, то y называется десятичным логарифмом числа x и обозначается $y = \lg x$. Из школьного курса известны таблицы значений десятичных логарифмов, которые называются *бригговыми*, по имени английского ученого Бригга (1556–1630).

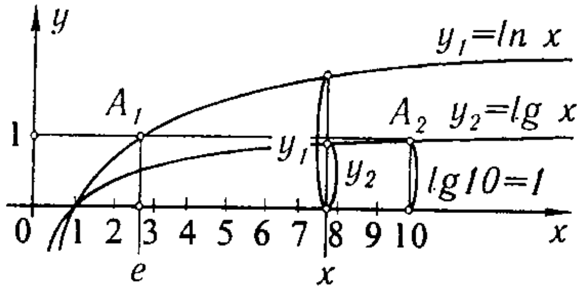


Рис. 47

Логарифмы с основанием $e = 2,71828\ldots$ называют *натуральными* или *неперовыми логарифмами*, по имени одного из первых изобретателей логарифмических таблиц, математика Непера (1550–1617). Следовательно, если $e^y = x$, то y называют натуральным логарифмом числа x и пишут $y = \ln x$ вместо $y = \log_e x$. Графики функций $y = \ln x$ и $y = \lg x$ построены на рис. 47.

Установим, далее, зависимость между десятичными и натуральными логарифмами одного и того же числа x. Пусть $y = \lg x$ или $x = 10^y$. Прологарифмируем левую и правую части последнего равенства при основании e, получим $\ln x = y \ln 10$. Определяем $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$, или, подставляя значение y, имеем $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$.

Таким образом, если известен натуральный логарифм числа x, десятичный логарифм этого числа находится путем умножения на множитель $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$, не зависящий от x. Число M называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным:

$$\lg x = M \ln x.$$

Если положим в этом тождестве $x = e$, то получим выражение числа M через десятичные логарифмы:

$$\lg e = M \quad (\ln e = 1).$$

Натуральные логарифмы через десятичные выражаются так:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

где

$$\frac{1}{M} \approx 2,302585.$$

Замечание. Для вычисления натуральных логарифмов чисел существуют специальные таблицы (например, см. И.Н. ***Бронштейн*** и К.А. ***Семендяев***, Справочник по математике, Физматгиз, 1967).

§ 9. Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некоторой окрестности с центром в x_0. Пусть $y_0 = f(x_0)$.

Если x получит некоторое положительное или отрицательное — безразлично — приращение Δx и примет значение $x = x_0+\Delta x$, то и функция y получит некоторое приращение Δy. Новое, наращенное значение функции будет $y_0+\Delta y = f(x_0+\Delta x)$ (рис. 48). Приращение функции Δy выразится формулой

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной при значении* $x = x_0$ *(или в точке* x_0*)*, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (очевидно, и в самой точке x_0) и если

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

Условие непрерывности (2) можно записать и так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{3}$$

но

$$x_0 = \lim_{x\to x_0} x.$$

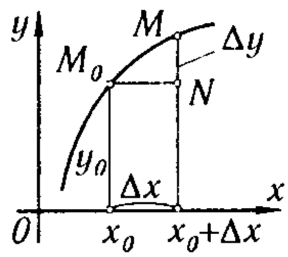


Рис. 48

Следовательно, равенство (3) можно записать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\Big(\lim_{x\to x_0} x\Big), \tag{4}$$

т.е. для того, чтобы найти предел непрерывной функции при $x \to x_0$, достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента x его значение x_0.

Описательно геометрически непрерывность функции в данной точке означает, что разность ординат графика функции $y = f(x)$ в точках $x_0 + \Delta x$ и x_0 будет по абсолютной величине произвольно малой, если только $|\Delta x|$ будет достаточно мало.

Пример 1. Докажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке x_0. Действительно,

$$y_0 = x_0^2,\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0$$

при любом способе стремления Δx к нулю (рис. 49, *а* и *б*).

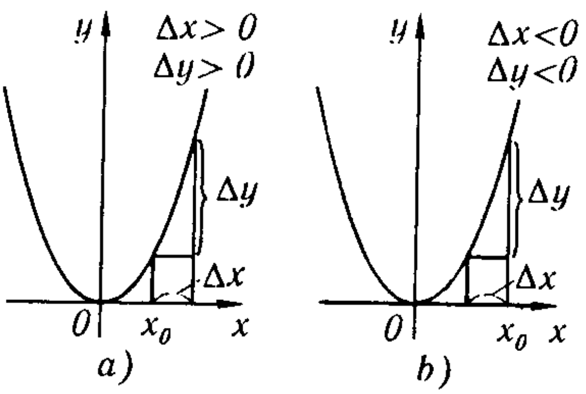


Рис. 49

Пример 2. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке x_0. Действительно,

$$y_0 = \sin x_0, \; y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$
$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Было показано, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$ (пример 7 § 5). Функция $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ ограничена. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Аналогичным образом, рассматривая каждую основную элементарную функцию, можно доказать, что каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Докажем далее следующую теорему.

Теорема 1. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то сумма $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0.*

Доказательство. Так как $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны, то на основании равенства (3) можем написать

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) \quad\text{и}\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

На основании теоремы 1 о пределах можем написать

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x) = \lim_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] =$$
$$= \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0).$$

Итак, сумма $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ есть непрерывная функция. Теорема доказана.

Как следствие отметим, что теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Опираясь на свойства пределов, так же можно доказать следующие теоремы:

а) *Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.*

б) *Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.*

в) *Если $u = \varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Используя эти теоремы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Всякая непрерывная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена**).

Пример 3. Функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке x_0 и потому

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2, \quad \lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

Пример 4. Функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке и потому

$$\lim_{x\to\pi/4} \sin x = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2.$$

Пример 5. Функция $y = e^x$ непрерывна в каждой точке и потому $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и функция $\ln z$ непрерывна при $z > 0$, и, следовательно, при $z = e$, то

$$\lim_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b), где $a < b$, то говорят, что функция *непрерывна на этом интервале.*

Если функция определена и при $x = a$, и при этом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = a$ *непрерывна справа*. Если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = b$ *непрерывна слева.*

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала, соответственно справа и слева, то говорят, что $f(x)$ *непрерывна на замкнутом интервале* или *отрезке* $[a, b]$.

Пример 7. Функция $y = x^2$ непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, что следует из примера 1.

Если в какой-то точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, т.е. если при $x = x_0$ функция не определена или не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ при произвольном стремлении $x \to x_0$, хотя выражения, стоящие справа и слева, существуют, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ *разрывна.* Точка $x = x_0$ в этом случае называется *точкой разрыва* функции.

Пример 8. Функция $y = 1/x$ разрывна при $x = 0$. Действительно, при $x = 0$ функция не определена:

$$\lim_{x\to 0+0} 1/x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} 1/x = -\infty.$$

Легко показать, что эта функция иепрерывна при любом значении $x \neq 0$.

---

*) Этот вопрос подробно изложен в книге Г.М. ***Фихтенгольца*** «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1968.

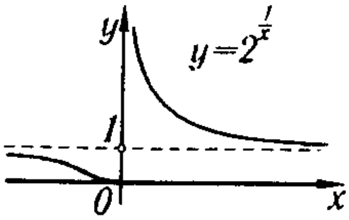


Рис. 50

Пример 9. Функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ разрывна при $x = 0$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. При $x = 0$ функция не определена (рис. 50).

Пример 10. Рассмотрим функцию $f(x) = x/|x|$. При $x < 0$ будет $x/|x| = -1$; при $x > 0$ будет $x/|x| = 1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x/|x| = -1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x/|x| = 1;$$

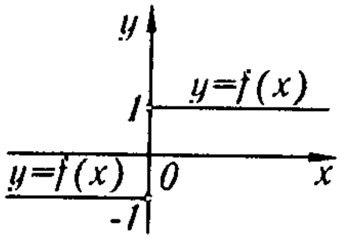


Рис. 51

при $x = 0$ функция не определена. Таким образом, мы установили, что функция $f(x) = x/|x|$ разрывна при $x = 0$ (рис. 51).

Пример 11. Функция $y = \sin(1/x)$, рассмотренная в примере 4 § 3, разрывна при $x = 0$.

Определение 3. Если функция $f(x)$ такова, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, но или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, или значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ не определено, то $x = x_0$ называется *точкой разрыва* 1-*го рода*. (Например, для функции, рассмотренной в примере 10, точка $x = 0$ есть точка разрыва 1-го рода).

§ 10. Некоторые свойства непрерывных функций

В этом параграфе рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства будут сформулированы в виде теорем, которые мы приводим без доказательства*).

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $x = x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению*

$$f(x_1) \geqslant f(x),$$

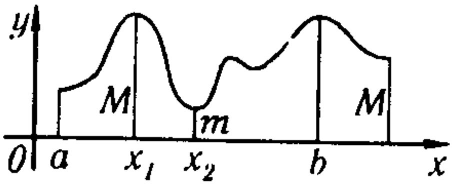


Рис. 52

где x — любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению

$$f(x_2) \leqslant f(x).$$

Значение функции $f(x_1)$ будем называть *наибольшим значением* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, значение функции $f(x_2)$ будем называть *наименьшим значением* функции на отрезке $[a, b]$.

---

*) Доказательства этих теорем можно найти в книге Г.М. ***Фихтенгольца*** «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1968.

Коротко эту теорему формулируют так:

Непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция достигает на этом отрезке по меньшей мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Смысл этой теоремы наглядно иллюстрируется на рис. 52.

Замечание. Утверждение теоремы о существовании наибольшего значения функции может оказаться неверным, если рассматривать значения функции на интервале $a < x < b$. Так, например, если мы будем рассматривать функцию $y = x$ на интервале $0 < x < 1$, то среди ее значений нет наибольшего и нет наименьшего. Действительно, на интервале нет ни наименьшего, ни наибольшего значений x. (Нет крайней левой точки, так как, какую бы ни взяли точку x^*, найдется точка левее взятой, например точка $\frac{x^*}{2}$; также нет крайней правой, а следовательно, нет ни наименьшего, ни наибольшего значений $y = x$.)

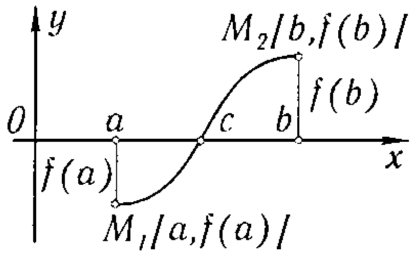


Рис. 53

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдется по крайней мере одна точка $x = c$, в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. График непрерывной функции $y = f(x)$, соединяющий точки $M_1[a, f(a)]$ и $M_2[b, f(b)]$, где $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (или $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$), пересекает ось Ox по крайней мере в одной точке (рис. 53).

Пример. Дана функция $y = x^3 - 2$; $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. На отрезке $[1, 2]$ она непрерывна. Следовательно, на этом отрезке существует точка, где $y = x^3 - 2$ обращается в нуль. Действительно, $y = 0$ при $x = \sqrt[3]{2}$ (рис. 54).

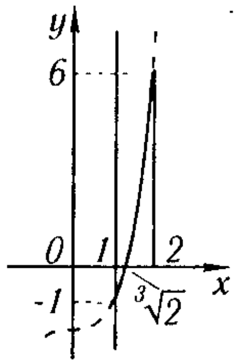


Рис. 54

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то каково бы ни было число μ, заключенное между числами A и B, найдется такая точка $x = c$, заключенная между a и b, что $f(c) = \mu$.*

Смысл данной теоремы отчетливо иллюстрируется на рис. 55. В данном случае всякая прямая $y = \mu$ пересекает график функции $y = f(x)$.

Замечание. Отметим, что теорема 2 является частным случаем этой теоремы, так как если A и B имеют разные знаки, то в качестве μ можно взять 0 и тогда $\mu = 0$ будет заключено между числами A и B.

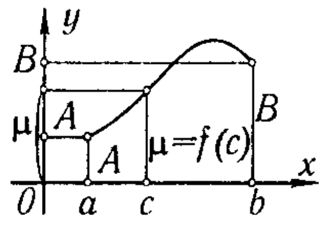


Рис. 55

Следствие теоремы 3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наименьшими и наибольшими значениями.*

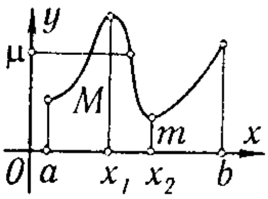


Рис. 56

Действительно, пусть $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Тогда по теореме 3 на этом отрезке функция $y = f(x)$ принимает любое значение μ, заключенное между M и m. Но отрезок $[x_1, x_2]$ заключен внутри рассматриваемого интервала, на котором определена функция $f(x)$ (рис. 56).

§ 11. Сравнение бесконечно малых

Пусть одновременно несколько бесконечно малых величин

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots$$

являются функциями одного и того же аргумента x и стремятся к нулю при стремлении x к некоторому пределу a или к бесконечности. Охарактеризуем стремление этих переменных к нулю, рассматривая их отношения*).

Будем пользоваться в дальнейшем следующими определениями.

Определение 1. Если отношение β/α имеет конечный и отличный от нуля предел, т.е. если $\lim \beta/\alpha = A \neq 0$, а следовательно, $\lim \alpha/\beta = 1/A \neq 0$, то бесконечно малые β и α называются *бесконечно малыми одного порядка.*

Пример 1. Пусть $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$, где $x \to 0$. Бесконечно малые α и β одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Пример 2. При $x \to 0$ бесконечно малые x, $\sin 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $7\ln(1+x)$ являются бесконечно малыми одного и того же порядка. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в примере 1.

Определение 2. Если отношение двух бесконечно малых β/α стремится к нулю, т.е. $\lim \beta/\alpha = 0$ (а $\lim \alpha/\beta = \infty$), то бесконечно малая β называется *бесконечно малой величиной высшего порядка, чем бесконечно малая* α, а бесконечно малая α называется *бесконечно малой низшего порядка, чем бесконечно малая* β.

Пример 3. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \to 0$. Бесконечно малая β есть бесконечно малая высшего порядка, чем бесконечно малая α, так как $\lim\limits_{x\to 0} x^n/x = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$.

При этом бесконечно малая α есть бесконечно малая низшего порядка, чем бесконечно малая β.

---

*) Будем предполагать, что бесконечно малая, стоящая в знаменателе, не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a.

Определение 3. Бесконечно малая β называется *бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой α*, если β и α^k — бесконечно малые одного порядка, т.е. если $\lim \beta/\alpha^k = A \neq 0$.

Пример 4. Если $\alpha = x$, $\beta = x^3$, то при $x \to 0$ бесконечно малая β есть бесконечно малая третьего порядка относительно бесконечно малой α, так как

$$\lim_{x\to 0} \beta/\alpha^3 = \lim_{x\to 0} x^3/(x)^3 = 1.$$

Определение 4. Если отношение двух бесконечно малых β/α стремится к единице, т.е. если $\lim \beta/\alpha = 1$, то бесконечно малые β и α называют *эквивалентными бесконечно малыми**) и пишут $\alpha \approx \beta$.

Пример 5. Пусть $\alpha = x$ и $\beta = \sin x$, где $x \to 0$. Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пример 6. Пусть $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, где $x \to 0$. Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(см. пример 6 § 9).

Теорема 1. *Если α и β — эквивалентные бесконечно малые, то их разность $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β.*

Доказательство. Действительно,

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Теорема 2. *Если разность двух бесконечно малых $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β, то α и β суть эквивалентные бесконечно малые.*

Доказательство. Пусть $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$, тогда $\lim\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, или $1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, или $1 = \lim \frac{\beta}{\alpha}$, т.е. $\alpha \approx \beta$. Если $\lim \frac{\alpha-\beta}{\beta} = 0$, то $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, т.е. $\alpha \approx \beta$.

Пример 7. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x + x^3$, где $x \to 0$.

Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как их разность $\beta - \alpha = x^3$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta-\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Пример 8. При $x \to \infty$ бесконечно малые $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ и $\beta = \frac{1}{x}$ — эквивалентные бесконечно малые, так как их разность $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ есть

*) В этом случае α и β иногда называют *равносильными* бесконечно малыми.

бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β. Предел отношения α и β равен 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Замечание. Если отношение двух бесконечно малых β/α не имеет предела и не стремится к бесконечности, то β и α не сравнимы между собой в указанном выше смысле.

Пример 9. Пусть $\alpha=x$, $\beta=x\sin(1/x)$, где $x\to 0$. Бесконечно малые α и β не сравнимы, так как их отношение $\beta/\alpha=\sin(1/x)$ при $x\to 0$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (см. пример 4 § 3).

Упражнения к главе II

Вычислить указанные пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. *Отв.* 4. **2.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}[2\sin x-\cos x+\operatorname{ctg} x]$. *Отв.* 2. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Отв.* 0. **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$. *Отв.* 2. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. *Отв.* $\dfrac{4}{3}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$. *Отв.* 1. **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. *Отв.* $\dfrac{1}{3}$.

Указание. Напишем формулу $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ для $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

$$1^3=1;\qquad 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$

$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;\qquad \ldots\qquad (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Складывая левые и правые части, получим:

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

откуда

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. *Отв.* ∞. **10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. *Отв.* 0. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. *Отв.* 4. **13.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. *Отв.* 3. **14.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. *Отв.* $\dfrac{1}{8}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. *Отв.* 1. **16.** $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. *Отв.* $-\dfrac{2}{5}$. **17.** $\lim\limits_{u\to -2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Отв.* 0. **18.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Отв.* $3x^2$. **19.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. *Отв.* -1. **20.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$. *Отв.* n (n — целое положительное число). **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **22.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. *Отв.* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Отв.* $\dfrac{q}{p}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Отв. $\frac{2}{3}$. **25.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. *Отв.* $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **27.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Отв.* 1. **28.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Отв.* 1 при $x\to+\infty$, -1 при $x\to-\infty$. **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. *Отв.* 0. **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Отв.* $\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$, $-\infty$ при $x\to-\infty$. **31.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$. *Отв.* 1. **32.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$. *Отв.* 4. **33.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/3)}{x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{9}$. **34.** $\lim\limits_{x\to+0}x/\sqrt{1-\cos x}$. *Отв.* $\sqrt{2}$. **35.** $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$. *Отв.* 1. **36.** $\lim\limits_{v\to\pi/3}\frac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Отв.* $\sqrt{3}$. **37.** $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}$. *Отв.* $\frac{2}{\pi}$. **38.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$. *Отв.* $\frac{2}{3}$. **39.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. *Отв.* $2\cos a$. **40.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **41.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. *Отв.* e^2. **42.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **43.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **44.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$. *Отв.* e. **45.** $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$. *Отв.* 1. **46.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{3\sec x}$. *Отв.* e^3. **47.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. *Отв.* α. **48.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. *Отв.* e. **49.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. *Отв.* e^3. **50.** $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$. *Отв.* 1. **51.** $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$. *Отв.* 1 при $\alpha\to+\infty$, 0 при $\alpha\to-\infty$. **52.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. *Отв.* $\frac{\alpha}{\beta}$. **53.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$. *Отв.* $+\infty$ при $x\to+\infty$, 0 при $x\to-\infty$. **54.** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. *Отв.* $\ln a$. **55.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. *Отв.* $\alpha-\beta$. **56.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ *Отв.* 1.

Определить точки разрыва функций:

57. $y=\frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. *Отв.* Разрывы при $x=-2;\ -1;\ 0;\ 2$. **58.** $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. *Отв.* Разрывы при $x=0$ и $x=\pm\frac{2}{\pi};\ \pm\frac{2}{3\pi};\ \ldots;\ \pm\frac{2}{(2n+1)\pi};\ \ldots$

59. Найти точки разрыва функции $y=1+2^{1/x}$ и построить график этой функции. *Отв.* Разрыв при $x=0$ ($y\to+\infty$ при $x\to 0+0$, $y\to 1$ при $x\to 0-0$).

60. Между следующими бесконечно малыми (при $x\to 0$) величинами x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, $\sin 3x$, $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x} выбрать бесконечно малые одного порядка с бесконечно малой x, а также высшего и низшего порядка, чем x. *Отв.* Бесконечно малые одного порядка с x: $\sin 3x$ и xe^{2x}; бесконечно малые высшего порядка по сравнению с x: x^2 и $2x\cos x\sqrt[2]{\operatorname{tg}^2 x}$; бесконечно малая низшего порядка по сравнению с x: $\sqrt{x(1-x)}$.

61. Среди указанных бесконечно малых (при $x\to 0$) величин найти бесконечно малые, равносильные бесконечно малой x: $2\sin x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1+x)$, x^3+3x^4. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$.

62. Убедиться в том, что при $x\to 1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ будут одного порядка малости. Будут ли они эквивалентны? *Отв.* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, следовательно, данные бесконечно малые одного порядка, но не эквивалентны.

Глава III
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Скорость движения

Будем рассматривать прямолинейное движение некоторого твердого тела, например движение камня, брошенного вертикально вверх, или движение поршня в цилиндре двигателя и т.д. Отвлекаясь от конкретных размеров и формы тела, мы будем в дальнейшем представлять его в виде движущейся точки M. Расстояние s движущейся точки, отсчитываемое от некоторого начального ее положения M_0, будет зависеть от времени t, т.е. s будет функцией времени t:

$$s = f(t). \tag{1}$$

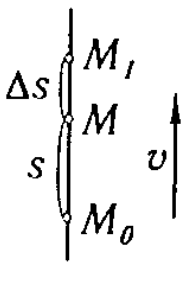


Рис. 57

Пусть в некоторый момент времени*) t движущаяся точка M находилась на расстоянии s от начального положения M_0, а в некоторый следующий момент $t+\Delta t$ точка оказалась в положении M_1 — на расстоянии $s+\Delta s$ от начального положения (рис. 57). Таким образом, за промежуток времени Δt расстояние s изменилось на величину Δs. В этом случае говорят, что за промежуток времени Δt величина s получила приращение Δs.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; оно дает нам среднюю скорость движения точки за время Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Средняя скорость не может во всех случаях точно охарактеризовать быстроту перемещения точки M в момент t. Если, например, тело в начале промежутка Δt перемещалось очень быстро, а в конце очень медленно, то средняя скорость, очевидно, не сможет отразить указанных особенностей движения точки и дать нам правильное представление об истинной скорости ее движения в момент t. Для того чтобы точнее выразить эту истинную скорость с помощью средней скорости, надо взять меньший промежуток вре-

---

*) Здесь, как и в дальнейшем, конкретное значение переменной мы будем обозначать той же буквой, что и саму переменную.

мени Δt. Наиболее полно характеризует скорость движения точки в момент t тот предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$. Этот предел и называют ***скоростью движения в данный момент***:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3}$$

Таким образом, *скоростью движения в данный момент* называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю.

Напишем равенство (3) в развернутом виде. Так как

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

то

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{3'}$$

Это и будет скорость неравномерного движения. Таким образом, мы видим, что понятие скорости неравномерного движения органически связано с понятием предела. Только с помощью понятия предела можно определить скорость неравномерного движения.

Из формулы (3′) следует, что v не зависит от приращения времени Δt, а зависит от значения t и характера функции $f(t)$.

Пример. Найти скорость равномерно ускоренного движения в произвольный момент t и в момент $t = 2$ сек, если зависимость пути от времени выражается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$.

Решение. В момент t имеем $s = \frac{gt^2}{2}$; в момент $t + \Delta t$ получим:

$$s + \Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Найдем Δs:

$$\Delta s = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

Составим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + (g\Delta t^2/2)}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t;$$

по определению, имеем: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t\right) = gt$.

Таким образом, скорость в любой момент времени t равна $v = gt$.

При $t = 2$ имеем $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ *м/сек*.

§ 2. Определение производной

Пусть мы имеем функцию

$$y = f(x), \tag{1}$$

определенную в некотором промежутке. При каждом значении аргумента x из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение.

Пусть аргумент x получил некоторое (положительное или отрицательное — безразлично) приращение Δx. Тогда функция y получит некоторое приращение Δy. Таким образом:

при значении аргумента x будем иметь $y = f(x)$,
при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют ***производной*** данной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Таким образом, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Следовательно, ***производной*** данной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента x, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.

Заметим, что в общем случае для каждого значения x производная $f'(x)$ имеет определенное значение, т.е. производная является также ***функцией*** от x.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Пример 1. Дана функция $y = x^2$; найти ее производную y':

1) в произвольной точке x,

2) при $x = 3$.

Решение: 1) при значении аргумента, равном x, имеем $y = x^2$. При значении аргумента, равном $x + \Delta x$, имеем $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Переходя к пределу, найдем производную от данной функции:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, производная от функции $y = x^2$ в произвольной точке равна

$$y' = 2x;$$

2) при $x = 3$ получим:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 2. $y = \dfrac{1}{x}$, найти y'.

Решение. Рассуждая так же, как в предыдущем примере, получаем:

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Замечание. В предыдущем параграфе было установлено, что если зависимость расстояния s движущейся точки от времени t выражается формулой $s = f(t)$, то скорость v в момент t выражается формулой

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Следовательно,

$$v = s'_t = f'(t),$$

т.е. скорость равна производной*) от пути по времени t.

§ 3. Геометрическое значение производной

Мы подошли к понятию производной, рассматривая скорость движущегося тела (точки), т.е. исходя из ***механических*** представлений. Теперь мы дадим не менее важное ***геометрическое*** истолкование производной. Для этого нам прежде всего потребуется определение *касательной к кривой* в данной точке.

Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0. Возьмем на кривой точку M_1 и проведем секущую M_0M_1 (рис. 58). Если точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_0, то секущая M_0M_1 занимает различные положения M_0M_1', M_0M_1'' и т.д.

---

*) Когда мы говорим «производная по x» или «производная по времени t» и т.д., то под этим мы подразумеваем, что при вычислении производной мы считаем аргументом переменную x или время t и т.д.

Если при неограниченном приближении точки M_1 по кривой к точке M_0 ***с любой стороны*** секущая стремится занять положение определенной прямой M_0T, то прямая M_0T называется *касательной* к кривой в точке M_0 (понятие «стремится занять» будет уточнено ниже).

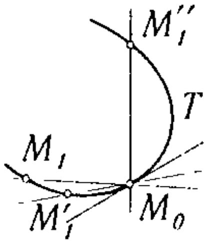


Рис. 58

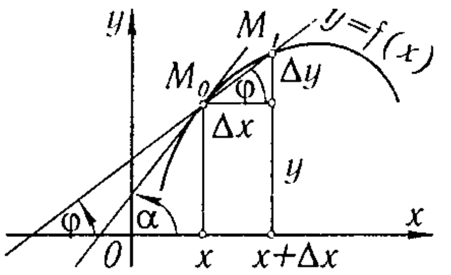


Рис. 59

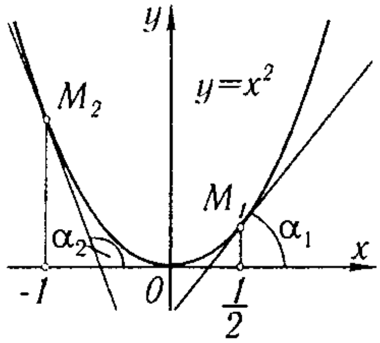


Рис. 60

Рассмотрим функцию $f(x)$ и соответствующую этой функции кривую

$$y = f(x)$$

в прямоугольной системе координат (рис. 59). При некотором значении x функция имеет значение $y = f(x)$. Этим значениям x и y на кривой соответствует точка $M_0(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Новому значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует «наращенное» значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Соответствующей ему точкой кривой будет точка $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Проведем секущую M_0M_1 и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Из рис. 59 непосредственно усматриваем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{1}$$

Если теперь Δx будет стремиться к нулю, то точка M_1 будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к M_0. Секущая M_0M_1 будет поворачиваться вокруг точки M_0 и угол φ будет меняться с изменением Δx. Если при $\Delta x \to 0$ угол φ стремится к некоторому пределу α, то прямая, проходящая через M_0 и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой *касательной*. Нетрудно найти ее *угловой коэффициент*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Следовательно,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{2}$$

т.е. *значение производной $f'(x)$ при данном значении аргумента x равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке $M_0(x, y)$.*

Пример. Найти тангенсы углов наклона касательной к кривой $y = x^2$ в точках $M_1(1/2, 1/4)$; $M_2(-1, 1)$ (рис. 60).

Решение. На основании примера 1 § 2 имеем $y' = 2x$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'|_{x=1/2} = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = y'|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. Дифференцируемость функций

Определение. Если функция

$$y = f(x) \tag{1}$$

имеет производную в точке $x = x_0$, т.е. если существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

то мы говорим, что при данном значении $x = x_0$ функция *дифференцируема* или (что равносильно этому) имеет производную.

Если функция дифференцируема ***в каждой точке*** некоторого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b), то говорят, что она *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ или, соответственно, *в интервале* (a, b).

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.*

Действительно, если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

где γ есть величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x \to 0$. Но тогда

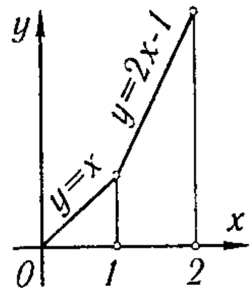


Рис. 61

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \gamma\Delta x;$$

отсюда следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и значит, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (см. § 9 гл. II).

Таким образом, ***в точках разрыва функция не может иметь производной***. Обратное заключение неверно, т.е. из того, что в какой-нибудь точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна, еще ***не следует***, что в этой точке она дифференцируема: функция $f(x)$ может и не иметь производной в точке x_0. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 2]$ следующим образом (рис. 61):

$$f(x) = x \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 2.$$

Эта функция при $x = 1$ не имеет производной, хотя и непрерывна в этой точке. Действительно, при $\Delta x > 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x) - 1] - [2 \cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

при $\Delta x < 0$ получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак Δx, а это значит, что в точке $x = 1$ функция не имеет производной*). Геометрически этому соответствует тот факт, что в точке $x = 1$ данная «кривая» не имеет определенной касательной.

Непрерывность же функции в точке $x = 1$ следует из того, что

$$\Delta y = \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x < 0,$$
$$\Delta y = 2\Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x > 0,$$

и, следовательно, в обоих случаях $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

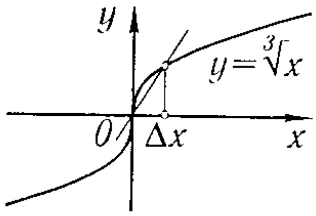


Рис. 62

Пример 2. Функция $y = \sqrt[3]{x}$, график которой изображен на рис. 62, определена и непрерывна для всех значений независимого переменного. Выясним, имеет ли эта функция производную при $x = 0$; для этого найдем значения функции при $x = 0$ и при $x = 0 + \Delta x$; при $x = 0$ имеем $y = 0$, при $x = 0 + \Delta x$ имеем $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$. Следовательно,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Таким образом, отношение приращения функции к приращению аргумента в точке $x = 0$ стремится к бесконечности при $\Delta x \to 0$ (и, значит, предела не имеет). Следовательно, рассматриваемая функция не дифференцируема в точке $x = 0$. Касательная к кривой в этой точке образует с осью абсцисс угол $\pi/2$, т.е. совпадает с осью Oy.

§ 5. Производная от функции $y = x^n$ при n целом и положительном

Для нахождения производной от данной функции $y = f(x)$, исходя из общего определения производной, необходимо произвести следующие действия:

1) дать аргументу x приращение Δx, вычислить наращенное значение функции:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

---

*) По определению производной требуется, чтобы отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремилось при $\Delta x \to 0$ к одному и тому же пределу независимо от того, *каким образом* стремится к нулю Δx.

2) найти соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) найти предел данного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Мы применим здесь и в следующих параграфах этот общий способ для вычисления производных от некоторых элементарных функций.

Теорема. *Производная функции $y = x^n$, где n — целое положительное число, равна nx^{n-1}, т.е.*

$$\textit{если} \quad y = x^n, \quad \textit{то} \quad y' = nx^{n-1}. \tag{I}$$

Доказательство. Имеем функцию

$$y = x^n.$$

1. Если x получает приращение Δx, то

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2. Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n$$

или

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

3. Находим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4. Найдем предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1},$$

следовательно, $y' = nx^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Пример 2. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Последний результат имеет простое геометрическое толкование: касательная к прямой $y = x$ при любом значении x совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен 1.

Отметим, что формула (I) верна и в случае n дробного и отрицательного. (Это будет доказано в § 12.)

Пример 3. $y = \sqrt{x}$.

Представим данную функцию в виде степени:

$$y = x^{\frac{1}{2}};$$

тогда по формуле (I) (учитывая только что сделанное замечание) получаем:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

или

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 4. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Представим y в виде степенной функции

$$y = x^{-3/2}.$$

Тогда

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. Производные от функций $y = \sin x$; $y = \cos x$

Теорема 1. *Производная от* $\sin x$ *есть* $\cos x$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \sin x, \quad \text{то} \quad y' = \cos x. \tag{II}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2) $$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

но так как

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Последнее равенство получается на том основании, что $\cos x$ есть непрерывная функция.

Теорема 2. *Производная от* $\cos x$ *есть* $-\sin x$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \cos x, \quad \text{то} \quad y' = -\sin x. \tag{III}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x - \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x + x}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

учитывая, что $\sin x$ есть непрерывная функция, окончательно получим:

$$y' = -\sin x.$$

§ 7. Производные: постоянной, произведения постоянной на функцию, суммы, произведения, частного

Теорема 1. *Производная постоянной равна нулю, т.е.*

$$\text{если} \quad y = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const}, \quad \text{то} \quad y' = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Доказательство. $y = C$ есть такая функция от x, значения которой при всех x равны C.

Следовательно, при любом значении x

$$y = f(x) = C.$$

Дадим аргументу x приращение Δx ($\Delta x \neq 0$). Так как функция y сохраняет значение C при всех значениях аргумента, то

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Значит, приращение функции равно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

и, следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

т.е.

$$y' = 0.$$

Последний результат имеет простое геометрическое истолкование. Графиком функции $y = C$ служит прямая, параллельная оси Ox. Касательная к графику в любой ее точке, очевидно, совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с осью Ox угол, тангенс которого y' равен нулю.

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е.*

$$\textit{если}\quad y = Cu(x),\quad \textit{где}\quad C = \mathrm{const},\quad \textit{то}\quad y' = Cu'(x). \tag{V}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем иметь:

$$y = Cu(x),$$
$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x),$$
$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},\ \text{т.е.}\ y' = Cu'(x).$$

Пример 1. $y = 3\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{1}{2}\prime}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

т.е.

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Теорема 3. *Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций*).*

Для случая, например, трех слагаемых имеем:

$$y = u(x) + v(x) + w(x),\qquad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \tag{VI}$$

Доказательство. Для значений аргумента x

$$y = u + v + w$$

(аргумент x в обозначении функции для краткости письма опускаем).

Для значения аргумента $x + \Delta x$ имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

где Δy, Δu, Δv и Δw — приращения функций y, u, v и w, соответствующие приращению Δx аргумента x. Следовательно,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w,\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

или

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

---

*) Выражение $y = u(x) - v(x)$ равносильно $y = u(x) + (-1)v(x)$ и $y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Пример 2. $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

т.е.

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Теорема 4. *Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т.е.*

$$\textit{если} \quad y = uv, \quad \textit{то} \quad y' = u'v + uv'. \tag{VII}$$

Доказательство. Рассуждая, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получим:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
y + \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v),\\
\Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u\Delta v + \Delta u\Delta v,\\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},\\
y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v + \lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} =\\
&= \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}
\end{aligned}$$

(так как u и v не зависят от Δx).

Рассмотрим последний член в правой части

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как $u(x)$ — дифференцируемая функция, то она непрерывна. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$. Кроме того,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Таким образом, рассматриваемый член равен нулю, и мы окончательно получаем:

$$y' = u'v + uv'.$$

На основании доказанной теоремы легко получается правило дифференцирования произведения любого числа функций.

Так, если имеем произведение трех функций

$$y = uvw,$$

то, представляя правую часть как произведение u и (vw), получим:

$$y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Таким приемом можем получить аналогичную формулу для производной произведения любого (конечного) числа функций. Именно, если $y = u_1u_2\ldots u_n$, то

$$y' = u'\,u_2\ldots u_{n-1}u_n + u_1u'\,\ldots u_{n-1}u_n + \cdots + u_1u_2\ldots u_{n-1}u'\,.$$

Пример 3. Если $y = x^2 \sin x$, то

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Пример 4. Если $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$, то

$$y' = (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x} (\sin x)' \cos x + \sqrt{x} \sin x (\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x.$$

Теорема 5. *Производная дроби (т.е. частного от деления двух функций) равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, т.е.*

$$\text{если} \quad y = \frac{u}{v}, \quad \text{то} \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{VIII}$$

Доказательство. Если Δy, Δu и Δv суть приращения функций y, u и v, соответствующие приращению Δx аргумента x, то

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}.$$

Отсюда, заметив, что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$*), получаем

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 5. Если $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$, то

$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}.$$

Замечание. Если имеем функцию вида

$$y = \frac{u(x)}{C},$$

где знаменатель C есть постоянная, то, дифференцируя эту функцию, нет надобности применять формулу (VIII), а целесообразнее применять формулу (V):

$$y' = \left(\frac{1}{C} u\right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}.$$

Конечно, этот результат получается и по формуле (VIII).

---

*) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, так как $v(x)$ — дифференцируемая и, следовательно, непрерывная функция.

Пример 6. Если $y = \frac{\cos x}{7}$, то $y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}$.

§ 8. Производная логарифмической функции

Теорема. *Производная от функции* $\log_a x$ *равна* $\frac{1}{x}\log_a e$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \log_a x, \quad \text{то} \quad y' = \frac{1}{x}\log_a e. \tag{IX}$$

Доказательство. Если Δy есть приращение функции $y = \log_a x$, соответствующее приращению Δx аргумента x, то

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Помножим и разделим на x выражение, стоящее в правой части последнего равенства.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Обозначим величину $\frac{\Delta x}{x}$ через α. Очевидно, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и данном x. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но, как известно (см. § 7 гл. II),

$$\lim_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Если же выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к числу e, то логарифм этого выражения стремится к $\log_a e$ (в силу непрерывности логарифмической функции). Поэтому окончательно получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0}\frac{1}{x}\log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Заметив, что $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, полученную формулу можно переписать так:

$$y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}.$$

Отметим важный частный случай этой формулы: если $a = e$, то $\ln a = \ln e = 1$, т.е.

$$\text{если} \quad y = \ln x, \quad \text{то} \quad y' = \frac{1}{x}. \tag{X}$$

§ 9. Производная от сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f(x)$, т.е. такая, что ее можно представить в следующем виде:

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x)$$

или $y = F[\varphi(x)]$ (см. гл. I, § 8). В выражении $y = F(u)$ переменное u называют *промежуточным аргументом*.

Установим правило дифференцирования сложной функции.

Теорема. *Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u = F'(u)$, то сложная функция $y = F[\varphi(x)]$ в указанной точке x также имеет производную, которая равна*

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'(x),$$

где вместо u должно быть подставлено выражение $u = \varphi(x)$. Коротко,

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу и на производную промежуточного аргумента по x.

Доказательство. При определенном значении x будем иметь:

$$u = \varphi(x), \qquad y = F(u).$$

При наращенном значении аргумента $x + \Delta x$

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \qquad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Таким образом, приращению Δx соответствует приращение Δu, которому соответствует приращение Δy, причем при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta u \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

По условию

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Из этого соотношения, пользуясь определением предела, получаем (при $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \tag{1}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Перепишем равенство (1)

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u. \tag{2}$$

Равенство (2) справедливо и при $\Delta u = 0$ при произвольном α, так как оно превращается в тождество $0 = 0$. При $\Delta u = 0$ будем полагать $\alpha = 0$. Разделим все члены равенства (2) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

По условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (3), получим:

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{4}$$

Пример 1. Пусть дана функция $y = \sin(x^2)$. Найдем y'_x. Данную функцию представим как функцию от функции следующим образом:

$$y = \sin u, \qquad u = x^2.$$

Находим:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_x = 2x.$$

Следовательно, по формуле (4)

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

Подставляя вместо u его выражение, окончательно получаем:

$$y'_x = 2x\cos(x^2).$$

Пример 2. Дана функция $y = (\ln x)^3$. Найдем y'_x.

Данную функцию представим следующим образом:

$$y = u^3, \qquad u = \ln x.$$

Находим:

$$y'_u = 3u^2, \qquad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$y'_x = 3u^2\frac{1}{x} = 3(\ln x)^2\frac{1}{x}.$$

Если функция $y = f(x)$ такова, что ее можно представить в виде

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(v), \qquad v = \psi(x),$$

нахождение производной y'_x производится путем последовательного применения предыдущей теоремы.

По доказанному правилу имеем:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Применяя эту же теорему для нахождения u'_x, будем иметь:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

Подставляя выражение u'_x в предыдущее равенство, получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \tag{5}$$

или

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'_v(v)\psi'_x(x).$$

Пример 3. Дана функция $y = \sin[(\ln x)^3]$. Найдем y'_x. Представим данную функцию следующим образом:

$$y = \sin u, \qquad u = v^3, \qquad v = \ln x.$$

Находим:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_v = 3v^2, \qquad v'_x = 1/x.$$

Следовательно, по формуле (5) получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3(\cos u)v^2\frac{1}{x},$$

или окончательно

$$y'_x = \cos[(\ln x)^3]\cdot 3(\ln x)^2\frac{1}{x}.$$

Заметим, что рассмотренная функция определена только при $x > 0$.

§ 10. Производные функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln|x|$

Теорема 1. *Производная от функции* $\operatorname{tg} x$ *равна* $\frac{1}{\cos^2 x}$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \operatorname{tg} x, \quad \text{то} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{XI}$$

Доказательство. Так как

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

то по правилу дифференцирования дроби [см. формулу (VIII) § 7 гл. III] получаем:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема 2. *Производная от функции* $\operatorname{ctg} x$ *равна* $-\frac{1}{\sin^2 x}$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad \text{то} \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{XII}$$

Доказательство. Так как

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

то

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

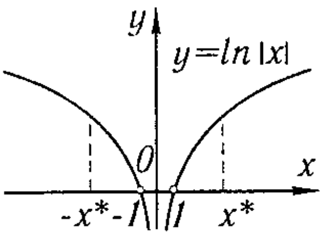


Рис. 63

Пример 1. Если $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$, то

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Пример 2. Если $y = \ln \operatorname{ctg} x$, то

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

Теорема 3. *Производная от функции* $\ln|x|$ (рис. 63) *равна* $1/x$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \ln|x|, \quad \text{то} \quad y' = 1/x. \tag{XIII}$$

Доказательство. а) Если $x > 0$, то $|x| = x$, $\ln|x| = \ln x$ и поэтому

$$y' = 1/x.$$

б) Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$. Но

$$\ln|x| = \ln(-x).$$

(Заметим, что если $x < 0$, то $-x > 0$.) Представим функцию $y = \ln(-x)$ как сложную функцию, положив

$$y = \ln u, \qquad u = -x.$$

Тогда

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Итак, для отрицательных значений x также имеет место равенство

$$y'_x = 1/x.$$

Следовательно, формула (XIII) доказана для любого значения $x \neq 0$. (При $x = 0$ функция $\ln|x|$ не определена.)

§ 11. Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое мы символически обозначим так:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), такова, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то функция $y = f(x)$ есть *неявная функция*, определенная уравнением (1).

Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

неявно определяет следующие элементарные функции (рис. 64 и 65):

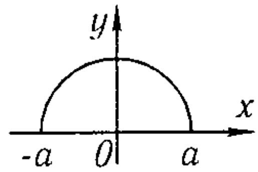


Рис. 64

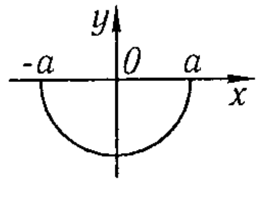


Рис. 65

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{3}$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4}$$

Действительно, после подстановки в уравнение (2) этих значений, получаем тождество

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Выражения (3) и (4) получились путем решения уравнения (2) относительно y. Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно, т.е. можно представить в виде $y = f(x)$*), где $f(x)$ есть элементарная функция.

---

*) Если функция задана уравнением вида $y = f(x)$, то говорят, что функция задана в *явном виде* или является *явной*.

Так, например, функции, заданные уравнениями

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

или

$$y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0,$$

не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y.

Замечание 1. Отметим, что термины «явная функция» и «неявная функция» характеризуют не природу функции, а способ задания. Каждая явная функция $y = f(x)$ может быть представлена и как неявная $y - f(x) = 0$.

Укажем, далее, правило нахождения производной неявной функции, не преобразовывая ее в явную, т.е. не представляя в виде $y = f(x)$.

Допустим, что функция задана уравнением

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Если здесь y есть функция от x, определяемая этим равенством, то это равенство есть тождество.

Дифференцируя обе части этого тождества по x, считая, что y есть функция от x, получим (пользуясь правилом дифференцирования сложной функции):

$$2x + 2yy' = 0,$$

откуда

$$y' = -x/y.$$

Заметим, что если бы мы стали дифференцировать соответствующую явную функцию

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

то получили бы:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

т.е. тот же результат.

Рассмотрим еще один пример неявной функции y от x:

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Дифференцируем по x:

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Замечание 2. Из приведенных примеров следует, что для нахождения значения производной неявной функции при данном значении аргумента x нужно знать и значение функции y при данном значении x.

§ 12. Производные степенной функции при любом действительном показателе, показательной функции, сложной показательной функции

Теорема 1. *Производная от функции x^n, где n — любое действительное число, равна nx^{n-1}, т.е.*

$$\text{если} \quad y = x^n, \quad \text{то} \quad y' = nx^{n-1}. \tag{1'}$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Логарифмируя данную функцию, будем иметь:

$$\ln y = n \ln x.$$

Дифференцируем обе части полученного равенства по x, считая y функцией от x:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}, \qquad y' = yn\frac{1}{x}.$$

Подставляя сюда значение $y = x^n$, окончательно получаем:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Легко показать, что эта формула верна и для $x < 0$, если только x^n имеет смысл*).

Теорема 2. *Производная от функции a^x, где $a > 0$, равна $a^x \ln a$, т.е.*

$$\text{если} \quad y = a^x, \quad \text{то} \quad y' = a^x \ln a. \tag{XIV}$$

Доказательство. Логарифмируя равенство $y = a^x$, получим:

$$\ln y = x \ln a.$$

Дифференцируем полученное равенство, считая y функцией от x:

$$\frac{1}{y}y' = \ln a, \qquad y' = y \ln a$$

или

$$y' = a^x \ln a.$$

Если основание $a = e$, то $\ln e = 1$ и мы получим формулу

$$y = e^x, \qquad y' = e^x. \tag{XIV'}$$

Пример 1. Дана функция

$$y = e^{x^2}.$$

Представим ее как сложную функцию, введя промежуточный аргумент u:

$$y = e^u, \qquad u = x^2,$$

тогда

$$y'_u = e^u, \qquad u'_x = 2x$$

и, следовательно,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

---

*) Эта формула была ранее доказана (§ 5 гл. III) для случая, когда n является *целым положительным* числом. Теперь формула (I) доказана в общем случае (для любого постоянного числа n).

Сложной показательной функцией называется функция, у которой и основание и показатель степени являются функциями от x, например $(\sin x)^{x^2}$, $x^{\operatorname{tg} x}$, x^x, $(\ln x)^x$, вообще, всякая функция вида

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

есть сложная показательная функция**).

Теорема 3.

$$\textit{Если}\quad y = u^v, \quad \textit{то}\quad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u. \qquad \text{(XV)}$$

Доказательство. Логарифмируем функцию y:

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируя полученное равенство по x, будем иметь:

$$\frac{1}{y}y' = v\frac{1}{u}u' + v' \ln u,$$

откуда

$$y' = y\Big(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\Big).$$

Подставляя сюда выражение $y = u^v$, получаем:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Таким образом, производная сложной показательной функции состоит из двух слагаемых: первое слагаемое получается, если при дифференцировании предположить, что u есть функция от x, а v есть ***постоянная*** (т.е. если рассматривать u^v как ***степенную*** функцию); второе слагаемое получается, если предположить, что v есть функция от x, а $u = \text{const}$ (т.е. если рассматривать u^v как ***показательную*** функцию).

Пример 2. Если $y = x^x$, то $y' = xx^{x-1}(x') + x^x(x')\ln x$ или

$$y' = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

Пример 3. Если $y = (\sin x)^{x^2}$, то

$$y' = x^2(\sin x)^{x^2-1}(\sin x)' + (\sin x)^{x^2}(x^2)' \ln \sin x =$$
$$= x^2(\sin x)^{x^2-1}\cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \ln \sin x.$$

Прием, примененный в этом параграфе для нахождения производных и состоящий в том, что сначала находят производную ***логарифма данной функции***, широко применяется при дифференцировании функций. Применение этого приема нередко значительно упрощает вычисления.

**) Часто такую функцию называют показательно-степенной или степенно-показательной.

Пример 4. Требуется найти производную от функции
$$y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}.$$

Решение. Логарифмируя, находим:
$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Умножая на y и подставляя $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$ вместо y, получаем:
$$y' = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right].$$

Замечание. Выражение $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$, являющееся производной по x от натурального логарифма данной функции $y = y(x)$, называется *логарифмической производной.*

§ 13. Обратная функция и ее дифференцирование

Пусть дана возрастающая (рис. 66) или убывающая функция
$$y = f(x), \tag{1}$$
определенная на некотором интервале (a, b) $(a < b)$ (см. § 6 гл. I). Пусть $f(a) = c$, $f(b) = d$. Для определенности будем в дальнейшем рассматривать возрастающую функцию.

Рассмотрим два различных значения x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b). Из определения возрастающей функции следует, что если $x_1 < x_2$ и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то $y_1 < y_2$. Следовательно, двум различным значениям x_1 и x_2 соответствуют два различных значения функции y_1 и y_2. Справедливо и обратное, т.е. если $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$, а $y_2 = f(x_2)$, то из определения возрастающей функции следует, что $x_1 < x_2$. Таким образом, между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Рассматривая эти значения y как значения аргумента, а значения x как значения функции, получаем x как функцию y:
$$x = \varphi(y). \tag{2}$$
Эта функция называется *обратной* для функции $y = f(x)$. Очевидно, что и функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что и убывающая функция имеет обратную.

Замечание 1. Укажем без доказательства, что *если возрастающая* (или *убывающая*) *функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = c$, $f(b) = d$, то обратная функция определена и непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

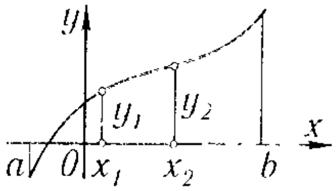


Рис. 66

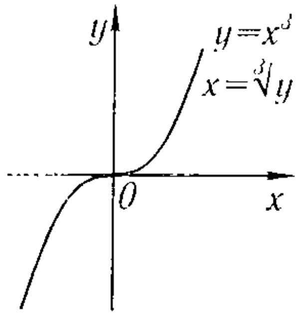


Рис. 67

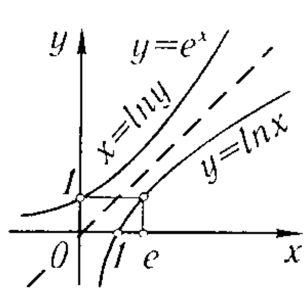


Рис. 68

Пример 1. Пусть дана функция $y = x^3$. Эта функция — возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, она имеет обратную $x = \sqrt[3]{y}$ (рис. 67).

Заметим, что обратная функция $x = \varphi(y)$ находится путем решения уравнения $y = f(x)$ относительно x.

Пример 2. Пусть дана функция $y = e^x$. Эта функция — возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Она имеет обратную $x = \ln y$. Область определения обратной функции $0 < y < +\infty$ (рис. 68).

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей на некотором интервале, то она может иметь несколько обратных функций*).

Пример 3. Функция $y = x^2$ определена на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Она не является ни возрастающей, ни убывающей и не имеет обратной. Если мы рассмотрим интервал $0 \leqslant x < +\infty$, то здесь функция является возрастающей и обратной для нее будет $x = \sqrt{y}$. На интервале же $-\infty < x < 0$ функция — убывающая, и обратной для нее будет функция $x = -\sqrt{y}$ (рис. 69).

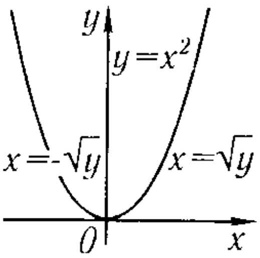


Рис. 69

Замечание 3. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются взаимно обратными, то графиками их является одна и та же кривая. Но если аргумент обратной функции мы обозначим снова через x, а функцию через y и построим их в одной координатной системе, то получим уже два различных графика.

Легко видеть, что графики будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Пример 4. На рис. 68 построены графики функции $y = e^x$ (или $x = \ln y$) и обратной для нее функции $y = \ln x$, рассмотренных в примере 2.

Докажем, далее, теорему, позволяющую находить производную функции $y = f(x)$, зная производную обратной функции.

---

*) Подчеркнем еще раз, что, говоря о том, что y есть функция от x, мы понимаем однозначную зависимость y от x.

Теорема. *Если для функции*

$$y = f(x) \tag{1}$$

существует обратная функция

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $\frac{1}{\varphi'(y)}$, т.е. справедлива формула

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{XVI}$$

Таким образом, производная одной из двух взаимно обратных функций равна единице, деленной на производную второй из этих функций при соответствующих значениях x и y*).

Доказательство. Возьмем приращение Δy, тогда на основании (2)

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Так как $\varphi(y)$ есть функция монотонная, то $\Delta x \neq 0$. Напишем тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}. \tag{3}$$

Так как функция $\varphi(y)$ непрерывна, то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ в обеих частях равенства (3), получим:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

т.е. получили формулу XVI.

Замечание. Если пользоваться теоремой о дифференцировании сложной функции, то формулу XVI можно получить так.

Дифференцируем обе части равенства (2) по x, считая y функцией от x. Получим $1 = \varphi'(y)y'_x$, откуда

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

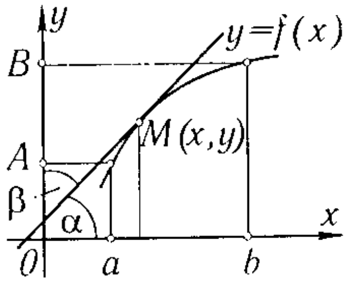


Рис. 70

Полученный результат наглядно иллюстрируется геометрически. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 70). Эта же кривая будет графиком функции $x = \varphi(y)$, где x рассматривается уже как функция, а y — как независимая переменная. Рассмотрим некоторую точку $M(x, y)$ этой кривой. Обозначим углы, образованные данной касательной с положительными напра-

*) Когда мы пишем $f'(x)$ или y'_x, то мы считаем, что при вычислении производной в качестве независимого переменного берется x; когда же мы пишем $\varphi'(y)$ или x'_y, то мы считаем, что при вычислении производной роль независимого переменного играет y. Заметим, что ***после дифференцирования по y, указанного в правой части формулы (XVI), надо вместо y подставить $f(x)$.***

влениями осей Ox и Oy, соответственно, через α и β. На основании результатов § 3 о геометрическом значении производной имеем:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta. \tag{4}$$

Из рис. 70 следует, что если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то, как легко видеть, $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Следовательно, в любом случае $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Подставляя выражения для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ из формулы (4), получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. Обратные тригонометрические функции и их дифференцирование

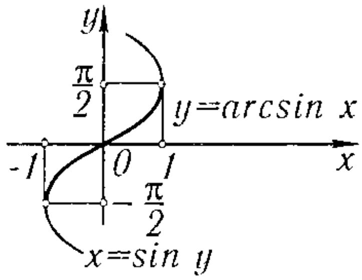


Рис. 71

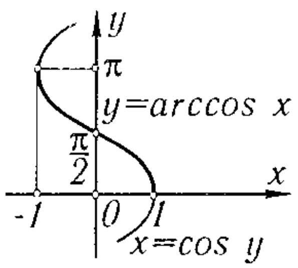


Рис. 72

1) Функция $y = \arcsin x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \sin y \tag{1}$$

и построим ее график, направив ось Oy вертикально вверх (рис. 71). Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $x = \sin y$ — возрастающая, ее значения заполняют отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Поэтому функция $x = \sin y$ имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \arcsin x^{*)}$$

Эта функция определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, ее значения заполняют отрезок $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. На рис. 71 график функции $y = \arcsin x$ изображен жирной линией.

Теорема 1. *Производная от функции* $\arcsin x$ *равна* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *т.е.*

$$\textit{если} \quad y = \arcsin x, \quad \textit{то} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{XVII}$$

Доказательство. На основании равенства (1) находим:

$$x'_y = \cos y.$$

По правилу дифференцирования обратной функции

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

---

*) Отметим, что известное из тригонометрии равенство $y = \operatorname{Arcsin} x$ есть другая запись равенства (1). Здесь (при данном x) y обозначает совокупность значений углов, синус которых равен x.

но
$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$
поэтому
$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
перед корнем берется знак плюс, так как функция $y = \arcsin x$ принимает значения на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos y \geqslant 0$.

Пример 1. $y = \arcsin e^x$,
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Пример 2.
$$y = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2,$$
$$y' = 2\arcsin\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -2\arcsin\frac{1}{x}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

2) Функция $y = \arccos x$.

Как и выше, рассмотрим функцию
$$x = \cos y \tag{2}$$
и построим ее график, направив ось Oy вверх (рис. 72). Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. На отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi$ функция $x = \cos y$ — убывающая и имеет обратную, которую обозначают так:
$$y = \arccos x.$$
Эта функция определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Значения функции заполняют отрезок $\pi \geqslant y \geqslant 0$. На рис. 72 график функции $y = \arccos x$ изображен жирной линией.

Теорема 2. *Производная от функции* $\arccos x$ *равна* $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *т.е.*
$$\text{если} \quad y = \arccos x, \quad \text{то} \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{XVIII}$$

Доказательство. На основании равенства (2) находим:
$$x'_y = -\sin y.$$
Следовательно,
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$
Но $\cos y = x$, поэтому
$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
В равенстве $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ перед корнем берется знак плюс, так как значения функции $y = \arccos x$ заполняют отрезок $0 \leqslant y \leqslant \pi$ и, следовательно, $\sin y \geqslant 0$.

Пример 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \operatorname{tg} y \tag{3}$$

и построим ее график (рис. 73). Эта функция определена при всех значениях y, кроме значений $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. На интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функция $x = \operatorname{tg} y$ — возрастающая и имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Эта функция определена на интервале $-\infty < x < +\infty$. Значения функции заполняют интервал $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. На рис. 73 график функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен жирной линией.

Теорема 3. *Производная от функции* $\operatorname{arctg} x$ *равна* $\frac{1}{1+x^2}$, *т.е.*

$$\textit{если} \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad \textit{то} \quad y' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{XIX}$$

Доказательство. На основании равенства (3) находим:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

но

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y};$$

так как $\operatorname{tg} y = x$, то окончательно получаем:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 4. $y = (\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4(\operatorname{arctg} x)^3(\operatorname{arctg} x)' = 4(\operatorname{arctg} x)^3\frac{1}{1+x^2}.$$

4) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \operatorname{ctg} y. \tag{4}$$

Эта функция определена при всех значениях y, кроме значений $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. График этой функции изображен на рис. 74. На интервале $0 < y < \pi$ функция $x = \operatorname{ctg} y$ — убывающая и имеет обратную, которую обозначают:

$$y = \operatorname{arcctg} x.$$

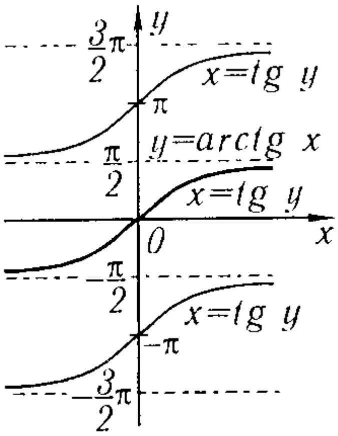


Рис. 73

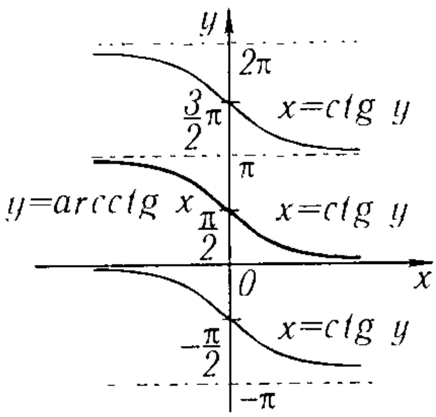


Рис. 74

Эта функция, следовательно, определена на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, ее значения заполняют интервал $0 < y < \pi$.

Теорема 4. *Производная функции* $\operatorname{arcctg} x$ *равна* $-\frac{1}{1+x^2}$, *т.е.*

$$\text{если} \quad y = \operatorname{arcctg} x, \quad \text{то} \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{XX}$$

Доказательство. Из (4) получаем:

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$

Следовательно, $y'_x = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}$. Но $\operatorname{ctg} y = x$. Поэтому

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. Таблица основных формул дифференцирования

Объединим теперь в одну таблицу все основные формулы и правила дифференцирования, выведенные в предыдущих параграфах

$$y = \text{const}, \qquad y' = 0.$$

Степенная функция:

$$y = x^\alpha, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1};$$

в частности,

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} y &= \sin x, & y' &= \cos x,\\ y &= \cos x, & y' &= -\sin x,\\ y &= \operatorname{tg} x, & y' &= \frac{1}{\cos^2 x},\\ y &= \operatorname{ctg} x, & y' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x, & y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\ y &= \arccos x, & y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\ y &= \operatorname{arctg} x, & y' &= \frac{1}{1+x^2},\\ y &= \operatorname{arcctg} x, & y' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Показательная функция:

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \ln a;$$

в частности,

$$y = e^x, \qquad y' = e^x.$$

Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x, \qquad y' = \frac{1}{x}\log_a e;$$

в частности,

$$y = \ln x, \qquad y' = \frac{1}{x}.$$

Общие правила дифференцирования:

$$\begin{aligned} & y = Cu(x), & & y' = Cu'(x) \qquad (C = \mathrm{const}),\\ & y = u + v - w, & & y' = u' + v' - w',\\ & y = uv, & & y' = u'v + uv',\\ & y = \frac{u}{v}, & & y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\\ & \left.\begin{aligned} y &= f(u),\\ u &= \varphi(x), \end{aligned}\right\} & & y'_x = f'_u(u)\varphi'_x(x),\\ & y = u^v, & & y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u. \end{aligned}$$

Если $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, где f и φ — взаимно обратные функции, то

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{где} \quad y = f(x).$$

§ 16. Параметрическое задание функции

Даны два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где t принимает значения, содержащиеся на отрезке $[T_1, T_2]$. Каждому значению t соответствуют значения x и y (функции φ и ψ предполагаем однозначными). Если рассматривать значения x и y как координаты точки на координатной плоскости Oxy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Когда t изменяется от T_1 до T_2, эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями* этой кривой, t называется *параметром*, а способ задания кривой уравнениями (1) называется *параметрическим*.

Предположим, далее, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$. Тогда, очевидно, y является функцией от x;

$$y = \psi[\Phi(x)]. \tag{2}$$

Таким образом, уравнения (1) определяют y как функцию от x, и говорят, что функция y от x задается параметрически.

Выражение $y = f(x)$ непосредственной зависимости y от x может получиться путем исключения параметра t из уравнений (1).

Параметрическое задание кривых широко применяется в механике. Если в плоскости Oxy движется некоторая материальная точка и нам известны законы движения проекций этой точки на оси координат

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \tag{1'}$$

где параметр t есть время, то уравнения (1′) являются параметрическими уравнениями траектории движущейся точки. Исключая из этих уравнений параметр t, получим уравнение траектории в форме $y = f(x)$ или $F(x, y) = 0$. Рассмотрим, например, такую задачу.

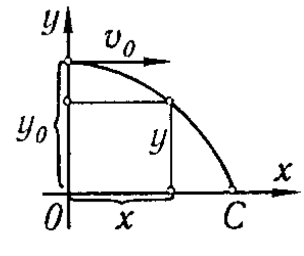


Рис. 75

Задача. Определить траекторию и место падения груза, сброшенного с самолета, движущегося горизонтально со скоростью v_0 иа высоте y_0 (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

Решение. Возьмем систему координат так, как показано на рис. 75, предполагая, что самолет сбрасывает груз в тот момент, когда он пересекает ось Oy. Очевидно, что горизонтальное перемещение груза будет равномерным, с постоянной скоростью v_0:

$$x = v_0 t.$$

Вертикальное перемещение падающего груза под влиянием силы тяжести будет выражаться формулой

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно, расстояние груза от земли в любой момент времени будет выражаться формулой
$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Два уравнения:
$$x = v_0 t, \qquad y = y_0 - \frac{gt^2}{2},$$
будут параметрическими уравнениями траектории. Чтобы исключить параметр t, из первого уравнения находим значение $t = \frac{x}{v_0}$ и подставляем это значение во второе уравнение. Тогда получим уравнение траектории в форме
$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$
Это — уравнение параболы с вершиной в точке $M(0, y_0)$, причем ось Oy служит осью симметрии параболы.

Определим величину отрезка OC. Обозначим абсциссу точки C через X, заметим, что ордината этой точки $y = 0$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, будем иметь:
$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}X^2,$$
откуда
$$X = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. Уравнения некоторых кривых в параметрической форме

Окружность. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом r (рис. 76).

Обозначим через t угол, образованный радиусом, проведенным в некоторую точку $M(x, y)$ окружности, и осью Ox. Тогда координаты любой точки окружности выразятся через параметр t следующим образом:
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

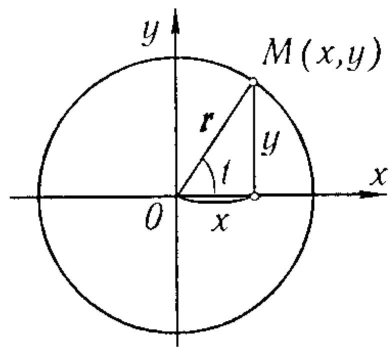


Рис. 76

Это и есть параметрические уравнения окружности. Если мы исключим из этих уравнений параметр t, то получим уравнение окружности, содержащее только x и y. Возводя в квадрат параметрические уравнения и складывая, находим:
$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
или
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Эллипс. Дано уравнение эллипса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$
Положим
$$x = a\cos t. \tag{2'}$$
Подставляя это выражение в уравнение (1) и производя необходимые преобразования, получим:
$$y = b\sin t. \tag{2''}$$

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{2}$$

являются параметрическими уравнениями эллипса.

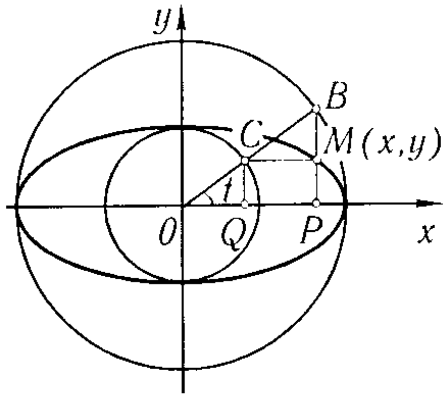


Рис. 77

Выясним геометрический смысл параметра t. Проведем две окружности с центрами в начале координат и радиусами a и b (рис. 77). Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, а B — точка большой окружности, имеющая ту же абсциссу, что и точка M. Обозначим через t угол, образованный радиусом OB с осью Ox. Непосредственно из рисунка следует:

$$x = OP = a\cos t \quad \text{[это — уравнение } (2')],$$
$$CQ = b\sin t.$$

На основании равенства $(2'')$ заключаем, что $CQ = y$, т.е. прямая CM параллельна оси Ox.

Следовательно, в уравнениях (2) t есть угол, образованный радиусом OB и осью абсцисс. Угол t иногда называют ***эксцентрическим углом***.

Циклоида. *Циклоидой* называется кривая, описанная точкой, лежащей на окружности, если эта окружность катится без скольжения по прямой (рис. 78). Предположим, что точка M катящейся окружности в начале движения совпадала с началом координат. Определим координаты точки M после того, как окружность повернулась на угол t. Обозначим через a радиус катящейся окружности.

Как видно из рис. 78,

$$x = OP = OB - PB,$$

но так как окружность катится без скольжения, то

$$OB = \overset{\smile}{MB} = at, \qquad PB = MK = a\sin t.$$

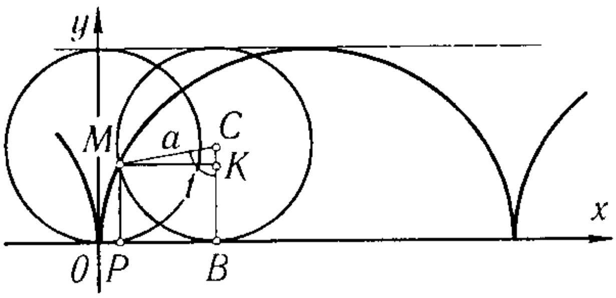


Рис. 78

Следовательно, $x = at - a\sin t = a(t - \sin t)$.

Далее,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{3}$$

являются параметрическими уравнениями циклоиды. При изменении t от 0 до 2π точка M опишет одну арку циклоиды.

Исключим параметр t из последних уравнений и получим непосредственную зависимость x от y. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$ функция $y = a(1 - \cos t)$ имеет обратную:

$$t = \arccos\frac{a - y}{a}.$$

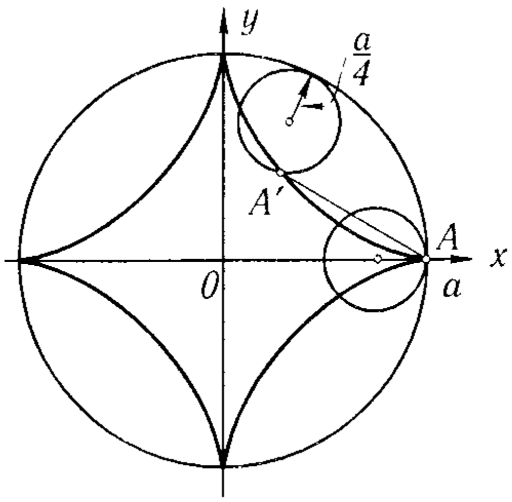


Рис. 79

Подставляя выражение для t в первое из уравнений (3), получим:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \sin\left(\arccos \frac{a-y}{a}\right)$$

или

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi a.$$

Непосредственно из рис. 78 замечаем, что при $\pi a \leqslant x \leqslant 2\pi a$

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right).$$

Заметим, что функция $x = a(t - \sin t)$ имеет обратную, но она не выражается через элементарные функции. Поэтому и функция $y = f(x)$ не выражается через элементарные функции.

Замечание 1. На примере циклоиды легко убедиться, что в некоторых случаях для исследования функций и кривых параметрические уравнения удобнее, чем непосредственная зависимость y от x или x от y.

Астроида. *Астроидой* называется кривая, заданная следующими параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Возводя все члены обоих уравнений в степень $2/3$ и складывая, получим зависимость между x и y:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t),$$

или

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \tag{5}$$

Ниже (см. § 12 гл. V) будет показано, что эта кривая имеет форму, изображенную на рис. 79. Эта кривая может быть получена как траектория некоторой точки окружности радиуса $\frac{a}{4}$, катящейся без скольжения по другой окружности радиуса a (причем меньшая окружность все время остается внутри большей; см. рис. 79).

Замечание 2. Отметим, что уравнения (4) и уравнение (5) определяют не одну функцию $y = f(x)$. Они определяют две непрерывные функции на отрезке $-a \leqslant x \leqslant +a$. Одна из них принимает неотрицательные значения, другая — неположительные.

§ 18. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y = \psi(t), \qquad t = \Phi(x),$$

t — промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\Phi'_x(x). \tag{2}$$

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции следует:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (2), получаем:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{XXI}$$

Выведенная формула дает возможность находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя выражения непосредственной зависимости y от x.

Пример 1. Функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$: 1) при любом значении t; 2) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

1) $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$;

2) $(y'_x)_{t=\pi/4} = -\operatorname{ctg}(\pi/4) = -1$.

Пример 2. Найти угловой коэффициент касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

в произвольной точке $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. Угловой коэффициент касательной в каждой точке равен значению производной y'_x в этой точке, т.е. равен

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Но

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a\sin t.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной к циклоиде в каждой ее точке равен $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right)$, где t — значение параметра, соответствующее этой точке. Но это значит, что угол α наклона касательной к оси x равен $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ (для значений t между $-\pi$ и π)*).

---

*) Действительно, угловой коэффициент равен тангенсу угла α наклона касательной к оси Ox. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right)$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ для тех значений t, для которых $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ лежит между 0 и π.

§ 19. Гиперболические функции

Во многих приложениях математического анализа встречаются комбинации показательных функций вида $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

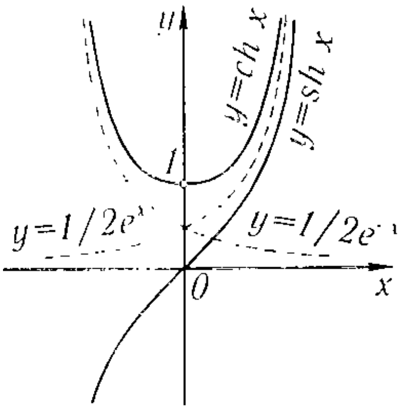


Рис. 80

Эти комбинации рассматривают как новые функции и обозначают так:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Первую из функций (1) называют *гиперболическим синусом*, вторую — *гиперболическим косинусом*. С помощью этих функций можно определить еще две функции $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ — \textit{гиперболический тангенс}} \\ \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — \textit{гиперболический котангенс}} \end{aligned}\right\}. \tag{1'}$$

Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ определены, очевидно, для всех значений x. Функция же $\operatorname{cth} x$ определена всюду, за исключением точки $x = 0$. Графики гиперболических функций представлены на рис. 80, 81, 82.

Из определения функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ [формулы (1)] следуют соотношения, аналогичные соотношениям между соответствующими тригонометрическими функциями:

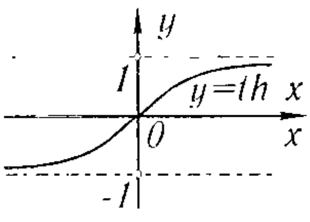


Рис. 81

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \tag{3}$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \tag{3'}$$

Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

Далее, заметив, что

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

получаем:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\,\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\,\frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b).$$

Аналогично доказывается и справедливость соотношения (3′).

Название «гиперболические функции» объясняется тем, что функции $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ играют ту же роль для параметрического представления гиперболы

$$x^2 - y^2 = 1,$$

какую тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ – для параметрического представления окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Действительно, исключая параметр t из уравнений

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t,$$

получим:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

или $x^2 + y^2 = 1$ (уравнение окружности). Аналогично уравнения

$$x = \operatorname{ch} t,$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

являются параметрическими уравнениями гиперболы.

Действительно, возводя почленно в квадрат эти уравнения и вычитая из первого второе, получим:

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t.$$

Так как выражение в правой части на основании формулы (2) равно единице, то, следовательно,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

а это и есть уравнение гиперболы.

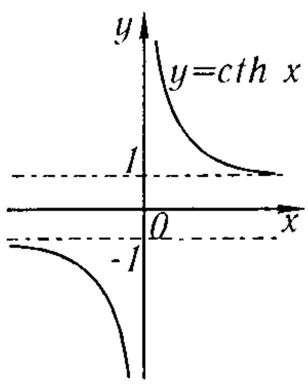


Рис. 82

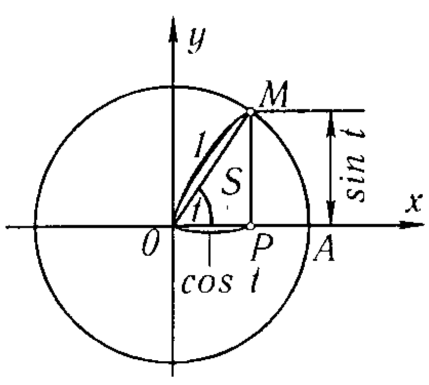


Рис. 83

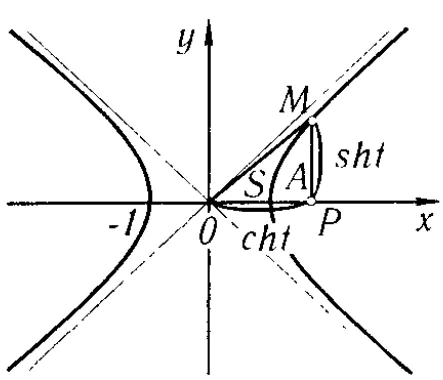


Рис. 84

Рассмотрим окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 83). В уравнениях $x = \cos t$, $y = \sin t$ параметр t численно равен центральному углу AOM или удвоенной площади S сектора AOM, так как $t = 2S$.

Отметим без доказательства, что в параметрических уравнениях гиперболы

$$x = \operatorname{ch} t,$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

параметр t также численно равен удвоенной площади «гиперболического сектора» AOM (рис. 84).

Производные гиперболических функций определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ &(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned}\right\}, \tag{XXII}$$

которые вытекают из самого определения гиперболических функций; например, для функции $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ имеем:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

§ 20. Дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a, b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к определенному числу $f'(x)$ и, следовательно, отличается от производной $f'(x)$ на величину бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Умножая все члены последнего равенства на Δx, получим:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{1}$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и переменном $\Delta x \to 0$ произведение $f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая величина первого порядка относительно Δx. Произведение же $\alpha\Delta x$ есть всегда величина бесконечно малая высшего порядка относительно Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Таким образом, приращение Δy функции состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое есть [при $f'(x) \neq 0$] так называемая ***главная часть*** приращения, ***линейная*** относительно Δx. Произведение $f'(x)\Delta x$ называют ***дифференциалом*** функции и обозначают через dy или $df(x)$.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x, то произведение производной $f'(x)$ на приращение Δx аргумента называется *дифференциалом* функции и обозначается символом dy:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Найдем дифференциал функции $y = x$; в этом случае

$$y' = (x)' = 1,$$

и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$ или $dx = \Delta x$. Таким образом, ***дифференциал*** dx ***независимого переменного*** x ***совпадает с его приращением*** Δx. Равенство $dx = \Delta x$ можно было бы рассматривать также как определение дифференциала независимого переменного, и тогда рассмотренный пример показывал бы, что это не противоречит определению дифференциала функции. В любом случае формулу (2) мы можем записать так:

$$dy = f'(x)dx.$$

Но из этого соотношения следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, ***производную*** $f'(x)$ ***можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.***

Вернемся к выражению (1), которое с учетом (2) перепишем так:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{3}$$

Таким образом, приращение функции отличается от дифференциала функции на величину бесконечно малую высшего порядка относительно Δx. Если $f'(x) \neq 0$, то $\alpha\Delta x$ является бесконечно малой высшего порядка и относительно dy и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(y)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Поэтому в приближенных вычислениях иногда пользуются приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy, \tag{4}$$

или в развернутом виде

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \tag{5}$$

что сокращает вычисления.

Пример 1. Найти дифференциал dy и приращение Δy функции $y = x^2$:
1) при произвольных значениях x и Δx;
2) при $x = 20$, $\Delta x = 0,1$.

Решение. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,

$$dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x.$$

2) Если $x = 20$, $\Delta x = 0,1$, то $\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01$,

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4,00.$$

Погрешность при замене Δy на dy равна 0,01. Во многих случаях ее можно считать малой по сравнению с $\Delta y = 4,01$ и ею пренебречь.

Рассмотренная задача наглядно иллюстрируется рис. 85.

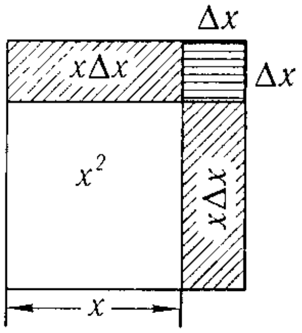


Рис. 85

В приближенных вычислениях пользуются также приближенным равенством, которое получается из (5),

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$. В этом случае приближенное равенство (6) примет вид

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x\Delta x. \tag{7}$$

Вычислим приближенное значение $\sin 46°$. Положим $x = \frac{\pi}{4}$ (что соответствует углу в 45°), $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (соответствует углу в 1°), $x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$. Подставляя в (7), будем иметь:

$$\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$$

или

$$\sin 46° \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0175 = 0,7191.$$

Пример 3. Если в формуле (7) положим $x = 0$, $\Delta x = \alpha$, то получим следующее приближенное равенство:

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

Пример 4. Если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то по формуле (6) получаем следующее приближенное равенство:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

при $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Пример 5. Если $f(x) = \sqrt{x}$, то формула (6) дает:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Полагая $x = 1$, $\Delta x = \alpha$, получаем приближенное равенство:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha.$$

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как, умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциалов. Так, например:

Дифференциал суммы двух дифференцируемых функций u и v равен сумме дифференциалов этих функций:

$$d(u+v) = du + dv.$$

Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций u и v определяется формулой

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Докажем, например, последнюю формулу. Если $y = uv$, то

$$dy = y'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx,$$

но

$$v'dx = dv, \qquad u'dx = du,$$

поэтому

$$dy = udv + vdu.$$

Аналогично доказываются и другие формулы, например формула, определяющая дифференциал частного:

$$\text{если} \quad y = \frac{u}{v}, \quad \text{то} \quad dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Решим несколько примеров на вычисление дифференциала функции.

Пример 6. $y = \operatorname{tg}^2 x$, $dy = 2\operatorname{tg} x \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$.

Пример 7. $y = \sqrt{1 + \ln x}$, $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \dfrac{1}{x} dx$.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x), \quad \text{или} \quad y = f[\varphi(x)].$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\varphi'(x),$$

следовательно,

$$dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx;$$

но $\varphi'(x)dx = du$, поэтому

$$dy = f'(u)du.$$

Таким образом, *дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной.* Иначе говоря, *форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.* Это важное свойство дифференциала, называемое *инвариантностью формы дифференциала*, будет широко использовано в дальнейшем.

Пример 8. Дана функция $y = \sin\sqrt{x}$. Найти dy.

Решение. Представив данную функцию как сложную:

$$y = \sin u, \qquad u = \sqrt{x},$$

находим:

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

но $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$, поэтому можно написать:

$$dy = \cos u\, du \quad \text{или} \quad dy = \cos(\sqrt{x})d(\sqrt{x}).$$

§ 21. Геометрическое значение дифференциала

Рассмотрим функцию

$$y = f(x)$$

и соответствующую ей кривую (рис. 86).

Возьмем на кривой $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$, проведем касательную к кривой в этой точке и обозначим через α угол*), который касательная образует с положительным направлением оси Ox. Дадим независимому переменному приращение Δx; тогда функция получит приращение $\Delta y = NM_1$. Значениям $x + \Delta x, y + \Delta y$ на кривой $y = f(x)$ будет соответствовать точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Из треугольника MNT находим:

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha;$$

так как

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \qquad MN = \Delta x,$$

то

$$NT = f'(x)\Delta x;$$

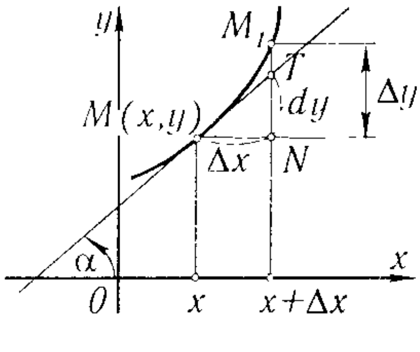


Рис. 86

но согласно определению дифференциала $f'(x)\Delta x = dy$. Таким образом,

$$NT = dy.$$

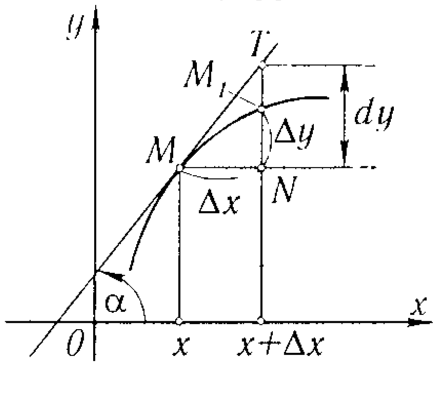


Рис. 87

Последнее равенство означает, что *дифференциал функции $f(x)$, соответствующий данным значениям x и Δx, равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке x.*

Из рис. 86 непосредственно следует, что $M_1T = \Delta y - dy$. По доказанному ранее $\frac{M_1T}{NT} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Не следует думать, что всегда Δy больше dy. Так, на рис. 87

$$\Delta y = M_1N, \ dy = NT, \quad \text{причем} \quad \Delta y < dy.$$

---

*) Предполагая, что функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x, получаем $\alpha \neq \pi/2$.

§ 22. Производные различных порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a, b]$. Значения производной $f'(x)$, вообще говоря, зависят от x, т.е. ***производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x***. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется *производной второго порядка* или *второй производной* от первоначальной функции и обозначается символом y'' или $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Так, например, если $y = x^5$, то

$$y' = 5x^4, \qquad y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается через y''' или $f'''(x)$.

Вообще, *производной n-го порядка от функции* $f(x)$ называется производная (первого порядка) от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(Порядок производной берется в скобки для того, чтобы его нельзя было принять за показатель степени.)

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, $y^{\mathrm{VI}}, \ldots$ В таком случае порядок производной можно писать без скобок. Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{\mathrm{IV}} = y^{(4)} = 120x$, $y^{\mathrm{V}} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \cdots = 0$.

Пример 1. Дана функция $y = e^{kx}$ ($k = \mathrm{const}$). Найти выражение ее производной любого порядка n.

Решение. $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

Пример 2. $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично выводятся формулы для производных любого порядка и от некоторых других элементарных функций. Читатель сам сможет найти формулы для производных n-го порядка от функций $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

На случай производных любого порядка легко обобщаются правила, указанные в теоремах 2 и 3 § 7.

В данном случае имеют место очевидные формулы:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Выведем формулу (так называемую *формулу Лейбница*), дающую возможность вычислить производную n-го порядка от произведения двух функций и $u(x)v(x)$. Для того чтобы вывести эту формулу, мы найдем сначала несколько производных, а затем установим общий закон, пригодный для вычисления производной любого порядка:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
y' &= u'v + v'u,\\
y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',\\
y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =\\
&\qquad\qquad = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',\\
y^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{IV}}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{\mathrm{IV}}.
\end{aligned}$$

Закон составления производных сохраняется для производных любого порядка и заключается, очевидно, в следующем.

Надо выражение $(u+v)^n$ разложить по формуле бинома Ньютона и в полученном разложении заменить показатели степеней для u и v указателями порядка производных, причем нулевые степени $(u^0 = v^0)$, входящие в крайние члены разложения, надо заменить самими функциями (т.е. «производными нулевого порядка»):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = (u)^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}n^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Это и есть *формула Лейбница*.

Строгое доказательство этой формулы можно было бы провести методом полной математической индукции (т.е. доказать, что из справедливости этой формулы для порядка n следует справедливость ее для порядка $n + 1$).

Пример 3. $y = e^{ax}x^2$. Найти производную $y^{(n)}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
u &= e^{ax}, & v &= x^2,\\
u' &= ae^{ax}, & v' &= 2x,\\
u'' &= a^2e^{ax}, & v'' &= 2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
u^{(n)} &= a^ne^{ax}, & v''' &= v^{\mathrm{IV}} = \dots = 0,
\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}e^{ax} \cdot 2,$$

или

$$y^{(n)} = e^{ax}[a^nx^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}].$$

§ 23. Дифференциалы различных порядков

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, где x — независимое переменное. Дифференциал этой функции

$$dy = f'(x)dx$$

есть некоторая функция от x, но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель (dx) является приращением независимого переменного x и от значения этого переменного не зависит. Так как dy есть функция от x, то мы имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* этой функции и обозначается через d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Найдем выражение второго дифференциала. В силу общего определения дифференциала имеем:

$$d^2y = [f'(x)dx]'dx.$$

Так как dx от x не зависит, то dx при дифференцировании выносится за знак производной, и мы получаем:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки; так, например, вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2, подразумевая под этим квадрат выражения dx; вместо $(dx)^3$ пишут dx^3 и т.д.

Третьим дифференциалом или *дифференциалом третьего порядка* функции называется дифференциал от ее второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Вообще, *дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]'dx,$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{1}$$

Пользуясь дифференциалами различных порядков, производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{d^2x}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{2}$$

Замечание. Равенства (1) и (2) (при $n > 1$) верны только для того случая, когда x является независимым переменным. Действительно, пусть имеем сложную функцию

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x). \tag{3}$$

Мы видели, что дифференциал первого порядка имеет инвариантную форму, независимо от того, будет ли u независимой переменной или функцией от x

$$dy = F'_u(u)du. \tag{4}$$

Второй дифференциал и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Действительно, на основании (3) и (4) получаем

$$d^2y = d(F'_u(u)du).$$

Но здесь $du = \varphi'(x)dx$ зависит от x, и потому мы получаем

$$d^2y = d(F'_u(u))du + F'_u(u)d(du)$$

или

$$d^2y = F''_{uu}(u)(du)^2 + F'_u(u)d^2u, \quad \text{где} \quad d^2u = \varphi''(x)(dx)^2. \tag{5}$$

Аналогичным образом находятся d^3y и т.д.

Пример 1. Найти dy и d^2y сложной функции

$$y = \sin u, \qquad u = \sqrt{x}.$$

Решение.

$$dy = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \cos u du.$$

Далее, по формуле (5) получаем

$$d^2y = -\sin u(du)^2 + \cos u d^2u = -\sin u(du)^2 + \cos u \cdot u''(dx)^2 =$$
$$= -\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2(dx)^2 + \cos u\left(-\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2.$$

§ 24. Производные различных порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически

1. Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от ***неявных функций***.

Пусть неявная функция y от x определяется равенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Дифференцируем по x все члены этого равенства, помня, что y есть функция от x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\,\frac{dy}{dx} = 0;$$

отсюда находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}. \tag{2}$$

Последнее равенство снова дифференцируем по x (имея в виду, что y есть функция от x):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Подставляем сюда вместо производной $\frac{dy}{dx}$ ее выражение из равенства (2), получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{y + x\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}}{y^2},$$

или после упрощения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

Из уравнения (1) следует, что

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

поэтому вторую производную можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, найдем $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т.д.

2. Рассмотрим теперь задачу о нахождении производных высших порядков от ***функции, заданной параметрически.***

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

причем функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$.

В § 18 было доказано, что в этом случае производная $\frac{dy}{dx}$ определяется равенством

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{4}$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$ дифференцируем по x равенство (4), имея в виду, что t есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \tag{5}$$

но

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (5), получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Последней формуле можно придать следующий, более компактный вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Аналогичным образом можно найти производные $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т.д.

Пример. Функция y от x задана параметрически:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Найти производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\frac{b}{a^2}\,\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. Механическое значение второй производной

Путь s, пройденный поступательно движушимся телом, в зависимости от времени t выражается формулой

$$s = f(t). \tag{1}$$

Как уже известно (см. § 1 гл. III), скорость v тела в данный момент равна первой производной от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Пусть в некоторый момент t скорость тела была равна v. Если движение не является равномерным, то за промежуток времени Δt, истекший с момента t, скорость изменится и получит приращение Δv.

Средним ускорением за время Δt называется отношение приращения скорости Δv к приращению времени:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Ускорением в данный момент называется предел отношения приращения скорости к приращению времени, когда последнее стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

иначе говоря, ускорение (в данный момент) равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

но так как $v = \frac{ds}{dt}$, то, следовательно,

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

т.е. *ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.* Исходя из равенства (1), получаем:

$$a = f''(t).$$

Пример. Найти скорость v и ускорение a свободно падающего тела, если зависимость расстояния s от времени t дается формулой

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \tag{3}$$

где $g = 9,8$ *м / сек*^{2} — ускорение земного тяготения, а $s_0 = s_{t=0}$ — значение s при $t = 0$.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0; \tag{4}$$

из этой формулы следует, что $v_0 = (v)_{t=0}$.

Дифференцируя еще раз, находим:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

Заметим, что, обратно, если ускорение некоторого движения постоянно и равно g, то скорость выражается равенством (4), а расстояние — равенством (3) при условии, что $(v)_{t=0} = v_0$ и $(s)_{t=0} = s_0$.

§ 26. Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали

Рассмотрим кривую, уравнение которой есть

$$y = f(x).$$

Возьмем на этой кривой точку $M(x_1, y_1)$ (рис. 88) и напишем уравнение касательной к данной кривой в точке M, предполагая, что эта касательная не параллельна оси ординат.

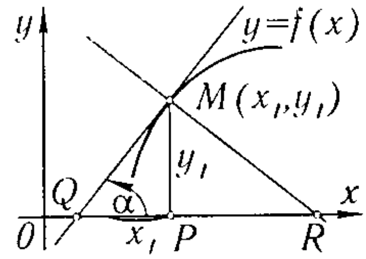


Рис. 88

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для касательной (см. § 3)

$$k = f'(x_1),$$

поэтому ***уравнение касательной*** имеет вид

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

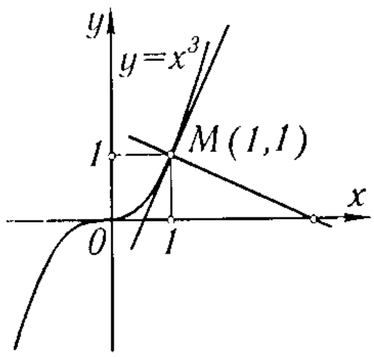


Рис. 89

Наряду с касательной к кривой в данной точке очень часто приходится рассматривать нормаль.

Определение. *Нормалью* к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярную к касательной в этой точке.

Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент k_n связан с угловым коэффициентом k_t касательной равенством

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

т.е.

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Следовательно, ***уравнение нормали*** к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точке $M(1,1)$.

Решение. Так как $y' = 3x^2$, то угловой коэффициент касательной равен $(y')_{x=1} = 3$.

Следовательно, уравнение касательной:

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ или } y = 3x - 2.$$

Уравнение нормали:

$$y - 1 = -(x - 1)/3,$$

или

$$y = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{4}{3}$$

(см. рис. 89).

Длина T отрезка QM (рис. 88) касательной, заключенного между точкой касания и осью Ox, называется *длиной касательной*. Проекция этого отрезка на ось Ox, т.е. отрезок QP, называется *подкасательной*; длина подкасательной обозначается через S_T. Длина N отрезка MR называется *длиной нормали*, а проекция RP отрезка RM на ось Ox называется *поднормалью*; длина поднормали обозначается через S_N.

Найдем величины T, S_T, N, S_N для кривой $y = f(x)$ и точки $M(x_1, y_1)$.

Из рис. 88 видно, что

$$QP = |y_1 \operatorname{ctg}\alpha| = \left|\frac{y_1}{\operatorname{tg}\alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

поэтому

$$S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|, \qquad T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{{y_1'}^2}} = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{{y_1'}^2 + 1}\right|.$$

Далее, из этого же рисунка ясно, что

$$PR = |y_1 \operatorname{tg}\alpha| = |y_1 y_1'|,$$

поэтому

$$S_N = |y_1 y_1'|, \qquad N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = \left|y_1\sqrt{1 + {y_1'}^2}\right|.$$

Эти формулы выведены в предположении, что $y_1 > 1$, $y_1' > 0$. Однако они сохраняются и в общем случае.

Пример 2. Найти уравнения касательной и нормали, длины касательной и подкасательной, длины нормали и поднормали для эллипса:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \tag{1}$$

в точке $M(x_1, y_1)$, для которой $t = \pi/4$ (рис. 90).

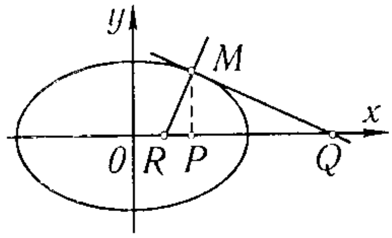


Рис. 90

Решение. Из уравнений (1) находим:

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/4} = -\frac{b}{a}.$$

Находим координаты точки касания M:

$$x_1 = (x)_{t=\pi/4} = a/\sqrt{2}, \qquad y_1 = (y)_{t=\pi/4} = b/\sqrt{2}.$$

Уравнение касательной:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{или} \quad bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{или} \quad (ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Длины подкасательной и поднормали:

$$S_T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad S_N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Длины касательной и нормали:

$$T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}, \quad N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right| = \frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

§ 27. Геометрическое значение производной радиус-вектора по полярному углу

Пусть имеем уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho = f(\theta). \tag{1}$$

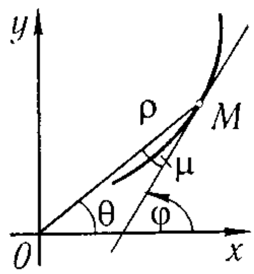


Рис. 91

Напишем формулы перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым:

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta.$$

Подставляя сюда вместо ρ его выражение через θ из уравнения (1), будем иметь:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta. \tag{2}$$

Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями данной кривой, причем параметром является полярный угол θ (рис. 91).

Если через φ обозначим угол, составленный касательной к кривой в некоторой точке $M(\rho,\theta)$ с положительным направлением оси абсцисс, то будем иметь:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}, \text{ или } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta}. \tag{3}$$

Обозначим через μ угол между направлением радиус-вектора и касательной. Очевидно, что $\mu = \varphi - \theta$,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Подставляя сюда вместо $\operatorname{tg}\varphi$ его выражение (3) и производя преобразование, получим:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta - (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\sin\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\cos\theta + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\sin\theta} = \frac{\rho}{\rho'},$$

или

$$\rho'_\theta = \rho\operatorname{ctg}\mu. \tag{4}$$

Таким образом, производная радиус-вектора по полярному углу равна длине радиус-вектора, умноженной на котангенс угла между радиус-вектором и касательной к кривой в данной точке.

Пример. Показать, что касательная к логарифмической спирали $\rho = e^{a\theta}$ пересекается с радиус-вектором под постоянным углом.

Решение. Из уравнения спирали находим: $\rho' = ae^{a\theta}$. На основании формулы (4) получаем:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ т.е. } \mu = \operatorname{arcctg} a = \text{const}.$$

Упражнения к главе III

Найти производные функций, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y = x^3$. *Отв.* $3x^2$. **2.** $y = 1/x$. *Отв.* $-1/x^2$. **3.** $y = \sqrt{x}$. *Отв.* $1/(2\sqrt{x})$. **4.** $y = 1/\sqrt{x}$. *Отв.* $-1/(2x\sqrt{x})$. **5.** $y = \sin^2 x$. *Отв.* $2\sin x\cos x$. **6.** $y = 2x^2 - x$. *Отв.* $4x - 1$.

Определить тангенсы углов наклона касательных к кривым:

7. $y = x^3$. а) При $x = 1$. *Отв.* 3. б) При $x = -1$. *Отв.* 3; сделать чертеж. **8.** $y = 1/x$. а) При $x = 1/2$. *Отв.* -4. б) При $x = 1$. *Отв.* -1; сделать чертеж. **9.** $y = \sqrt{x}$ при $x = 2$. *Отв.* $\sqrt{2}/4$.

Найти производные функций:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. *Отв.* $y' = 4x^3 + 6x$. **11.** $y = 6x^3 - x^2$. *Отв.* $y' = 18x^2 - 2x$. **12.** $y = \dfrac{x^5}{a+b} - \dfrac{x^2}{a-b} - x$. *Отв.* $y' = \dfrac{5x^4}{a+b} - \dfrac{2x}{a-b} - 1$. **13.** $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. *Отв.* $y' = \dfrac{3x^2 - 2x}{5}$. **14.** $y = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b} + c$. *Отв.* $y' = 6ax^2 - \dfrac{2x}{b}$. **15.** $y = 6x^{7/2} + 4x^{5/2} + 2x$. *Отв.* $y' = 21x^{5/2} + 10x^{3/2} + 2$. **16.** $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}$. **17.** $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{5/2}}$. **18.**

$y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{m}{x} + \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{n^2}{x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{m} - \dfrac{m}{x^2} + \dfrac{2x}{n^2} - \dfrac{2n^2}{x^3}$. **19.** $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$. *Отв.* $y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **20.** $y = \dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{b}{x\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{5}{3}ax^{2/3} - \dfrac{3}{2}bx^{-5/2} + \dfrac{1}{6}x^{-7/6}$. **21.** $y = (1+4x^3)(1+2x^2)$. *Отв.* $y' = 4x(1+3x+10x^3)$. **22.** $y = x(2x-1)(3x+2)$. *Отв.* $y' = 2(9x^2+x-1)$. **23.** $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$. *Отв.* $y' = 6x^2-26x+12$. **24.** $y = \dfrac{2x^4}{b^2-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. **25.** $y = \dfrac{a-x}{a+x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{2a}{(a+x)^2}$. **26.** $f(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$. *Отв.* $f'(t) = \dfrac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. **27.** $f(s) = \dfrac{(s+4)^2}{s+3}$. *Отв.* $f'(s) = \dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. **28.** $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-x-2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^4-2x^3-6x^2-4x+2}{(x^2-x-2)^2}$. **29.** $y = \dfrac{x^p}{x^m-a^m}$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^{p-1}[(p-m)x^m-pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. **30.** $y = (2x^2-3)^2$. *Отв.* $y' = 8x(2x^2-3)$. **31.** $y = (x^2+a^2)^5$. *Отв.* $y = 10x(x^2+a^2)^4$. **32.** $y = \sqrt{x^2+a^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **33.** $y = (a+x)\sqrt{a-x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. **34.** $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. **35.** $y = \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **36.** $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. **37.** $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. *Отв.* $y' = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$. **38.** $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$. **39.** $y = \sin^2 x$. *Отв.* $y' = \sin 2x$. **40.** $y = 2\sin x + \cos 3x$. *Отв.* $y' = 2\cos x - 3\sin 3x$. **41.** $y = \operatorname{tg}(ax+b)$. *Отв.* $y' = \dfrac{a}{\cos^2(ax+b)}$. **42.** $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{1+\cos x}$. **43.** $y = \sin 2x \cos 3x$. *Отв.* $y' = 2\cos 2x\cos 3x - 3\sin 2x \sin 3x$. **44.** $y = \operatorname{ctg}^2 5x$. *Отв.* $y' = -10\operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{cosec}^2 5x$. **45.** $y = t\sin t + \cos t$. *Отв.* $y' = t\cos t$. **46.** $y = \sin^3 t \cos t$. *Отв.* $y' = \sin^2 t(3\cos^2 t - \sin^2 t)$. **47.** $y = a\sqrt{\cos 2x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{a\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **48.** $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$. *Отв.* $r'_\varphi = a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$. **49.** $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{2(x\cos x + \sin x)}{x^2\sin^2 x}$. **50.** $y = a\sin^4\dfrac{x}{2}$. *Отв.* $y' = 2a\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$. **51.** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. *Отв.* $y' = \operatorname{tg} x \sec^2 x$. **52.** $y = \ln\cos x$. *Отв.* $y' = -\operatorname{tg} x$. **53.** $y = \ln\operatorname{tg} x$. *Отв.* $y' = 2/\sin 2x$. **54.** $y = \ln\sin^2 x$. *Отв.* $y' = 2\operatorname{ctg} x$. **55.** $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$. *Отв.* $y' = \sin x + \cos x$. **56.** $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\cos x}$. **57.** $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\cos x}$. **58.** $y = \sin(x+a)\cos(x+a)$. *Отв.* $y' = \cos 2(x+a)$. **59.** $f(x) = \sin(\ln x)$. *Отв.* $f'(x) = \cos(\ln x)/x$. **60.** $f(x) = \operatorname{tg}(\ln x)$. *Отв.* $f'(x) = \sec^2(\ln x)/x$. **61.** $f(x) = \sin(\cos x)$. *Отв.* $f'(x) = -\sin x\cos(\cos x)$. **62.** $r = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi - \operatorname{tg}\varphi + \varphi$. *Отв.* $\dfrac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg}^4\varphi$. **63.** $f(x) = (x\operatorname{ctg} x)^2$. *Отв.* $f'(x) = 2x\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x - x\operatorname{cosec}^2 x)$. **64.** $y = \ln(ax+b)$. *Отв.* $y' = a/(ax+b)$. **65.** $y = \log_a(x^2+1)$. *Отв.* $y' = 2x/((x^2+1)\ln a)$. **66.** $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2}{1-x^2}$. **67.** $y = \log_3(x^2-\sin x)$. *Отв.*

$y' = \dfrac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x)\ln 3}$. **68.** $y = \ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4x}{1-x^4}$. **69.** $y = \ln(x^2+x)$. *Отв.* $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$. **70.** $y = \ln(x^3 - 2x + 5)$. *Отв.* $y' = \dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$. **71.** $y = x\ln x$. *Отв.* $y' = \ln x + 1$. **72.** $y = \ln^3 x$. *Отв.* $y' = (3\ln^2 x)/x$. **73.** $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. *Отв.* $y' = 1/\sqrt{1+x^2}$. **74.** $y = \ln(\ln x)$. *Отв.* $y' = 1/(x\ln x)$. **75.** $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. *Отв.* $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. **76.** $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. *Отв.* $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. **77.** $y = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. **78.** $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. **79.** $y = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\sin^3 x}$. **80.** $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$. **81.** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$. *Отв.* $y' = \operatorname{tg}^3 x$. **82.** $y = e^{ax}$. *Отв.* $y' = ae^{ax}$. **83.** $y = e^{4x+5}$. *Отв.* $y' = 4e^{4x+5}$. **84.** $y = a^{x^2}$. *Отв.* $y' = 2xa^{x^2}\ln a$. **85.** $y = 7^{x^2+2x}$. *Отв.* $y' = 2(x+1)7^{x^2+2x}\ln 7$. **86.** $y = c^{a^2-x^2}$. *Отв.* $y' = -2xc^{a^2-x^2}\ln c$. **87.** $y = ae^{\sqrt{x}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. **88.** $r = a^\theta$. *Отв.* $r' = a^\theta \ln a$. **89.** $r = a^{\ln\theta}$. *Отв.* $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{a^{\ln\theta}\ln a}{\theta}$. **90.** $y = e^x(1-x^2)$. *Отв.* $y' = e^x(1-2x-x^2)$. **91.** $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. **92.** $y = \ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{1+e^x}$. **93.** $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **94.** $y = e^{\sin x}$. *Отв.* $y' = e^{\sin x}\cos x$. **95.** $y = a^{\operatorname{tg} nx}$. *Отв.* $y' = na^{\operatorname{tg} nx}\sec^2 nx \ln a$. **96.** $y = e^{\cos x}\sin x$. *Отв.* $y' = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$. **97.** $y = e^x \ln\sin x$. *Отв.* $y' = e^x(\operatorname{ctg} x + \ln\sin x)$. **98.** $y = x^n e^{\sin x}$. *Отв.* $y' = x^{n-1}e^{\sin x}(n + x\cos x)$. **99.** $y = x^x$. *Отв.* $y' = x^x(\ln x + 1)$. **100.** $y = x^{\frac{1}{x}}$. *Отв.* $y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$. **101.** $y = x^{\ln x}$. *Отв.* $y' = x^{\ln x - 1}\ln x^2$. **102.** $y = e^{x^x}$. *Отв.* $y' = e^{x^x}(1+\ln x)x^x$. **103.** $y = (x/n)^{nx}$. *Отв.* $y' = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1 + \ln\dfrac{x}{n}\right)$. **104.** $y = x^{\sin x}$. *Отв.* $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x\cos x\right)$. **105.** $y = (\sin x)^x$. *Отв.* $y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$. **106.** $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. *Отв.* $y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x\ln\sin x)$. **107.** $y = \operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}\,\dfrac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$. **108.** $y = \sin\sqrt{1-2^x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{\cos\sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}}2^x\ln 2$. **109.** $y = 10^{x\operatorname{tg} x}$. *Отв.* $y' = 10^{x\operatorname{tg} x}\ln 10\left(\operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Найти производные функций, предварительно логарифмируя эти функции:

110. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$. **111.** $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{4(x-2)} - \dfrac{2}{5(x-3)}\right)$. **112.** $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$. **113.** $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{-161x^2 + 480x - 271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$. **114.**

$y = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$. **115.** $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. *Отв.* $y' = 5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$. **116.** $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **117.** $y = (\arcsin x)^2$. *Отв.* $y' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **118.** $y = \operatorname{arctg}(x^2+1)$. *Отв.* $y' = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$. **119.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2}{1+x^2}$. **120.** $y = \arccos(x^2)$. *Отв.* $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **121.** $y = \dfrac{\arccos x}{x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **122.** $y = \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **123.** $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}$. *Отв.* $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$. **124.** $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin\dfrac{x}{a}$. *Отв.* $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **125.** $u = \operatorname{arctg}\dfrac{v+a}{1-av}$. *Отв.* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1}{1+v^2}$. **126.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$. **127.** $y = x\arcsin x$. *Отв.* $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **128.** $f(x) = \arccos(\ln x)$. *Отв.* $f'(x) = -1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$. **129.** $f(x) = \arcsin\sqrt{\sin x}$. *Отв.* $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$. **130.** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0 \leqslant x < \pi)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{2}$. **131.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$. **132.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$. **133.** $y = x^{\arcsin x}$. *Отв.* $y' = x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\arcsin x}{x} + \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

134. $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} +1 & \text{в 1-й и 4-й четвертях,} \\ -1 & \text{во 2-й и 3-й четвертях} \end{cases}$.

135. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sin x}{3+5\cos x}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4}{3+5\cos x}$. **136.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{x} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{2a^3}{x^4-a^4}$. **137.** $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^2}{1-x^4}$. **138.** $y = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$. *Отв.* $y' = \dfrac{x^5+1}{x^6+x^4}$. **139.** $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{x^3+1}$. **140.** $y = \ln\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. *Отв.* $y' = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$. **141.** $y = \arccos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$.

Дифференцирование неявных функций

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если: **142.** $y^2 = 4px$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2p}{y}$. **143.** $x^2+y^2 = a^2$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. **144.** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **145.** $y^3 - 3y + 2ax = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{3(1-y^2)}$. **146.** $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. **147.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. **148.** $y^2 - 2xy + b^2 = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-x}$. **149.** $x^3+y^3-3axy = 0$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$. **150.** $y = \cos(x+y)$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. **151.** $\cos(xy) = x$. *Отв.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных параметрически:

152. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. **153.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **154.** $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **155.** $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$. *Отв.* $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$. **156.** $u = 2\ln\operatorname{ctg} s$, $v = \operatorname{tg} s + \operatorname{ctg} s$. Показать, что $\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} 2s$.

Найти тангенсы углов наклона касательных к кривым:

157. $x = \cos t$, $y = \sin t$ в точке $x = -1/2$, $y = \sqrt{3}/2$. Сделать чертеж. *Отв.* $1/\sqrt{3}$. **158.** $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ в точке $x = 1$, $y = -\sqrt{3}/2$. Сделать чертеж. *Отв.* $\sqrt{3}/6$. **159.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ при $t = \pi/2$. Сделать чертеж. *Отв.* 1. **160.** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при $t = \pi/4$. Сделать чертеж. *Отв.* -1. **161.** Тело, брошенное под углом α к горизонту, в безвоздушном пространстве описало под действием силы тяжести кривую (параболу), уравнения которой: $x = (v_0\cos\alpha)t$, $y = (v_0\sin\alpha)t - gt^2/2$ ($g = 9,8$ *м/сек*^{2}). Зная, что $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50$ *м/сек*, определить направление движения при: 1) $t = 2$ *сек*; 2) $t = 7$ *сек*. Сделать чертеж. *Отв.* 1) $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0,948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi_2 = -1,012$, $\varphi_2 = +134,3^\circ$.

Найти дифференциалы следующих функций:

162. $y = (a^2 - x^2)^5$. *Отв.* $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$. **163.** $y = \sqrt{1+x^2}$. *Отв.* $dy = x dx/\sqrt{1+x^2}$. **164.** $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. *Отв.* $dy = \sec^4 x dx$. **165.** $y = \frac{x\ln x}{1-x} + \ln(1-x)$. *Отв.* $dy = \frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

Вычислить приращения и дифференциалы функций:

166. $y = 2x^2 - x$ при $x = 1$, $\Delta x = 0,01$. *Отв.* $\Delta y = 0,0302$, $dy = 0,03$. **167.** Дано $y = x^3 + 2x$. Найти Δy и dy при $x = -1$, $\Delta x = 0,02$. *Отв.* $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$. **168.** Дано $y = \sin x$. Найти dy при $x = \pi/3$, $\Delta x = \pi/18$. *Отв.* $dy = \pi/36 = 0,0873$. **169.** Зная, что $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = 0,866025$; $\cos 60^\circ = 1/2$, найти приближенные значения $\sin 60^\circ 3'$ и $\sin 60^\circ 18'$. Результаты сопоставить с данными таблицы. *Отв.* $\sin 60^\circ 3' \approx 0,866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0,868643$. **170.** Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 45^\circ 4' 30''$. *Отв.* 1,00262. **171.** Зная, что $\log_{10} 200 = 2,30103$, найти приближенное значение $\log_{10} 200,2$. *Отв.* 2,30146.

Производные различных порядков.

172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Найти y''. *Отв.* $18x - 4$. **173.** $y = \sqrt[5]{x^3}$. Найти y'''. *Отв.* $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. **174.** $y = x^6$. Найти $y^{(6)}$. *Отв.* 6!. **175.** $y = \frac{C}{x^n}$. Найти y''. *Отв.* $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. **176.** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Найти y''. *Отв.* $-\frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$. **177.** $y = 2\sqrt{x}$. Найти $y^{(4)}$. *Отв.* $-15/(8\sqrt{x^7})$. **178.** $y = ax^2 + bx + c$. Найти y'''. *Отв.* 0. **179.** $f(x) = \ln(x+1)$. Найти $f^{IV}(x)$. *Отв.* $-6/(x+1)^4$. **180.** $y = \operatorname{tg} x$. Найти y'''. *Отв.* $6\sec^4 x - 4\sec^2 x$. **181.** $y = \ln\sin x$. Найти y'''. *Отв.* $2\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec}^2 x$. **182.** $f(x) = \sqrt{\sec 2x}$. Найти $f''(x)$. *Отв.* $f''(x) = 3[f(x)]^5 - f(x)$. **183.** $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$. Найти $f^{IV}(x)$. *Отв.* $\frac{4!}{(1-x)^5}$. **184.** $p = (q^2 + a^2)\operatorname{arctg}\frac{q}{a}$. Найти $\frac{d^3p}{dq^3}$. *Отв.* $\frac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$. **185.** $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $\frac{y}{a^2}$. **186.** $y = \cos ax$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $a^n\cos(ax + n\pi/2)$. **187.** $y = a^x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $(\ln a)^n a^x$. **188.** $y = \ln(1+x)$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $2(-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. **190.** $y = e^x x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $e^x(x+n)$. **191.** $y = x^{n-1}\ln x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $\dfrac{(n-1)!}{x}$. **192.** $y = \sin^2 x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $-2^{n-1}\cos(2x+\pi n/2)$. **193.** $y = x\sin x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $x\sin(x+\pi n/2) - n\cos(x+\pi n/2)$. **194.** Если $y = e^x \sin x$, то доказать, что $y'' - 2y' + 2y = 0$. **195.** $y^2 = 4ax$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{4a^2}{y^3}$. **196.** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ и $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. *Отв.* $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$. **197.** $x^2 + y^2 = r^2$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{r^2}{y^3}$. **198.** $y^2 - 2xy = 0$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. *Отв.* 0. **199.** $\rho = \operatorname{tg}(\varphi + \rho)$. Найти $\dfrac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. *Отв.* $-\dfrac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$. **200.** $\sec\varphi\cdot\cos\rho = C$. Найти $\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. *Отв.* $\dfrac{\operatorname{tg}^\rho - \operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$. **201.** $e^x + x = e^y + y$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $\dfrac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$. **202.** $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. **203.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. *Отв.* $-\dfrac{1}{4a\sin^4(t/2)}$. **204.** $x = a\cos^2 t$, $y = b\sin^2 t$. Показать, что $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$. **205.** $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. *Отв.* $-\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$. **206.** Показать, что $\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{sh}x) = \operatorname{sh}x$; $\dfrac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh}x) = \operatorname{ch}x$.

Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали

207. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ в точке $M(3,2)$. *Отв.* Касательная $8x - y - 22 = 0$; нормаль $x + 8y - 19 = 0$.

208. Найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в точке $M(x_1, y_1)$. *Отв.* Касательная $xx_1 + yy_1 = r^2$; нормаль $x_1y - y_1x = 0$; $s_T = |y_1^2/x_1|$; $s_N = |x_1|$.

209. Показать, что подкасательная параболы $y^2 = 4px$ в любой точке делится вершиной пополам и поднормаль постоянна и равна $2p$. Сделать чертеж.

210. Найти уравнение касательной в точке $M(x_1,y_1)$: а) К эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. *Отв.* $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$. б) К гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. *Отв.* $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$.

211. Найти уравнение касательной и нормали к «локону» $y = \dfrac{8a^2}{4a^2+x^2}$ в точке, где $x = 2a$. *Отв.* Касательная $x + 2y = 4a$; нормаль $y = 2x - 3a$.

212. Показать, что нормаль к кривой $3y = 6x - 5x^3$, проведенная в точке $M(1, 1/3)$, проходит через начало координат.

213. Показать, что касательная к кривой $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = 2$ в точке $M(a,b)$ есть $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$.

214. Найти уравнение той касательной к параболе $y^2 = 20x$, которая образует угол в 45° с осью Ox. *Отв.* $y = x + 5$. [в точке $(5,10)$].

215. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 52$, параллельных прямой $2x + 3y = 6$. *Отв.* $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. Найти уравнения касательных к гиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$, перпендикулярных к прямой $2y + 5x = 10$. *Отв.* Таких касательных нет.

217. Показать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к гиперболе $xy = m$ делится точкой касания пополам.

218. Доказать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ имеет постоянную длину.

219. Под каким углом α пересекаются кривые $y = a^x$ и $y = b^x$? *Отв.* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. Найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали циклоиды $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ в точке, для которой $\theta = \pi/2$. *Отв.* $s_T = a$; $s_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. Найти величины s_T, s_N, T и N для астроиды $x = 4a\cos^3 t$; $y = 4a\sin^3 t$. *Отв.* $s_T = |4a\sin^2 t\cos t|$; $s_N = |4a\sin^3 t\operatorname{tg} t|$; $T = 4a\sin^2 t$; $N = |4a\sin^2 t\operatorname{tg} t|$.

Разные задачи

Найти производные функций: **222.** $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{\cos^3 x}$. **223.** $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$. **224.** $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$. **225.** $y = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ $(a > 0,\ b > 0)$. *Отв.* $y' = \dfrac{1}{a + b\cos x}$. **226.** $y = |x|$. *Отв.* $y' = \dfrac{x}{|x|}$. **227.** $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$. *Отв.* $y' = -\dfrac{x}{|x|}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

228. Из формул для объема и поверхности шара $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ и $s = 4\pi r^2$ следует, что $\dfrac{dv}{dr} = s$. Объяснить геометрический смысл этого результата. Найти аналогичное соотношение между площадью круга и длиной окружности.

229. В треугольнике ABC сторона a выражается через две другие стороны b, c и угол A между ними формулой $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$. При постоянных b и c сторона a является функцией угла A. Показать, что $\dfrac{da}{dA} = h_a$, где h_a есть высота треугольника, соответствующая основанию a. Пояснить этот результат геометрическими соображениями.

230. Пользуясь понятием дифференциала, выяснить происхождение приближенных формул $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \dfrac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \dfrac{b}{3a^2}$, где $|b|$ есть число малое по сравнению с a.

231. Период колебания маятника равен $T = \pi\sqrt{l/g}$. Какое влияние на погрешность при вычислении периода T окажет погрешность в 1% при измерении: 1) длины маятника l; 2) ускорения силы тяжести g? *Отв.* 1) $\approx 1/2\%$; 2) $\approx 1/2\%$.

232. Трактриса обладает тем свойством, что для любой ее точки отрезок касательной T сохраняет постоянную длину. Доказать это, исходя из 1) уравнения трактрисы в форме $x = \sqrt{a^2 - y^2} + \dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}$ $(a > 0)$;

2) параметрических уравнений кривой $x = a(\ln\operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a\sin t$.

233. Доказать, что функция $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$ (здесь C_1 и C_2 — постоянные).

234. Полагая $y = e^x\sin x$, $z = e^x\cos x$, доказать равенства: $y'' = 2z$, $z'' = -2y$.

235. Показать, что функция $y = \sin(m\arcsin x)$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

236. Доказать, что если $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, то $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)^2$.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах $x = a$ и $x = b$ обращается в нуль $[f(a) = f(b) = 0]$, то существует внутри отрезка $[a, b]$ по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$**).

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна, т.е. при всех значениях x имеет постоянное значение $f(x) = 0$. Но тогда в любой точке отрезка будет $f'(x) = 0$, и теорема доказана.

Предположим, что $M \neq m$. Тогда по крайней мере одно из этих чисел не равно нулю.

Предположим для определенности, что $M > 0$ и что функция принимает свое наибольшее значение при $x = c$, т.е. $f(c) = M$. При этом заметим, что c не равно ни a, ни b, так как по условию $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Так как $f(c)$ — наибольшее значение функции, то $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$ как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$.

Отсюда следует, что

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0, \tag{1'}$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0. \tag{1''}$$

Так как по условию теоремы производная при $x = c$ существует, то, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

---

*) Число c называется *корнем функции* $\varphi(x)$, если $\varphi(c) = 0$.

Но соотношения $f'(c) \leqslant 0$ и $f'(c) \geqslant 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(c) = 0$. Следовательно, внутри отрезка $[a, b]$ имеется точка c, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Теорема о корнях производной имеет простое геометрическое истолкование: если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось Ox в точках с абсциссами a и b, то на этой кривой найдется по крайней мере одна точка с абсциссой c, $a < c < b$, в которой касательная параллельна оси Ox.

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a, b]$ не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a) = f(b)$ (рис. 92). Доказательство в этом случае проводится точно так же, как и ранее.

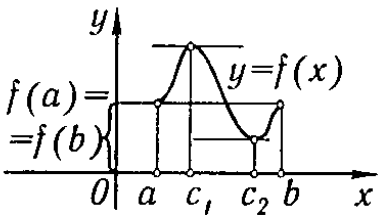


Рис. 92

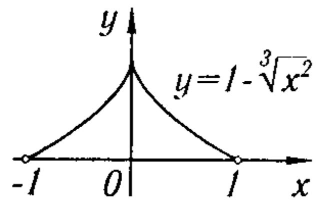


Рис. 93

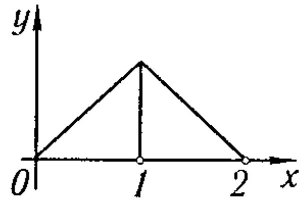


Рис. 94

Замечание 2. Если функция $f(x)$ такова, что производная существует не во всех точках внутри отрезка $[a, b]$, то утверждение теоремы может оказаться неверным (т.е. в этом случае на отрезке $[a, b]$ может не оказаться такой точки c, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль).

Так, например, функция

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(рис. 93) непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и обращается в нуль на концах отрезка, однако производная

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

внутри промежутка в нуль не обращается. Это происходит оттого, что внутри промежутка существует точка $x = 0$, в которой производная не существует (обращается в бесконечность).

График, изображенный на рис. 94, дает нам еще один пример функции, производная которой не обращается в нуль на отрезке $[0, 2]$.

Для этой функции также не выполнены условия теоремы Ролля, так как в точке $x = 1$ функция не имеет производной.

§ 2. Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется по крайней мере одна* *точка* c, $a < c < b$, *что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим буквой Q число $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, т.е. положим

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{2}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x)$, определенную равенством

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \tag{3}$$

Выясним геометрический смысл функции $F(x)$. Для этого напишем сначала уравнение хорды AB (рис. 95), учитывая, что ее угловой коэффициент равен $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$ и что она проходит через точку $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a),$$

отсюда

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

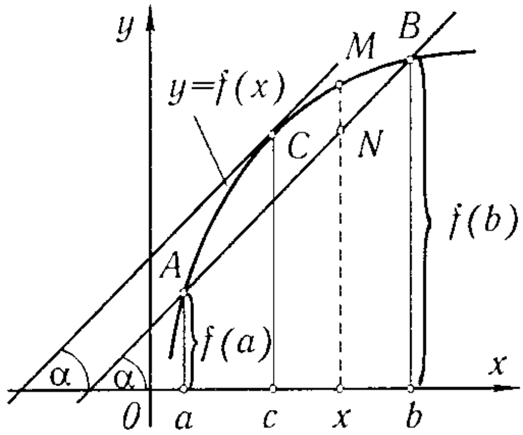


Рис. 95

Но $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Следовательно, $F(x)$ для каждого значения x равняется разности ординат кривой $y = f(x)$ и хорды $y = f(a) + Q(x - a)$ для точек с одинаковой абсциссой.

Легко видеть, что $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и обращается в нуль на концах отрезка, т.е. $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Следовательно, к функции $F(x)$ применима теорема Ролля. Согласно этой теореме внутри отрезка существует точка $x = c$ такая, что

$$F'(c) = 0.$$

Но

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Значит,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

откуда

$$Q = f'(c).$$

Подставляя значение Q в равенство (2), будем иметь:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{1'}$$

откуда непосредственно следует формула (1). Таким образом, теорема доказана.

Чтобы выяснить геометрический смысл теоремы Лагранжа, обратимся к рис. 95. Из рисунка непосредственно ясно, что величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ представляет собой тангенс угла α наклона хорды, проходящей через точки A и B графика с абсциссами a и b.

С другой стороны, $f'(c)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке с абсциссой c. Таким образом, геометрический смысл равенства (1') или равносильного ему равенства (1) состоит в следующем: если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдется точка C между A и B, в которой ***касательная параллельна хорде***, соединяющей точки A и B.

Заметим, далее, следующее. Так как значение c удовлетворяет условию $a < c < b$, то $c - a < b - a$, или

$$c - a = \theta(b - a),$$

где θ есть некоторое число, заключенное между 0 и 1, т.е.

$$0 < \theta < 1.$$

Но тогда

$$c = a + \theta(b - a),$$

и формуле (1) можно придать следующий вид:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'[a + \theta(b-a)], \quad 0 < \theta < 1. \tag{1'}$$

§ 3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема Коши. *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемые внутри него, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется такая точка $x = c$, $a < c < b$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1}$$

Доказательство. Определим число Q равенством

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}. \tag{2}$$

Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(b)$ равнялось бы $\varphi(a)$, и тогда по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль внутри отрезка, что противоречит условию теоремы.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Очевидно, что $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$ (это вытекает из определения функции $F(x)$ и определения числа Q). Заметив, что функция $F(x)$

удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля, заключаем, что между a и b существует такое значение $x = c$ $(a < c < b)$, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Подставляя значение Q в равенство (2), получим равенство (1).

Замечание. Теорему Коши нельзя доказать, как это может показаться с первого взгляда, применением теоремы Лагранжа к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Действительно, мы получили бы в этом случае (после сокращения дроби на $b - a$) формулу

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

в которой $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Но так как, вообще говоря, $c_1 \neq c_2$, то полученный результат, очевидно, не дает еще теоремы Коши.

§ 4. Предел отношения двух бесконечно малых величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$»)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$ этого отрезка, т.е. $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$.

Отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено при $x = a$, но имеет вполне определенный смысл при значениях $x \neq a$. Следовательно, может быть поставлен вопрос о разыскании предела этого отношения при $x \to a$. Вычисление пределов такого типа называется обычно «раскрытием неопределенностей вида $\frac{0}{0}$».

С такого рода задачей мы уже имели дело и раньше, например при рассмотрении предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, при нахождении производных от элементарных функций. Выражение $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$ не имеет смысла, т.е. функция $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, но мы видели, что предел выражения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ существует и равняется 1.

Теорема (правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$, т.е. $f(a) = \varphi(a) = 0$;*

тогда, если существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *при* $x \to a$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Возьмем на отрезке $[a, b]$ какую-нибудь точку $x \neq a$. Применяя формулу Коши будем иметь:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

где ξ лежит ***между*** a и x. Но по условию $f(a) = \varphi(a) = 0$, значит

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{1}$$

Если $x \to a$, то и $\xi \to a$, так как ξ заключено между x и a. При этом, если $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то $\lim\limits_{\xi\to a} \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ также существует и равен A. Отсюда ясно, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

и окончательно

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 1. Теорема имеет место и в том случае, если функции $f(x)$ или $\varphi(x)$ ***не определены при*** $x = a$, но

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0.$$

Для того, чтобы свести этот случай к рассмотренному ранее, мы ***доопределяем*** функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = a$ так, чтобы они стали ***непрерывными в точке*** a. Для этого достаточно положить

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \varphi(a) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0,$$

так как, очевидно, предел отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$ не зависит от того, определены ли функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = a$.

Замечание 2. Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем условиям, которые были наложены в условиях теоремы на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то, применяя правило Лопиталя к отношению $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, приходим к формуле $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и т.д.

Замечание 3. Если $\varphi'(a) = 0$, но $f'(a) \neq 0$, то теорема приложима к обратному отношению $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$, которое стремится к нулю при $x \to a$. Следовательно, отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится к бесконечности.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Здесь три раза пришлось применить правило Лопиталя, так как отношения первых и третьих производных при $x=0$ приводят к неопределенности $\frac{0}{0}$.

Замечание 4. Правило Лопиталя применимо и в том случае, если

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Действительно, полагая $x=1/z$, видим, что $z\to 0$ при $x\to\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{z\to 0} f(1/z)=0,\ \lim_{z\to 0}\varphi(1/z)=0.$$

Применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}$, находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)(-1/z^2)}{\varphi'(1/z)(-1/z^2)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{\varphi'(1/z)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}k\cos\frac{k}{x}=k.$$

§ 5. Предел отношения двух бесконечно больших величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$»)

Рассмотрим, далее, вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, стремящихся к бесконечности при $x\to a$ (или при $x\to\infty$).

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x \neq a$ в окрестности точки a, причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль; пусть, далее,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$$

и пусть существует предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{1}$$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

Доказательство. В рассматриваемой окрестности точки a возьмем две точки α и x так, чтобы было $\alpha < x < a$ (или $a < x < \alpha$). По теореме Коши будем иметь:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{3}$$

где $\alpha < c < x$. Левую часть равенства (3) преобразуем так:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) получаем:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}. \tag{5}$$

Из условия (1) следует, что при произвольно малом $\varepsilon > 0$ можно α выбрать настолько близким к a, что для всех $x = c$, где $\alpha < c < a$, будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

или

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \tag{6}$$

Далее рассмотрим дробь

$$\frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Закрепив α так, чтобы обеспечить выполнение неравенства (6), будем x приближать к a. Так как $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

и, следовательно, при ранее выбранном $\varepsilon > 0$ для x, достаточно близких к a, будем иметь:

$$\left| \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \text{или} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \tag{7}$$

Перемножая соответствующие члены неравенств (6) и (7), получим:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

или на основании равенства (5)

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Так как ε — произвольно малое число при x, достаточно близком к a, то из последних неравенств следует, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

или на основании (1)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если в условии (1) $A = \infty$, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty,$$

то равенство (2) остается справедливым и в этом случае. Действительно, из предыдущего выражения следует:

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Тогда по доказанной теореме

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

откуда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Замечание 2. Доказанная теорема легко распространяется на случай, когда $x \to \infty$. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{8}$$

Доказательство проводится путем замены $x = 1/z$, как это делалось при аналогичных условиях в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (см. § 4, замечание 4).

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Замечание 3. Отметим еще раз, что формулы (2) и (8) справедливы только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Может случиться, что предел, стоящий слева, существует, в то время, как предел, стоящий справа, не существует. Приведем пример. Пусть требуется найти

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}.$$

Этот предел существует и равен 1. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Но отношение производных

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \frac{1+\cos x}{1} = 1 + \cos x$$

при $x \to \infty$ не стремится ни к какому пределу, а колеблется между 0 и 2.

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2-d} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\,\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{1} = 3\frac{(-1)}{1}\cdot\frac{(-1)}{1} = 3.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Вообще, при любом целом $n > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\dots 1}{e^x} = 0.$$

К предыдущим случаям сводятся случаи других неопределенностей, которые символически записываются так:

$$\text{а) } 0\cdot\infty, \ \text{ б) } 0^0, \ \text{ в) } \infty^0, \ \text{ г) } 1^\infty, \ \text{ д) } \infty-\infty,$$

и смысл которых состоит в следующем.

а) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$; требуется найти

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)].$$

Это — неопределенность типа $0\cdot\infty$.

Если искомое выражение переписать в виде

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

или в виде

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

то при $x\to a$ мы получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0.$$

б) Пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0;$$

требуется найти

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)},$$

или, как говорят, раскрыть неопределенность вида 0^0.

Положив

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)},$$

прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y=\varphi(x)[\ln f(x)].$$

при $x\to a$ получим (справа) неопределенность вида $0\cdot\infty$. Найдя $\lim\limits_{x\to a}\ln y$, легко получить $\lim\limits_{x\to a}y$. Действительно, в силу непрерывности логарифмической функции, $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to a}y$, и если $\lim\limits_{x\to a}\ln y=b$, то, очевидно, $\lim\limits_{x\to a}y=e^b$. Если, в частности, $b=+\infty$ или $-\infty$ то, соответственно, $y=+\infty$ или 0.

Пример 6. Требуется найти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. Положив $y = x^x$, находим: $\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln(x^x) = \lim(x \ln x)$;

$$\lim_{x\to 0}(x \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0,$$

следовательно, $\ln \lim y = 0$, откуда $\lim y = e^0 = 1$, т.е.

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

Аналогичным приемом находятся пределы и в других случаях.

§ 6. Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$. Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = a$ равняется значению функции $f(x)$ в этой точке, а значения его производных до n-го порядка в точке $x = a$ равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке

$$\begin{gathered} P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \\ P_n''(a) = f''(a), \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \end{gathered} \tag{1}$$

Естественно ожидать, что такой многочлен в некотором смысле «близок» к функции $f(x)$.

Будем искать этот многочлен в форме многочлена по степеням $(x - a)$ с неопределенными коэффициентами

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \\ + C_3(x-a)^3 + \ldots + C_n(x-a)^n. \tag{2}$$

Неопределенные коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определим так, чтобы удовлетворились условия (1).

Предварительно найдем производные от $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Подставляя в левые и правые части равенств (2) и (3) вместо x значение a и заменяя на основании равенств (1) $P_n(a)$ через $f(a)$,

$P_n'(a) = f'(a)$ и т.д., получим

$$f(a) = C_0,$$
$$f'(a) = C_1,$$
$$f''(a) = 2 \cdot 1 C_2,$$
$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 C_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 C_n,$$

откуда находим:

$$\left.\begin{array}{r} C_0 = f(a),\ C_1 = f'(a),\ C_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(a), \\ C_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a), \dots, C_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a) \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, ..., C_n в формулу (2), получим искомый многочлен:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots$$
$$\dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \tag{5}$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$ (рис. 96):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

откуда

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

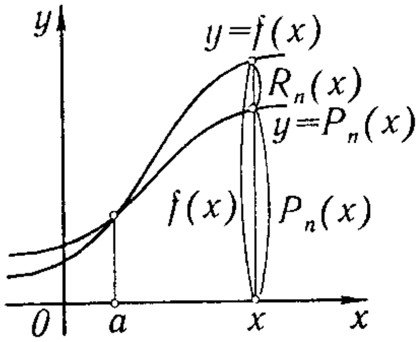


Рис. 96

или в развернутом виде

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \tag{6}$$

$R_n(x)$ называется *остаточным членом*. Для тех значений x, для которых остаточный член $R_n(x)$ мал, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$.

Таким образом, формула (6) дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Дальнейшая наша задача — оценить величину $R_n(x)$ при различных значениях x.

Запишем остаточный член в форме

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \tag{7}$$

где $Q(x)$ есть некоторая функция, подлежащая определению, и в соответствии с этим перепишем формулу (6):

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \quad (6')$$

При фиксированных x и a функция $Q(x)$ имеет определенное значение; обозначим его через Q.

Рассмотрим, далее, вспомогательную функцию от t (t заключено между a и x):

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!}f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

где Q имеет значение, определенное соотношением (6′); при этом считаем a и x определенными числами.

Найдем производную $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{(x-t)}{1}f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!}f''(t) -$$
$$- \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t) -$$
$$- \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q,$$

или после сокращения

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!}Q. \quad (8)$$

Итак, функция $F(t)$ имеет производную во всех точках t, лежащих вблизи точки с абсциссой a ($a \leqslant t \leqslant x$ при $a < x$ и $a \geqslant t \geqslant x$ при $a > x$).

Далее, замечаем, что (на основании формулы (6′))

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Поэтому к функции $F(t)$ применима теорема Ролля, и, следовательно, существует такое значение $t = \xi$, заключенное между a и x, при котором $F'(\xi) = 0$. Отсюда на основании соотношения (8) получаем:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!}Q = 0,$$

откуда

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Подставляя это выражение в формулу (7), получаем:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Это — так называемая *форма Лагранжа* для остаточного члена. Так как ξ заключено между x и a, то его можно представить в форме *)

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

где θ — число, заключенное между 0 и 1, т.е. $0 < \theta < 1$; тогда формула остаточного члена примет вид

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

Формула

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \quad (9)$$

называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$.

Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то она запишется в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (10)$$

где θ заключено между числами 0 и 1. Этот частный случай формулы Тейлора иногда называют *формулой Маклорена.*

§ 7. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$

1. **Разложение функции** $f(x) = e^x$. Находя последовательные производные от $f(x)$, получим:

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1,$$
$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (10) § 6, будем иметь:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то, взяв $n = 8$, получим оценку остаточного члена:

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3 < 10^{-5}.$$

При $x = 1$ получим формулу, позволяющую найти приближенное значение числа e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!};$$

---

*) См. конец § 2 настоящей главы.

производя вычисления в десятичных дробях с шестью*) десятичными знаками, а затем округляя результат до пяти десятичных знаков, найдем

$$e = 2,71828.$$

Здесь ошибка не превосходит числа $\frac{3}{9!}$ или $0,00001$.

Отметим, что, каково бы ни было x, остаточный член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно, так как $\theta < 1$, то величина $e^{\theta x}$ при фиксированном x ограничена (она меньше, чем e^x, при $x > 0$ и меньше, чем 1, при $x < 0$).

Докажем, что, каково бы ни было фиксированное число x,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right|.$$

Если x есть фиксированное число, то найдется такое целое положительное число N, что

$$|x| < N.$$

Введем обозначение $\frac{|x|}{N} = q$; тогда, заметив, что $0 < q < 1$, можем написать при $n = N+1$, $N+2$, $N+3$ и т.д.:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| &= \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right| = \\
&= \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{n}\right| \cdot \left|\frac{x}{n+1}\right| < \\
&\qquad < \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}q^{n-N+2},
\end{aligned}$$

потому что

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q, \quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q, \quad \ldots, \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$$

Но величина $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ постоянная, т.е. не зависит от n, а q^{n-N+2} стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{1}$$

Следовательно, и $R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$.

---

*) Иначе суммарная ошибка округления при расчетах может значительно превысить R_8 (например, при количестве слагаемых, равном 10, эта ошибка может достичь величины $5 \cdot 10^{-5}$).

Из предыдущего следует, что при любом x, взяв достаточное число членов, мы можем вычислить e^x с любой степенью точности.

2. **Разложение функции** $f(x) = \sin x$. Находим последовательные производные от $f(x) = \sin x$:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, && f(0) = 0,\\
&f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), && f'(0) = 1,\\
&f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), && f''(0) = 0,\\
&f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), && f'''(0) = -1,\\
&f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), && f^{IV}(0) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), && f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2},\\
&f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), && f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Подставляя полученные значения в формулу (10) § 6, получим разложение функции $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Так как $\left|\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

Применим полученную формулу для приближенного вычисления $\sin 20°$. Положим $n = 3$, т.е. ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\sin 20°\mathrm{C} = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0,342.$$

Оценим сделанную ошибку, которая равна остаточному члену:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!}\sin(\xi + 2\pi)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \approx 0,00062 < 0,001.$$

Следовательно, ошибка меньше, чем $0,001$, т.е. $\sin 20° = 0,342$ с точностью до $0,001$.

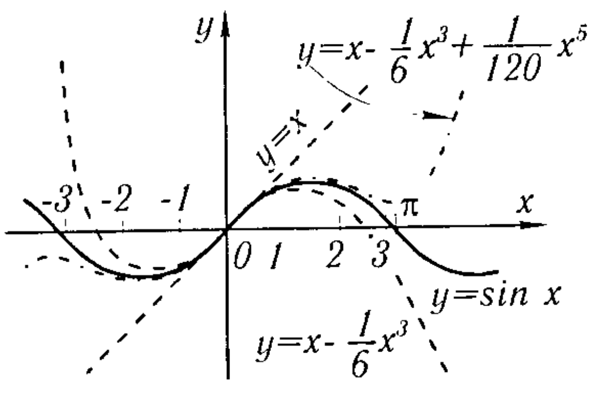


Рис. 97

На рис. 97 даны графики функции $f(x) = \sin x$ и первых трех приближений: $S_1(x) = x$, $S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

3. **Разложение функции** $f(x) = \cos x$. Находя значения последовательных производных при $x = 0$ от функции $f(x) = \cos x$ и подставляя в формулу Маклорена, получим разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$|\xi| < |x|.$$

Здесь также $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

Упражнения к главе IV

Проверить справедливость теоремы Ролля для функций: **1.** $y = x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[1, 2]$. **2.** $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ на отрезке $[0, 1]$. **3.** $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ на отрезке $[1, 3]$. **4.** $y = \sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

5. Функция $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ имеет корнями 1 и -1. Найти корень производной $f'(x)$, о котором говорится в теореме Ролля.

6. Проверить, что между корнями функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ находится корень ее производной.

7. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \cos^2 x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}]$.

8. Функция $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде в интервале $(-1, 1)$ в нуль не обращается. Объяснить, почему здесь неприменима теорема Ролля.

9. Составить формулу Лагранжа для функции $y = \sin x$ на отрезке $[x_1, x_2]$. *Отв.* $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$.

10. Проверить справедливость формулы Лагранжа для функции $y = 2x - x^2$ на отрезке $[0, 1]$.

11. В какой точке касательная к кривой $y = x^n$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(a, a^n)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c = a/\sqrt[n-1]{n}$.

12. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(1, 0)$ и $M_2(e, 1)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c = e - 1$.

Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства: **13.** $e^x \geqslant 1 + x$. **14.** $\ln(1+x) < x$ $(x > 0)$. **15.** $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ при $b > a$. **16.** $\operatorname{arctg} x < x$.

17. Написать формулу Коши для функций $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[1, 2]$ и найти c. *Отв.* В точке с абсциссой $c = \frac{14}{9}$.

Вычислить следующие пределы: **18.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n - 1}$. *Отв.* $\dfrac{1}{n}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. *Отв.* 2. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. *Отв.* 2. **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. *Отв.* -2. **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. *Отв.* Предела не существует ($\sqrt{2}$ при $x \to +0$, $-\sqrt{2}$ при $x \to -0$). **23.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi - 2x)^2}$. *Отв.* $-\dfrac{1}{8}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x}$. *Отв.* $\ln\dfrac{a}{b}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$. *Отв.* $-\dfrac{1}{6}$. **26.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$. *Отв.* $\cos a$. **27.** $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$. *Отв.* 2. **28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x}{3x^2 + x^5}$.

Отв. $\frac{1}{3}$. **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$. *Отв.* $\frac{3}{2}$. **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ (где $n>0$). *Отв.* 0. **31.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* 1. **32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}}$. *Отв.* -1. **33.** $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{ay}}$. *Отв.* 0 при $a>0$; ∞ при $a\leqslant 0$. **34.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. *Отв.* 1. **35.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$. *Отв.* 1. **36.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{tg}7x}{\ln\operatorname{tg}2x}$. *Отв.* 1. **37.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. *Отв.* 0. **38.** $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. *Отв.* $\frac{2}{\pi}$. **39.** $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]$. *Отв.* $-\frac{1}{2}$. **40.** $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$. *Отв.* -1. **41.** $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$. *Отв.* 0. **42.** $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **43.** $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}2x$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. **44.** $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$. *Отв.* ∞. **45.** $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **46.** $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^2}$. *Отв.* 1. **47.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$. *Отв.* 1. **48.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$. *Отв.* e^a. **49.** $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$. **50.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. *Отв.* 1. **51.** $\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. **52.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$.

53. Разложить по степеням $x-2$ многочлен $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. *Отв.* $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$.

54. Разложить по степеням $x+1$ многочлен $x^5+2x^4-x^2+x+1$. *Отв.* $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$.

55. Написать формулу Тейлора для функции $y=\sqrt{x}$ при $a=1$, $n=3$. *Отв.* $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot[1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}}$, $0<\theta<1$.

56. Написать формулу Маклорена для функции $y=\sqrt{1+x}$ при $n=2$. *Отв.* $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0<\theta<1$.

57. Пользуясь результатами предыдущего примера, оценить погрешность приближенного равенства $\sqrt{1+x}\approx1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ при $x=0,2$. *Отв.* Меньше $\frac{1}{2\cdot10^3}$.

Выяснить происхождение приближенных равенств при небольших значениях x и оценить погрешность этих равенств:

58. $\ln\cos x\approx-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$. **59.** $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$. **60.** $\arcsin x\approx x+\frac{x^3}{6}$. **61.** $\operatorname{arctg}x\approx x-\frac{x^3}{3}$. **62.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\approx1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. **63.** $\ln(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-x^2+\frac{5x^3}{6}$.

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить пределы выражений:

64. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$. *Отв.* 1. **65.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln^2(1+x)-\sin^2x}{1-e^{-x^2}}$. *Отв.* 0. **66.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$. *Отв.* $\frac{1}{4}$. **67.** $\lim\limits_{x\to0}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. *Отв.* 0. **68.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$. *Отв.* $\frac{1}{3}$. **69.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$. *Отв.* $\frac{2}{3}$.

Глава V
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи

Изучение количественной стороны различных явлений природы приводится к установлению и изучению функциональной зависимости между участвующими в данном явлении переменными величинами. Если такую функциональную зависимость можно выразить аналитически, т.е. в виде одной или нескольких формул, то мы получаем возможность исследовать эту функциональную зависимость средствами математического анализа. Например, при исследовании явления полета снаряда в пустоте получается формула, дающая зависимость дальности полета R от угла возвышения α и начальной скорости v_0:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(g — ускорение силы тяжести).

Получив эту формулу, мы имеем возможность выяснить, при каком α дальность R будет наибольшей, при каком — наименьшей, каковы должны быть условия, чтобы при увеличении угла α увеличивалась дальность и т.д.

Рассмотрим другой пример. В результате изучения колебания груза на рессоре (вагон, автомобиль) получили формулу, показывающую, как отклонение y груза от положения равновесия зависит от времени t:

$$y = e^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Величины k, A, B, ω, входящие в эту формулу, имеют вполне определенное значение для данной колебательной системы (они зависят от упругости рессоры, от величины груза и т.д., но не изменяются с течением времени t) и поэтому рассматриваются нами как постоянные.

На основании приведенной формулы можно выяснить, при каких значениях t отклонение y увеличивается с увеличением t, как меняется величина наибольшего отклонения в зависимости от времени, при каких значениях t наблюдаются эти наибольшие отклонения, при каких значениях t получаются наибольшие скорости движения груза и ряд других вопросов.

Все перечисленные вопросы входят в понятие «исследовать поведение функции». Очевидно, выяснить все эти вопросы, вычисляя значения функции в отдельных точках (подобно тому, как мы это делали в гл. II), весьма затруднительно. Целью настоящей главы является установление более общих приемов исследования поведения функций.

§ 2. Возрастание и убывание функции

В § 6 главы I было дано определение возрастающей и убывающей функций. Теперь мы применим понятие производной для исследования возрастания и убывания функции.

Теорема. 1) *Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a,b]$, возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке $[a,b]$ не отрицательна, т.е. $f'(x) \geqslant 0$.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в промежутке (a,b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$. Придадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Так как $f(x)$ — функция возрастающая, то

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad \text{при } \Delta x > 0$$

и

$$f(x+\Delta x) < f(x) \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

В обоих случаях

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \tag{2}$$

а следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

т.е. $f'(x) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. (Если бы было $f'(x) < 0$, то при достаточно малых значениях Δx отношение (1) было бы отрицательным, что противоречит соотношению (2).)

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $f'(x) > 0$ при всех значениях x, принадлежащих промежутку (a,b).

Рассмотрим два любых значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, принадлежащих отрезку $[a,b]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем:

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

По условию $f'(\xi) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, а это и значит, что $f(x)$ — возрастающая функция.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающей (дифференцируемой) функции, а именно.

Если $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leqslant 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$. (Конечно, мы и здесь предполагаем, что функция непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ и дифференцируема всюду на (a, b).)

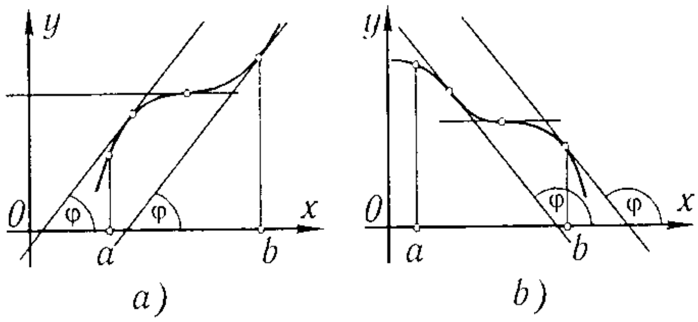


Рис. 98

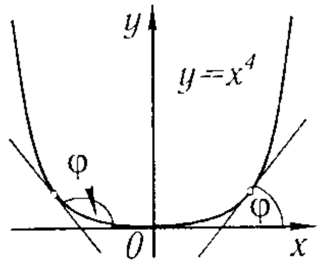


Рис. 99

Замечание. Доказанная теорема выражает следующий геометрический факт. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox ***острый*** угол φ или — в отдельных точках — горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \geqslant 0$ (рис. 98, *а*). Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то угол наклона касательной — тупой (или — в отдельных точках — касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 98, *б*). Аналогично иллюстрируется и вторая часть теоремы. Теорема позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

Пример. Определить области возрастания и убывания функции

$$y = x^4.$$

Решение. Производная равна

$$y' = 4x^3;$$

при $x > 0$ имеем $y' > 0$ — функция возрастает; при $x < 0$ имеем $y' < 0$ — функция убывает (рис. 99).

§ 3. Максимум и минимум функций

Определение максимума. Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет *максимум* (maximum), если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет *максимум* при $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx (положительных и отрицательных), достаточно малых по абсолютной величине*).

Так, например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 100, имеет максимум при $x = x_1$.

---

*) Иногда это определение формулируют так: функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке x_1, если можно найти такую окрестность (α, β) точки x_1 $(\alpha < x_1 < \beta)$, что для всех точек этой окрестности, отличных от x_1, выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$.

Определение минимума. Функция $f(x)$ имеет *минимум* (minimum) при $x = x_2$, если

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

при любых Δx — как положительных, так и отрицательных, — достаточно малых по абсолютной величине (рис. 100).

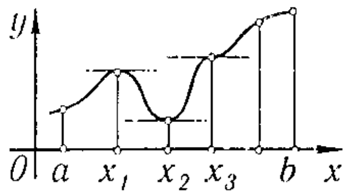


Рис. 100

Например, функция $y = x^4$, рассмотренная в конце предыдущего параграфа (см. рис. 99), при $x = 0$ имеет минимум, так как $y = 0$ при $x = 0$ и $y > 0$ при других значениях x.

В связи с определениями максимума и минимума следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

1. Функция, определенная на отрезке, может достигать максимума и минимума только при значениях x, заключенных ***внутри*** рассматриваемого отрезка.

2. Не следует думать, что максимум и минимум функции являются, соответственно, ее наибольшим и наименьшим значениями на рассматриваемом отрезке: в точке максимума функция имеет наибольшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, ***достаточно близких*** к точке максимума, а в точке минимума — наименьшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, ***достаточно близких*** к точке минимума.

Так, на рис. 101 изображена функция, определенная на отрезке $[a, b]$, которая

при $x = x_1$ и $x = x_3$ имеет максимум,

при $x = x_2$ и $x = x_4$ имеет минимум,

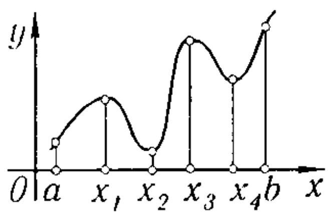


Рис. 101

но минимум функции при $x = x_4$ больше максимума функции при $x = x_1$. При $x = b$ значение функции больше любого максимума функции на рассматриваемом отрезке.

Максимумы и минимумы функции называют *экстремумами**) или *экстремальными значениями* функции.

Экстремальные значения функции и их расположение на отрезке $[a, b]$ в известной степени характеризуют изменение функции в зависимости от изменения аргумента.

Ниже будет указан метод нахождения экстремальных значений.

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке, т.е. $f'(x_1) = 0$.*

---

*) Extremum — крайний (лат.).

Доказательство. Предположим для определенности, что в точке $x = x_1$ функция имеет максимум. Тогда при достаточно малых по абсолютному значению приращениях Δx ($\Delta x \neq 0$) имеет место

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

т.е.

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Но в таком случае знак отношения

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

определяется знаком Δx, а именно:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0.$$

Согласно определению производной имеем:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Если $f(x)$ имеет производную при $x = x_1$, то предел, стоящий справа, не зависит от того, как Δx стремится к нулю (оставаясь положительным или отрицательным).

Но если $\Delta x \to 0$, оставаясь отрицательным, то

$$f'(x_1) \geqslant 0.$$

Если же $\Delta x \to 0$, оставаясь положительным, то

$$f'(x_1) \leqslant 0.$$

Так как $f'(x_1)$ есть определенное число, не зависящее от способа стремления Δx к нулю, то два последних неравенства совместимы только в том случае, если

$$f'(x_1) = 0.$$

Аналогичным образом теорема доказывается и для случая минимума функции.

Доказанной теореме соответствует следующий очевидный геометрический факт: если в точках максимума и минимума функция $f(x)$ имеет производную, то касательная к кривой $y = f(x)$ в этих точках параллельна оси Ox. Действительно, из того, что $f'(x_1) = \operatorname{tg}\varphi = 0$, где φ — угол между касательной и осью Ox, следует, что $\varphi = 0$ (рис. 100).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие: *если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или* *минимум) только при тех значениях, при которых производная обращается в нуль.* Обратное заключение неверно: *не при всяком значении, при которых производная обращается в нуль, обязательно существует максимум или минимум.* Так, на рис. 100 изображена функция, у которой при $x = x_3$ производная обращается в нуль (касательная горизонтальна), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Точно так же функция $y = x^3$ (рис. 102) при $x = 0$ имеет производную, равную нулю:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

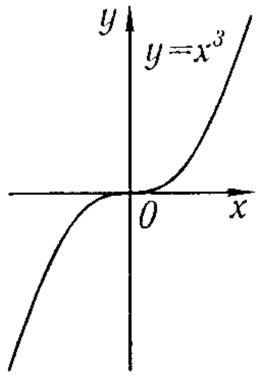


Рис. 102

но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, как бы ни была близка точка x к точке O, всегда

$$x^3 < 0 \quad \text{при} \quad x < 0$$

и

$$x^3 > 0 \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Мы исследовали тот случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Как же обстоит дело в тех точках, где производная не существует? Мы покажем на примерах, что в таких точках может быть или максимум, или минимум, но может и не быть ни того, ни другого.

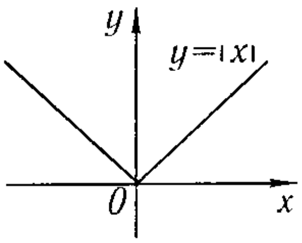


Рис. 103

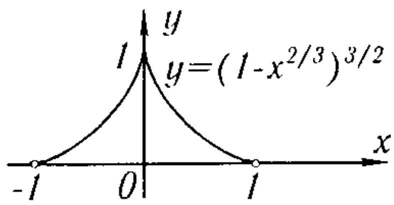


Рис. 104

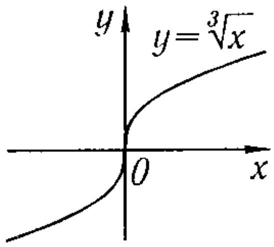


Рис. 105

Пример 1. Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$ (в этой точке кривая не имеет определенной касательной), но в этой точке данная функция имеет минимум: $y = 0$ при $x = 0$, тогда как для всякой точки x, отличной от нуля, имеем $y > 0$ (рис. 103).

Пример 2. Функция $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ не имеет производной при $x = 0$, так как $y' = -(1 - x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$ обращается в бесконечность при $x = 0$, но в этой точке функция имеет максимум: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ при x, отличном от нуля (рис. 104).

Пример 3. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной при $x = 0$ ($y' \to \infty$ при $x \to 0$). В этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума: $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ для $x < 0$; $f(x) > 0$ для $x > 0$ (рис. 105).

Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю; либо в тех точках, где производная не существует.

Заметим, что если производная не существует в какой-либо точке (но существует в близлежащих точках), то в этой точке производная терпит *разрыв*.

Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими точками* или *критическими значениями*.

Из предыдущего следует, что не при всяком критическом значении функция имеет максимум или минимум. Однако, если в какой-либо точке функция достигает максимума или минимума, то эта точка наверняка является критической. Поэтому для разыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем, исследуя отдельно каждую критическую точку, выясняют, будет ли в этой точке максимум или минимум функции или же не будет ни максимума, ни минимума.

Исследование функции в критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 2 (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.*

Таким образом,

$$\text{если а)} \quad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ f'(x) < 0 & \text{при} \quad x > x_1, \end{cases}$$

то в точке x_1 функция имеет *максимум*;

$$\text{если б)} \quad \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ f'(x) > 0 & \text{при} \quad x > x_1, \end{cases}$$

то в точке x_1 функция имеет *минимум*. При этом надо иметь в виду, что условия а) или б) должны выполняться для всех значений x, достаточно близких к x_1, т.е. во всех точках некоторой достаточно малой окрестности критической точки x_1.

Доказательство. Предположим сначала, что производная меняет знак с плюса на минус, т.е. что для всех x, достаточно близких к точке x_1, имеем:

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{при } x > x_1.$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_1)$, получим

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

где ξ есть точка, лежащая между x и x_1.

1) Пусть $x < x_1$; тогда

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

и, следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

или

$$f(x) < f(x_1). \tag{1}$$

2) Пусть $x > x_1$; тогда

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

и, следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

или

$$f(x) < f(x_1). \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) показывают, что для всех значений x, достаточно близких к x_1, значения функции меньше, чем значения функции в точке x_1. Следовательно, в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы о достаточном условии минимума.

Рис. 106 наглядно иллюстрирует смысл теоремы 2.

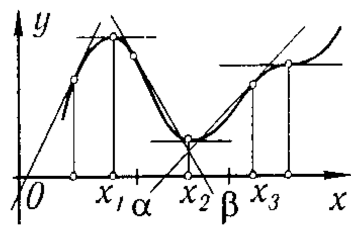


Рис. 106

Пусть в точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и для всех x, достаточно близких к точке x_1, выполняются неравенства

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{при } x > x_1.$$

Тогда при $x < x_1$ касательная к кривой образует с осью Ox острый угол — функция возрастает, а при $x > x_1$ касательная образует с осью Ox тупой угол — функция убывает; при $x = x_1$ функция переходит от возрастания к убыванию, т.е. имеет максимум.

Если в точке x_2 имеем $f'(x_2) = 0$ и для всех значений x, достаточно близких к точке x_2, выполняются неравенства

$$f'(x) < 0 \quad \text{при } x < x_2,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > x_2,$$

то при $x < x_2$ касательная к кривой образует с осью Ox тупой угол — функция убывает, а при $x > x_2$ касательная к кривой образует острый угол — функция возрастает. При $x = x_2$ функция переходит от убывания к возрастанию, т.е. имеет минимум.

Если при $x = x_3$ имеем $f'(x_3) = 0$ и для всех значений x, достаточно близких к x_3, выполняются неравенства

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_3,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > x_3,$$

то функция возрастает как при $x < x_3$, так и при $x > x_3$. Следовательно, при $x = x_3$ функция не имеет ни максимума, ни минимума. Именно такой случай имеет место для функции $y = x^3$ при $x = 0$.

Действительно, производная $y' = 3x^2$, следовательно,

$$(y')_{x=0} = 0,$$
$$(y')_{x<0} > 0,$$
$$(y')_{x>0} > 0,$$

а это значит, что при $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (см. выше рис. 102).

§ 4. Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной

На основании предыдущего параграфа можно сформулировать следующее правило для исследования дифференцируемой функции

$$y = f(x)$$

на максимум и минимум:

1. Ищем первую производную функции, т.е. $f'(x)$.

2. Находим критические значения аргумента x; для этого:

а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни полученного уравнения $f'(x) = 0$;

б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным в интервале между двумя критическими точками, то для исследования знака производной слева и справа, например, от критической точки x_2 (рис. 106) достаточно определить знак производной в точках α и β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, где x_1 и x_2 — ближайшие критические точки).

4. Вычисляем значение функции $f(x)$ при каждом критическом значении аргумента.

Таким образом, имеем следующее схематическое изображение возможных случаев:

Знаки производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_1			Характер критической точки
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
$+$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$-$	Точка максимума
$-$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$+$	Точка минимума
$+$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$+$	Нет ни максимума, ни минимума (функция возрастает)
$-$	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	$-$	Нет ни максимума, ни минимума (функция убывает)

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

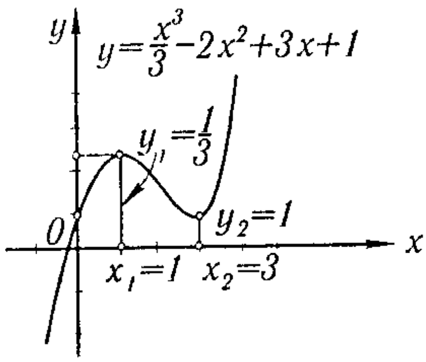


Рис. 107

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) Находим действительные корни производной:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.

3) Исследуем критические значения и результаты исследования фиксируем на рис. 107.

Исследуем первую критическую точку $x_1 = 1$. Так как $y' = (x-1)(x-3)$, то

$$\text{при } x < 1 \text{ имеем } y' = (-)\cdot(-) > 0;$$

$$\text{при } x > 1 \text{ имеем } y' = (+)\cdot(-) < 0.$$

Значит, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$:

$$\text{при } x < 3 \text{ имеем } y' = (+)\cdot(-) < 0;$$

$$\text{при } x > 3 \text{ имеем } y' = (+)\cdot(+) > 0.$$

Значит, при переходе через значение $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = 3$ функция имеет минимум, а именно:

$$(y)_{x=3} = 1.$$

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 107).

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

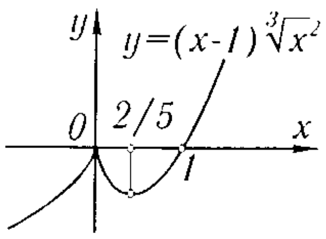


Рис. 108

2) Находим критические значения аргумента: а) находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

б) находим точки, в которых производная терпит разрыв (в данном случае обращается в бесконечность). Такой точкой будет, очевидно, точка

$$x_2 = 0.$$

(Отметим, что при $x_2 = 0$ рассматриваемая функция определена и непрерывна.)

Других критических точек нет.

3) Исследуем характер полученных критических точек. Исследуем точку $x_1 = 2/5$. Заметим, что

$$(y')_{x<2/5} < 0, \quad (y')_{x>2/5} > 0,$$

заключаем, что при $x = 2/5$ функция имеет минимум. Значение функции в точке минимума равно

$$(y)_{x=2/5} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Исследуем вторую критическую точку $x = 0$. Заметив, что

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0,$$

заключаем, что при $x = 0$ функция имеет максимум, причем $(y)_{x=0} = 0$. График исследуемой функции изображен на рис. 108.

§ 5. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

Пусть при $x = x_1$ производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(x_1) = 0$. Пусть, кроме того, вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f'(x_1) = 0$; тогда при $x = x_1$ функция имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$, и минимум, если $f''(x_1) > 0$.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть

$$f'(x_1) = 0 \text{ и } f''(x_1) < 0.$$

Так как, по условию, $f''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_1$, то, очевидно, найдется некоторый малый отрезок, окружающий точку $x = x_1$, во всех точках которого вторая производная $f''(x)$ будет отрицательна.

Так как $f''(x)$ есть первая производная от первой производной, $f''(x) = (f'(x))'$, то из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку $x = x_1$ (§ 2 гл. V). Но $f'(x_1) = 0$, следовательно, на этом отрезке при $x < x_1$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_1$ имеем $f'(x) < 0$, т.е. производная $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_1$ меняет знак с плюса на минус, а это значит, что в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум. Первая часть теоремы доказана.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы, а именно: если $f''(x_1) > 0$, то $f''(x) > 0$ во всех точках некоторого отрезка, окружающего точку x_1, но тогда на этом отрезке $f''(x) = (f'(x))' > 0$ и, следовательно, $f'(x)$ возрастает. Так как $f'(x_1) = 0$, то, значит, при переходе через точку x_1 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т.е. функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_1$.

Если в критической точке $f''(x_1) = 0$, то в этой точке может быть или максимум, или минимум или не быть ни максимума, ни минимума. В этом случае исследование нужно вести первым способом (см. § 4 гл. V).

Схему исследования экстремумов с помощью второй производной можно изобразить в следующей таблице:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критической точки
0	$-$	Точка максимума
0	$+$	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 2\sin x + \cos 2x.$$

Решение. Так как функция является периодической периода 2π, то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, 2\pi]$.

1) Находим производную:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

2) Находим критические значения аргумента:

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = \pi/6, \quad x_2 = \pi/2, \quad x_3 = 5\pi/6, \quad x_4 = 3\pi/2.$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

4) Исследуем характер каждой критической точки:

$$(y'')_{x_1=\pi/6} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, в точке $x_1 = \pi/6$ имеем максимум:

$$(y)_{x=\pi/6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далее,

$$(y'')_{x=\pi/2} = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 2 > 0.$$

Следовательно, в точке $x_2 = \pi/2$ имеем минимум:

$$(y)_{x=\pi/2} = 2\cdot 1 - 1 = 1.$$

В точке $x_3 = 5\pi/6$ имеем:

$$(y'')_{x=5\pi/6} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

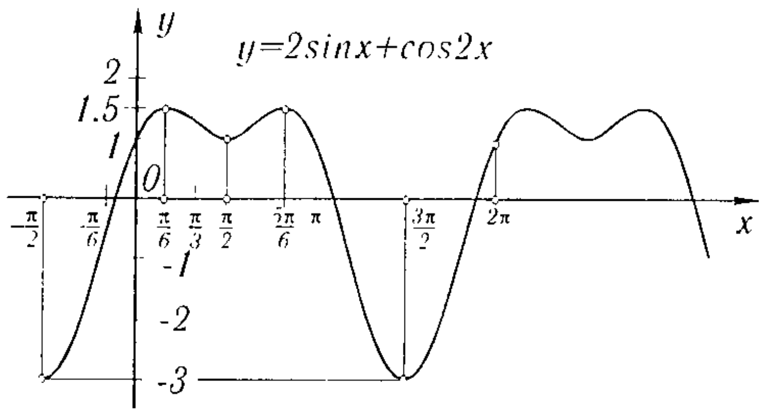


Рис. 109

Следовательно, при $x_3 = 5\pi/6$ функция имеет максимум:

$$(y)_{x_3=5\pi/6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Наконец,

$$(y'')_{x=3\pi/2} = -2(-1) - 4(-1) = \\ = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $x_4 = 3\pi/2$ имеем минимум:

$$(y)_{x=3\pi/2} = 2(-1) - 1 = -3.$$

График исследуемой функции изображен на рис. 109.

Покажем, далее, на примерах, что если в некоторой точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) = 0$, то в этой точке функция $f(x)$ может иметь либо максимум, либо минимум, либо не иметь ни максимума, ни минимума.

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$x = 1 - x^4.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$y' = -4x^3, \ -4x^3 = 0, \ x - 0.$$

2) Определяем знак второй производной при $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, выяснить характер критической точки с помощью знака второй производной в данном случае нельзя.

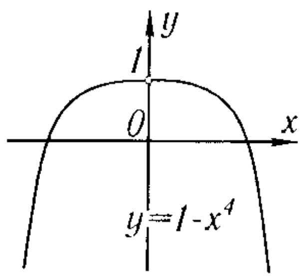


Рис. 110

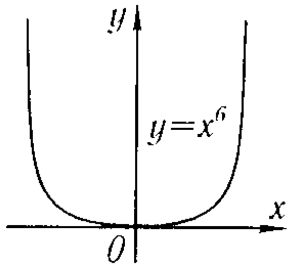


Рис. 111

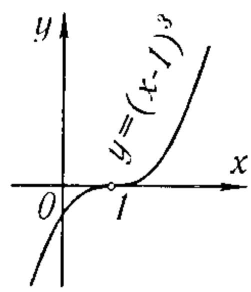


Рис. 112

3) Исследуем характер критической точки первым способом (см. § 4 гл. V):

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

График рассмотренной функции изображен на рис. 110.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^6.$$

Решение. По второму способу находим:

$$1)\ y' = 6x^5, \ y' = 6x^5 = 0, \ x = 0; \quad 2)\ y'' = 30x^4, \ (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, второй способ ответа не дает. Прибегая к первому способу, получаем:

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум (рис. 111).

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию
$$y = (x-1)^3.$$

Решение. Второй способ:
$$y' = 3(x-1)^2, \ 3(x-1)^2 = 0, \ x = 1;$$
$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0;$$
таким образом, второй способ ответа не дает. По первому способу находим:
$$(y')_{x<1} > 0, \quad (y')_{x>1} > 0.$$
Следовательно, при $x = 1$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (рис. 112).

§ 6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего значения (см. § 10 гл. II). Будем предполагать, что на данном отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции (если имеется несколько максимумов), а именно, наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Итак, функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов этого отрезка, либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой максимума.

То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой минимума.

Из предыдущего вытекает следующее правило: если требуется найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то надо:

1) найти все максимумы функции на отрезке;

2) определить значения функции на концах отрезка, т.е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее; оно и будет представлять собой наибольшее значение функции на отрезке.

Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.

Пример. Определить на отрезке $[-3; 3/2]$ наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = x^3 - 3x + 3.$$

Решение. 1) Находим максимумы и минимумы функции на отрезке $[-3, 3/2]$:
$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1,$$
$$x_2 = -1, \quad y'' = 6x,$$

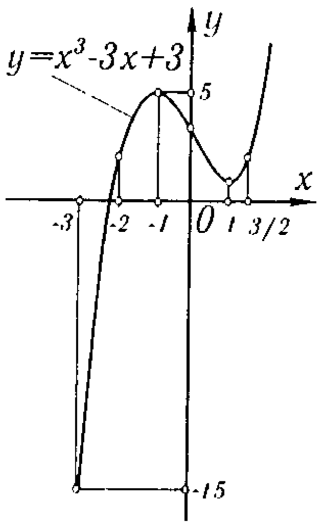


Рис. 113

тогда

$$(y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $x = 1$ имеет место минимум:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Далее,

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Следовательно, в точке $x = -1$ имеет место максимум:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Определяем значение функции на концах отрезка:

$$(y)_{x=3/2} = 15/8, \quad (y)_{x=-3} = -15.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $[-3; 3/2]$ есть

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

а наименьшее значение есть

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

График рассматриваемой функции изображен на рис. 113.

§ 7. Применение теории максимума и минимума функций к решению задач

С помощью теории максимума и минимума решаются многие задачи геометрии, механики и т.д. Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. Дальность $R = OA$ (рис. 114) полета ядра (в пустоте), выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, наклоненного под углом φ к горизонту, определяется формулой

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g — ускорение силы тяжести). Определить угол φ, при котором дальность R будет наибольшей при данной начальной скорости v_0.

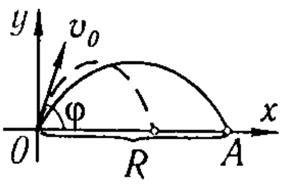


Рис. 114

Решение. Величина R представляет собой функцию переменного угла φ. Исследуем эту функцию на максимум на отрезке $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}, \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0,$$

критическое значение $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g},$$

$$\left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi/4} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Следовательно, при значении $\varphi = \frac{\pi}{4}$ дальность полета R имеет максимум

$$(R)_{\varphi=\pi/4} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Значения функции R на концах отрезка $[0; \pi/2]$ равны:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\pi/2} = 0.$$

Таким образом, найденный максимум и есть искомое наибольшее значение R.

Задача 2. Какие размеры надо придать цилиндру, чтобы при данном объеме v его полная поверхность была наименьшей?

Обозначая через r радиус основания цилиндра и через h высоту цилиндра, будем иметь:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Так как объем цилиндра задан, то при данном r величина h определяется формулой

$$v = \pi r^2 h,$$

откуда

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Подставляя это выражение h в формулу для S, получим:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2}, \quad \text{или } S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right).$$

Здесь v — заданное число. Таким образом, мы представили S как функцию одного независимого переменного r.

Найдем наименьшее значение этой функции в промежутке $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Следовательно, в точке $r = r_1$ функция S имеет минимум. Заметив, что $\lim\limits_{r\to 0} S = \infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty} S = \infty$, т.е. что при стремлении r к нулю или к бесконечности поверхность S неограниченно возрастает, мы приходим к выводу, что в точке $r = r_1$ функция S имеет *наименьшее значение*.

Но если $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, то

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Таким образом, для того чтобы при данном объеме v полная поверхность S цилиндра была наименьшей, высота цилиндра должна равняться его диаметру.

§ 8. Исследование функции на максимум и минимум с помощью формулы Тейлора

В § 5 главы V было замечено, что если в некоторой точке $x = a$ имеем $f'(a) = 0$ и $f''(a) = 0$, то в этой точке может быть либо максимум, либо минимум, либо нет ни того, ни другого. При этом указывалось, что для решения вопроса в этом случае нужно вести исследование первым способом, т.е. путем исследования знака первой производной слева и справа от точки $x = a$.

Теперь мы покажем, что можно в этом случае исследование вести и с помощью формулы Тейлора, выведенной в § 6 гл. IV.

Для большей общности предположим, что не только $f''(x)$, но и все производные до n-го порядка включительно от функции $f(x)$ обращаются в нуль при $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \tag{1}$$

а
$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Предположим далее, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки $x = a$.

Напишем формулу Тейлора для $f(x)$, принимая во внимание равенства (1):
$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{2}$$
где ξ — число, заключенное между a и x.

Так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в окрестности точки a и $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, то найдется такое малое положительное число h, что при любом x, удовлетворяющем неравенству $|x-a| < h$, будет $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. При этом если $f^{(n+1)}(a) > 0$, то и во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ будет $f^{(n+1)}(x) > 0$; если $f^{(n+1)}(a) < 0$, то во всех точках этого интервала будет $f^{(n+1)}(x) < 0$.

Перепишем формулу (2) в виде
$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2'}$$
и рассмотрим различные частные случаи.

Первый случай. n — нечетное.

а) Пусть $f^{(n+1)}(a) < 0$. Тогда найдется интервал $(a-h, a+h)$, во всех точках которого $(n+1)$-я производная отрицательна. Если x есть точка этого интервала, то ξ тоже находится между $a-h$ и $a+h$ и, следовательно, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Так как $n+1$ — четное число, то $(x-a)^{n+1} > 0$ при $x \neq a$, и поэтому правая часть в формуле $(2')$ отрицательна.

Следовательно, при $x \neq a$ во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ имеем:
$$f(x) - f(a) < 0,$$
а это значит, что при $x = a$ функция имеет максимум.

б) Пусть $f^{(n+1)}(a) > 0$. Тогда при достаточно малом значении h во всех точках x интервала $(a-h, a+h)$ имеет место $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Следовательно, правая часть формулы $(2')$ будет положительна, т.е. при $x \neq a$ во всех точках указанного интервала будет:
$$f(x) - f(a) > 0,$$
а это значит, что при $x = a$ функция имеет минимум.

Второй случай. n — четное.

Тогда $n+1$ — нечетное и величина $(x-a)^{n+1}$ имеет разные знаки при $x < a$ и $x > a$.

Если h достаточно мало по абсолютной величине, то $(n+1)$-я производная во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ сохраняет тот же знак, что и в точке a. Следовательно, $f(x) - f(a)$ имеет разные знаки при $x < a$ и при $x > a$. Но это значит, что при $x = a$ нет ни максимума, ни минимума.

Заметим, что если при n четном $f^{(n+1)}(a) > 0$, то $f(x) < f(a)$ для $x < a$ и $f(x) > f(a)$ для $x > a$.

Если же при n четном $f^{(n+1)}(a) < 0$, то $f(x) > f(a)$ для $x < a$ и $f(x) < f(a)$ для $x > a$.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Если при $x = a$ имеем:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$

и первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производного ***четного*** порядка, то в точке a

$$f(x) \text{ имеет } \textbf{\textit{максимум}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) < 0;$$

$$f(x) \text{ имеет } \textbf{\textit{минимум}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) > 0.$$

Если же первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производная ***нечетного*** порядка, то функция не имеет ни максимума, ни минимума в точке a. При этом

$$f(x) \textbf{\textit{ возрастает}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) > 0;$$

$$f(x) \textbf{\textit{ убывает}}, \text{ если } f^{(n+1)}(a) < 0.$$

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Решение. Найдем критические значения функции

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Из уравнения

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

получаем единственную критическую точку

$$x = 1$$

(так как данное уравнение имеет лишь один действительный корень).

Исследуем характер критической точки $x = 1$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 24x + 12 = 0 && \text{при } x = 1, \\ f'''(x) &= 24x - 24 = 0 && \text{при } x = 1, \\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= 24 > 0 && \text{при любом } x. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет минимум.

§ 9. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 1. Мы говорим, что кривая обращена ***выпуклостью вверх*** на интервале (a, b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Мы говорим, что кривая обращена *выпуклостью вниз* на интервале (b, c), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

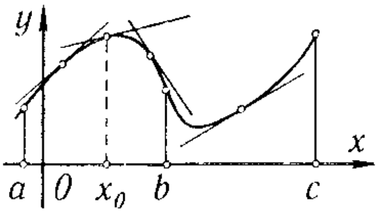


Рис. 115

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращенную выпуклостью вниз — *вогнутой*.

На рис. 115 показана кривая, выпуклая на интервале (a, b) и вогнутая на интервале (b, c).

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой ее формы. Настоящий параграф посвящен установлению признаков, по которым можно было бы, исследуя функцию $y = f(x)$, судить о направлении выпуклости ее графика на различных интервалах.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью зверх (кривая выпукла).*

Доказательство. Возьмем в интервале (a, b) произвольную точку $x = x_0$ (рис. 115) и проведем касательную к кривой в точке с абсциссой $x = x_0$. Теорема будет доказана, если мы установим, что все точки кривой на интервале (a, b) лежат ниже этой касательной, т.е. что ордината любой точки кривой $y = f(x)$ меньше ординаты y касательной при одном и том же значении x.

Уравнение кривой имеет вид

$$y = f(x). \tag{1}$$

Уравнение же касательной к кривой в точке $x = x_0$ имеет вид

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x равна

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получим:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(где c лежит между x_0 и x), или

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

К выражению, стоящему в квадратных скобках, снова применяем теорему Лагранжа; тогда

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

(где c_1 лежит между x_0 и c).

Рассмотрим сначала тот случай, когда $x > x_0$. В этом случае $x_0 < c_1 < c < x$; так как

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

и так как, кроме того, по условию,

$$f''(c_1) < 0,$$

то из равенства (3) следует, что $y - \bar{y} < 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x < x_0$. В этом случае $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, а так как, по условию, $f''(c_1) < 0$, то из равенства (3) следует, что

$$y - \bar{y} < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что любая точка кривой лежит ниже касательной к кривой, каковы бы ни были значения x и x_0 на интервале (a, b). А это и значит, что кривая выпукла. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 1$'$. *Если во всех точках интервала (b, c) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).*

Замечание. Содержание теорем 1 и 1$'$ можно иллюстрировать геометрически. Рассмотрим кривую $y = f(x)$, обращенную выпуклостью вверх на интервале (a, b) (рис. 116). Производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α наклона касательной в точке с абсциссой x, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому $f''(x) = [\operatorname{tg}\alpha]'_x$. Если $f''(x) < 0$ для всех x на интервале (a, b), то это значит, что $\operatorname{tg}\alpha$ убывает с возрастанием x. Геометрически нагляден тот факт, что если $\operatorname{tg}\alpha$ убывает с возрастанием x, то соответствующая кривая выпукла. Аналитическим доказательством этого факта и является теорема 1.

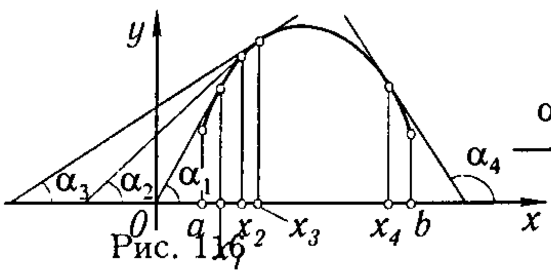


Рис. 116

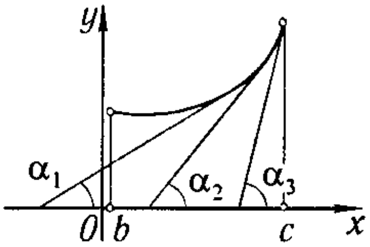


Рис. 117

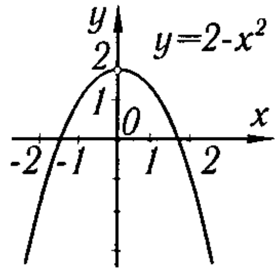


Рис. 118

Подобным же образом иллюстрируется геометрически и теорема 1$'$ (рис. 117).

Пример 1. Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением

$$y = 2 - x^2.$$

Решение. Вторая производная

$$y'' = -2 < 0$$

для всех значений x. Следовательно, кривая всюду обращена выпуклостью вверх (рис. 118).

Пример 2. Кривая задана уравнением

$$y = e^x.$$

Так как

$$y'' = e^x > 0$$

для всех значений x, то, следовательно, кривая всюду вогнута, т.е. обращена выпуклостью вниз (рис. 119).

Пример 3. Кривая определяется уравнением

$$y = x^3.$$

Так как

$$y'' = 6x,$$

то $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, при $x < 0$ кривая обращена выпуклостью вверх, а при $x > 0$ — выпуклостью вниз (рис. 120).

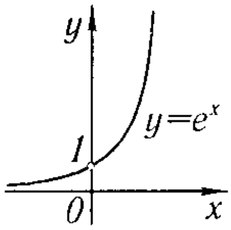


Рис. 119

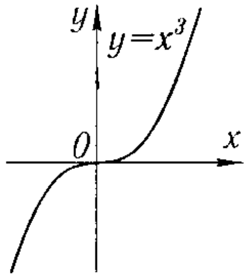


Рис. 120

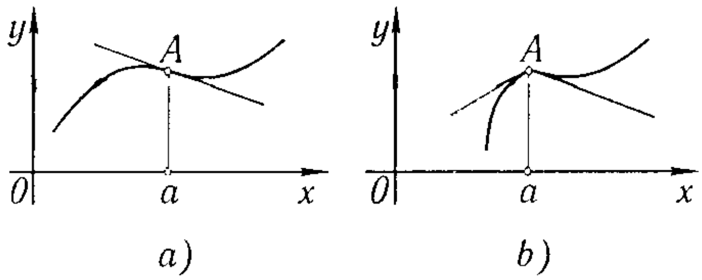


Рис. 121

Определение 2. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба* кривой.

На рис. 120, 121 и 122 точки O, A и B суть точки перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, ***пересекает*** кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит ***под*** касательной, а с другой стороны — ***над*** нею.

Установим теперь достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$.

Тогда при $x < a$ кривая обращена выпуклостью вверх и при $x > a$ — выпуклостью вниз. Следовательно, точка A кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба (рис. 121).

2) Если $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$, то при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ — выпуклостью вверх. Следовательно, точка B кривой с абсциссой $x = b$ есть точка перегиба (см. рис. 122).

Пример 4. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y = e^{-x^2} \quad (\textit{кривая Гаусса}).$$

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) Первая и вторая производные существуют всюду. Находим значения x, при которых $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$$

$$x_1 = -1/\sqrt{2}, \quad x_2 = 1/\sqrt{2}.$$

3) Исследуем полученные значения:

$$\text{при } x < -1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' > 0,$$

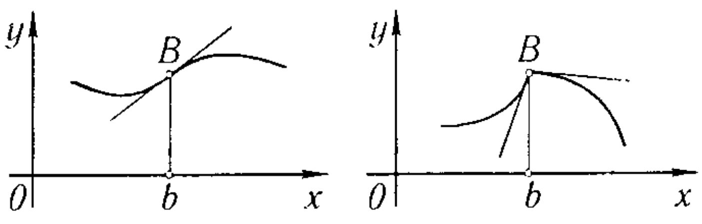
$$\text{при } x > -1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' < 0;$$

вторая производная меняет знак при переходе через точку x_1, следовательно, при $x_1 = -1/\sqrt{2}$ на кривой имеется точка перегиба; ее координаты: $(-1/\sqrt{2},\ e^{-1/2})$;

$$\text{при } x < 1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' < 0,$$

$$\text{при } x > 1/\sqrt{2} \text{ имеем } y'' > 0.$$

Следовательно, при $x_2 = 1/\sqrt{2}$ на кривой также имеется точка перегиба; ее координаты: $(1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$. Впрочем, существование второй точки перегиба вытекает непосредственно из симметрии кривой относительно оси Oy.



a) b)

Рис. 122

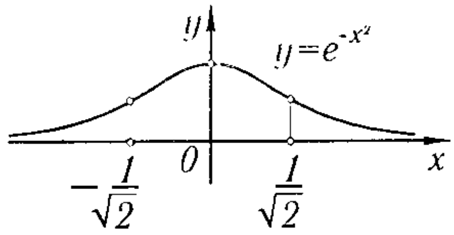


Рис. 123

4) Из предыдущего следует, что

$$\begin{array}{ll} \text{при } -\infty < x < -1/\sqrt{2} & \text{кривая вогнута,} \\ \text{при } -1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2} & \text{кривая выпукла,} \\ \text{при } 1/\sqrt{2} < x < +\infty & \text{кривая вогнута.} \end{array}$$

5) Из выражения первой производной

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

следует, что

$$y' > 0 \text{ при } x < 0, \text{ т.е. функция возрастает,}$$

$$y' < 0 \text{ при } x > 0, \text{ т.е. функция убывает,}$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

В этой точке функция имеет максимум, а именно: $y = 1$.

На основании проведенного исследования легко построить график кривой (рис. 123).

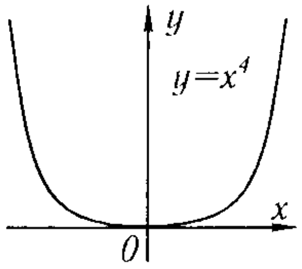


Рис. 124

Пример 5. Найти точки перегиба кривой
$$y = x^4.$$
Решение. 1) Находим вторую производную:
$$y'' = 12x^2.$$
2) Определяем точки, в которых $y'' = 0$:
$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$
3) Исследуем полученное значение $x = 0$:
$$y'' > 0 \text{ при } x < 0 \text{ — кривая вогнута,}$$
$$y'' > 0 \text{ при } x > 0 \text{ — кривая вогнута.}$$
Следовательно, кривая не имеет точек перегиба (рис. 124).

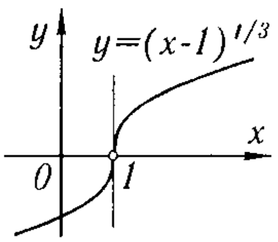


Рис. 125

Пример 6. Найти точки перегиба кривой.
$$y = (x-1)^{1/3}.$$
Решение. 1) Находим первую и вторую производные:
$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3},$$
$$y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}.$$
2) Вторая производная нигде не обращается в нуль, но при $x = 1$ она не существует ($y'' = \pm\infty$).

3) Исследуем значение $x = 1$:
$$y'' > 0 \text{ при } x < 1 \text{ — кривая вогнута,}$$
$$y'' < 0 \text{ при } x > 1 \text{ — кривая выпукла}$$
Следовательно, при $x = 1$ имеется точка перегиба; это — точка $(1; 0)$.

Заметим, что $y' = \infty$ при $x = 1$, т.е. кривая в этой точке имеет вертикальную касательную (рис. 125).

§ 10. Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y = f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции ***при неограниченном возрастании*** (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность*) неограниченно приближается к некоторой прямой.

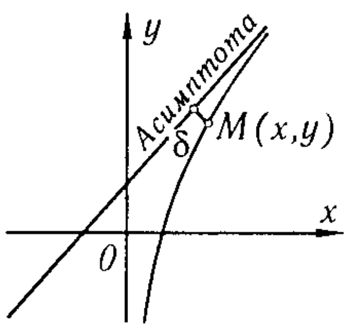


Рис. 126

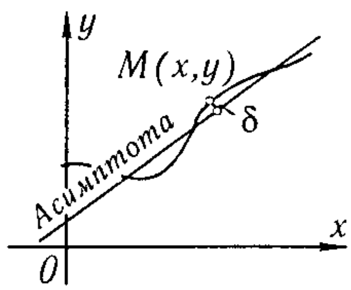


Рис. 127

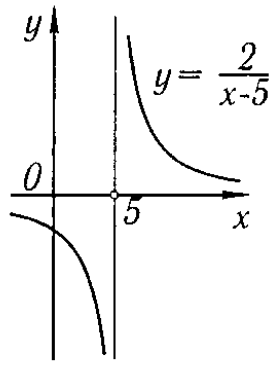


Рис. 128

*) Мы говорили, что переменная точка M движется по кривой в бесконечность, если расстояние этой точки от начала координат неограниченно возрастает.

Определение. Прямая A называется *асимптотой* кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю (рис. 126 и 127).

Мы будем в дальнейшем различать асимптоты *вертикальные* (т.е. параллельные оси ординат) и *наклонные* (т.е. непараллельные оси ординат).

I. **Вертикальные асимптоты.** Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой $y = f(x)$; и обратно, если прямая $x = a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных равенств.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти такие значения $x = a$, при приближении к которым функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой.

Пример 1. Кривая $y = \dfrac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, так как $y \to \infty$ при $x \to 5$ (рис. 128).

Пример 2. Кривая $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот:

$$x = \pm\pi/2,\ x = \pm 3\pi/2,\ x = \pm 5\pi/2, \ldots$$

Это следует из того, что $\operatorname{tg} x \to \infty$, когда x стремится к значениям $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, ... или $-\pi/2$, $-3\pi/2$, $-5\pi/2$, ... (рис. 129).

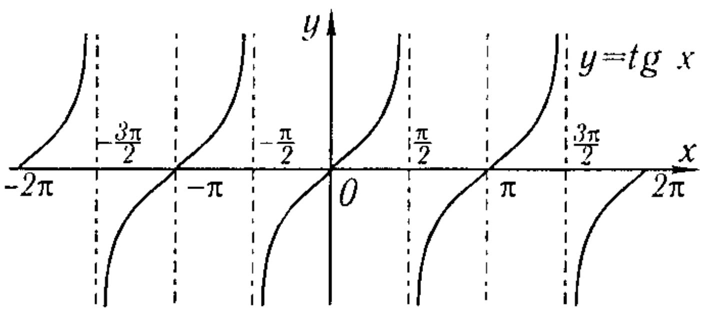


Рис. 129

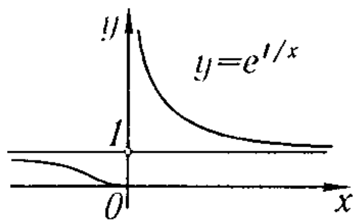


Рис. 130

Пример 3. Кривая $y = e^{1/x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} = \infty$ (рис. 130).

II. **Наклонные асимптоты.** Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид

$$y = kx + b. \tag{1}$$

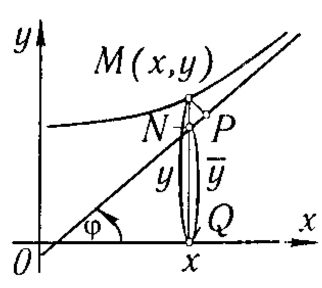


Рис. 131

Определим числа k и b (рис. 131). Пусть $M(x, y)$ – точка, лежащая на кривой, и $N(x, y)$ – точка, лежащая на асимптоте. Длина отрезка $[MP]$ равна расстоянию от точки M до асимптоты. По условию

$$\lim_{x\to+\infty} |MP| = 0. \tag{2}$$

Если обозначим через φ угол наклона к оси Ox, то из $\triangle NMP$ найдем:

$$|NM| = \frac{|MP|}{\cos\varphi}.$$

Так как φ — постоянный угол (не равный $\pi/2$), то в силу предыдущего равенства

$$\lim_{x\to+\infty} |MN| = 0, \tag{2'}$$

и наоборот, из равенства (2′) следует равенство (2). Но

$$|NM| = \big||QM| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

и равенство (2′) принимает вид

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx - b] = 0. \tag{3}$$

Итак, если прямая (1) есть асимптота, то выполняется равенство (3), и наоборот, если при постоянных k и b выполняется равенство (3), то прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Определим теперь k и b. Вынося x за скобки в равенстве (3), получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Так как $x \to +\infty$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

При b постоянном $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0$, или

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{4}$$

Зная k, из равенства (3) находим b:

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]. \tag{5}$$

Итак, если прямая $y = kx+b$ есть асимптота, то k и b находятся по формулам (4) и (5). Обратно, если существуют пределы (4) и (5), то выполняется равенство (3) и прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Если хотя бы один из пределов (4) или (5) не существует, то кривая асимптоты не имеет.

Заметим, что мы проводили исследование применительно к рис. 131 при $x \to +\infty$, но все рассуждения справедливы и для случая $x \to -\infty$.

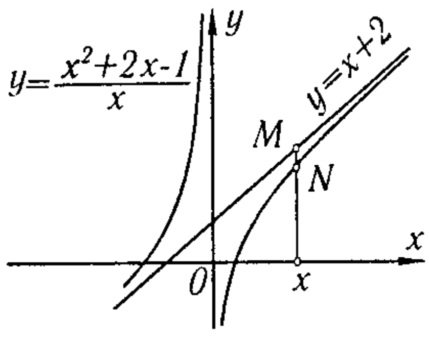


Рис. 132

Пример 4. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Решение. 1) Ищем вертикальные асимптоты:

$$y \to +\infty \text{ при } x \to 0,$$
$$y \to -\infty \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота данной кривой.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1,$$

т.е.

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2,$$

т.е.

$$b = 2.$$

Следовательно, прямая

$$y = x + 2$$

есть наклонная асимптота данной кривой.

Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении x:

$$\frac{x^2+2x-1}{x} - (x+2) = -\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ эта разность отрицательна, а при $x < 0$ — положительна; следовательно, при $x > 0$ кривая лежит ниже асимптоты, при $x < 0$ — выше асимптоты (рис. 132).

Пример 5. Найти асимптоты кривой

$$y = e^{-x}\sin x + x.$$

Решение. 1) Вертикальных асимптот, очевидно, нет.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}\sin x + x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{e^{-x}\sin x}{x} + 1\right] = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [e^{-x}\sin x + x - x] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin x = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ есть наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

Заданная кривая не имеет асимптоты при $x \to -\infty$. Действительно, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y}{x}$ не существует, так как

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}\sin x + 1.$$

(Здесь первое слагаемое неограниченно возрастает при $x \to -\infty$ и, следовательно, предела не имеет.)

§ 11. Общий план исследования функций и построения графиков

Под «исследованием функции» обычно понимается разыскание:

1) естественной области существования функции;
2) точек разрыва функции;
3) интервалов возрастания и убывания функции;
4) точек максимума и минимума, а также максимальных и минимальных значений функции;
5) областей выпуклости и вогнутости графика, точек перегиба;
6) асимптот графика функции.

На основании проведенного исследования строится график функции (иногда целесообразно намечать элементы графика параллельно с исследованием).

Замечание 1. Если исследуемая функция $y = f(x)$ — *четная*, т.е. такая, что при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т.е. если

$$f(-x) = f(x),$$

то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Пример 1. Функция $y = x^2$ — четная, так как $(-x)^2 = x^2$ (см. рис. 5).

Пример 2. Функция $y = \cos x$ — четная, так как $\cos(-x) = \cos x$ (см. рис. 16).

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ — *нечетная*, т.е. такая, что при изменении аргумента функция меняет знак, т.е. если

$$f(-x) = -f(x),$$

то эту функцию достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 3. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$ (см. рис. 7).

Пример 4. Функция $y = \sin x$ — нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$ (см. рис. 15).

Замечание 3. Так как знание одних свойств функции позволяет сделать вывод о других ее свойствах, то иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции. Так, например, если мы выяснили, что заданная функция непрерывна и дифференцируема, и нашли точки максимума и минимума этой функции, то тем самым мы уже определили и области возрастания и убывания функции.

Пример 5. Исследовать функцию

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

Решение. 1) Область существования функции — интервал $-\infty < x < +\infty$. Сразу отметим, что при $x < 0$ имеем $y < 0$, а при $x > 0$ имеем $y > 0$.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум: из равенства

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

находим критические точки:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Исследуем характер критических точек:

$$\text{при } x < -1 \text{ имеем } y' < 0;$$
$$\text{при } x > -1 \text{ имеем } y' > 0.$$

Следовательно, при $x = -1$ функция имеет минимум:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = -0{,}5.$$

Далее,

$$\text{при } x < 1 \text{ имеем } y' > 0;$$

$$\text{при } x > 1 \text{ имеем } y' < 0.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум:

$$y_{\max} = (y)_{x=1} = 0{,}5.$$

4) Определим области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < -1$ имеем $y' < 0$ — функция убывает,

при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$ — функция возрастает,

при $1 < x < +\infty$ имеем $y' < 0$ — функция убывает.

5) Определим области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: из равенства

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

получаем:

$$x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}.$$

Исследуя y'' как функцию от x, находим:

при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ $y'' < 0$ — кривая выпуклая,

при $-\sqrt{3} < x < 0$ $y'' > 0$ — кривая вогнутая,

при $0 < x < \sqrt{3}$ $y'' < 0$ — кривая выпуклая,

при $\sqrt{3} < x < +\infty$ $y'' > 0$ — кривая вогнутая.

Следовательно, точка с координатами $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}/4$ есть точка перегиба; точно так же точки $(0,0)$ и $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$ есть точки перегиба.

6) Определим асимптоты кривой:

при $y \to +\infty$ $y \to 0$,

при $y \to -\infty$ $y \to 0$.

Следовательно, прямая $y = 0$ есть единственная наклонная асимптота.

Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как ни для одного конечного значения x функция не стремится к бесконечности.

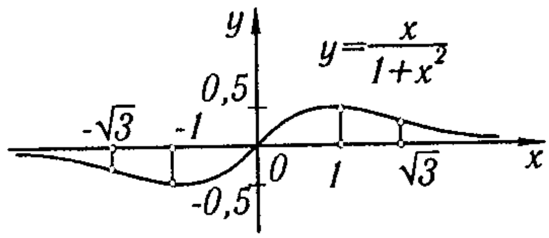


Рис. 133

График исследуемой кривой изображен на рис. 133.

Пример 6. Исследовать функцию

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} \quad (a > 0)$$

и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях x.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}.$$

Производная существует всюду, за исключением точек

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 2a.$$

Исследуем предельные значения производной при $x \to -0$ и при $x \to +0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}} = +\infty$$

при $x < 0$ будет $y' < 0$, при $x > 0$ будет $y' > 0$.

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум. Значение функции в этой точке равно нулю.

Исследуем теперь функцию в другой критической точке $x_2 = 2a$. При $x \to 2a$ производная также стремится к бесконечности. Однако в данном случае для всех значений x, близких к $2a$ (находящихся как справа, так и слева от точки $2a$), производная отрицательна. Следовательно, в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $x_2 = 2a$, так же как и вблизи этой точки, функция убывает; касательная к кривой в этой точке вертикальна.

При $x = 4a/3$ производная обращается в нуль. Исследуем характер этой критической точки. Рассматривая выражение первой производной, замечаем, что

$$\text{при } x < 4a/3 \text{ будет } y' > 0, \text{ при } x > 4a/3 \text{ будет } y' < 0.$$

Следовательно, при $x = 4a/3$ функция имеет максимум:

$$y_{\max} = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

4) На основании проведенного исследования получаем области возрастания и убывания функции:

$$\begin{array}{ll}
\text{при } -\infty < x < 0 & \text{функция убывает,} \\
\text{при } 0 < x < 4a/3 & \text{функция возрастает,} \\
\text{при } 4a/3 < x < +\infty & \text{функция убывает.}
\end{array}$$

5) Определяем области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: вторая производная

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{4/3}(2a-x)^{5/3}}$$

ни в одной точке не обращается в нуль. Однако существуют две точки, в которых вторая производная терпит разрыв: это точки

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2a.$$

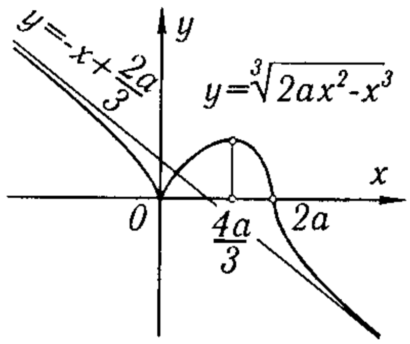


Рис. 134

Исследуем знак второй производной вблизи каждой из этих точек:

при $x < 0$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх;

при $x > 0$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх.

Значит, точка с абсциссой $x = 0$ не является точкой перегиба.

При $x < 2a$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх; при $x > 2a$ имеем $y'' > 0$ — кривая обращена выпуклостью вниз. Значит, точка $(2a; 0)$ на кривой является точкой перегиба.

6) Определяем асимптоты кривой:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x^2} = \frac{2a}{3}.$$

Следовательно, прямая

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

есть наклонная асимптота кривой $y = \sqrt[3]{2ax^2-x^3}$. График исследуемой функции изображен на рис. 134.

§ 12. Исследование кривых, заданных параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В этом случае исследование и построение кривой проводятся аналогично тому, как это было сделано для кривой, заданной уравнением

$$y = f(x).$$

Вычисляем производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для тех точек кривой, вблизи которых кривая является графиком некоторой функции $y = f(x)$, вычисляем производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3}$$

Находим значения параметра $t = t_1, t_2, \ldots, t_k$, при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ обращается в нуль или терпит разрыв. (Такие значения t мы будем называть критическими значениями.) По формуле (3) в каждом из интервалов (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_{k-1}, t_k), а следовательно, и в каждом из интервалов (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{k-1}, x_k) (где $x_i = \varphi(t_i)$) определяем знак $\frac{dy}{dx}$, тем самым определяем области возрастания и убывания. Это дает также возможность определить характер точек, соответствующих значениям параметра $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Далее, вычисляем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{4}$$

На основании этой формулы определяем направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x, или y стремятся к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x, и y стремятся к бесконечности. Затем производим исследование обычным способом.

Некоторые особенности, появляющиеся при исследовании кривых, заданных параметрически, выясним на примерах.

Пример 1. Исследовать кривую, заданную уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\} \quad (a > 0). \tag{1'}$$

Решение. Величины x и y определены для всех значений t. Но так как функции $\cos^3 t$ и $\sin^3 t$ — периодические, с периодом 2π, достаточно рассмотреть изменение параметра t в пределах от 0 до 2π; при этом областью изменения x будет отрезок $[-a, a]$ и областью изменения y будет отрезок $[-a, a]$. Следовательно, рассматриваемая кривая асимптот не имеет. Далее, находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\sin^2 t\cos t. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Эти производные обращаются в нуль при $t = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. Определяем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t. \qquad (3')$$

На основании формул $(2')$, $(3')$ составляем следующую таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер изменения y как функции от x $(y = f(x))$
$0 < t < \pi/2$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	$-$	убывает
$\pi/2 < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	$+$	возрастает
$\pi < t < 3\pi/2$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	$-$	убывает
$3\pi/2 < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	$+$	возрастает

Из таблицы следует, что уравнения $(1')$ определяют две непрерывные функции вида $y = f(x)$, при $0 \leqslant t \leqslant \pi$ будет $y \geqslant 0$ (см. две первые строчки таблицы), при $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ будет $y \leqslant 0$ (см. две последние строчки таблицы). Из формулы $(3')$ следует:

$$\lim_{t\to\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 3\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

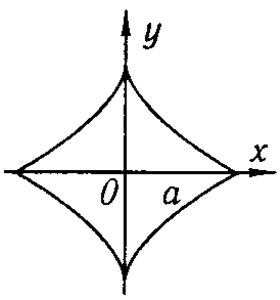


Рис. 135

В этих точках касательная к кривой вертикальна. Далее, находим:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

В этих точках касательная к кривой горизонтальна. Затем находим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ при } 0 < t < \pi \quad \text{— кривая вогнута,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ при } \pi < t < 2\pi \quad \text{— кривая выпукла.}$$

На основании результатов исследования можем построить кривую (рис. 135). Эта кривая называется *астроидой*.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнениями (*декартов лист*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (a > 0). \qquad (1'')$$

Решение. Обе функции определены при всех значениях t, кроме $t=-1$, при этом

$$\lim_{t\to-1-0} x = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$
$$\lim_{t\to-1-0} y = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty;$$
$$\lim_{t\to-1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t\to-1+0} y = +\infty.$$

Заметим, далее, что

$$x=0,\ y=0 \text{ при } t=0,$$
$$x\to 0,\ y\to 0 \text{ при } t\to+\infty,$$
$$x\to 0,\ y\to 0 \text{ при } t\to-\infty.$$

Найдем $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \qquad (2'')$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Для параметра t получаем следующие четыре критических значения:

$$t_1=-1, \quad t_2=0, \quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Далее, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \qquad (3'')$$

На основании формул $(1'')$, $(2'')$, $(3'')$ составляем таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер изменения y как функции от x $(y=f(x))$
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	$-$	убывает
$-1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	$-$	убывает
$0<t<1/\sqrt[3]{2}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	$+$	возрастает
$1/\sqrt[3]{2}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}$	$-$	убывает
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>0$	$a\sqrt[3]{4}>y>0$	$+$	возрастает

Из формулы $(3'')$ находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \binom{x=0}{y=0}}} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \binom{x=0}{y=0}}} = \infty.$$

Следовательно, начало координат кривая пересекает дважды: с касательной, параллельной оси Ox, и с касательной, параллельной оси Oy.

Далее,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \infty \quad \text{при} \quad t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (x=a\sqrt[3]{4},\ y=a\sqrt[3]{2}).$$

В этой точке касательная к кривой вертикальна.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{при} \quad t = \sqrt[3]{2} \quad (x = a\sqrt[3]{2},\ y = a\sqrt[3]{4}).$$

В этой точке касательная к кривой горизонтальна. Исследуем вопрос о существовании асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1)\frac{3at}{1+t^3}\right] =$$

$$= \lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right] = \lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Следовательно, прямая $y = -x - a$ является асимптотой ветви кривой при

$$x \to +\infty.$$

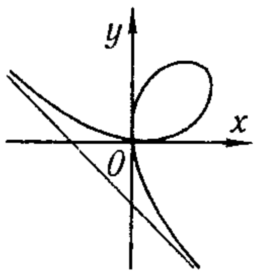


Рис. 136

Аналогичным образом найдем:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y-kx) = -a.$$

Таким образом, найденная прямая является асимптотой и для ветви кривой при $x \to -\infty$.

На основании проведенного исследования строим кривую (рис. 136).

Некоторые вопросы, связанные с исследованием кривых, будут дополнительно рассмотрены в главе VIII, § 19 «Особые точки кривой».

Упражнения к главе V

Найти экстремумы функций: **1.** $y = x^2 - 2x + 3$. *Отв.* $y_{\min} = 2$ при $x = 1$. **2.** $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. *Отв.* $y_{\max} = \frac{7}{3}$ при $x = 1$, $y_{\min} = 1$ при $x = 3$. **3.** $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. *Отв.* $y_{\max} = 10$ при $x = 1$, $y_{\min} = -22$ при $x = 5$. **4.** $y = -x^4 + 2x^2$. *Отв.* $y_{\max} = 1$ при $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **5.** $y = x^4 - 8x^2 + 2$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = -14$ при $x = \pm 2$. **6.** $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. *Отв.* Максимум при $x = -4$ и $x = 3$, минимум при $x = -3$ и $x = 4$. **7.** $y = 2 - (x-1)^{2/3}$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 1$. **8.** $y = 3 - 2(x+1)^{1/3}$. *Отв.* Нет ни максимума, ни минимума. **9.** $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. *Отв.* Минимум при $x = \sqrt{2}$, максимум при $x = -\sqrt{2}$. **10.** $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. *Отв.* Максимум при $x = \frac{12}{5}$. **11.** $y = 2e^x + e^{-x}$. *Отв.* Минимум при $x = -\frac{\ln 2}{2}$. **12.** $y = \frac{x}{\ln x}$. *Отв.* $y_{\min} = e$ при $x = e$. **13.** $y = \cos x + \sin x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. *Отв.* $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \pi/4$. **14.** $y = \sin 2x - x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. *Отв.* Максимум при $x = \pi/6$, минимум при $x = -\pi/6$. **15.** $y = x + \operatorname{tg} x$. *Отв.* Нет ни максимума, ни минимума. **16.** $y = e^x \sin x$. *Отв.* Минимум при $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$, максимум при

$x = 2k\pi + \dfrac{3}{4}\pi$. **17.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$. *Отв.* Максимум при $x = 0$; два минимума при $x = -1$ и при $x = 1$. **18.** $y = (x-2)^3(2x+1)$. *Отв.* $y_{\min} \approx -8{,}24$ при $x = 1/8$. **19.** $y = x + \dfrac{1}{x}$. *Отв.* Минимум при $x = 1$; максимум при $x = -1$. **20.** $y = x^2(a-x)^2$. *Отв.* $y_{\max} = a^4/16$ при $x = a/2$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$ и при $x = a$. **21.** $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$. *Отв.* Максимум при $x = \dfrac{a^2}{a-b}$; минимум при $x = \dfrac{a^2}{a+b}$. **22.** $y = x + \sqrt{1-x}$. *Отв.* $y_{\max} = 5/4$ при $x = 3/4$; $y_{\min} = 1$ при $x = 1$. **23.** $y = x\sqrt{1-x}$ $(x \leqslant 1)$. *Отв.* $y_{\max} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ при $x = \dfrac{2}{3}$. **24.** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. *Отв.* Минимум при $x = -1$; максимум при $x = 1$. **25.** $y = x\ln x$. *Отв.* Минимум при $x = 1/e$. **26.** $y = x\ln^2 x$. *Отв.* $y_{\max} = 4e^{-2}$ при $x = e^{-2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$. **27.** $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. *Отв.* Функция возрастает. **28.** $y = \sin 3x - 3\sin x$. *Отв.* Минимум при $x = \pi/2$; максимум при $x = 3\pi/2$. **29.** $y = 2x + \operatorname{arctg} x$. *Отв.* Нет экстремумов. **30.** $y = \sin x \cos^2 x$. *Отв.* Минимум при $x = \pi/2$; два максимума: при $x = \arccos\sqrt{2/3}$ и при $x = \arccos(-\sqrt{2/3})$. **31.** $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* Максимум при $x = (4m+1)\pi/2$; минимум при $x = (4m+3)\pi/2$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках: **32.** $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = 2$ при $x = \pm 1$, наименьшее значение $y = -25$ при $x = \pm 2$. **33.** $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 5)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = 23/3$ при $x = 5$, наименьшее значение $y = -13/3$ при $x = -1$. **34.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = 3/5$ при $x = 4$, наименьшее значение $y = -1$ при $x = 0$. **35.** $y = \sin 2x - x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. *Отв.* Наибольшее значение $y = \pi/2$ при $x = -\pi/2$, наименьшее значение $y = -\pi/2$ при $x = \pi/2$.

36. Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов? *Отв.* $a/6$.

37. Доказать, что из всех прямоугольников, которые могут быть вписаны в данный круг, наибольшую площадь имеет квадрат. Показать также, что у квадрата и периметр будет наибольший.

38. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

39. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, имеющей гипотенузой отрезок h. *Отв.* Длина каждого катета равна $h/\sqrt{2}$.

40. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшим объемом, который может быть вписан в шар радиуса R. *Отв.* Высота равна $2R/\sqrt{3}$.

41. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, который может быть вписан в данный шар радиуса R. *Отв.* Высота равна $R\sqrt{2}$.

42. Найти высоту прямого конуса с наименьшим объемом, описанного около данного шара радиуса R. *Отв.* Высота равна $4R$ (объем конуса равен двум объемам шара).

43. Резервуар, который должен иметь квадратное дно и быть открытым сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каковы должны быть размеры резервуара емкостью в 32 *л*, чтобы выкладка требовала наименьшего количества свинца? *Отв.* Высота 0,2 *м*, сторона основания 0,4 *м* (т.е. сторона основания должна быть вдвое больше высоты).

44. Кровельщик желает сделать открытый желоб наибольшей вместимости, у которого дно и бока были бы шириной 10 *см* и бока были бы одинаково наклонены ко дну. Какова должна быть ширина желоба наверху? *Отв.* 20 *см*.

45. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раза больше радиуса основания.

46. Требуется изготовить цилиндр, открытый сверху, стенки и дно которого имеют данную толщину. Каковы должны быть размеры цилиндра, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала? *Отв.* Если R — внутренний радиус основания, v — внутренний объем цилиндра, то $R = \sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Требуется построить котел, состоящий из цилиндра, завершенного двумя полусферами, со стенками постоянной толщины так, чтобы при данном объеме v он имел наименьшую наружную поверхность. *Отв.* Котел должен иметь форму шара с внутренним радиусом $R = \sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Построить равнобочную трапецию, которая при данной площади S имела бы наименьший периметр; угол при основании трапеции равен α. *Отв.* Длина боковой стороны равна $\sqrt{S/\sin\alpha}$.

49. Вписать в данный шар радиуса R правильную треугольную призму наибольшего объема. *Отв.* Высота призмы равна $2R/\sqrt{3}$.

50. Около полушара радиуса R требуется описать конус наименьшего объема; плоскость основания конуса совпадает с плоскостью основания полушара; найти высоту конуса. *Отв.* Высота конуса равна $R\sqrt{3}$.

51. Описать около данного цилиндра радиуса r прямой конус наименьшего объема, полагая, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. *Отв.* Радиус основания конуса равен $3r/2$.

52. Из листа, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. *Отв.* Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Из всех круглых цилиндров, вписанных в данный куб с ребром a таким образом, что оси их совпадают с диагональю куба, а окружности оснований касаются его граней, найти наибольший по объему. *Отв.* Высота цилиндра равна $a\sqrt{3}/3$; радиус основания равен $a/\sqrt{6}$.

54. В прямоугольной системе координат дана точка (x_0, y_0), лежащая в первом квадрате. Провести через эту точку прямую так, чтобы она образовала с положительными направлениями осей координат треугольник наименьшей площади. *Отв.* Прямая отсекает на осях отрезки $2x_0$ и $2y_0$, т.е. имеет уравнение $\dfrac{x}{2x_0} + \dfrac{y}{2y_0} = 1$.

55. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка на расстоянии a от вершины; найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой. *Отв.* $x = a - p$.

56. Принимая, что прочность бруска с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна ширине и кубу высоты, найти ширину бруска наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром 16 *см*. *Отв.* Ширина равна 8 *см*.

57. Миноносец стоит на якоре в 9 *км* от ближайшей точки берега; с миноносца надо послать гонца в военный лагерь, расположенный в 15 *км*, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега. Если гонец может делать пешком по 5 *км* в час, а на веслах по 4 *км* в час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы поспеть в лагерь в кратчайшее время. *Отв.* Ь 3 *км* от лагеря.

58. Точка перемещается прямолинейно по плоскости в среде, расположенной вне линии MN — со скоростью v_1, а по линии MN — со скоростью v_2. По какому пути она переместится в наименьший промежуток времени из точки A в точку B, расположенную на линии MN? Расстояние точки A от линии MN равно h, расстояние проекции α точки A на линию MN от B равно a. *Отв.* Если ABC — путь точки, то $\frac{|\alpha C|}{|AC|} = \frac{v_1}{v_2}$ при $\frac{|\alpha B|}{|AB|} \geqslant \frac{v_1}{v_2}$ и $|\alpha C| = |\alpha B|$ при $\frac{|\alpha B|}{|AB|} < \frac{v_1}{v_2}$.

59. Груз w подымают рычагом, причем сила F приложена к одном концу, а точка опоры находится на другом конце рычага. Если груз привешен к точке, находящейся на расстоянии a сантиметров от точки опоры, а стержень рычага весит v граммов на каждый сантиметр длины, то какова должна быть длина рычага, чтобы сила, потребная для поднятия груза, была наименьшей? *Отв.* $x = \sqrt{2aw/v}$ *см.*

60. При n измерениях неизвестной величины x получены отсчеты: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Показать, что сумма квадратов погрешностей $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ будет наименьшей, если за x принять число $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$.

61. Чтобы по возможности уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала превышает вдвое его высоту.

Определить точки перегиба и интервалы выпуклости вогнутости кривых: **62.** $y = x^5$. *Отв.* При $x < 0$ кривая выпукла; при $x > 0$ кривая вогнута; при $x = 0$ точка перегиба. **63.** $y = 1 - x^2$. *Отв.* Кривая всюду выпукла. **64.** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. *Отв.* При $x = 1$ точка перегиба. **65.** $y = (x - b)^3$. *Отв.* При $x = b$ точка перегиба. **66.** $y = x^4$. *Отв.* Кривая всюду вогнута. **67.** $y = (x^2 + 1)^{-1}$. *Отв.* При $x = \pm 1/\sqrt{3}$ точки перегиба. **68.** $y = \operatorname{tg} x$. *Отв.* При $x = n\pi$ точки перегиба. **69.** $y = xe^{-x}$. *Отв.* При $x = 2$ точка перегиба. **70.** $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. *Отв.* При $x = b$ точка перегиба. **71.** $y = a - \sqrt[3]{(x - b)^2}$. *Отв.* Кривая не имеет точек перегиба.

Найти асимптоты следующих кривых: **72.** $y = \frac{1}{x-1}$. *Отв.* $x = 1$; $y = 0$. **73.** $y = \frac{1}{(x+2)^3}$. *Отв.* $x = -2$; $y = 0$. **74.** $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}$. *Отв.* $x = b$, $y = c$. **75.** $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. *Отв.* $x = 0$; $y = 0$. **76.** $y = \ln x$. *Отв.* $x = 0$. **77.** $y^3 = 6x^2 + x^3$. *Отв.* $y = x + 2$. **78.** $y^3 = a^3 - x^3$. *Отв.* $y + x = 0$. **79.** $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Отв.* $x = 2a$. **80.** $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. *Отв.* $x = 2a$. $y = \pm(x + a)$.

Исследовать функции и построить их графики: **81.** $y = x^4 - 2x + 10$. **82.** $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$. **83.** $y = e^{-\frac{1}{x}}$. **84.** $y = \frac{6x}{1+x^2}$. **85.** $y = \frac{4+x}{x^2}$. **86.** $y = \frac{x}{x^2-1}$. **87.** $y = \frac{x+2}{x^3}$. **88.** $y = \frac{x^2}{1+x}$. **89.** $y^2 = x^3 - x$. **90.** $y = \frac{x^3}{3-x^2}$. **91.** $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$. **92.** $y = x - \sqrt[3]{x^3+1}$. **93.** $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. **94.** $y = xe^{-x}$. **95.** $y = x^2e^{-x^2}$. **96.** $y = x - \ln(x + 1)$. **97.** $y = \ln(x^2 + 1)$. **98.** $y = \sin 3x$. **99.** $y = x + \sin x$. **100.** $y = x \sin x$. **101.** $y = e^{-x} \sin x$. **102.** $y = \ln \sin x$. **103.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t. \end{cases}$ **105.** $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ **107.** $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Дополнительные задачи

Найти асимптоты линий: **108.** $y = \dfrac{x^2+1}{1+x}$. *Отв.* $x=-1$; $y = x-1$. **109.** $y = x + e^{-x}$. *Отв.* $y = x$. **110.** $2y(x+1)^2 = x^3$. *Отв.* $x=-1$; $y = \dfrac{1}{2}x - 1$. **111.** $y^3 = a^3 - x^2$. *Отв.* Асимптот нет. **112.** $y = e^{-2x}\sin x$. *Отв.* $y = 0$. **113.** $y = e^{-x}\sin 2x + x$. *Отв.* $y = x$. **114.** $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$. *Отв.* $x = -\dfrac{1}{e}$; $y = x + \dfrac{1}{e}$. **115.** $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. *Отв.* $x = 0$; $y = x$. **116.** $x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$. *Отв.* $y = \pm\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Исследовать функции и построить их графики: **117.** $y = |x|$. **118.** $y = \ln|x|$. **119.** $y^2 = x^3 - x$. **120.** $y = (x+1)^2(x-2)$. **121.** $y = x + |x|$. **122.** $y = \sqrt[3]{x^2} - x$. **123.** $y = x^2\sqrt{x+1}$. **124.** $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$. **125.** $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x$. **126.** $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$. **127.** $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **128.** $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$. **129.** $y = x\ln x$. **130.** $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. **131.** $y = |\sin 3x|$. **132.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$. **133.** $y = x\operatorname{arctg} x$. **134.** $y = x - 2\operatorname{arctg} x$. **135.** $y = e^{-2x}\sin 3x$. **136.** $y = |\sin x| + x$. **137.** $y = \sin(x^2)$. **138.** $y = \cos^3 x + \sin^3 x$. **139** $y = \dfrac{x+|x|}{2}$. **140.** $y = \dfrac{x-|x|}{2}$. **141.** $y = \sin\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right) - \dfrac{x-|x|}{2}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. **142.** $y = \cos\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right) - \dfrac{x+|x|}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$. **143.** $y = \dfrac{1}{2}(3x + |x|) + 1$. **144.** $y = \dfrac{1}{2}[3(x-1) + |x-1|] + 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

Глава VI
КРИВИЗНА КРИВОЙ

§ 1. Длина дуги и ее производная

Пусть дуга кривой M_0M (рис. 137) есть график функции

$$y = f(x),$$

определенной на интервале (a, b). Определим длину дуги кривой. Возьмем на кривой AB точки

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{i-1},\ M_i,\ \ldots,\ M_{n-1},\ M.$$

Соединив взятые точки отрезками, получим ломаную линию

$$M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M,$$

вписанную в дугу M_0M. Обозначим длину этой ломаной через P_n.

Длиной дуги M_0M называется предел (обозначим его через s), к которому стремится длина ломаной, при стремлении к нулю наибольшей из длин отрезков ломаной $M_{i-1}M_i$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек ломаной $M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$.

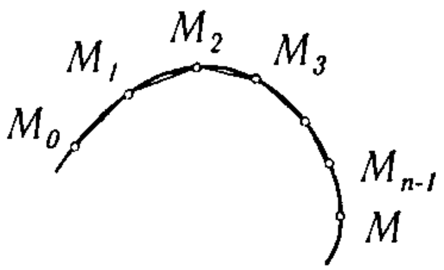


Рис. 137

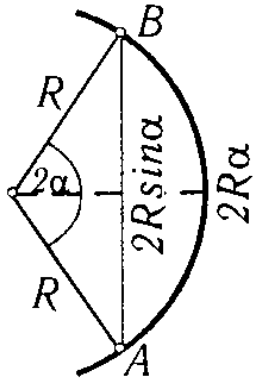


Рис. 138

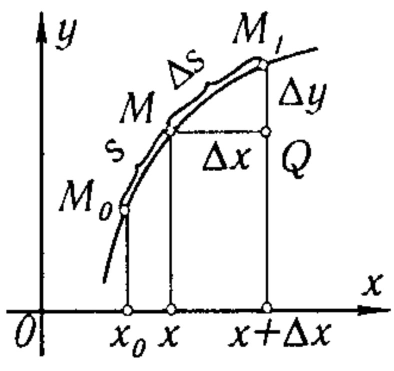


Рис. 139

Отметим, что это определение длины дуги произвольной кривой аналогично определению длины окружности.

В главе XII будет доказано, что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то дуга кривой $y = f(x)$, заключенная между точками $[a; f(a)]$ и $[b; f(b)]$, имеет вполне определенную длину, причем будет указан способ вычисления этой длины. Там же будет установлено (как следствие), что в указанных условиях отношение длины любой дуги этой кривой к длине стягивающей ее хорды стремится к 1, когда длина хорды стремится к 0:

$$\lim_{M_0M\to 0} \frac{\text{дл.}\,\overset{\smile}{M_0M}}{\text{дл.}\overline{M_0M}} = 1.$$

Эта теорема легко может быть доказана для окружности*), однако в общем случае мы пока примем ее без доказательства.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть мы имеем на плоскости кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка кривой, а $M(x, y)$ — переменная точка этой кривой. Обозначим через s длину дуги M_0M (рис. 139).

При изменении абсциссы x точки M длина дуги s будет меняться, т.е. s есть функция x. Найдем производную s по x.

Дадим x приращение Δx. Тогда дуга s получит приращение $\Delta s = \text{дл.}\,\overset{\smile}{MM_1}$. Пусть $\overline{MM_1}$ — хорда, стягивающая эту дугу. Для того, чтобы найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$, поступим следующим образом: из ΔMM_1Q находим: $\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Помножим и разделим левую часть на Δs^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Разделим все члены равенства на Δx^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Найдем предел левой и правой частей при $\Delta x \to 0$. Учитывая, что $\lim\limits_{\overline{MM_1}\to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ и что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{1}$$

Для *дифференциала дуги* получим следующее выражение:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{2}$$

или**)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{2'}$$

---

*) Рассмотрим дугу AB, центральный угол которой равен 2α (рис. 138). Длина этой дуги равна $2R\alpha$ (R — радиус окружности), а длина стягивающей ее хорды равна $2R\sin\alpha$. Поэтому $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\text{дл.}\,\overset{\smile}{AB}}{\text{дл.}\overline{AB}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2R\alpha}{2R\sin\alpha} = 1$.

**) Строго говоря, формула (2′) верна лишь для того случая, когда $dx > 0$. Если же $dx < 0$, то $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Поэтому в общем случае эту формулу правильнее записать так: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Мы получили выражение дифференциала длины дуги для того случая, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$. Однако формула (2′) сохраняется и в том случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями. Если кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt,$$

и выражение (2′) принимает вид

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

§ 2. Кривизна

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности.

Пусть мы имеем кривую, которая не пересекает самое себя и имеет определенную касательную в каждой точке. Проведем касательные к кривой в каких-нибудь двух ее точках A и B и обозначим через α угол, образованный этими касательными, или — точнее — угол поворота касательной при переходе от точки A к точке B (рис. 140). Этот угол называется *углом смежности* дуги AB. У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та дуга, у которой угол смежности больше (рис. 140 и 141).

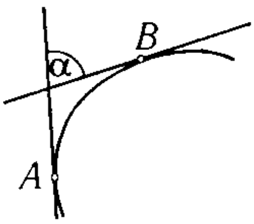


Рис. 140

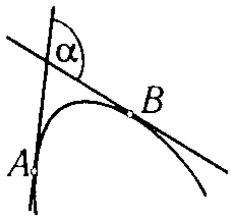


Рис. 141

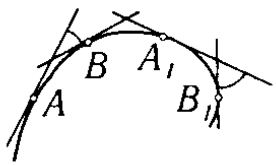


Рис. 142

С другой стороны, рассматривая дуги различной длины, мы не можем оценить степень их искривленности только соответствующим углом смежности. Отсюда следует, что полной характеристикой изогнутости кривой будет ***отношение*** угла смежности к длине соответствующей дуги.

Определение 1. ***Средней кривизной*** $K_{\text{ср}}$ ***дуги*** $\overset{\smile}{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\overset{\smile}{AB}}.$$

Для одной и той же кривой средняя кривизна ее различных частей (дуг) может быть различной; так, например, для кривой, показанной на рис. 142, средняя кривизна дуги $\overset{\smile}{AB}$ не равна средней кривизне дуги $\overset{\smile}{A_1B_1}$, хотя длины этих дуг равны между

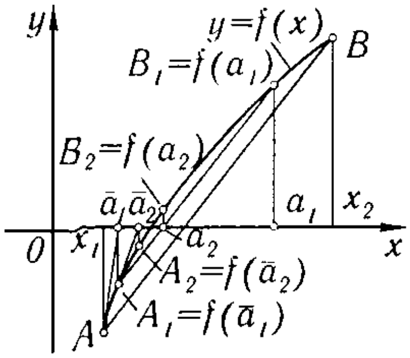


Рис. 161

3. **Комбинированный способ** (рис. 161). Применяя на отрезке $[x_1, x_2]$ одновременно способ хорд и способ касательных, мы получаем две точки a_1 и $\bar{a}_1$, лежащие по разные стороны от искомого корня a (так как $f(a_1)$ и $f(\bar{a}_1)$ имеют разные знаки). Далее, на отрезке $[a_1, \bar{a}_1]$ применяем снова метод хорд и метод касательных. В результате получаем два числа: a_2 и $\bar{a}_2$, еще более близких к значению корня. Продолжаем таким образом до тех пор, пока разность между найденными приближенными значениями не станет меньше, чем требуемая степень точности. Заметим, что при комбинированном методе мы приближаемся к искомому корню одновременно с обеих сторон (т.е. мы находим одновременно как приближенное значение корня с избытком, так и приближенное значение корня с недостатком).

Так, в рассматриваемом нами примере путем подстановки убеждаемся, что $f(0{,}333) > 0$, $f(0{,}342) < 0$. Следовательно, значение корня заключено между найденными приближенными значениями: $0{,}333 < x < 0{,}342$.

Упражнения к главе VI

Найти кривизну кривых в указанных точках: **1.** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$. *Отв.* b/a^2 в точке $(0, b)$; a/b^2 в точке $(a, 0)$. **2.** $xy = 12$ в точке $(3, 4)$. *Отв.* $24/125$. **3.** $y = x^3$ в точке (x_1, y_1). *Отв.* $\dfrac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{3/2}}$. **4.** $16y^2 = 4x^4 - x^6$ в точке $(2, 0)$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **5.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ в произвольной точке. *Отв.* $1/(3\sqrt[3]{|axy|})$.

Найти радиус кривизны нижеследующих кривых в указанных точках; вычертить каждую кривую и построить соответствующий круг кривизны. **6.** $y^2 = x^3$ в точке $(4, 8)$. *Отв.* $R = 80\sqrt{10}/3$. **7.** $x^2 = 4ay$ в точке $(0, 0)$. *Отв.* $R = 2a$. **8.** $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ в точке (x_1, y_1). *Отв.* $R = \dfrac{(b^4x_1 + a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$. **9.** $y = \ln x$ в точке $(1, 0)$. *Отв.* $R = 2\sqrt{2}$. **10.** $y = \sin x$ в точке $(\pi/2, 1)$. *Отв.* $R = 1$. **11.** $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ при $t = t_1$. *Отв.* $R = 3a\sin t_1 \cos t_1$.

Найти радиус кривизны кривых: **12.** $\left.\begin{array}{l} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{array}\right\}$ при $t = 1$. *Отв.* $R = 6$. **13.** Окружность $\rho = a\sin\theta$. *Отв.* $R = a/2$. **14.** Спираль Архимеда $\rho = a\theta$. *Отв.* $R = \dfrac{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2a^2}$. **15.** Кардиоида $\rho = a(1 - \cos\theta)$. *Отв.* $R = \dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. **16.** Лемниската $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$. *Отв.* $R = a^2/3\rho$. **17.** Парабола $\rho = a\sec^2(\theta/2)$. *Отв.* $R = 2a\sec^3\dfrac{\theta}{2}$. **18.** $\rho = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$. *Отв.* $R = \dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{\theta}{3}$.

Найти точки кривых, в которых радиус кривизны имеет наименьшее значение: **19.** $y = \ln x$. *Отв.* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. **20.** $y = e^x$. *Отв.* $\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. *Отв.* $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$. **22.** $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. *Отв.* В точке $(0,0)$ $R=a/2$.

Найти координаты центра кривизны (α,β) и уравнения эволюты для каждой из следующих кривых: **23.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Отв.* $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$. **24.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Отв.* $\alpha=x+3x^{1/3}y^{2/3}$; $\beta=y+3x^{2/3}y^{1/3}$. **25.** $y^3=a^2x$. *Отв.* $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$; $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$. **26.** $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-6. \end{cases}$ *Отв.* $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$; $\beta=3t^2-\frac{3}{2}$. **27.** $\begin{cases} x=k\ln\operatorname{ctg}(t/2)-k\cos t, \\ y=k\sin t. \end{cases}$ *Отв.* $y=\frac{k}{2}(e^{x/k}+e^{-x/k})$ (трактриса). **28.** $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$ *Отв.* $\alpha=a\cos t$; $\beta=a\sin t$. **29.** $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$ *Отв.* $\alpha=a\cos^3 t+3a\cos t\sin^2 t$; $\beta=a\sin^3 t+3a\cos^2 t\sin t$.

30. Вычислить с точностью до 0,001 корни уравнения $x^3-4x+2=0$. *Отв.* $x_1=1{,}675$, $x_2=0{,}539$, $x_3=-2{,}214$.

31. Для уравнения $f(x)=x^5-x-0{,}2=0$ определить приближенное значение корня, заключенное в интервале $(1;1{,}1)$. *Отв.* 1,045.

32. Вычислить корни уравнения $x^4+2x^2-6x+2=0$ с точностью до 0,01. *Отв.* $0{,}38<x_1<0{,}39$; $1{,}24<x_2<1{,}25$.

33. Решить приближенно уравнение $x^3-5=0$. *Отв.* $x_1\approx 1{,}71$, $x_{2,3}=1{,}71\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

34. Найти приближенное значение корня уравнения $x-\operatorname{tg}x=0$, который находится между 0 и $3\pi/2$. *Отв.* 4,4935.

35. Вычислить с точностью до 0,001 корень уравнения $\sin x=1-x$. **Указание.** Привести уравнение к виду $f(x)=0$. *Отв.* $0{,}5110<x<0{,}5111$.

Разные задачи

36. Показать, что в каждой точке лемнискаты $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна радиус-вектору этой точки.

37. Найти наибольшее значение радиуса кривизны кривой $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. *Отв.* $R=3a/4$.

38. Найти координаты центра кривизны кривой $y=x\ln x$ в точке, где $y'=0$. *Отв.* $(e^{-1},0)$.

39. Доказать, что для всех точек спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ при $\varphi\to\infty$ величина разности между радиус-вектором и радиусом кривизны стремится к 0.

40. Найти параболу $y=ax^2+bx+c$, имеющую с синусоидой $y=\sin x$ в точке $(\pi/2,1)$ общие касательную и кривизну. Сделать чертеж. *Отв.* $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$.

41. Функция $y=f(x)$ определена так:

$$f(x)=x^3 \quad \text{в интервале } -\infty<x\leqslant 1,$$
$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \text{в интервале } 1<x<+\infty.$$

Каковы должны быть a, b, c для того, чтобы линия $y=f(x)$ имела везде непрерывную кривизну? Сделать чертеж. *Отв.* $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

42. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой ее точке вдвое больше длины нормали в той же точке.

43. Написать уравнение окружности кривизны параболы $y = x^2$ в точке $(1, 1)$. *Отв.* $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

44. Написать уравнение окружности кривизны кривой $y = \operatorname{tg} x$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$. *Отв.* $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

45. Найти длину всей эволюты эллипса, полуоси которого равны a и b. *Отв.* $4(a^3 - b^3)/ab$.

46. Найти приближенное значение корней уравнения $xe^x = 2$ с точностью до 0,01. *Отв.* Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 0{,}84$.

47. Найти приближенное значение корней уравнения $x \ln x = 0{,}8$ с точностью до 0,01. *Отв.* Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 1{,}64$.

48. Найти приближенное значение корней уравнения $x^2 \operatorname{arctg} x = 1$ с точностью до 0,001. *Отв.* Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 1{,}096$.

Глава VII
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Комплексные числа. Исходные определения

Комплексным числом z называется выражение

$$z = a + ib, \tag{1}$$

где a и b — *действительные* числа; i — так называемая *мнимая единица*, определяемая равенством

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1; \tag{2}$$

a называется *действительной* или *вещественной* частью, b — *мнимой* частью числа z. Их обозначают так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Если $a = 0$, то число $0 + ib = ib$ называется *чисто мнимым*; если $b = 0$, то получается действительное число: $a + i0 = a$. Два комплексных числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$, отличающихся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Принимаются два основных определения.

1. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными $z_1 = z_2$, если

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2,$$

т.е. если равны в отдельности их действительные и мнимые части.

2. Комплексное число z равно нулю:

$$z = a + ib = 0$$

тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$.

1. **Геометрическое изображение комплексных чисел.** Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $A(a, b)$ с координатами a и b. Обратно, каждой точке плоскости $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *плоскостью комплексного переменного* z (рис. 162) (на плоскости ставить символ z в кружке).

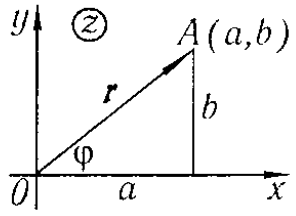


Рис. 162

Точкам плоскости комплексного переменного z, лежащим на оси Ox, соответствуют действительные числа ($b = 0$). Точки, лежащие на оси Oy, изображают чисто мнимые числа, так как в этом случае $a = 0$. Поэтому при изображении комплексных чисел на плоскости комплексного переменного z ось Oy называют осью мнимых чисел или *мнимой осью*, а ось Ox — *действительной осью*.

Соединив точку $A(a, b)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = a + ib$ вектор $\overline{OA}$.

2. **Тригонометрическая форма записи комплексного числа**. Обозначим через φ и r ($r \geqslant 0$) полярные координаты точки $A(a, b)$, считая начало координат полюсом, а положительное направление оси Ox — полярной осью. Тогда (рис. 162) имеют место следующие равенства:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

а следовательно, комплексное число z можно представить в форме

$$a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Выражение, стоящее справа, называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа $z = a+ib$; r называется *модулем* комплексного числа z, φ — *аргументом* комплексного числа z; оно изображается так:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \tag{4}$$

Величины r и φ выражаются через a и b, очевидно, так:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a}.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} |z| &= |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2},\\ \arg z &= \arg(a + ib) = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении отсчета. Очевидно, что аргумент φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — любое целое число.

Замечание. Сопряженные комплексные числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ имеют равные модули $|z| = |\bar{z}|$, а их аргументы равны по абсолютной величине, но отличаются знаком: $\arg z = -\arg\bar{z}$.

Отметим, что действительное число A так же может быть записано в форме (3), а именно:

$$A = |A|(\cos 0 + i \sin 0) \quad \text{при} \quad A > 0,$$
$$A = |A|(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \text{при} \quad A < 0.$$

Модуль комплексного числа 0 равняется нулю 0: $|0| = 0$. В качестве же аргумента нуля можно взять любой угол φ. Действительно, для любого угла φ имеет место равенство

$$0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

§ 2. Основные действия над комплексными числами

1. **Сложение комплексных чисел.** *Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилу сложения векторов (рис. 163, *а*).

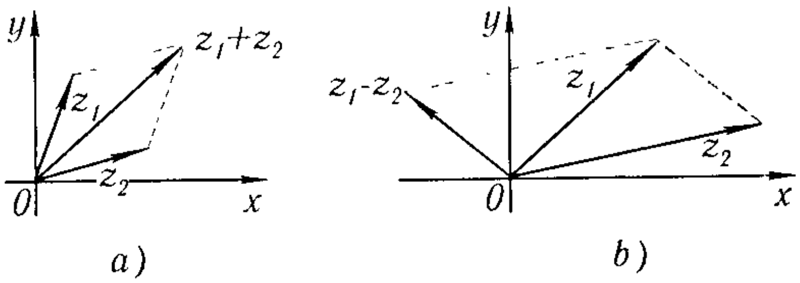


Рис. 163

2. **Вычитание комплексных чисел.** *Разностью* двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется такое комплексное число, которое, будучи сложено с z_2, дает в сумме комплексное число z_1:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \tag{2}$$

Отметим, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости комплексного переменного (рис. 163, *б*):

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. **Умножение комплексных чисел.** *Произведением* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется такое комплексное число, которое получается, если мы перемножаем эти числа как двучлены по правилам алгебры, учитывая только, что

$$i^2 = -1, \; i^3 = -i, \; i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1, \; i^5 = i \; \text{и т.д.},$$

и вообще при любом целом

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

На основании этого правила получаем:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_1 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

или

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \tag{3}$$

Пусть комплексные числа даны в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Найдем произведение этих чисел

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{3'}$$

т.е. *произведение двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.*

Замечание 1. Произведение сопряженных комплексных чисел $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ в силу равенства (3) выражается так:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

или

$$z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Произведение сопряженных комплексных чисел равняется квадрату модуля каждого из них.

4.**Деление комплексных чисел.** *Деление* комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению.

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$. Тогда $\frac{z_1}{z_2} = z$ есть такое комплексное число, что $z_1 = z_2 z$. Если

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy,$$

то

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

или

$$a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x);$$

x и y определяются из системы уравнений

$$a_1 = a_2 x - b_2 y,\ \ b_1 = b_2 x + a_2 y.$$

Решая систему, находим:

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Окончательно получаем:

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{4}$$

Практически деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить $z_1 = a_1 + ib_1$ на $z_2 = a_2 + ib_2$, умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю (т.е. на $a_2 - ib_2$).

Тогда делителем будет действительное число; разделив на него действительную и мнимую части делимого, получим частное

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Если комплексные числа даны в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{5}$$

Для проверки этого равенства достаточно умножить делитель на частное:

$$r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$
$$= r_2\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя; аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Замечание 2. Из правил действий над комплексными числами следует, что в результате операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел получается снова комплексное число.

Если правила действий над комплексными числами применить к действительным числам, рассматривая их как частный случай комплексных, то эти правила будут совпадать с обычными правилами действий, известными из арифметики.

Замечание 3. Вернувшись к определениям суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел, легко проверить, что если в этих выражениях заменить каждое комплексное число сопряженным, то и результаты указанных действий заменяются сопряженными числами. Отсюда, в частности, вытекает следующая теорема.

Теорема. *Если в многочлен с действительными коэффициентами*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

подставить вместо x число $a + ib$, а затем сопряженное число $a - ib$, то и результаты этих подстановок будут взаимно сопряженными.

§ 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа

1. **Возведение в степень.** Из формулы (3′) предыдущего параграфа следует, что если n — целое положительное число, то

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1}$$

Эта формула называется *формулой Муавра.* Она показывает, что *при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

Рассмотрим теперь еще одно приложение формулы Муавра. Полагая в этой формуле $r = 1$, получим:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Разлагая левую часть по формуле бинома Ньютона и приравнивая действительные и мнимые части, мы сможем выразить $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Так, например, в случае $n = 3$ получаем:

$$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi;$$

используя условие равенства двух комплексных чисел, получим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \;\; \sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

2. **Извлечение корня**. *Корнем n-й степени* из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равняется подкоренному числу, т.е.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

если

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Так как у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, то

$$\rho^n = r, \;\; n\psi = \varphi + 2\pi k.$$

Отсюда находим:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \;\; \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

где k — любое целое число, $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое (т.е. действительное положительное) значение корня из положительного числа r. Следовательно,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (2)$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений корня. Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Итак, корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Корень n-й степени из действительного числа A, отличного от нуля, также имеет n значений, так как действительное число является частным случаем комплексного и может быть представлено в тригонометрической форме:

$$\text{если } A > 0, \text{ то } A = |A|(\cos 0 + i\sin 0);$$
$$\text{если } A < 0, \text{ то } A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Пример 1. Найти все значения кубического корня из единицы.

Решение. Представим единицу в тригонометрической форме:

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

По формуле (2) получаем:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

Полагая k равным 0, 1, 2, находим три значения корня:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad x_2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3), \quad x_3 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3).$$

Учитывая, что

$$\cos(2\pi/3) = -1/2, \quad \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2, \quad \cos(4\pi/3) = -1/2, \quad \sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2,$$

получаем

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, \quad x_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$

На рис. 164 точки A, B, C являются геометрическими изображениями полученных корней.

3. Решение двучленного уравнения.

Уравнение вида

$$x^n = A$$

называется *двучленным*. Найдем корни этого уравнения. Если A есть действительное положительное число, то

$$x = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

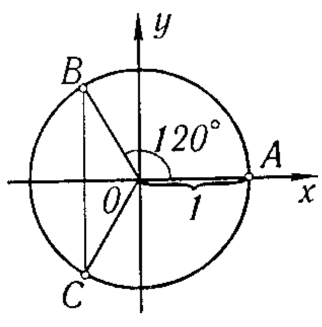


Рис. 164

Выражение в скобках дает все значения корня n-й степени из 1.

Если A — действительное отрицательное число, то

$$x = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right).$$

Выражение в скобках дает все значения корня n-й степени из -1.

Если A — комплексное число, то значения x находятся по формуле (2).

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 = 1.$$

Решение.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi} = \cos(2k\pi/4) + i\sin(2k\pi/4).$$

Полагая k равным 0, 1, 2, 3, получаем:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = i,$$

$$x_3 = \cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1,$$

$$x_4 = \cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = -i.$$

§ 4. Показательная функция с комплексным показателем и ее свойства

Пусть $z = x + iy$. Если x и y — действительные переменные, то z называется комплексным переменным. Каждому значению комплексного переменного z на плоскости Oxy (***плоскости комплексного переменного***) соответствует определенная точка (см. рис. 162).

Определение. Если каждому значению комплексного переменного z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w, то w есть ***функция комплексного переменного*** z. Функции комплексного аргумента обозначают $w = f(z)$ или $w = w(z)$.

Здесь мы рассмотрим одну функцию комплексного переменного — показательную функцию

$$w = e^z$$

или

$$w = e^{x+iy}.$$

Комплексные значения функции w определяются так*):

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{1}$$

т.е.

$$w(z) = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{2}$$

Примеры.

1. $z = 1 + \frac{\pi}{4}i$, $e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
2. $z = 0 + \frac{\pi}{2}i$, $e^{0+\frac{\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$,

---

*) Целесообразность такого определения показательной функции комплексного переменного будет показана и ниже, см. § 21, гл. XIII и § 18 гл. XVI (т. II).

3. $z = 1 + i$, $e^{1+i} = e^1\left(\cos 1 + i\sin 1\right) \approx 0,54 + i\cdot 0,83$,

4. $z = x$ — действительное число, $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$ — обычная показательная функция.

Свойства показательной функции.

1. Если z_1 и z_2 — два комплексных числа, то

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

тогда

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]. \tag{4}$$

С другой стороны, на основании теоремы о произведении двух комплексных чисел в тригонометрической форме будем иметь:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]. \tag{5}$$

В равенствах (4) и (5) правые части равны, следовательно, равны и левые: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

2. Аналогичным образом доказывается формула

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \tag{6}$$

3. Если m — целое число, то

$$(e^z)^m = e^{mz}. \tag{7}$$

При $m > 0$ эта формула легко получается на основании формулы (3); если $m < 0$, то она получается на основании формул (3) и (6).

4. Справедливо тождество

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \tag{8}$$

Действительно, по формулам (3) и (1) получаем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

На основании тождества (8) следует, что показательная функция e^z есть периодическая функция с *периодом* $2\pi i$.

5. Рассмотрим, далее, комплексную величину

$$w = u(x) + iv(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — действительные функции действительного переменного x. Это есть *комплексная функция действительного переменного.*

а) Пусть существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0).$$

Тогда $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ называют *пределом* комплексного переменного w.

б) Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то выражение

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \tag{9}$$

будем называть *производной* комплексной функции действительного переменного по действительному аргументу.

Рассмотрим, далее, следующую показательную функцию:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x},$$

где α и β — постоянные действительные числа, а x — действительное переменное. Это есть комплексная функция действительного переменного, которую согласно с формулой (1) можно переписать так:

$$w = e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x]$$

или

$$w = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Найдем производную w'_x. По формуле (9) будем иметь:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) = \\ &= \alpha[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] + i\beta[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta)[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x}. \end{aligned}$$

Итак, если $w = e^{(\alpha + i\beta)x}$, то $w' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x}$, или

$$[e^{(\alpha + i\beta)x}]' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x}. \tag{10}$$

Таким образом, если k — комплексное число (в частности действительное) и x — действительное число, то

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Получили обычную формулу дифференцирования показательной функции. Далее,

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k(e^{kx})' = k^2e^{kx}$$

и при произвольном n

$$(e^{kx})^{(n)} = k^ne^{kx}.$$

Эти формулы нам потребуются в дальнейшем.

§ 5. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Если в формуле (1) предыдущего параграфа положим $x = 0$, то получим

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{1}$$

Это есть *формула Эйлера*, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменяя в формуле (1) y на $-y$, получим:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) найдем $\cos y$ и $\sin y$:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Последними формулами пользуются, в частности, для выражения степеней $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и их произведений через синус и косинус кратных дуг.

Пример 1.

$$\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) =$$

$$= \frac{1}{4}[(\cos 2y + i\sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i\sin 2y)] = \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

Пример 2.

$$\cos^2\varphi\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2} = -\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{8}.$$

Показательная форма комплексного числа. Представим комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r — модуль комплексного числа, φ — аргумент комплексного числа. По формуле Эйлера:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \tag{4}$$

Следовательно, всякое комплексное число можно представить в так называемой ***показательной*** форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 3. Представить числа 1, i, -2, $-i$ в показательной форме.

Решение.

$$1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{\pi i},$$

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

На основании свойств (3), (6), (7) § 4 показательной функции легко производятся действия над комплексными числами в показательной форме.

Пусть имеем:

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$z_1\cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \tag{5}$$

этот результат совпадает с формулой (3′) § 2.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \tag{6}$$

эта формула совпадает с формулой (5) § 2.

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}; \tag{7}$$

эта формула совпадает с формулой (1) § 3.

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1); \tag{8}$$

эта формула совпадает с формулой (2) § 3.

§ 6. Разложение многочлена на множители

Функция

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

где n — целое число, как известно, называется *многочленом (полиномом)* или *целой рациональной функцией* от x; число n называется *степенью многочлена*. Здесь коэффициенты A_0, A_1, ..., A_n — действительные или комплексные числа; независимое переменное x также может принимать как действительные, так и комплексные значения. *Корнем* многочлена называется такое значение переменного x, при котором многочлен обращается в нуль.

Теорема 1 (теорема Безу). *При делении многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ получается остаток, равный $f(a)$.*

Доказательство. При делении $f(x)$ на $x - a$ частным будет многочлен $f_1(x)$, степень которого на единицу ниже степени $f(x)$, остатком будет постоянное число R. Таким образом, можем написать:

$$f(x) = (x - a)f_1(x) + R. \tag{1}$$

Это равенство справедливо при всех значениях x, отличных от a (деление на $x - a$ при $x = a$ не имеет смысла).

Заставим теперь x стремится к a. Тогда предел левой части равенства (1) равен $f(a)$, а предел правой части равен R. Так как функции $f(x)$ и $(x - a)f_1(x) + R$ равны между собой для всех $x \neq a$, то равны и их пределы при $x \to a$, т.е. $f(a) = R$.

Следствие. *Если a есть корень многочлена, т.е. $f(a) = 0$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - a$ и, следовательно, представляется в виде произведения*

$$f(x) = (x - a)f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — многочлен.

Пример 1. Многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ при $x = 1$ обращается в нуль, т.е. $f(1) = 0$, поэтому данный многочлен делится без остатка на $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений с одним неизвестным x.

Всякое число (действительное или комплексное), которое, будучи подставлено в уравнение вместо x, обращает уравнение в тождество, называется *корнем* уравнения.

Пример 2. Числа $x_1 = \pi/4$, $x_2 = 5\pi/4$, $x_3 = 9\pi/4$, ... являются корнями уравнения $\cos x = \sin x$.

Если уравнение имеет вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен степени n, то это уравнение называется *алгебраическим* уравнением степени n. Из определения следует, что корни алгебраического уравнения $P(x) = 0$ те же, что и корни многочлена $P(x)$.

Естественно возникает вопрос: всякое ли уравнение имеет корни?

В случае неалгебраического уравнения ответ отрицателен: существуют такие неалгебраические уравнения, которые не имеют ни одного корня — ни действительного, ни комплексного, например, уравнение $e^x = 0$*).

Однако в случае алгебраического уравнения ответ на поставленный вопрос положителен. Этот ответ дается основной теоремой алгебры:

Теорема 2 (основная теорема алгебры). *Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.*

Эта теорема доказывается в высшей алгебре. Здесь мы ее примем без доказательства.

Пользуясь основной теоремой алгебры, легко доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Всякий многочлен n-й степени разлагается на n линейных множителей вида $x - a$ и множитель, равный коэффициенту при x^n.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть многочлен степени n:

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Этот многочлен в силу основной теоремы имеет по крайней мере один корень; обозначим его через a_1. Тогда на основании следствия из теоремы Безу мы можем написать:

$$f(x) = (x - a_1)f_1(x),$$

---

*) Действительно, если бы число $x_1 = a + bi$ было бы корнем этого уравнения, то имело бы место тождество $e^{a+bi} = 0$ или (на основании формулы Эйлера) $e^a(\cos b + i\sin b) = 0$. Но e^a не может равняться нулю ни при каком действительном значении a; также не равно нулю $\cos b + i\sin b$ (так как модуль этого числа равен $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$ при любых b). Следовательно, и произведение $e^a(\cos b + i\sin b) \neq 0$, т.е. $e^{a+bi} \neq 0$, но это значит, что уравнение $e^x = 0$ не имеет корней.

где $f_1(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени; $f_1(x)$ также имеет корень. Обозначим его через a_2. Тогда

$$f_1(x) = (x - a_2)f_2(x),$$

где $f_2(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Аналогично

$$f_2(x) = (x - a_3)f_3(x).$$

Продолжая этот процесс выделения линейных множителей, дойдем до соотношения

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n)f_n,$$

где f_n — многочлен нулевой степени, т.е. некоторое фиксированное число. Это число, очевидно, равно коэффициенту при x^n, т.е. $f_n = A_0$.

На основании полученных равенств можем написать:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n). \tag{2}$$

Из разложения (2) следует, что числа a_1, a_2, ..., a_n суть корни многочлена $f(x)$, так как при подстановке $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_n$ правая часть, а следовательно, и левая, обращается в нуль.

Пример 3. Многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ обращается в нуль при

$$x = 1,\ x = 2,\ x = 3.$$

Следовательно,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Никакое значение $x = a$, отличное от a_1, a_2, ..., a_n, не может быть корнем многочлена $f(x)$, так как ни один из множителей в правой части равенства (2) не обращается в нуль при $x = a$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Многочлен n-й степени не может иметь более чем n различных корней.

Но в таком случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если значения двух многочленов n-й степени $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают при $n+1$ различных значениях a_0, a_1, a_2, ..., a_n аргумента x, то эти многочлены тождественны.*

Доказательство. Обозначим через $f(x)$ разность многочленов

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

По условию $f(x)$ есть многочлен степени не выше n, обращающийся в нуль в точках a_1, ..., a_n. Следовательно, его можно представить в виде

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Но, по условию, $f(x)$ обращается в нуль также в точке a_0. Тогда $f(a_0) = 0$ и при этом ни один из линейных множителей не равен нулю. Поэтому $A_0 = 0$, а тогда из равенства (2) следует, что многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю. Следовательно, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, или $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Теорема 5. *Если многочлен*

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Доказательство. Запишем разложение этого многочлена на множители по формуле (2):

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = A_0(x-a_1)\ldots(x-a_n). \quad (1')$$

Если этот многочлен тождественно равен нулю, то он равен нулю и при некотором значении x, отличном от $a_1, \ldots, a_n$. Но тогда ни одна из скобок $x-a_1, \ldots, x-a_n$ не равна нулю и, следовательно, $A_0 = 0$.

Аналогичным образом доказывается, что $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и т.д.

Теорема 6. *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Это следует из того, что разность данных многочленов есть многочлен, тождественно равный нулю. Следовательно, на основании предыдущей теоремы все его коэффициенты — нули.

Пример 4. Если многочлен ax^3+bx^2+cx+d тождественно равен многочлену x^2-5x, то $a=0$, $b=1$, $c=-5$, $d=0$.

§ 7. О кратных корнях многочлена

Если в разложении многочлена n-й степени на линейные множители

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \quad (1)$$

некоторые линейные множители окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение многочлена на множители будет иметь вид

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}. \quad (1')$$

При этом

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

В этом случае корень a_1 называется *корнем кратности* k_1 или k_1-кратным корнем, a_2 — корнем кратности k_2 и т.д.

Пример. Многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ разлагается на следующие линейные множители:

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1).$$

Это разложение можно написать так:

$$f(x) = (x-2)^2(x-1).$$

Корень $a_1 = 2$ — двукратный корень, $a_2 = 1$ — простой корень.

Если многочлен имеет корень a кратности k, то мы будем считать, что многочлен имеет k одинаковых корней. Тогда из теоремы о разложении многочлена на линейные множители получается следующая теорема.

Всякий многочлен n-й степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Замечание. Все, что говорилось о корнях многочлена

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

можно, очевидно, сформулировать в терминах корней алгебраического уравнения

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Докажем, далее, следующую теорему.

Теорема. *Если a_1 является для многочлена $f(x)$ корнем кратности $k_1 > 1$, то для производной $f'(x)$ это число является корнем кратности $k_1 - 1$.*

Доказательство. Если a_1 есть корень кратности $k_1 > 1$, то из формулы (1′) следует:

$$f(x) = (x - a)^{k_1}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = (x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}$ не обращается в нуль при $x = a_1$, т.е. $\varphi(a_1) \neq 0$. Дифференцируя, получим:

$$f'(x) = k_1(x_1 - a_1)^{k_1-1}\varphi(x) + (x - a_1)^{k_1}\varphi'(x) =$$
$$= (x_1 - a_1)^{k_1-1}[k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x)].$$

Обозначим:

$$\psi(x) = k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x).$$

Тогда

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1-1}\psi(x),$$

причем

$$\psi(a_1) = k_1\varphi(a_1) + (a_1 - a_1)\varphi'(a_1) = k_1\varphi(a_1) \neq 0,$$

т.е. $x = a_1$ есть корень кратности $k_1 - 1$ многочлена $f'(x)$. Из проведенного доказательства следует, что если $k_1 = 1$, то a_1 не является корнем производной $f'(x)$.

Из доказанной теоремы следует, что a_1 является корнем кратности $k_1 - 2$ для производной $f''(x)$, корнем кратности $k_1 - 3$ для производной $f'''(x)\ldots$, корнем кратности 1 (простым корнем) для производной $f^{(k_1-1)}(x)$ и не является корнем для производной $f^{(k_1)}(x)$, т.е.

$$f(a_1) = 0,\ f'(a_1) = 0,\ f''(a_1) = 0,\ \ldots,\ f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

но

$$f^{(k)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. Разложение многочлена на множители в случае комплексных корней

В формуле (1) § 7 гл. VII корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть как действительными, так и комплексными. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.*

Доказательство. Если мы подставим в многочлен $f(x)$ вместо x число $a+ib$, произведем возведение в степени и соберем отдельно члены, содержащие i и не содержащие i, то получим:

$$f(a+ib) = M + iN,$$

где M и N — выражения, не содержащие i.

Так как $a+ib$ — корень многочлена, то

$$f(a+ib) = M + iN = 0,$$

откуда

$$M = 0, \ \ N = 0.$$

Подставим теперь в многочлен вместо x выражение $a-ib$. Тогда (на основании замечания 3 в конце § 2) мы получим в результате число, сопряженное с числом $M+iN$, т.е.

$$f(a-ib) = M - iN.$$

Так как $M=0$ и $N=0$, то $f(a-ib)=0$, т.е. $a-ib$ есть корень многочлена.

Итак, в разложении

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

комплексные корни входят ***попарно сопряженными***.

Перемножив линейные множители, соответствующие паре комплексно сопряженных корней, получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned}[x-(a+ib)][x-(a-ib)] &= \\ &= [(x-a)-ib][(x-a)+ib] = \\ &= (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q,\end{aligned}$$

где $p=-2a$, $q=a^2+b^2$ — действительные числа.

Если число $a+ib$ является корнем кратности k, то сопряженное число $a-bi$ должно являться корнем той же кратности k, так что наряду с линейными множителями $x-(a+ib)$ в разложение многочлена входят столько же линейных множителей вида $x-(a-ib)$.

Таким образом, *многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степеней соответствующей кратности*, т.е.

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots$$
$$\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}.$$

При этом

$$k_1+k_2+\ldots+k_r+2l_1+\ldots+2l_s = n.$$

§ 9. Интерполирование. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть при изучении некоторого явления установлено, что существует функциональная зависимость между величинами y и x, описывающая количественную сторону данного явления; при этом функция $y=\varphi(x)$ остается нам неизвестной, но на основании эксперимента установлены значения этой функции y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_n при некоторых значениях аргумента x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, принадлежащих отрезку $[a,b]$.

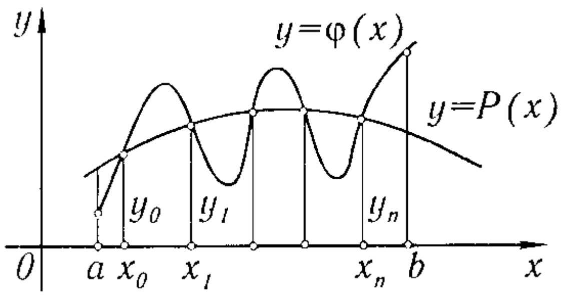


Рис. 165

Задача заключается в том, чтобы найти функцию, по возможности более простую с точки зрения вычислительной (например, многочлен), которая представляла бы неизвестную функцию $y=\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ точно или приближенно. В более отвлеченной форме эту задачу можно сформулировать так: на отрезке $[a,b]$ заданы значения неизвестной функции $y=\varphi(x)$ в $n+1$ различных точках x_0, x_1, $\ldots$, x_n:

$$y_0=\varphi(x_0),\;\; y_1=\varphi(x_1),\ldots,\;\; y_n=\varphi(x_n);$$

требуется найти ***многочлен*** $P(x)$ степени $\leqslant n$, приближенно выражающий функцию $\varphi(x)$.

В качестве такого многочлена естественно взять многочлен, значения которого в точках x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n ***совпадают*** с соответствующими значениями y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_n функции $\varphi(x)$ (рис. 165). Тогда поставленная задача, называемая «задачей *интерполирования* функции», формулируется так: для данной функции $\varphi(x)$ найти многочлен $P(x)$ степени $\leqslant n$, который при заданных значениях x_0, x_1, $\ldots$, x_n принимал бы значения

$$y_0=\varphi(x_0),\;\; y_1=\varphi(x_1),\;\; \ldots,\;\; y_n=\varphi(x_n).$$

В качестве искомого многочлена возьмем многочлен n-й степени вида

$$\begin{aligned}P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\\+C_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\\+C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots\\\ldots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\end{aligned}\qquad(1)$$

и определим коэффициенты C_0, C_1, ..., C_n так, чтобы выполнялись условия

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad P(x_n) = y_n. \qquad (2)$$

Положим в формуле (1) $x = x_0$; тогда, принимая во внимание равенства (2), получим:

$$y_0 = C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n),$$

откуда

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Затем, положив $x = x_1$, получим:

$$y_1 = C_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n),$$

откуда

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}.$$

Таким же образом найдем:

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)};$$

....

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (1), получим:

$$\begin{aligned}P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+\\+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots\\\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.\end{aligned}\qquad(3)$$

Эта формула называется *интерполяционной формулой Лагранжа.*

Отметим без доказательства, что если $\varphi(x)$ имеет производную $(n+1)$-го порядка на отрезке $[a,b]$, то ошибка при замене функции $\varphi(x)$ многочленом $P(x)$, т.е. величина $R(x) = \varphi(x) - P(x)$, удовлетворяет неравенству

$$|R(x)| < |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\frac{1}{(n+1)!}max|\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Замечание. Из теоремы 4 § 6 следует, что многочлен $P(x)$ является единственным, удовлетворяющим поставленным условиям.

Укажем, что существуют и другие интерполяционные формулы. Одна из них — интерполяционная формула Ньютона — рассмотрена в § 10.

Пример. Из эксперимента получены такие значения функции $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ при $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ при $x_2 = -4$. Требуется представить приближенно функцию $y = \varphi(x)$ многочленом второй степени.

Решение. По формуле (3) имеем (при $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4,$$

или

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. Интерполяционная формула Ньютона

Пусть известны $(n+1)$ значение функции $\varphi(x)$, а именно y_0, $y_0, \ldots, y_n$ при $(n+1)$ значении аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом разность между соседними значениями аргумента постоянна. Обозначим ее через h. Таким образом, имеем таблицу значений неизвестной функции $y = \varphi(x)$ при соответствующих значениях аргумента.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$\ldots$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Составим многочлен степени не выше n, который принимает соответствующие значения при соответствующих значениях x. Этот многочлен будет приближенно представлять функцию $\varphi(x)$.

Предварительно введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots,\\
&\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots,\\
&\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.
\end{aligned}$$

Это так называемые разности 1-го, 2-го, ..., n-го порядка.

Напишем многочлен, принимающий значения y_0, y_1 соответственно при x_0 и x_1. Это будет многочлен 1-й степени

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \qquad (1)$$

Действительно,

$$P_1(x)|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

Напишем многочлен, принимающий значения y_0, y_1, y_2 соответственно при x_0, x_1, x_2. Это будет многочлен 2-й степени

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \tag{2}$$

Действительно,

$$P_2|_{x=x_2} = y_0, \quad P_2\Big|_{x=x_1} = y_1,$$

$$P_2|_{x=x_2} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{2h}{h} \left(\frac{2h}{h} - 1 \right) = y_2.$$

Многочлен третьего порядка будет иметь вид:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right). \tag{3}$$

Наконец, многочлен n-го порядка, принимающий значения y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_n соответственно при x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, будет иметь вид:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \ldots \\ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \ldots \left[\frac{x - x_0}{h} - (n - 1) \right], \tag{4}$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Это и есть *интерполяционная формула* или *интерполяционный многочлен Ньютона*.

По существу, многочлен Лагранжа и многочлен Ньютона для данной таблицы значений тождественны, но по-разному написаны, так как многочлен степени не выше n, принимающий заданные $(n + 1)$ значения при данных $(n + 1)$ значениях x, находится единственным образом.

Во многих случаях интерполяционный многочлен Ньютона более удобен, чем интерполяционный многочлен Лагранжа. Особенность этого многочлена заключается в том, что при переходе от многочлена k-й степени к многочлену $(k + 1)$-й степени первые $(k + 1)$ членов на меняются, а только добавляется новый член, который равен нулю при всех предыдущих значениях аргумента.

Замечание. По интерполяционным формулам Лагранжа (см. формулу (3) § 9) и Ньютона (формула (4)) определяются значения функции на отрезке $x_0 < x < x_n$. Если по этим формулам определяется значение функции при $x < x_0$ (это можно делать при малом $|x - x_0|$), то говорят, производится *экстраполяция таблицы назад*. Если определяется значение функции при $x > x_n$, то говорят, что производится *экстраполяция таблицы вперед*.

§ 11. Численное дифференцирование

Пусть значения некоторой неизвестной функции $\varphi(x)$ заданы таблицей, которая рассматривалась в начале § 10. Требуется определить приближенно производную этой функции. Эта задача решается так. Строится интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и от этого многочлена находится производная.

Так как чаще рассматриваются таблицы с равными разностями между соседними значениями аргумента, то мы будем пользоваться интерполяционной формулой Ньютона. Пусть даны три значения функции y_0, y_1, y_2 при значениях аргумента x_0, x_1, x_2. Тогда пишем многочлен (2) § 10 и его дифференцируем. Получаем приближенное значение производной функции на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\varphi'(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{1}$$

При $x = x_0$ получаем

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \tag{2}$$

Если будем рассматривать многочлен 3-го порядка (см. (3) § 10), то после дифференцирования для его производной получим выражение:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h}\left[3\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + 2\right]. \tag{3}$$

В частности, при $x = x_0$ получаем:

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \tag{4}$$

Если мы будем пользоваться формулой (4) § 10, то для приближенного выражения производной при $x = x_0$ получим

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \tag{5}$$

Заметим, что для функции, имеющей производные, разность Δy_0 есть бесконечно малая 1-го порядка, $\Delta^2 y_0$ — бесконечно малая 2-го порядка, $\Delta^3 y_0$ — бесконечно малая 3-го порядка и т.д. относительно h.

§ 12. О наилучшем приближении функций многочленами. Теория Чебышева

В связи с задачей, рассмотренной в §§ 9 и 10, естественно поставить такой вопрос: пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $\varphi(x)$. Можно ли эту функцию *с любой наперед заданной степенью точности* приближенно представить в виде многочлена $P(x)$? Иначе говоря, можно ли подобрать такой многочлен $P(x)$, чтобы разность между $\varphi(x)$ и $P(x)$ по абсолютной величине во всех точках отрезка $[a, b]$ была меньше любого наперед заданного положительного числа ε? Утвердительный ответ*) на этот вопрос содержится в следующей теореме, которую мы приводим здесь без доказательства:

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что во всех точках указанного отрезка выполняется неравенство*

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Выдающийся советский математик академик С.Н. Бернштейн дал следующий способ непосредственного построения таких многочленов, которые приближенно равны непрерывной функции $\varphi(x)$ на заданном отрезке.

Пусть, например, функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Составим выражение

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Здесь C_n^m — биномиальные коэффициенты, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — значение данной функции в точке $x = \frac{m}{n}$. Выражение $B_n(x)$ является многочленом n-й степени; его называют *многочленом Бернштейна.*

Если дано произвольное $\varepsilon > 0$, то можно подобрать такой многочлен Бернштейна (т.е. так выбрать его степень n), чтобы для всех значений x на отрезке $[0, 1]$ выполнялось неравенство

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Отметим, что рассмотрение отрезка $[0, 1]$, а не произвольного отрезка $[a, b]$ не является существенным ограничением общности, так как с помощью замены переменного $x = a + t(b-a)$ можно любой отрезок $[a, b]$ преобразовать в отрезок $[0, 1]$. При этом многочлен n-й степени преобразуется в многочлен той же степени.

---

*) Заметим, что интерполяционный многочлен Лагранжа [см. (3) § 9] не дает еще ответа на поставленный вопрос. Его значения равны значениям функции в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, но они могут быть очень далеки от значений функции в других точках отрезка $[a, b]$.

Создателем теории наилучшего приближения функций с помощью многочленов является русский математик П.Л. Чебышев (1821–1894) — один из величайших представителей математической мысли. Им получены наиболее глубокие результаты в этой области, оказавшие исключительное влияние на работу последующих математиков. Исходной точкой для создания этой теории была работа П.Л. Чебышева по теории шарнирных механизмов, широко используемых в машинах. Изучая такие механизмы, он пришел к задаче разыскания среди всех многочленов данной степени с коэффициентом при старшем члене, равным единице, такого многочлена, который меньше всех отклоняется от нуля на заданном отрезке. Такие многочлены им были найдены и впоследствии учеными названы *многочленами Чебышева*. Эти многочлены обладают многими замечательными свойствами и в настоящее время являются могучим средством исследования во многих вопросах математики и техники.

Упражнения к главе VII

1. Найти $(3+5i)(4-i)$. *Отв.* $17+17i$. **2.** Найти $(6+11i)(7+3i)$. *Отв.* $9+95i$. **3.** Найти $\dfrac{3-i}{4+5i}$. *Отв.* $\dfrac{7}{41}-\dfrac{19}{41}i$. **4.** Найти $(4-7i)^3$. *Отв.* $-524+7i$. **5.** Найти $\sqrt{i}$. *Отв.* $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. **6.** Найти $\sqrt{-5-12i}$. *Отв.* $\pm(2-3i)$. **7.** Привести к тригонометрическому виду выражения: а) $1+i$. *Отв.* $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. б) $1-i$. *Отв.* $\sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4})$. **8.** Найти $\sqrt[3]{i}$. *Отв.* $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$.

9. Выразить через степени $\sin x$ и $\cos x$ следующие выражения: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$. **10.** Выразить через синус и косинус кратных дуг: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$, $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\sin^5 x$. **11.** $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ разделить на $x+4$. *Отв.* $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, т.е. частное $=x^2-8x+40$; остаток $f(-4)=-161$. **12.** $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ разделить на $x+3$. *Отв.* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. **13.** $f(x)=x^7-1$ разделить на $x-1$. *Отв.* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Разложить на множители с действительными коэффициентами многочлены: **14.** $f(x)=x^4-1$. *Отв.* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. **15.** $f(x)=x^2-x-2$. *Отв.* $f(x)=(x-2)(x+1)$. **16.** $f(x)=x^3+1$. *Отв.* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$. **17.** На основании эксперимента получены значения функции y от x:

$$y_1=4 \quad \text{при} \quad x_1=0, \qquad y_2=6 \quad \text{при} \quad x_2=1, \qquad y_3=10 \quad \text{при} \quad x_3=2.$$

Представить приближенно функцию многочленом второй степени. *Отв.* x^2+x+4. **18.** Найти многочлен четвертой степени, принимающий при $x=1$, 2, 3, 4, 5, соответственно, значения 2, 1, -1, 5, 0. *Отв.* $-\dfrac{7}{6}x^4+\dfrac{79}{6}x^3-\dfrac{151}{3}x^2+\dfrac{226}{3}x-35$. **19.** Найти многочлен, по возможности, низкой степени, принимающий при $x=2$, 4, 5, 10, соответственно, значения 3, 7, 9, 19. *Отв.* $2x-1$. **20.** Найти многочлены Бернштейна 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней для функции $y=\sin\pi x$ на отрезке $[0,1]$. *Отв.* $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$; $B_3(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x)=2x(1-x)[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]$.