Г. И. ЗАПОРОЖЕЦ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЛАНЬ®

Г. И. ЗАПОРОЖЕЦ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание шестое, стереотипное

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2010

ББК 22.161я73
З 33

Запорожец Г. И.

З 33 Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. 6-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 464 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0912-9

«Руководство» содержит задачи по темам: производная и дифференциал функции, исследование функций и построение их графиков, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции многих переменных, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории поля, ряды, дифференциальные уравнения.

Приведены подробные примерные решения типичных задач, а также необходимые теоретические сведения. Особенность данного задачника — изложение материала, позволяющее использовать его для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов технических и технологических специальностей вузов.

ББК 22.161я73

Оформление обложки
А. ЛАПШИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Руководство» предназначено для студентов высших технических учебных заведений и особенно для тех, кто самостоятельно, без повседневной квалифицированной помощи преподавателя, изучает математический анализ и желает приобрести необходимые навыки в решении задач.

В начале каждого раздела помещены определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории и методические указания, необходимые для решения последующих задач; затем приводятся подробные примерные решения типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений; в конце каждого раздела содержится достаточное количество методически подобранных задач для самостоятельного решения с ответами к ним и необходимыми разъяснениями.

Содержание этого пособия соответствует программе по математическому анализу для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей. Это пособие вполне пригодно также и для студентов технологических специальностей, которые могут опустить те разделы и задачи, которые не входят в их программу по курсу математического анализа.

Задачи, отмеченные звездочкой, не входят в обязательный минимум, необходимый для усвоения курса. Они предназначены для студентов, желающих глубже изучить предмет, но не превышают требований программы.

Автор просит извинить недостаточно подробное разъяснение некоторых вопросов и надеется, что будет иметь возможность устранить этот недостаток в следующем издании.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предметом математического анализа является изучение переменных величин и зависимостей между ними.

Понятия о функции и о пределе переменной величины составляют основу математического анализа.

§ 1. Переменные величины и функции, их обозначение

Интервалом от a до b называется совокупность всех чисел x, удовлетворяющих одному из следующих двойных неравенств:

1) $a \leqslant x \leqslant b$; 2) $a < x < b$; 3) $a \leqslant x < b$; 4) $a < x \leqslant b$.

Закрытый интервал 1 называется отрезком и обозначается $[a, b]$; открытый интервал 2 обозначается (a, b); полуоткрытые интервалы 3 и 4 обозначаются соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$. *Переменной называется величина, принимающая различные числовые значения.*

Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений. Она может состоять из одного или нескольких интервалов и из отдельных точек.

Взаимосвязанное изменение переменных называется функциональной зависимостью.

При изучении функциональной зависимости между двумя переменными полагают, что одна из них является независимой переменной, которой можно придавать произвольные значения из области ее изменения, а другая — зависимой от нее. Независимая переменная называется аргументом, а зависимая — функцией.

Н. И. Лобачевскому принадлежит следующее определение понятия функции: *переменная y называется функцией переменной x, если каждому значению x, из области ее изменения, соответствует определенное значение y.*

Для сокращения записей употребляется символическое обозначение функций: $y = f(x)$, $S = \varphi(t)$, $u = F(v)$,...

Если функция от x обозначена символом $P(x)$, то $P(a)$ обозначает частное значение этой функции при $x = a$.

Так, если $P(x)=x^2+2x-5$, то

$$P(3)=3^2+2\cdot 3-5=10;\ P(0)=-5;\ P(a)=a^2+2a-5.$$

Основными элементарными функциями называются: 1) степенная функция $y=x^n$; 2) показательная функция $y=a^x$, $a>0$; 3) логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$; 4) тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$; 5) обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$.

Функции, заданные одной формулой посредством конечного числа арифметических действий и операций, определяемых основными элементарными функциями, называются элементарными. Например:

$$y=5x^3\sin 2x;\ y=\lg\frac{1+\operatorname{tg}\sqrt{x}}{x-\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Все остальные функции называются неэлементарными. Например, неэлементарной является функция, определяемая несколькими различными формулами для различных интервалов изменения аргумента:

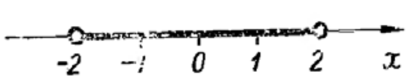
$$y=\begin{cases} x^3 \text{ при } x\leqslant 0 \\ x+2 \text{ при } x>0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x)=f(-x)$, называется *четной*, например x^2, $\cos x$, а обладающая свойством $f(x)=-f(-x)$, называется *нечетной*, например x^3, $\sin x$. Многие функции не являются ни четными, ни нечетными, например a^x, $\sqrt{x}$.

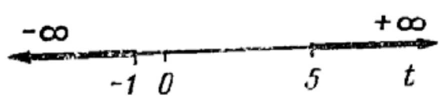
1. Определить и построить на числовой оси области изменения переменных x, t и α, заданные следующими неравенствами:

$$1)\ x^2\leqslant 4;\ 2)\ |t-2|>3;\ 3)\ -9\leqslant 1-2\alpha<5.$$

Решение. 1) Извлекая квадратный корень из обеих частей первого неравенства, получим $|x|\leqslant 2$. Отсюда следует, что $-2\leqslant x\leqslant 2$. Эти неравенства и определяют собой область изменения переменной x, т. е. совокупность принимаемых ею числовых значений. Она представляет закрытый интервал или отрезок $[-2;2]$. Построим этот отрезок на числовой оси Ox (черт. 1); он будет симметричен относительно начальной точки $x=0$.



Черт. 1



Черт. 2

2) Избавляясь от знака абсолютной величины в неравенстве, содержащем t, получим два неравенства: $t-2<-3$ и $t-2>3$. Разрешая их относительно t, найдем $t<-1$ и $t>5$. Следовательно, область изменения переменной t (черт. 2) состоит из двух бесконечных открытых интервалов $(-\infty;\ -1)$ и $(5;\ +\infty)$.

3) Решаем неравенства, содержащие α. Вычитая из всех частей неравенств по единице и затем деля их на -2, получим

$$-10 \leqslant -2\alpha < 4, \quad -2 < \alpha \leqslant 5.$$

Следовательно, область изменения переменной α (черт. 3) представляет полуоткрытый интервал $(-2; 5)$.

Черт. 3

2. Вычислить частное значение функции:

1) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

а) при $x=0$; б) при $x=a+1$;

2) $\varphi(x)=2\arcsin x+\operatorname{arc\,tg} 2x$ при $x=-\frac{1}{2}$;

3) $y=x^2\arccos\frac{x}{2}-3x\operatorname{arc\,ctg} x$ при $x=-1$.

Решение. 1а) Подставляя значение $x=0$, получим соответствующее частное значение функции $f(x)$:

$$f(0)=\sqrt{0^2-5\cdot 0+4}=\sqrt{4}=2.$$

Здесь взято арифметическое значение корня, а не ± 2. Вообще *в математическом анализе рассматриваются только однозначные функции, которые могут иметь только одно значение при каждом значении аргумента.*

1б) При $x=a+1$ частное значение функции $f(x)$ будет

$$f(a+1)=\sqrt{(a+1)^2-5(a+1)+4}=\sqrt{a^2-3a}.$$

2) Частное значение функции $\varphi(x)$ при $x=-\frac{1}{2}$:

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(-1)=2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{7}{12}\pi.$$

Здесь учтено, что $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$*. При $x>0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x<0$ — в четвертой.

* $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}$.

3) При $x = -1$ частное значение функции y будет

$$y(-1) = (-1)^2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 3(-1)\operatorname{arcctg}(-1) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{35}{12}\pi,$$

так как $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся от 0 до π*. При $x > 0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x < 0$ — во второй.

3. Найти корни x_1 и x_2 функции $F(x) = x^2 + 10x + 9$ и вычислить ее частные значения при x, равном среднему арифметическому и среднему геометрическому этих корней.

Решение. *Корнями функции называются значения аргумента, которые обращают ее в нуль.*

Определим корни функции $F(x)$, приравняв ее нулю:

$$x^2 + 10x + 9 = 0, \text{ откуда } x_1 = -9, \ x_2 = -1.$$

Среднее арифметическое корней x_1 и x_2 равно их полусумме $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9-1}{2} = -5$, а среднее геометрическое — квадратному корню из их произведения $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{9} = 3$. Искомые частные значения функции $F(x)$ будут:

$$F(-5) = (-5)^2 + 10(-5) + 9 = -16;$$
$$F(3) = 3^2 + 10 \cdot 3 + 9 = 48.$$

4. Дана функция $P(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$. Показать, что $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$.

Решение. Найдем $P\left(\frac{1}{x}\right)$, подставляя $\frac{1}{x}$ вместо x в данное аналитическое выражение функции $P(x)$,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{2}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + x^2 - 2x.$$

Следовательно, $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$ при любом значении x. Например,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = P(2) = -\frac{3}{4}; \ P(-10) = P(-0,1) = 120,21.$$

---

* $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$; $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

5. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной или не четной и не нечетной:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{\sin 2x};\quad 2)\ \varphi(x)=4-2x^4+\sin^2 x;$$

$$3)\ u(x)=x^3+2x-1;\quad 4)\ y(x)=\frac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}.$$

Решение. *Чтобы определить, будет ли некоторая функция $Q(x)$ четной или нечетной, необходимо найти $Q(-x)$.*

Заменяя x через $-x$, получим:

$$1)\ f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sin 2(-x)}=\frac{x^2}{-\sin 2x}=-\frac{x^2}{\sin 2x},$$

т. е. $f(-x)=-f(x)$, значит, функция $f(x)$ нечетная;

$$2)\ \varphi(-x)=4-2(-x)^4+\sin^2(-x)=4-2x^4+\sin^2 x,$$

т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, следовательно, функция $\varphi(x)$ четная;

$$3)\ u(-x)=(-x)^3+2(-x)-1=-x^3-2x-1,$$

здесь $u(-x)\neq u(x)$ и $u(-x)\neq -u(x)$, поэтому функция $u(x)$ не четная и не нечетная;

$$4)\ y(-x)=\frac{1+a^{-kx}}{1-a^{-kx}}=\frac{a^{kx}+1}{a^{kx}-1}$$

(числитель и знаменатель первой дроби умножены на a^{kx}), т. е. $y(-x)=-y(x)$, следовательно, функция $y(x)$ нечетная.

6. Построить на числовой оси области изменения переменных, заданные следующими неравенствами:

1) $|x|<4$; 2) $(y-1)^2\geqslant 9$; 3) $-3<z+1\leqslant 4$; 4) $2|x|+3>5$.

7. $f(x)=x^2+3x-1$; вычислить: $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$.

8. $F(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}$; найти $F(0)$, $F(2)$, $F\left(\frac{a}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{F(x)}$, $F(b)-F(1)+7F(-1)$.

9. $\varphi(t)=t^2$; найти: 1) $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$; 2) $\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a-h)}{2h}$.

10. $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$; показать, что $f[\varphi(2)]=\varphi[f(2)]$; $\varphi[1+f(1)]=2f[1+\varphi(1)]$.

11. Определить, какая из данных функций четная, нечетная или не четная и не нечетная:

$$1)\ y=3x-2\sqrt[3]{x};\quad 2)\ z=5x\sin 3x;\quad 3)\ u=|t|-t^3;$$

$$4)\ v=|x|\operatorname{ctg}^2 x;\quad 5)\ w=\alpha^2+|\alpha+2|;\quad 6)\ x=\frac{a^{2\varphi}-1}{a^{\varphi}}.$$

§ 2. Область определения (существования) функции

Областью определения функции называется совокупность всех точек числовой оси, в которых она имеет определенные действительные значения.

Очевидно, для многих функций областью определения будет не вся числовая ось, а только некоторая ее часть. Так, для функции $y=\sqrt{x}$ областью определения является полуоткрытый интервал $0 \leqslant x < +\infty$; для функции $z=\frac{1}{x-1}$ область определения состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Основные элементарные функции имеют следующие области определения:

степенная функция $y=x^n$ с рациональным положительным показателем $n=\frac{\alpha}{\beta}$ при нечетном β определена на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, а при четном β определена в интервале $0 \leqslant x < +\infty$ *;

показательная функция $y=a^x$, $a>0$ определена на всей числовой оси;

логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$ определена в интервале $0 < x < +\infty$;

тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ определены на всей числовой оси; $y=\operatorname{tg} x$, $y=\sec x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\operatorname{cosec} x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k=k\pi$;

обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ определены на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ определены на всей числовой оси.

При нахождении области определения элементарной функции, заданной формулой $y=f(x)$, нужно обращать внимание на следующие элементы формулы:

1) на радикалы четной степени — функция будет определена только для тех значений x, при которых их подкоренные выражения будут неотрицательны;

2) на знаменатели дробных выражений — функция будет определена только для тех значений x, при которых знаменатели отличны от нуля;

3) на трансцендентные функции $\log v$, $\operatorname{tg} v$, $\operatorname{ctg} v$, $\sec v$, $\operatorname{cosec} v$, $\arcsin v$, $\arccos v$, которые определены не всюду, а только при указанных выше значениях своего аргумента v.

Если эти перечисленные элементы отсутствуют в формуле $y=f(x)$, то областью определения функции y будет вся число-

---

* При $\beta=1$ показатель n будет целым числом.

вая ось (исключая те случаи, когда область определения функции ограничивается специальными условиями задачи).

12. Найти область определения каждой из следующих функций:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $u=\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{2x+1}$;

3) $v=\arccos\frac{1-2x}{3}$; 4) $p=\frac{x}{\sin x}$; 5) $q=\log_2(x^2-9)$.

Решение. 1) Поскольку аргумент x содержится под радикалом четной степени, то функция y будет иметь вещественные значения только при тех значениях x, при которых подкоренное выражение будет неотрицательно, т. е. $1-x^2\geqslant 0$. Решая это неравенство, получим

$$x^2\leqslant 1; \quad |x|\leqslant 1; \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Следовательно, область определения функции y есть отрезок $[-1; 1]$.

2) Здесь аргумент x содержится в знаменателе дроби. Поэтому x не может иметь тех значений, которые обращают знаменатель в нуль, так как деление на нуль не имеет смысла. Приравняв знаменатель нулю, найдем эти значения x:

$$x^2-5x+6=0; \quad x_1=2; \quad x_2=3.$$

Второе слагаемое в выражении функции u не накладывает никаких ограничений на значения x, поскольку показатель радикала нечетный. Следовательно, областью определения функции u является вся числовая ось, кроме точек $x=2$ и $x=3$.

3) Функция v будет определена только для тех значений x, для которых $-1\leqslant\frac{1-2x}{3}\leqslant 1$. Решив эти неравенства, получим

$$-\frac{4}{3}\leqslant-\frac{2}{3}x\leqslant\frac{2}{3}; \quad -1\leqslant x\leqslant 2.$$

Отрезок $[-1; 2]$ и является областью определения функции v.

4) Найдем значения x, которые обращают знаменатель функции p в нуль: $\sin x=0$; $x_k=k\pi$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

При этих значениях x функция p не имеет никаких значений.

Областью определения функции p является вся числовая ось, кроме точек x_k.

5) Логарифмическая функция q определена только для положительных значений своего аргумента (логарифмируемого выражения), поэтому $x^2-9>0$.

Решая это неравенство, получим $|x|>3$, откуда следует, что $-\infty<x<-3$ и $3<x<+\infty$, т. е. область определения функции q состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$.

13. Найти области определения функций и построить их на числовой оси:

1) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; 2) $z=\sqrt{1+t}-2\sqrt[4]{5-t}$;

3) $u=\frac{\alpha^2+1}{1+\sqrt{\alpha^2-9}}$; 4) $r=\sqrt{\sin\varphi}$;

5) $v=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}$; 6) $v=\lg(x-1)+\arcsin\frac{x}{2}$.

§ 3. Построение графика функции по точкам

Наглядное графическое изображение функциональной зависимости между двумя переменными x и y можно получить, рассматривая значения этих переменных как координаты точек на плоскости.

Графиком функции, заданной уравнением $y=f(x)$, называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Обычно график функции представляет некоторую плоскую линию.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) по данному аналитическому выражению функции составляется таблица соответствующих друг другу значений переменных;

2) выбирается система координат с подходящими единицами масштаба для каждой переменной.

Обычно применяется прямоугольная система координат и одна общая единица масштаба для обеих координатных осей;

3) строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения аргумента и функции, содержащиеся в таблице;

4) полученные точки соединяются плавной линией.

Построенный этим способом график функции будет тем точнее, чем больше значений переменных содержится в таблице, чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. *График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.*

14. Построить графики функций:

1) $y=x^2-2x-1$ на отрезке $[-2;\ 4]$;

2) $y=-\frac{4x}{x^2+1}$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

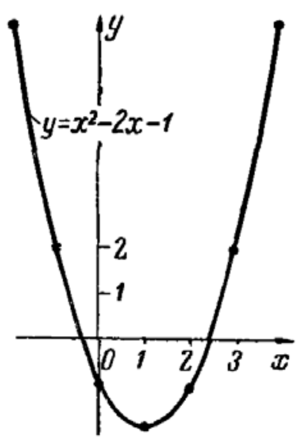
3) $y=7x^2-100\sqrt{1+x^2}$ на отрезке $|x|\leqslant 7$;

4) $y = x^2 - 4|x-1| + 1$ на отрезке $[-6; 5]$;

5) $y = \frac{16}{x^2} - 1$ между точками пересечения с осью Ox.

Решение. 1) В условии задачи указано, что независимой переменной x можно придавать только значения, заключенные на отрезке $[-2; 4]$. Учитывая это, составим следующую таблицу, беря для простоты только целые значения x и вычисляя из данного уравнения соответствующие значения y:

x	y
-2	7
-1	2
0	-1
1	-2
2	-1
3	2
4	7



Черт. 4

Введем прямоугольную систему координат, как показано на черт. 4, с одинаковыми единицами масштаба, которые указаны числовыми пометками на координатных осях.

Построим точки, откладывая содержащиеся в таблице значения аргумента x по оси абсцисс, а значения функции y по оси ординат. Соединим полученные точки плавной кривой, которая и будет графиком данной функции. Эта кривая называется параболой.

Вообще *графиком всякой квадратной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *является парабола, ось симметрии которой параллельна оси* Oy.

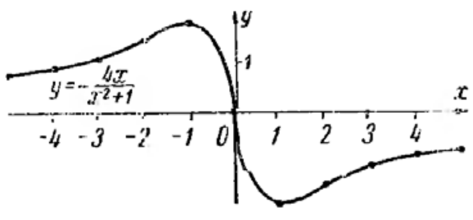
2) Функция $y = -\frac{4x}{x^2+1}$ — нечетная, так как для нее $y(-x) = -y(x)$. Для значений аргумента, отличающихся только по знаку, значения нечетной функции будут также отличаться только по знаку. Поэтому при составлении таблицы здесь достаточно вычислить из данного уравнения значения функции только для положительных значений аргумента. Значения функции для отрицательных значений аргумента получим путем простой перемены знаков.

Выберем систему координат с одинаковыми масштабами на координатных осях (черт. 5).

Построим точки для каждой пары числовых значений x и y, которые содержатся в строках таблицы. Соединяя эти точки плавной кривой, получим график, симметричный относительно начала координат.

x	y
0	0
± 1	∓ 2
± 2	$\mp \frac{8}{5}$
± 3	$\mp \frac{6}{5}$
± 4	$\mp \frac{16}{17}$
± 5	$\mp \frac{10}{13}$

3) Функция $y = 7x^2 - 100\sqrt{1+x^2}$ является четной, так как при перемене знака у любого значения аргумента значение этой функции не изменяется, $y(-x) = y(x)$. Поэтому здесь при составлении таблицы достаточно вычислить значения функции только для положительных значений аргумента: значения функции

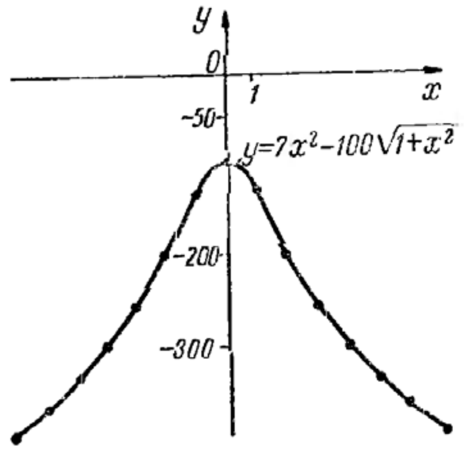


Черт. 5

для отрицательных значений аргумента будут те же.

Составив таблицу, замечаем, что значения аргумента есть числа 1-го порядка, тогда как значения функции — числа 3-го порядка. Поэтому для построения соответствующих точек берем р а з н ы е м а с ш т а-

x	y
0	-100
± 1	$7-100\sqrt{2} \approx -134$
± 2	$28-100\sqrt{5} \approx -195$
± 3	$63-100\sqrt{10} \approx -253$
± 4	$112-100\sqrt{17} \approx -300$
± 5	$175-100\sqrt{26} \approx -335$
± 6	$252-100\sqrt{37} \approx -356$
± 7	$343-100\sqrt{50} \approx -364$



Черт. 6

бы абсцисс и ординат; они показаны числовыми пометками на координатных осях* (черт. 6).

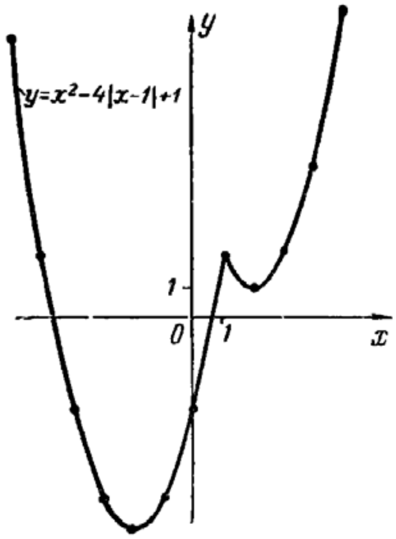
График данной четной функции симметричен относительно оси ординат.

4) Составим таблицу значений функции $y=x^2-4\,|\,x-1\,|+1$ для значений аргумента x, заключенных на отрезке $[-6;\ 5]$.

x	y
-6	9
-5	2
-4	-3
-3	-6
-2	7
-1	-6
0	-3
1	2
2	1
3	2
4	5
5	10

Затем строим точки и, соединяя их сплошной линией, получим искомый график (черт. 7).

Данная функция не является четной или нечетной. Поэтому ее график не симметричен ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.



Черт. 7

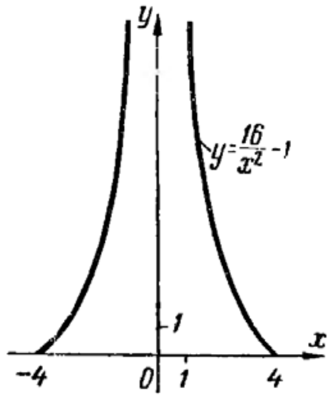
5) Абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью Ox найдем из данного уравнения, зная, что в этих точках ордината $y=0$. При $y=0$, $16-x^2=0$, откуда $x=\pm 4$. Далее составляем таблицу значений данной четной функции на отрезке $[-4;\ 4]$ и строим ее график (черт. 8).

Когда x приближается к нулю слева или справа, значения функции и ординаты ее графика неограниченно возрастают. При $x=0$ функция не имеет никакого числового значения, ее график состоит из двух отдельных бесконечных ветвей.

* Порядком числа $|N|\geq 1$ называется число его цифр до запятой, а порядком числа $|N|<1$ называется число нулей после запятой до первой значащей цифры, взятое со знаком минус.

15. Построить на одном чертеже графики функций $y_1 = 1 + \frac{1}{2}x$ и $y_2 = \sin x$. Путем сложения ординат полученных линий построить график функции $y = 1 + \frac{1}{2}x + \sin x$.

x	y
$\pm 0,5$	63
± 1	15
± 2	3
± 4	0



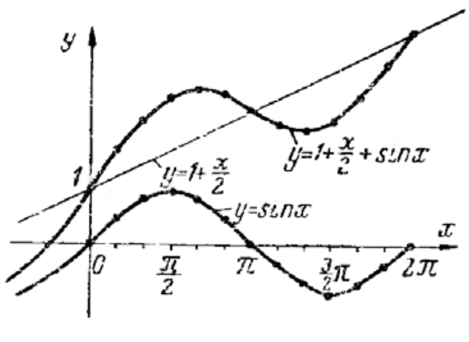
Черт. 8

Решение. *График всякой линейной функции есть прямая линия.* Поэтому для построения графика первой данной функции, которая является линейной, достаточно иметь две пары соответствующих друг другу значений переменных, т. е. две точки.

Для построения графика второй данной функции берем значения x в радианах, а значения y_2 из тригонометрических таб-

x	0	2
y_1	1	2

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y_2	0	0,5	0,9	1	0,9	0,5	0	−0,5	−0,9	−1	−0,9	−0,5	0



Черт. 9

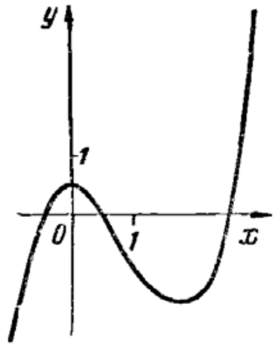
x	y
−1	−2,1
0	0,5
1	−0,9
2	−1,5
3	3,5

лиц. Учитываем также периодичность этой функции: построив ее график на протяжении одного периода $[0;\ 2\pi]$, затем повторяем его. Алгебраически складывая ординаты точек линий y_1 и y_2, имеющих одинаковые абсциссы x, получим искомый график функции $y=y_1+y_2$ (черт. 9).

16. Найти приближенные значения корней функции $y=0{,}8x^3-2x^2-0{,}2x+0{,}5$, построив ее график на отрезке $[-1;\ 3]$.

Решение. Корни функции, т. е. значения аргумента, обращающие ее в нуль, можно найти как абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс, так как в этих точках $y=0$.

Составив таблицу числовых значений переменных x и y, построим график данной функции (черт. 10). Из чертежа находим искомые приближенные значения корней функции: $x_1\approx-0{,}4$; $x_2\approx 0{,}5$; $x_3\approx 2{,}6$.



Черт. 10

17. Построить по точкам на отрезке $[-3;\ 3]$ графики следующих функций:

1) $y=\frac{x^3-12x}{3}$; 2) $y=1-2^x$; 3) $y=1-|x^2-1|$;

4) $y=\begin{cases} 1-x & \text{при } x\leqslant 0 \\ 1+\sqrt{3x} & \text{при } x>0. \end{cases}$

18. Найти области определения функций и построить их графики:

1) $y=2\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$; 2) $y=x\sqrt{8-x^2}$;

3)* $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{16-x^2}$; 4)* $y=4\sqrt{|x|}-\sqrt{x^3}$.

19. Построить графики функций между точками пересечения с осью Ox:

1) $y=6x-x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}(x^3-12x^2+36x)$;

3) $y=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$; 4)* $y=|x-2|-3$.

20. Построить графики функций между точками пересечения с осями Oy и Ox:

1) $y=2-\sqrt[3]{2x-8}$; 2) $y=\frac{x-8}{x-4}$; 3)* $y=|x^2-6x|$;

4)* $y=\begin{cases} 10-x & \text{при } x<5 \\ 14x-x^2-40 & \text{при } x\geqslant 5. \end{cases}$

§ 4. Построение графика функции путем сдвига и деформации известного графика другой функции

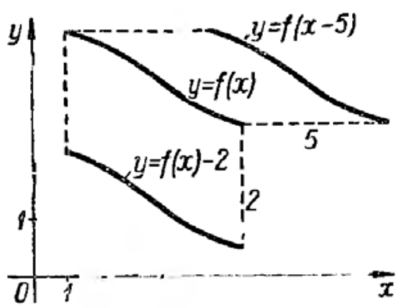
Зная график какой-либо функции, можно построить графики многих других более сложных функций чисто геометрическим путем, без составления таблицы числовых значений переменных.

Так, *исходя из графика функции* $y = f(x)$, *можно посредством его сдвига или деформации построить графики для функций вида*

$$y = f(x-a), \quad y = f(x) + b, \quad y = Af(x),$$
$$y = f(kx), \quad y = Af[k(x-a)] + b.$$

График функции $y = f(x-a)$ получается из исходного графика путем сдвига его вдоль оси абсцисс на a масштабных единиц этой оси, вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$ (черт. 11).

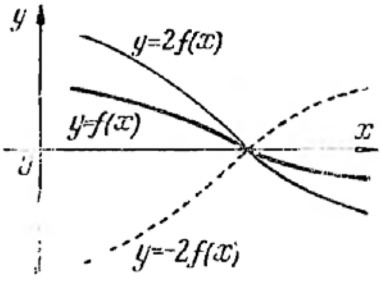
График функции $y = f(x) + b$ получается из исходного графика путем сдвига его вдоль оси ординат на b масштабных единиц этой оси, вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$ (черт. 11).



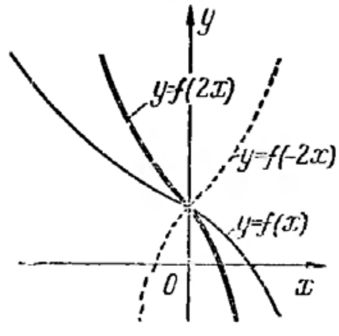
Черт. 11

График функции $y = Af(x)$ получается из исходного путем умножения ординат его точек на коэффициент A. При этом, если $|A| > 1$, то ординаты всех точек исходного графика увеличиваются по абсолютной величине в $|A|$ раз, если $|A| < 1$, то они уменьшаются по абсолютной величине в $\frac{1}{|A|}$ раз, если $A < 0$, то изменяются еще и их знаки. График функции $y = Af(x)$ при $A < 0$ будет симметричен графику функции $y = |A| f(x)$ относительно оси абсцисс (черт. 12).

График функции $y = f(kx)$ получается из исходного графика путем деления абсцисс его точек на коэффициент k. При этом, если $|k| > 1$, то абсциссы всех точек исходного графика уменьшаются по абсолютной величине в $|k|$ раз; если $|k| < 1$, то они



Черт. 12



Черт. 13

увеличиваются по абсолютной величине в $\frac{1}{|k|}$ раз; если $k<0$, то изменяются еще и их знаки. График функции $y=f(kx)$, при $k<0$, симметричен графику функции $y=f(|k|x)$ относительно оси ординат (черт. 13).

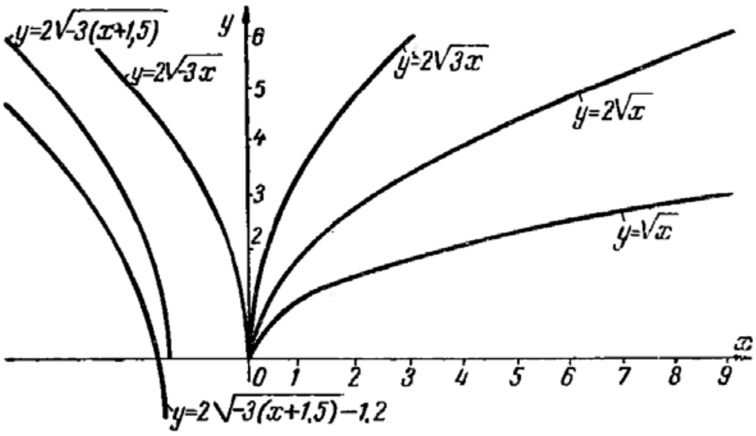
Выполняя указанные сдвиги и деформации графика функции $y=f(x)$ в последовательном порядке, одно вслед за другим, можно строить графики и для функций более сложного вида:

$$y=Af[k(x-a)]+b. \tag{1}$$

21. Построить по точкам график функции $y=\sqrt{x}$ на отрезке [0; 9] и затем, исходя из этого графика, путем последовательных деформаций его и сдвигов, построить график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}-1,2$.

Решение. Составим таблицу соответственных значений переменных x и y для функции $y=\sqrt{x}$ и построим ее график (черт. 14).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0



Черт. 14

Обозначим функцию $\sqrt{u}$ символом $f(u)$. Тогда данная функция преобразуется к виду

$$y=2f[-3(x+1,5)]-1,2.$$

Сопоставляя ее с выражением (1), находим следующие значения параметров: $A=2$; $k=-3$; $a=-1,5$; $b=-1,2$.

Далее, согласно общим указаниям, строим искомый график следующим путем:

увеличивая в 2 раза ординаты точек графика функции $y=\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их абсциссы, строим график функции $y=2\sqrt{x}$;

уменьшая в 3 раза абсциссы точек графика функции $y=2\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=2\sqrt{3x}$;

меняя знаки у абсцисс точек графика функции $y=2\sqrt{3x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=2\sqrt{-3x}$ (графики функций $y=2\sqrt{3x}$ и $y=2\sqrt{-3x}$ симметричны относительно оси ординат);

перенося точки графика функции $y=2\sqrt{-3x}$ в направлении оси абсцисс на 1,5 единицы масштаба этой оси влево, строим график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}$; перенося точки графика функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}$ в направлении оси ординат на 1,2 единицы масштаба этой оси вниз, строим искомый график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}-1,2$.

22. Исходя из графика функции $y=\sin x$, путем его деформаций и сдвигов построить график функции $y=-3\sin(2x+8)$.

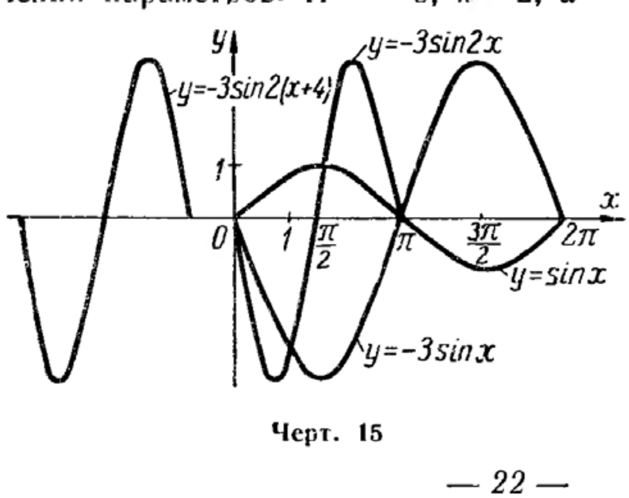
Решение. Заменяя в выражении (1) символ произвольной функции f символом тригонометрической функции sin, получим

$$y=A\sin k(x-a)+b. \tag{2}$$

Преобразуем данную функцию:

$$y=-3\sin(2x+8)=-3\sin 2(x+4)$$

и, сопоставляя ее с выражением (2), определим следующие значения параметров: $A=-3$; $k=2$; $a=-4$; $b=0$.



Черт. 15

Построение искомого графика выполняем, руководствуясь общими указаниями:

увеличивая в 3 раза ординаты точек графика функции $y=\sin x$ по абсолютной величине, меняя их знаки и сохраняя неизменными абсциссы, строим график функции $y=-3\sin x$ (черт. 15);

уменьшая в 2 раза абсциссы точек графика функции $y = -3 \sin x$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y = -3 \sin 2x$;

перенося точки графика функции $y = -3 \sin 2x$ в направлении оси абсцисс на 4 единицы масштаба этой оси влево, строим искомый график функции $y = -3 \sin 2(x+4)$.

Пользуясь периодичностью данной функции, полученный график можно продолжить в обе стороны.

23. Построить по точкам на отрезке $[-4; 4]$ график функции $y = x^2$ и затем путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

$$1)\ y = 2x^2 - 5;\quad 2)\ y = 3 - \frac{x^2}{2};\quad 3)\ y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1.$$

24. Исходя из графика функции $y = \sqrt{x}$ (черт. 14), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

$$1)\ y = 1 + \sqrt{2x};\qquad 2)\ y = 3\sqrt{-2x} - 2;$$

$$3)\ y = 2 - 3\sqrt{x+5};\qquad 4)^*\ y = \frac{1}{2}\sqrt{2x-6} - 5.$$

25. Зная график функции $y = \sin x$ (черт. 9), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

$$1)\ y = 2\sin(x+1);\qquad 2)\ y = 1 + 3\sin 2x;$$

$$3)\ y = -2\sin 3(x-1);\qquad 4)^*\ y = 2 - \sin\frac{4-x}{2}.$$

26. Зная график функции $y = \cos x$ *, путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики функций:

$$1)\ y = 1 - \frac{1}{2}\cos x;\qquad 2)\ y = 2{,}3 + 4\cos(1{,}4 - x);$$

$$3)\ y = -4\cos(2x+3);\qquad 4)^*\ y = 4{,}2 - 3\cos\frac{2{,}7 - x}{3}.$$

§ 5. Переменная как упорядоченное числовое множество. Предел переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции

Переменная величина определяется не только множеством тех числовых значений, которые она принимает, но и тем порядком, в котором они следуют друг за другом. Поэтому *в математическом анализе переменная рассматривается как множество чисел, расположенных в известной последовательности, т. е. как упорядоченное числовое множество.*

---

* Его можно взять из учебника.

Простейшим частным случаем переменной является такая величина v, последовательные значения которой могут быть перенумерованы: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$

Такое простейшего вида упорядоченное числовое множество называется *числовой последовательностью.*

I. *Число a называется пределом переменной x, если абсолютное значение их разности $a-x$ для всех значений x, следующих за некоторым значением x_0, будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.*

II. *Переменная α называется бесконечно малой, если все ее значения, следующие за некоторым значением α_0, по абсолютному значению будут меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.*

III. *Переменная z называется бесконечно большой, если все ее значения, следующие за некоторым значением z_0, по абсолютному значению будут больше любого заранее данного положительного числа N, как бы велико оно ни было.*

Если число a есть предел переменной x, то говорят, что x стремится к a и пишут: $\lim x = a$, или $x \to a$.

Бесконечно большая величина z не имеет предела, однако для сокращения речи и записей условно говорят, что z стремится к бесконечности, или предел z равен бесконечности, и пишут $z \to \infty$, или $\lim z = \infty$.

Говорят и пишут также, что $z \to +\infty$, $\lim z = +\infty$, или $z \to -\infty$, $\lim z = -\infty$, если все значения бесконечно большой z, следующие за некоторым значением z_0, сохраняют положительный или отрицательный знак.

Из определений предела переменной, бесконечно малой и бесконечно большой величин следует:

1) *предел бесконечно малой равен нулю* (т. е. если α бесконечно малая, то $\lim \alpha = 0$, или $\alpha \to 0$);

2) *разность между переменной и ее пределом есть величина бесконечно малая* (т. е. если $\lim x = a$, то $x - a = \alpha$);

3) *величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая* $\left(\text{т. е. если } z \to \infty, \text{ то } \frac{1}{z} \to 0\right)$;

4) *величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая* $\left(\text{т. е. если } \alpha \to 0, \text{ то } \frac{1}{\alpha} \to \infty\right)$.

Если $f(x) \to b$, когда $x \to a$ не совпадая с a, то число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a.

Предел функции можно определить иначе, не ссылаясь на определение предела переменной: *Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (в точке a), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b|$ будет меньше ε, когда $|x - a|$, при $x \neq a$, меньше δ.*

Если число b есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, то пишут:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, когда x стремится к a произвольным способом;

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$, когда x стремится к a слева, оставаясь меньше a;

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, когда x стремится к a справа, оставаясь больше a *.

При этом, если существует предел функции, когда $x\to a$ произвольным способом, то существуют и будут с ним одинаковы односторонние пределы функции, когда $x\to a$ только слева или только справа, т. е.

$$\text{если } \lim_{x\to a} f(x)=b, \quad \text{то } \lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Если же односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x\to a$ произвольным способом, т. е.

$$\text{если } \lim_{x\to a-0} f(x)\neq\lim_{x\to a+0} f(x), \quad \text{то } \lim_{x\to a} f(x) \text{ не существует.}$$

27. Полагая $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, составить таблицу значений переменных

$$x=1+0{,}1^n; \quad y=-0{,}1^{-n}, \quad z=(-0{,}1)^n, \quad u=(-1)^n+0{,}1^n$$

и определить характер их изменения при неограниченном увеличении n, т. е. при $n\to+\infty$.

Решение. Вычисляя значения заданных переменных при указанных значениях n, получим следующую таблицу:

n	0;	1;	2;	3;	4;	5;	$\ldots$; $n\to+\infty$
x	2;	1,1;	1,01;	1,001;	1,0001;	1,00001;	$\ldots$; $x\to 1+0$
y	—1;	—10;	—100;	—1000;	—10000;	—100000;	$\ldots$; $y\to-\infty$
z	1;	—0,1;	0,01;	—0,001;	0,0001	—0,00001;	$\ldots$; $z\to 0$
u	2;	—0,9;	1,01;	—0,999;	0,0001;	—0,99999;	$\ldots$

Из рассмотрения этой таблицы можно заключить:

1) С увеличением n последовательные значения переменной x приближаются к единице так, что при достаточно большом n

* Если $a=0$, то вместо $0+0$ $(0-0)$ пишут просто $+0$ (-0).

абсолютное значение их разности $|x-1|$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.

Это же можно и доказать. Пусть задано число $\varepsilon>0$. Полагая $|x-1|=0{,}1^n<\varepsilon$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|x-1|$ будет меньше ε, как только n станет больше $\lg\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, согласно определению I переменная x имеет предел, равный единице, $\lim\limits_{n\to+\infty} x=1$, к которому она стремится справа, оставаясь больше его, т. е. монотонно (неизменно) убывая.

2) Последовательные значения переменной y с увеличением n неограниченно убывают так, что при достаточно большом n они по абсолютному значению будут больше любого заданного положительного числа N, как бы велико оно ни было. Докажем это.

Пусть задано число $N>0$. Полагая $|y|=0{,}1^{-n}>N$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n>\lg N$, т. е. $|y|$ будет больше N, как только n станет больше $\lg N$. Следовательно, согласно определению III, переменная y есть бесконечно большая величина: $\lim\limits_{n\to+\infty} y=-\infty$.

3) С увеличением n последовательные значения переменной z приближаются к нулю так, что при достаточно большом n они по абсолютному значению будут меньше любого заданного положительного числа ε, как бы мало оно ни было. Докажем это.

Пусть задано число $\varepsilon>0$. Полагая $|z|=0{,}1^n<\varepsilon$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|z|$ будет меньше ε, как только n станет больше $\lg\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, согласно определению II переменная z есть бесконечно малая величина: $\lim\limits_{n\to+\infty} z=0$. Она стремится к своему пределу — нулю, колеблясь около него, т. е. не монотонно.

4) Последовательные значения переменной u с увеличением n не приближаются ни к какому определенному числу. Поэтому переменная u не имеет предела. Она не является и бесконечно большой, так как ее значения не растут безгранично вместе с n. Переменная u — ограниченная величина.

28. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=\begin{cases}0, & \text{если } 0<a<1\\ +\infty, & \text{если } a>1.\end{cases}$

Решение. 1) Пусть постоянная a есть правильная положительная дробь $0<a<1$. Тогда с увеличением n переменная $f(n)=a^n$ будет монотонно убывать, т. е. каждое следующее ее значение будет меньше предыдущего. Докажем, что, начиная с определенного значения $n=n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$, значения функции a^n будут меньше любого заданного положительного числа ε.

Полагая $a^{n_0} < \varepsilon$, найдем искомое значение n_0. Логарифмируя обе части неравенства, получим $n_0 \lg a < \lg \varepsilon$, откуда найдем $n_0 > \frac{\lg \varepsilon}{\lg a}$ (знак неравенства изменился, так как при $0 < a < 1$ $\lg a < 0$).

Следовательно, значение функции a^n при $n = n_0$ и все последующие ее значения при $n > n_0$ будут меньше ε, как бы мало оно ни было, т. е. доказано, что при $0 < a < 1$ и при $n \to +\infty$ функция a^n является бесконечно малой величиной, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

2) Пусть $a > 1$. Тогда с увеличением n переменная a^n будет монотонно возрастать. Докажем, что, начиная с определенного значения $n = n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$, значения функции a^n будут больше любого заданного положительного числа N.

Полагая $a^{n_0} > N$, найдем $n_0 > \frac{\lg N}{\lg a}$.

Следовательно, для всех значений $n \geqslant n_0$ значения функции a^n будут больше N, как бы велико оно ни было, т. е. доказано, что при $a > 1$ и при $n \to +\infty$ функция a^n является положительной бесконечно большой величиной, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

29. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

Решение. 1) Составим разность $\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} = \frac{1}{x}$. При $x \to \infty$ эта разность является бесконечно малой, как величина, обратная бесконечно большой. А если переменная $\frac{2x+3}{3x}$ отличается от постоянной $\frac{2}{3}$ на величину бесконечно малую, то постоянная является пределом переменной. Следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$.

2) Положим $x = 3 + \alpha$ и составим разность: $(2x+1) - 7 = [2(3+\alpha)+1] - 7 = 2\alpha$. При $x \to 3$ переменная $\alpha \to 0$ и разность между функцией $2x+1$ и числом 7, т. е. 2α, будет бесконечно малой. Из этого следует, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

30. Найти пределы функции $y = \frac{5}{2-x}$: 1) при $x \to 2-0$ и 2) при $x \to 2+0$. Пояснить решение таблицами.

Решение. 1) Если x будет стремиться к 2 слева, оставаясь меньше 2, то $2 - x$ будет положительная бесконечно малая, а $\frac{5}{2-x}$ будет положительная бесконечно большая, т. е. если $x \to 2-0$, то $(2-x) \to +0$, а $\frac{5}{2-x} \to +\infty$, или $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{5}{2-x} = +\infty$.

Указанное поведение переменных x, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ поясняется следующей таблицей:

x	1;	1,9;	1,99;	1,999;	1,9999;	1,99999;	1,999999;	...
$2-x$	1;	0,1;	0,01;	0,001;	0,0001;	0,00001;	0,000001;	...
$\frac{5}{2-x}$	5;	50;	500;	5000;	50000;	500000;	5000000;	...

2) Если $x \to 2+0$, то $(2-x) \to -0$, а $\frac{5}{2-x} \to -\infty$, или $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{5}{2-x} = -\infty$.

Таблица соответствующих значений переменных x, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ наглядно показывает их поведение:

x	3;	2,1;	2,01;	2,001;	2,0001;	2,00001;	2,000001;	...
$2-x$	—1;	—0,1;	—0,01;	—0,001;	—0,0001;	—0,00001;	—0,000001;	...
$\frac{5}{2-x}$	—5;	—50;	—500;	—5000;	—50000;	—500000;	—5000000;	...

График функции $y=\frac{5}{2-x}$ изображен на черт. 16.

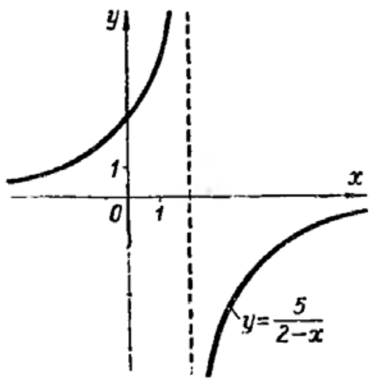
31. Найти пределы функции $y=2^{\frac{1}{x}}$ при x, стремящемся к нулю: 1) слева, 2) справа и 3) произвольным способом.

Решение. 1) Если переменная x будет стремиться к нулю слева, оставаясь отрицательной, т. е. если x будет отрицательной бесконечно малой, то $\frac{1}{x}$ будет отрицательной бесконечно большой и $\lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$, что следует из решения задачи 28 (1).

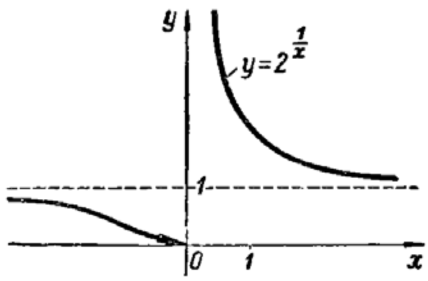
2) Если $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty$.

3) Если x будет стремиться к нулю произвольным способом, не оставаясь с одной стороны от него (например, как z в задаче 27), то $\frac{1}{x}$ будет стремиться к бесконечности, принимая значения разных знаков. Вследствие этого при $x \to 0$ функция $2^{\frac{1}{x}}$ не имеет предела, не будучи при этом и бесконечно большой величиной $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\infty}$ — не существует.

График функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ показан на черт. 17.



Черт. 16



Черт. 17

32. Найти пределы функции $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$: 1) при $x \to -0$; 2) при $x \to +0$ и 3) при $x \to 0$.

Решение. 1) Если $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}$, т. е. $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Если $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$, т. е. $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

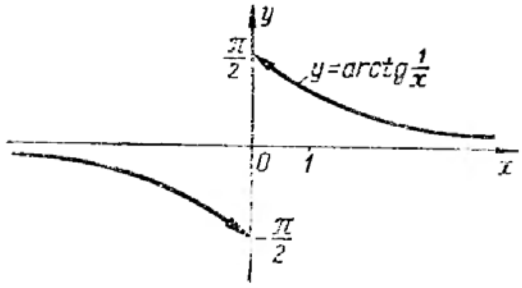
3) Если $x \to 0$, то $\frac{1}{x} \to \infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ не стремится ни к какому значению, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} \infty$ не существует.

График этой функции показан на черт. 18.

33. Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, составить таблицу соответствующих значений переменных: $\alpha_1 = 2^n$; $\alpha_2 = -2^n$; $\alpha_3 = (-2)^n$;

$\alpha_4 = 2^{-n}$; $\alpha_5 = -2^{-n}$; $\alpha_6 = (-2)^{-n}$ и определить характер их изменения при $n \to +\infty$.

34. Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, написать последовательности значений переменных: $x = \frac{n}{n+1}$; $y = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; $z = \frac{(-1)^n + 3n}{n+2}$; $u = \frac{3n \cos n\pi}{n+3}$; $v = 2^{-n} \sin \frac{n\pi}{2}$ и определить, у какой из этих переменных существует предел при $n \to +\infty$ и чему он равен.



Черт. 18

35. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 3) = 7$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to a} \frac{3x-2}{2x} = \frac{3}{2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{3-x^2} = -2$.

36. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x \to -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $\lim\limits_{x \to -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}}$; 6) $\lim\limits_{x \to -1} 3^{\frac{1}{x+1}}$.

Пояснить решение таблицами.

37. Отрезок AB длины l разделен на n равных частей (черт. 19) и на каждой из них, кроме крайних, построены правильные треугольники. Как будет изменяться площадь S_n и периметр P_n полученной зубчатой фигуры, когда $n \to +\infty$?

Черт. 19

§ 6. Теоремы о бесконечно малых и о пределах

I. *Сумма конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая.*

II. *Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть также бесконечно малая.*

III. *Предел постоянной равен самой постоянной.*

IV. *Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме их пределов:*

$$\lim (u + v - w) = \lim u + \lim v - \lim w.$$

V. *Предел произведения конечного числа множителей равен произведению их пределов*:

$$\lim (u\,v\,w) = \lim u \cdot \lim v \cdot \lim w.$$

VI. *Предел частного равен частному пределов делимого и делителя, если предел делителя отличен от нуля*:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \qquad \lim v \neq 0.$$

38. Найти пределы следующих функций:

1) $f(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$ при $x \to 1$;

2) $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2}$ при $x \to -1$;

3) $y = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. Пользуясь указанными теоремами, последовательно находим:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(2x - 3 - \frac{1}{x}\right) = \lim 2 \cdot \lim x - \lim 3 - \frac{\lim 1}{\lim x} =$
$= 2 \cdot 1 - 3 - \frac{1}{1} = -2;$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2} = \frac{(\lim x)^3 - 3(\lim x)^2 + 2\lim x - 5}{(\lim x)^2 + 2} =$
$= \frac{(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5}{(-1)^2 + 2} = \frac{-1 - 3 - 2 - 5}{3} = -\frac{11}{3};$

3) при $x \to 0$ аргумент $\frac{1}{x} \to \infty$, а множитель $\sin \frac{1}{x}$ будет при этом колебаться между -1 и $+1$, не стремясь ни к какому определенному числу, т. е. этот множитель не имеет предела, но является величиной ограниченной, $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$. Поэтому согласно теореме II данная функция, представляющая произведение бесконечно малой x на величину, ограниченную $\sin \frac{1}{x}$, есть бесконечно малая величина, а ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

39. При $n \to +\infty$ найти пределы следующих функций:

1) $S_1(n) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}$;

2) $S_2(n) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

3) $S_3(n) = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \ldots + \frac{n-1}{n^3}$.

Решение. Каждая из данных функций представляет сумму $n-1$ членов арифметической прогрессии. Разность первой прогрессии $\frac{1}{n}$, второй $\frac{1}{n^2}$ и третьей $\frac{1}{n^3}$.

Выполняя сложение и переходя к пределу, найдем:

1) $S_1=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}(n-1);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_1=\frac{1}{2}(\lim n-1)=+\infty.$$

2) $S_2=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lim n}\right)=\frac{1}{2}.$$

3) $S_3=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{n-1}{n^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lim n}-\frac{1}{(\lim n)^2}\right]=0.$$

В этой задаче, при $n\longrightarrow+\infty$ функции S_1, S_2 и S_3 являются суммами бесконечно малых величин, число которых неограниченно возрастает вместе с n. Полученные результаты показывают, что S_1 есть величина бесконечно большая, S_2 — величина, стремящаяся к $\frac{1}{2}$, S_3 — величина бесконечно малая.

Следовательно, решение этой задачи показывает: *если число слагаемых бесконечно малых неограниченно возрастает, их сумма может оказаться любой величиной.*

40. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ при любом значении x.*

Решение. Каково бы ни было значение x, всегда найдутся такие два последовательных целых положительных числа k и $k+1$, между которыми заключается $|x|$, т. е. $k<|x|<k+1$. Исходя из этого, получим очевидное неравенство:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\cdots\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x^k}{k!}\right|\cdot\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}.$$

Первый множитель $M_1=\left|\frac{x^k}{k!}\right|$ не зависит от n и при любом данном значении x является постоянным; второй множитель $M_2=\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}$ при $n\longrightarrow+\infty$ будет величиной бесконечно малой, ибо $\left|\frac{x}{k+1}\right|<1$. (См. решение задачи 28.)

---

*) $n!$ (n — факториал) есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n; $n!=1\cdot2\cdot3\ldots n$.

Поэтому $M_1 \cdot M_2$, как произведение постоянной величины на бесконечно малую, есть величина бесконечно малая.

Вследствие этого функция $\frac{x^n}{n!}$ также будет величиной бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ при любом значении x.

Найти следующие пределы:

41. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5x + 6)$. **42.** $\lim\limits_{t \to 1} \frac{t^3 + 3^t}{\sqrt{t+3}}$.

43. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{(2x - y)^3 - \sin y}{x^2 + y^2 + \operatorname{tg} 2y}$. **44.** $\lim\limits_{x \to \pi} 5 \sin \frac{3x}{x - \pi}$.

45. 1) $\lim\limits_{x \to -0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$.

46. Как изменяются внутренний угол α_n и апофема h_n правильного многоугольника, когда число его сторон n неограниченно возрастает?

§ 7. Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

а) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, ибо *предел элементарной функции $f(x)$ при x, стремящемся к значению a, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, т. е.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

47. Найти предел функции:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ при $x \to -3$;

2) $\varphi(t) = t\sqrt{t^2 - 20} - \lg(t + \sqrt{t^2 - 20})$ при $t \to 6$.

Решение. Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:

1) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4 = -74$;

2) $\lim\limits_{t \to 6} \varphi(t) = \varphi(6) = 6\sqrt{6^2 - 20} - \lg(6 + \sqrt{6^2 - 20}) = 23$.

Найти следующие пределы:

48. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}$.

49. $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 - 5^{x+1} + 3)$.

50. $\lim\limits_{x \to -2} \lg(2 + 2x + x^2 - x^3)$.

51. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x \sin 3x$.

б) Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

В простейших из этих случаев можно найти предел функции путем рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в решениях задач § 5 и 6.

Путем таких рассуждений, основанных на свойствах пределов, получены следующие часто встречающиеся пределы:

(постоянная $a > 0$)

1. $\lim\limits_{x \to \infty} ax = \infty$.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{a} = \infty$.

3. $\lim\limits_{x \to -0} \frac{a}{x} = -\infty$.

4. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{a}{x} = +\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$.

7. $$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| < 1 \\ +\infty, & \text{если } a > 1 \\ \infty, & \text{если } a < -1^*. \end{cases}$$

8. $$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| > 1 \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1 \\ \infty, & \text{если } -1 < a < 0^*. \end{cases}$$

9. $$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1 \\ -\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$$

10. $$\lim_{x \to +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{если } a > 1 \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (x есть радианная мера угла).

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828$.

Этими простейшими пределами можно пользоваться как формулами.

---

* При $a < 0$ переменная x может принимать только целочисленные значения; для всех значений x при $a < 0$ функция a^x не определена.

Более сложные случаи нахождения предела функции: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞ рассматриваются далее каждый в отдельности.

I. *Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно малых величин* $\left(\textit{случай } \frac{0}{0}\right)$.

Этот случай нахождения предела функции имеет особенно важное значение. Как будет выяснено впоследствии, нахождение предела отношения бесконечно малого изменения функции к бесконечно малому изменению аргумента является одним из основных средств для изучения функций.

Найти следующие пределы:

52. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$; 4) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Решение. Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой, что при указанном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$; затем делаем преобразования, чтобы сократить дробь на множитель, стремящийся к нулю.

1) Разлагаем знаменатель на множители и сокращаем дробь на $x-2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Здесь нет сокращения на нуль, что никогда недопустимо. Согласно определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению 2, никогда с ним не совпадая. Поэтому здесь $x-2 \neq 0$.

Вообще, *если ищется предел функции при $x \to a$, то необходимо помнить, что x не принимает значения a, т. е. что $x \neq a$ и $x-a \neq 0$.*

2) Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Затем сокращаем дробь на $x-5$:

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5} = \lim \frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \lim \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16}.$$

3) Сократим дробь, разделив на $x+2$ числитель и знаменатель в отдельности:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2} = \lim \frac{x^4+x-5}{x^3+3x-1} = -\frac{3}{5}.$$

Вообще, *если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке* $x=a$, *то* согласно теореме Безу оба многочлена разделятся без остатка на $x-a$, т. е. *такую дробь всегда можно сократить на* $x-a$.

4) Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на $1+\cos x$:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} = \lim \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)} =$$
$$= \lim \frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x} = \frac{2}{3}.$$

53. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Выяснив вначале, что при указанном изменении аргумента данная функция представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$, преобразуем затем дробь так, чтобы сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

1) уничтожаем иррациональность в числителе путем умножения числителя и знаменателя на $1+\sqrt{x+1}$, затем сокращаем дробь на x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2};$$

2) умножаем числитель и знаменатель на произведение

$$(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})$$

и затем сокращаем дробь на $4-x$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \lim \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})} = \lim \frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})} = \frac{3}{4};$$

3) умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ и сокращаем дробь на $\operatorname{tg} x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = \lim \frac{\operatorname{tg} x(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}{1-1-\operatorname{tg} x} =$$
$$= -\lim(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}) = -2;$$

4) умножаем числитель и знаменатель на произведение

$$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}),$$

затем сокращаем дробь на $1-x$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Иначе можно решить эту задачу путем замены переменной. Полагая $x=t^6$, получим $t\to 1$, когда $x\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)}=\lim\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}.$$

54. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}$.

Решение. Устанавливаем, что данная функция не определена в предельной точке, что при заданном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$. После этого подвергаем функцию преобразованиям с тем, чтобы использовать 1-*й замечательный предел:*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \text{ (}\alpha\text{ — радианная мера угла).}$$

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

2) Применяем тригонометрическую формулу $1-\cos x=$ $=2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\left(\lim\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot 1=2.$$

3) Здесь, чтобы использовать 1-й замечательный предел, сделаем замену переменной: $1-x=t$. Тогда при $x\to 1$ будет $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

4) Полагая $\operatorname{arc\,tg}(x+2)=v$, получим $x+2=\operatorname{tg} v$, $v\to 0$, когда $x\to -2$, и

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg} v-2)^2-4}{v}=\lim\frac{(\operatorname{tg} v-4)\operatorname{tg} v}{v}=$$

$$=\lim\frac{\operatorname{tg} v-4}{\cos v}\cdot\lim\frac{\sin v}{v}=-4\cdot 1=-4.$$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{1-x}$.

56. $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}$.

57. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

58. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{3t^2-t-2}{2t^2+5t-7}$.

59. $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{2y^2+5y+2}{2y^3+7y^2+6y}$.

60. $\lim\limits_{\varphi\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi-\cos\varphi}$.

61. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-3^{2\alpha}}{3^\alpha-1}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

63. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

64. $\lim\limits_{p\to -1}\dfrac{p+1}{1-\sqrt{1+p+p^2}}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

66. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sin(x-a)}$.

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

69*. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

70*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}$.

II. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно больших величин $\left(\text{случай } \frac{\infty}{\infty}\right)$.*

Найти пределы:

71. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{n\to -\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$; 4) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$; 6)* $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям.

1) Деля числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая здесь степень x), находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5},$$

так как при $x \to \infty$ величины $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми. Эту задачу можно решить иначе, посредством замены переменной. Полагая $x = \frac{1}{\alpha}$, получим: $\alpha \to 0$, когда $x \to \infty$ и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{3}{\alpha^2} - 1}{\frac{5}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}} = \lim \frac{3 - \alpha^2}{5 + 2\alpha} = \frac{3}{5}.$$

Вообще, *предельный переход при $x \to \infty$ всегда может быть заменен предельным переходом при $\alpha \to 0$, если за новую независимую переменную принять величину, обратную первоначальной переменной*, т. е. если положить $\alpha = \frac{1}{x}$.

2) Эту задачу можно решить теми же двумя способами, что и предыдущую.

Деля числитель и знаменатель на n, получим

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{-1} = -1,$$

или, полагая $n = \frac{1}{\alpha}$, найдем $\alpha \to -0$ при $n \to -\infty$, и

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{\alpha \to -0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}} = \lim \frac{1}{-\sqrt{1 + \alpha^2}} = -1.$$

Здесь появляется минус вследствие внесения под знак квадратного радикала (в первом решении) или вынесения за этот знак (во втором решении) отрицательного делителя, ибо если $a < 0$, то

$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}.$$

Из этого решения следует, что при $n \to +\infty$ предел данной функции будет равен единице, а при $n \to \infty$ предел этой функции не существует.

3) Умножая числитель и знаменатель дроби на 7^{-n}, получим

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \lim \frac{7^{-n} + 7^2}{3 \cdot 7^{-n} - 1} = \frac{0 + 49}{0 - 1} = -49,$$

так как $\lim\limits_{n \to +\infty} 7^{-n} = 7^{-\infty} = 0$.

4) Здесь числитель дроби есть сумма n членов арифметической прогрессии, а знаменатель есть сумма $n + 1$ членов другой арифметической прогрессии. Преобразуя их по известной формуле,

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}=$$

$$=\lim\frac{\frac{2+2n}{2}\,n}{\frac{1+2n+1}{2}\,(n+1)}=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

5) Тождественно преобразуем дробь так, чтобы затем сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim\frac{\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\lim\frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\lim\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\lim\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\lim\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-\frac{1}{2}.$$

6)* Преобразуя знаменатель с помощью формулы для суммы квадратов натурального ряда чисел:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}=\lim\frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)}=$$

$$=\lim\frac{6}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=3.$$

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$.

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+3}$.

74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$.

75. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}$.

76. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$.

77. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{1+2+3+\ldots+n}$.

III. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$).*

Этот случай нахождения предела функции приводится путем преобразования функции к одному из двух рассмотренных случаев, т. е. к случаю $\frac{0}{0}$ или к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Найти пределы:

78. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{arc\,ctg} x$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} x\right)$.

Решение. Установив, что при указанном изменении аргумента функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$), преобразуем ее к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности.

$$1)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=1\cdot\lim\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

Здесь можно было решать другим путем, заменив переменную.
Полагая $1-x=\alpha$, получим

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\alpha}{2}\right)=\lim\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}=$$

$$=\lim\frac{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=\lim\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\lim\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=1\cdot\frac{2}{\pi}\lim\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

2) Полагая $\frac{\pi}{4}-x=t$, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)=\lim_{t\to 0}t\operatorname{cosec}(\pi-t)=\lim\frac{t}{\sin t}=1.$$

3) Полагая $\operatorname{arc\,ctg} x=\alpha$, имеем $x=\operatorname{ctg}\alpha$ и

$$\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arc\,ctg}x=\lim_{\alpha\to+0}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\lim\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\lim\cos\alpha\cdot\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

4) Положим $\operatorname{arc\,tg} x = z$, тогда $x = \operatorname{tg} z$ и

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x\right) = \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + z\right) \operatorname{tg} z = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{2} + z\right) \sin z}{\cos z} =$$

$$= \lim \sin z \cdot \lim \frac{\frac{\pi}{2} + z}{\cos z} = -1 \cdot \lim \frac{\frac{\pi}{2} + z}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = -1 \cdot 1 = -1.$$

79. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} 2x$. **80.** $\lim\limits_{x \to \pi} \sin 2x \operatorname{ctg} x$.

81. $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \frac{x}{n}$. **82.** $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{tg} 2^{-n}$.

IV. *Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty - \infty$).*

Этот случай нахождения предела функции можно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

Найти пределы:

83. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;

3) $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0} (\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x)$.

Решение. Анализируя условие задачи, заключаем, что при указанном поведении аргумента функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty - \infty$).

После этого преобразуем данную функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тем самым данный случай нахождения предела функции $\infty - \infty$ сводится к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Производим вычитание дробей и полученную в результате дробь сокращаем на $x-2$:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \lim \frac{x-2}{x^2-4} = \lim \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

2) Рассматривая данную функцию как дробную, со знаменателем, равным единице, избавимся от иррациональности в числителе и затем разделим числитель и знаменатель дроби

на x:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

3) Как и в предыдущей задаче, переводим иррациональность в знаменатель, затем умножаем числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-0}(\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha}-\operatorname{tg}\alpha)=\lim\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

4) Тождественно преобразуем данную функцию к виду дроби, затем сокращаем дробь на $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0}(2\operatorname{cosec}2x-\operatorname{ctg}x)=\lim\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim\frac{2-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim\operatorname{tg}x=0.$$

84. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$. **85.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})$.

86. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$. **87.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)$.

V. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности* (*случай* 1^∞).

В этом случае для нахождения предела функции используется 2-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Число e — иррациональное; $e=2{,}7182818\ldots$ *Логарифмы с основанием e называются натуральными* и обозначаются ln. Натуральные и десятичные логарифмы чисел связаны формулами:

$$\lg x=M\ln x,\qquad \ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

где $M=\lg e=0{,}43429\ldots,\quad \frac{1}{M}=\ln 10=2{,}30258\ldots$

Найти пределы:

88. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном изменении аргумента функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (случай 1^∞), далее преобразуем функцию так, чтобы использовать 2-й замечательный предел.

1) Полагая $n=ax$, получим $x\to\infty$, когда $n\to\infty$, и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=$$
$$=\left[\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a.$$

Возможно и другое решение без замены переменной:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=\left[\lim_{\frac{n}{a}\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=e^a.$$

2) Полагая $-2x=\alpha$, найдем $\alpha\to 0$, когда $x\to 0$, и

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=[\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{-2}=e^{-2}.$$

3) Исключив целую часть из дроби, полагаем $-\frac{5}{t+2}=x$:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim\left(1-\frac{5}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{10}{x}-3}=$$
$$=[\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{-10}\cdot\lim(1+x)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}.$$

4) Полагая $\operatorname{tg} x=1+\alpha$, получим $\alpha\to 0$, когда $x\to\frac{\pi}{4}$, и

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2)},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}}=e^{-1},$$

так как

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}=1.$$

89. $\lim\limits_{x \to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}$.

90. $\lim\limits_{t \to \infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^t$.

91. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

92. $\lim\limits_{x \to \pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

§ 8. Смешанные задачи на нахождение пределов

Найти пределы:

93. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

94. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$.

95. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

96. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$.

97. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

98. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$.

99. $\lim\limits_{u\to-2}\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$.

100. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$.

101. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

102. $\lim\limits_{t\to1-0}\frac{\arccos t}{t-1}$.

103. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

104. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$.

105. $\lim\limits_{p\to 2}\frac{p^5-2p^4+p^2-3p+2}{p^3-2p^2+3p-6}$.

106. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

107. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\operatorname{ctg} 5x$.

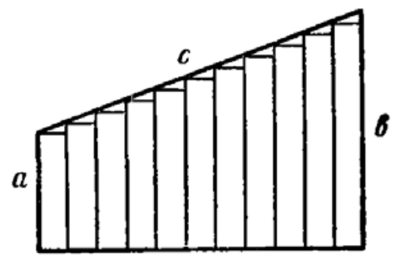
108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

109*. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

110*. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

111. Как изменяются корни x_1 и x_2 полного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, когда коэффициент $a\to 0$? ($b\neq 0$ и c — постоянные).

112. Прямоугольная трапеция разделена прямыми, параллельными ее основаниям, на n равных по высоте малых трапеций, и в каждую из них вписан прямоугольник (черт. 20). Как будут изменяться площадь S_n и периметр P_n полученной ступенчатой фигуры, когда $n\to+\infty$?



Черт. 20

§ 9. Сравнение бесконечно малых

Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины α и β, находят предел их отношения. При этом:

1) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, *то* α *называется бесконечно малой высшего порядка, чем* β;

2) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, *то* α *называется бесконечно малой низшего порядка, чем* β;

3) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\,(A\neq 0$ и $A\neq\infty)$, *то* α *называется бесконечно малой того же порядка, что и* β;

4) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, *то* α *и* β *называются эквивалентными бесконечно малыми.* Эквивалентность бесконечно малых α и β обозначается знаком приближенного равенства: $\alpha\approx\beta$.

Эквивалентные бесконечно малые обладают следующими свойствами:

I. Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка, чем каждая из них.

II. При нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую (или только одну) из них заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, т. е. если $\alpha\approx\alpha_1$ и $\beta\approx\beta_1$, то

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

113. Если $x\to 0$, то какие из следующих бесконечно малых:

1) $10x$; 2) x^3; 3) $\sqrt{3x}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$; 5) $\lg(1+x)$ имеют порядок высший, чем x, низший, чем x, и тот же, что x?

Решение. Находим предел отношения каждой данной бесконечно малой к бесконечно малой x:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x}{x}=10.$

Следовательно, $10x$ есть бесконечно малая того же порядка, что x;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim x^2=0;$

x^3 есть бесконечно малая высшего порядка, чем x;

3) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt{3x}}{x}=\lim\sqrt{\frac{3}{x}}=+\infty;$

$\sqrt{3x}$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем x;

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}{x}=\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{x\cos\frac{x}{5}}=\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{x}\cdot\lim\frac{1}{\cos\frac{x}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5};$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ есть бесконечно малая того же порядка, что x;

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x}=\lim\lg(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lg e;$$

$\lg(1+x)$ есть бесконечно малая того же порядка, что x.

114. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $\sin ax\approx ax$; 2) $\operatorname{tg} ax\approx ax$; 3) $\arcsin ax\approx ax$;

4) $\operatorname{arctg} ax\approx ax$; 5) $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x$.

Решение. Чтобы доказать эквивалентность двух бесконечно малых, нужно найти предел их отношения. Если этот предел окажется равным единице, то бесконечно малые эквивалентны.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{ax}=\lim\frac{\sin ax}{ax\cos ax}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\frac{1}{\cos ax}=1\cdot 1=1.$$

3) Полагая $\arcsin ax=\alpha$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{ax}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

4) Полагая $\operatorname{arctg} ax=z$, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{ax}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg} z}=\lim\frac{z}{\sin z}\lim\cos z=1.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=2\lim\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

115. Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми (свойство II), найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$; 4)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin \frac{2}{n^3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{5}{n}}$.

Решение. Пользуясь тем, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \arcsin\alpha \approx \approx \operatorname{arctg}\alpha \approx \alpha$ при $\alpha \to 0$, что следует из решения задачи 114, и применяя указанное свойство эквивалентных бесконечно малых, получим:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 \frac{x}{3}} = \lim \frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} = 36$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2} = \lim \frac{x}{5x} \cdot \frac{2x}{5x} = \frac{2}{25}$;

4)* $$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin \frac{2}{n^3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{5}{n}} = \lim \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{5}{n}} =$$

$$= \lim \frac{3n^4\sqrt{n}}{10n^4\sqrt{n}} = 0{,}3.$$

116. Доказать, что при $x \to 0$:

1) $\sqrt{6x+1} - 1 \approx 3x$; 2) $\sin x + \operatorname{tg} x \approx 2x$;

3) $\sqrt[3]{x+8} - 2 \approx \frac{x}{12}$; 4) $1 - \cos\frac{x}{m} \approx \frac{x^2}{2m^2}$.

117. Пользуясь свойством эквивалентных бесконечно малых, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x + x^2}$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sqrt{2x} - x}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 6x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2\varphi \arcsin 3\varphi}{\sin 3\varphi \operatorname{arctg} 2\varphi}$; 6) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.

§ 10. Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x - x_0 = \Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y - y_0 = \Delta y$, т. е. если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Этому определению равносильно следующее:

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если при $x \to x_0$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т. е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т. е. в самой точке x_0 и вблизи этой точки);*

2) *функция должна иметь одинаковые односторонние пределы* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) *эти односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$.*

Функция $f(x)$ называется разрывной в точке x_0, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке x_0 не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечным, или 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Все другие случаи разрыва функции называются разрывами 2-го рода; в частности, если хотя бы один из указанных односторонних пределов окажется бесконечным, то и разрыв функции называется бесконечным.

Скачком функции $f(x)$ в точке разрыва x_0 называется разность ее односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, если они различны.

Если точка x_0 является левой или правой границей области определения функции $f(x)$, то следует рассматривать значения функции соответственно только справа или только слева от этой точки и в самой точке. При этом:

1) если граничная точка x_0 входит в область определения функции, то она будет точкой непрерывности или точкой разрыва функции, смотря по тому, будет ли предел функции при $x \to x_0$ изнутри ее области определения равен или не равен $f(x_0)$;

2) если граничная точка x_0 не входит в область определения функции, то она является точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в некотором интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями:

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого-либо интервала.

2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.

3. Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена; в частности, *если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение* *.

118. Показать, что элементарные функции: 1) $y=2x^2-1$; 2) $v=\operatorname{cosec} x$ непрерывны во всей своей области определения.

Решение. Найдем область определения функции и затем убедимся, исходя из определения непрерывности, что функция будет непрерывна в этой же области.

1) Областью определения функции y является вся числовая ось. Далее, придадим аргументу x произвольное приращение Δx и, подставив в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x+\Delta x$, найдем наращенное значение функции:

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1.$$

Вычитая из этого наращенного значения функции ее первоначальное значение, найдем приращение функции:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1-(2x^2-1)=4x\Delta x+2\Delta x^2.$$

Пусть теперь $\Delta x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ при любом значении x. Следовательно, согласно определению непрерывности, функция y будет непрерывна при любом значении x, т. е. во всей своей области определения.

2) Тригонометрическая функция $\operatorname{cosec} x$ определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots$

Повторяя указанные выше рассуждения, найдем приращение функции Δv и затем его предел при $\Delta x\to 0$:

$$\Delta v=\operatorname{cosec}(x+\Delta x)-\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin x-\sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=\lim\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}\cdot\lim\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{2\cos x}{\sin^2 x}\cdot 0=0$$

при всех значениях x, кроме $x=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots$

---

* Неэлементарные функции могут иметь весьма сложную структуру и могут быть определены и вместе с тем разрывны в каждой точке числовой оси.

Следовательно, область непрерывности и область определения элементарной функции $\operatorname{cosec} x$ полностью совпадают.

119. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $f_1(x)=\frac{1}{x^2-4}$; 2) $f_2(x)=\frac{3x-5}{x^2+2x+10}$;

3) $f_3(x)=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$; 4) $f_4(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$; 5) $f_5(x)=\lg(x^2+3x)$.

Решение. 1) Функция $f_1(x)$ определена, т. е. может быть вычислена при всех значениях x, кроме $x=\pm 2$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $-\infty<x<-2$, $-2<x<2$, $2<x<+\infty$. Она не определена в точках $x_1=-2$ и $x_2=2$, но определена вблизи этих точек. Вследствие этого, ввиду несоблюдения 1-го условия непрерывности, данная функция в точках x_1 и x_2 имеет разрывы.

Для определения скачка функции в найденных ее точках разрыва вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента x к точкам разрыва слева и справа:

$$\text{а) } \lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

так как при $x\to -2-0$ величина x^2-4 является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой;

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty,$$

так как при $x\to -2+0$ величина x^2-4 является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина является отрицательной бесконечно большой.

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет бесконечный разрыв (черт. 21).

$$\text{б) } \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty,$$

так как при $x\to 2-0$ величина x^2-4 есть отрицательная бесконечно малая, а обратная ей величина есть отрицательная бесконечно большая;

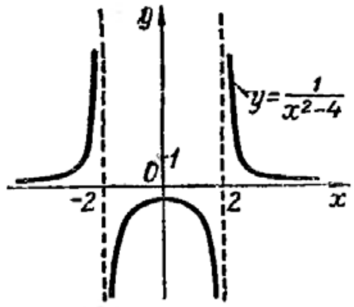
$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

так как при $x\to 2+0$ величина x^2-4 есть положительная бесконечно малая, а обратная ей величина есть положительная бесконечно большая.

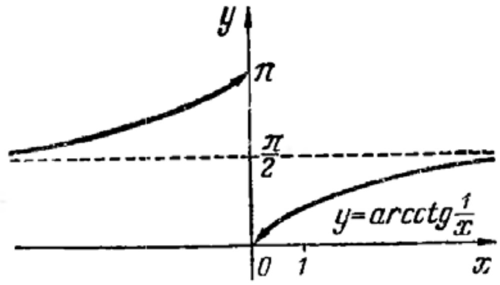
Следовательно, и в точке $x=2$ разрыв функции бесконечный.

2) Элементарная функция $f_2(x)$ определена на всей числовой оси (хотя она дробная, но корни знаменателя комплексные). Поэтому она и непрерывна на всей числовой оси, т. е. не имеет точек разрыва.

3) Элементарная функция $f_3(x)$ определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. В точке $x=0$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки.



Черт. 21



Черт. 22

Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to-0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg}(-\infty)=\pi;$$

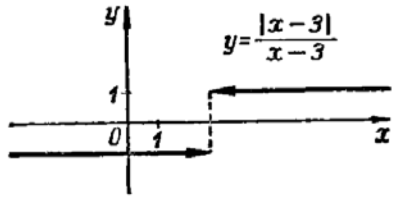
$$\lim_{x\to+0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg}(+\infty)=0.$$

Следовательно, разрыв функции конечный (черт. 22); при $x=0$ она имеет конечный скачок

$$\lim_{x\to+0} f_3(x)-\lim_{x\to-0} f_3(x)=0-\pi=-\pi.$$

4) Функция $f_4(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$. Из этого следует, что в точке $x=3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:



Черт. 23

$$\lim_{x\to3-0}\frac{|x-3|}{x-3}=-1,$$

так как при всяком значении $x<3$ эта функция равна -1;

$$\lim_{x\to3+0}\frac{|x-3|}{x-3}=1,$$

так как при всяком значении $x>3$ эта функция равна $+1$.

Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет конечный разрыв (черт. 23); ее скачок в этой точке разрыва конечный:

$$\lim_{x\to 3+0} f_4(x) - \lim_{x\to 3-0} f_4(x) = 1-(-1)=2.$$

5) Логарифмическая функция $y=\lg u$ определена только для положительных значений своего аргумента u. Поэтому элементарная функция $f_5(x)=\lg(x^2+3x)$ будет определена и непрерывна для значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2+3x>0$. Решая это неравенство, найдем область определения и область непрерывности функции,— она будет состоять из двух интервалов числовой оси:

$$-\infty<x<-3 \text{ и } 0<x<+\infty.$$

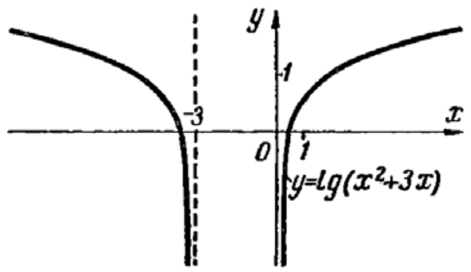
Во всех точках отрезка $-3\leqslant x\leqslant 0$ данная функция не определена, однако точками ее разрыва являются только граничные точки $x=-3$ и $x=0$. В этих граничных точках функция не определена, но она определена в сколь угодно близких точках слева от точки $x=-3$ и справа от точки $x=0$. Все остальные внутренние точки отрезка $[-3; 0]$, в которых функция также не определена, как и в точках $x=-3$ и $x=0$, не являются точками разрыва потому, что вблизи этих внутренних точек функция не определена.

Точка, в которой функция не определена, будет точкой разрыва функции лишь при условии, если функция определена, хотя бы с одной стороны вблизи этой точки.

Найдя односторонние пределы функции при стремлении x к точкам разрыва изнутри области определения функции

$$\lim_{x\to -3-0}\lg(x^2+3x)=\lg 0=-\infty; \quad \lim_{x\to +0}\lg(x^2+3x)=\lg 0=-\infty,$$

заключаем, что в точках $x=-3$ и $x=0$ функция имеет бесконечные разрывы (черт. 24).



Черт. 24

120. Для каждой из следующих функций найти точки разрыва, если они существуют, найти скачок функции в каждой точке разрыва и построить график:

$$1)\ f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x\leqslant 2 \\ x & \text{при } x>2; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 4-2x & \text{при } 1<x<2{,}5 \\ 2x-7 & \text{при } 2{,}5\leqslant x<+\infty; \end{cases}$$

$$3)\ F(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{при } -\infty<x<-1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1\leqslant x<+\infty. \end{cases}$$

Решение. 1) *Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная*; она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x=2$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x=2$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2,$$

так как слева от точки $x=2$ функция $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$;

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim x=2,$$

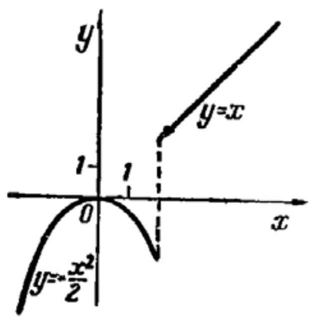
так как справа от точки $x=2$ функция $f(x)=x$.

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x=2$ функция имеет разрыв (конечный).

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)-\lim_{x\to 2-0} f(x)=2-(-2)=4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $f(x)$ непрерывна, так как обе формулы, которыми она задана, определяют собой элементарные непрерывные функции.



Черт. 25

График этой функции показан на черт. 25.

2) Неэлементарная функция $\varphi(x)$ определена для всех значений $x\geqslant 0$. Она может иметь разрыв в точках $x=1$ и $x=2{,}5$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $\varphi(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет

собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем точки $x=1$ и $x=2{,}5$:

а) $\lim\limits_{x\to 1-0} \varphi(x)=\lim 2\sqrt{x}=2$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \varphi(x)=\lim(4-2x)=2$.

Согласно условию значение функции $\varphi(x)$ в точке $x=1$ определяется первой формулой

$$\varphi(1)=2\sqrt{1}=2.$$

Следовательно, в точке $x=1$ выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x=1$ и

$$\lim_{x\to 1-0} \varphi(x)=\lim_{x\to 1+0} \varphi(x)=\varphi(1).$$

Поэтому в точке $x=1$ функция $\varphi(x)$ непрерывна.

б) $\lim\limits_{x\to 2,5-0} \varphi(x)=\lim(4-2x)=-1$; $\lim\limits_{x\to 2,5+0} \varphi(x)=\lim(2x-7)=-2$.

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, т. е. не выполняется 2-е условие непрерывности. Поэтому в точке $x=2{,}5$ функция имеет разрыв (конечный), черт. 26.

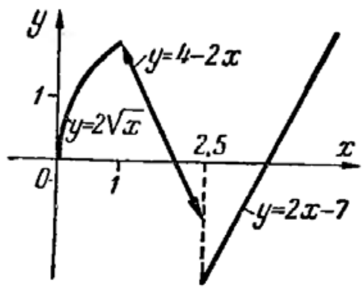
Скачок функции в точке разрыва конечный:

$$\lim_{x\to 2,5+0} \varphi(x)-\lim_{x\to 2,5-0} \varphi(x)=-2-(-1)=-1.$$

3) Неэлементарная функция $F(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Это значит, что в точке $x=0$ функция разрывна. Исследуем эту точку:

$$\lim_{x\to -0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=+\infty.$$



Черт. 26

Следовательно, в точке $x=0$ функция $F(x)$ имеет бесконечный разрыв.

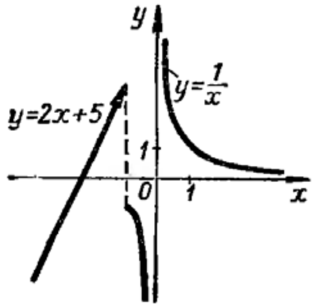
Исследуем далее точку $x=-1$. Поскольку функция $F(x)$ неэлементарная, она может иметь разрыв в этой точке, где меняется ее аналитическое выражение:

$$\lim_{x\to -1-0} F(x)=\lim(2x+5)=3, \qquad \lim_{x\to -1+0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=-1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечные, но различные. Поэтому в точке $x=-1$ функция имеет конечный разрыв; ее конечный скачок в этой точке равен

$$\lim_{x \to -1+0} F(x) - \lim_{x \to -1-0} F(x) = -4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $F(x)$ непрерывна; ее график показан на черт. 27.



Черт. 27

121. Для следующих элементарных функций: 1) $y = x^3 - 2x$; 2) $z = \sqrt{x}$; 3) $u = \frac{1}{x^2-9}$; 4) $v = \cos 2x$ проверить, что область непрерывности функции совпадает с областью ее определения.

122. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$; 2) $y = \frac{x^2 - x^3}{|x-1|}$; 3) $y = \lg(2x+1)$;

4) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 6)* $y = \frac{x}{\cos x}$.

123. Для каждой из следующих функций:

1) $y = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$; 2) $y = x + \frac{x+2}{|x+2|}$;

3) $y = \frac{2|x-1|}{x^2 - x^3}$; 4) $y = \sqrt[x]{2} - 1$;

5) $y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leqslant -1 \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x > -1; \end{cases}$ 6)* $y = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4 - x & \text{при } x > 2 \end{cases}$

найти точки разрыва, скачок функции в каждой точке разрыва и построить график.

ГЛАВА II

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Производная функции и ее геометрическое значение Непосредственное нахождение производной

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения ее приращения Δy к соответствующему приращению Δx независимой переменной, когда $\Delta x \to 0$:

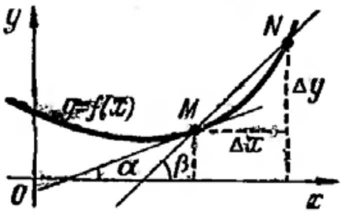
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Производная обозначается y' или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$.

Нахождение производной называется дифференцированием.

Геометрически производная y' функции $y = f(x)$ представляет угловой коэффициент касательной к графику этой функции (черт. 28):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta; \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$



Черт. 28

Функция называется дифференцируемой в некоторой точке x, если в этой точке она имеет определенную производную, т. е. если предел (*) существует и имеет одно и то же значение при $\Delta x \to 0$ любым способом; при этом функция будет и непрерывной в этой точке.

Непрерывность функции есть необходимое (но недостаточное) условие дифференцируемости функции. Функция, непрерывная в некоторой точке x, может быть и недифференцируемой в этой точке.

Простейшие случаи недифференцируемости непрерывной функции $y = f(x)$ изображены на черт. 29.

В точке a при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела, но имеет различные односторонние пределы при $\Delta x \longrightarrow -0$ и $\Delta x \longrightarrow +0$, которые называются односторонними (левой и правой) производными:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(-)} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(+)}$$

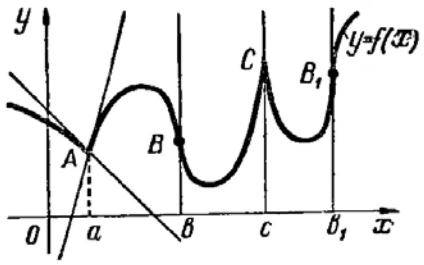
В соответствующей точке графика функции нет определенной касательной, но есть две различные односторонние касательные с угловыми коэффициентами:

$k_1 = y'_{(-)}$ и $k_2 = y'_{(+)}$ (угловая точка).

В точках b и b_1 при $\Delta x \longrightarrow 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является знакопостоянной бесконечно большой величиной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \ (\text{или} \ +\infty).$$

В этом случае говорят, что функция имеет бесконечную производную. В соответствующих точках график функции имеет вертикальную касательную (точки перегиба с вертикальной касательной).



Черт. 29

В точке c односторонние производные являются бесконечно большими величинами разных знаков. В соответствующей точке график функции имеет две слившиеся вертикальные касательные (точка возврата с вертикальной касательной, частный случай угловой точки).

В точках a, b, b_1 и c функция $y = f(x)$ *непрерывна, но не дифференцируема.*

Для непосредственного нахождения производной y' от функции $y = f(x)$ служит следующее общее правило.

I. Придаем аргументу x произвольное приращение Δx и, подставляя в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

III. Делим приращение функции на приращение аргумента, т. е. составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Ищем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Этот предел и даст искомую производную y' от функции $y=f(x)$.

124. Путем вычисления предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные следующих функций:

1) $y=3x^2-4x$; 2) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=\cos 3x$.

Решение: Руководствуясь указанным общим правилом для непосредственного нахождения производной, последовательно находим:

1) Для функции $y=3x^2-4x$:

I) $y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)=3x^2+6x\Delta x+$
$+3\Delta x^2-4x-4\Delta x$;

II) $\Delta y=(3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-4x-4\Delta x)-(3x^2-4x)=$
$=6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x$;

III) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=6x+3\Delta x-4$;

IV) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim(6x+3\Delta x-4)=6x-4.$

Следовательно, $\frac{dy}{dx}=\frac{d(3x^2-4x)}{dx}=6x-4.$

2) Для функции $y=\frac{1}{x}$:

I) $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$;

II) $\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$;

III) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$;

IV) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^2}.$

Следовательно, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$

3) Для функции $y=\sqrt{x}$:

I) $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

II) $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

III) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$;

IV) $y'=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$
$=\lim\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

4) Для функции $y=\cos 3x$:

I) $y+\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)$;

II) $\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)-\cos 3x=$

$$=-2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x;$$

III) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x};$$

IV) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2\lim\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\cdot\lim\frac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=-2\sin 3x\cdot\lim\frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=-2\sin 3x\cdot\frac{3}{2}=-3\sin 3x.\ *$$

125. Исходя из определения $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2+5x-1$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y=\sqrt{4x+1}$; 5) $y=\sin 3x$; 6)* $y=\operatorname{tg} 2x$.

§ 2. Производные простейших алгебраических и тригонометрических функций

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач, однако нет надобности каждый раз находить производную путем предельного перехода, посредством тех четырех операций, которые указаны в общем правиле дифференцирования функций.

Практически производные элементарных функций находятся по формулам дифференцирования, как это разъясняется в последующих задачах.

Простейшие формулы дифференцирования:

1) $(c)'=0$; 2) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

3) $(uv)'=u'v+v'u$; 3а) $(cu)'=cu'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$; 4а) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$;

4б) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$; 5) $(x^n)'=nx^{n-1}$;

6) $(\sin x)'=\cos x$; 7) $(\cos x)'=-\sin x$;

8) $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$; 9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$.

---

* Здесь при отыскании предела отношения двух бесконечно малых одна из них заменена другой, ей эквивалентной: $\sin\frac{3}{2}\Delta x\approx\frac{3}{2}\Delta x$. См. свойства эквивалентных бесконечно малых в гл. I, § 8.

Здесь обозначено: c — постоянная; x — независимая переменная; u, v, w — функции от x.

126. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2-5x+4$; 2) $y=\sqrt{x}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{3x^3}$;

3) $z=x^5\left(2-\dfrac{x}{3}+3x^2\right)$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$;

5) $\varphi(t)=\dfrac{10}{a\sin t-b\cos t}$; 6) $R(a)=\dfrac{\cos a \operatorname{ctg} a}{1+2\operatorname{tg} c}$.

Решение. 1) $y'=(x^2-5x+4)'=(x^2)'-(5x)'+(4)'$ (по формуле 2);

$$y'=2x-5\cdot 1+0=2x-5 \text{ (по формулам 5, 3а и 1).}$$

2) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y=x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{3}}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}.$$

Применяя формулы 2, 5 и 3а, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}-(-2)x^{-3}+\frac{1}{3}(-3)x^{-4}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}.$$

3) *1-й способ.* Пользуясь формулой 3, получим

$$z'=(x^5)'\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)'=$$
$$=5x^4\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(-\frac{1}{3}+6x\right)=10x^4-2x^5+21x^6.$$

2-й способ. Сначала раскроем скобки, затем дифференцируем, как сумму:

$$z=2x^5-\frac{1}{3}x^6+3x^7;\quad z'=10x^4-2x^5+21x^6.$$

Этот способ предпочтительнее, так как быстрее приводит к цели.

Следует иметь в виду, что вообще *не обязательно дифференцировать заданную функцию сразу. Можно предварительно подвергнуть ее тождественным преобразованиям* (если это целесообразно, т. е. ведет к упрощению дифференцирования).

4) Пользуясь формулой 4, получим

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^2+1)-(x^2+1)'x^2}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

5) $$\varphi'(t)=\left(\frac{10}{a\sin t-b\cos t}\right)'=-\frac{10(a\sin t-b\cos t)'}{(a\sin t-b\cos t)^2}=$$

$$=-\frac{10(a\cos t+b\sin t)}{(a\sin t-b\cos t)^2}.$$

Здесь применена формула 4б (постоянный числитель), а не формула 4, что целесообразнее.

6) Пользуясь формулой 4а (постоянный знаменатель), получим

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{(\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha)'}{1+2\operatorname{tg}c}=\frac{-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha(-\operatorname{cosec}^2\alpha)}{1+2\operatorname{tg}c}=$$

$$=-\frac{\cos\alpha(1+\operatorname{cosec}^2\alpha)}{1+2\operatorname{tg}c}.$$

127. Найти производную данной функции и затем вычислить ее частное значение при указанном значении аргумента:

1) $F(x)=\frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}$, $x=0{,}01$; 2) $z=\frac{\cos t}{1-\sin t}$, $t=\frac{\pi}{6}$;

3) $y=\frac{a+b}{3-2x}+\frac{5x^4-1}{a-b}$, $x=0$.

Решение. 1) Вначале раскрываем скобки и производим деление, затем дифференцируем:

$$F(x)=\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1=x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}+1;$$

$$F'(x)=-x^{-2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Подставляя значение $x=0{,}01$, получим

$$F'(0{,}01)=-\frac{1}{0{,}01^2}+\frac{1}{\sqrt{0{,}01^3}}=-100^2+10^3=-9\,000.$$

2) По формуле 4 найдем

$$z'=\frac{(\cos t)'(1-\sin t)-\cos t(1-\sin t)'}{(1-\sin t)^2}=$$

$$=\frac{-\sin t(1-\sin t)-\cos t(-\cos t)}{(1-\sin t)^2}=\frac{-\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\frac{1}{1-\sin t}.$$

Полагая $t=\frac{\pi}{6}$, получим $z'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{1-0{,}5}=2.$

3) Применяя формулы 4б и 4а, получим

$$y'=-\frac{(a+b)(3-2x)'}{(3-2x)^2}+\frac{(5x^4-1)'}{a-b}=\frac{2(a+b)}{(3-2x)^2}+\frac{20x^3}{a-b}.$$

При $x=0$ найдем $y'(0)=\frac{2}{9}(a+b)$.

По формулам дифференцирования найти производные следующих функций:

128. $y=x+3x^2-\frac{x^3}{3}$.

129. $y=x-2\sqrt{x}$.

130. $y=(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2$.

131. $s=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$.

132. $z=3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x^3}+4$.

133. $u=\frac{2t}{t+3}$.

134. $v=\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

135. $y=x^2\sin x$.

136. $r=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

137. $y=-3\cos t\operatorname{ctg} t$.

138. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

139. $F(t)=\frac{m}{t}+\frac{t}{m}$; вычислить $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=m}$.

140. $r(\varphi)=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$; вычислить $r'(\pi)$.

141. $z=(y^2-2y)\operatorname{tg} y$; вычислить $z'(0)$.

142. $u(r)=\frac{r^2}{2x^2}-\frac{2x^2}{r^2}$; вычислить $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=x}$.

§ 3. Производная сложной функции

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ или } y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

Так, если $u=\varphi(x)$, то формулы 5, 6, 7, 8 и 9 предыдущего параграфа будут иметь следующий общий вид:

5) $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;

6) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

7) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

8) $(\operatorname{tg} u)'=\sec^2 u\cdot u'$;

9) $(\operatorname{ctg} u)'=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$.

Полезно запомнить словесные выражения формул дифференцирования:

производная степени равна показателю, умноженному на то же основание с показателем на единицу меньше и на производную основания;

производная синуса равна косинусу того же аргумента, умноженному на производную от аргумента.

Выразить словесно остальные формулы дифференцирования рекомендуется студенту самостоятельно.

Найти производные следующих функций:

143. 1) $y=(1+5x)^3$; 2) $y=\sin 5x$; 3) $y=\cos^2 x$;

4) $y=\sin x^2$; 5) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$.

Решение. 1) Полагая $y=u^3$, где $u=1+5x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{dy}{du}=3u^2; \quad \frac{du}{dx}=5; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 5=15(1+5x)^2.$$

Легко проверить правильность этого результата: возведя в куб и дифференцируя полученный многочлен, приходим к тому же ответу.

2) Полагая $5x=u$ и пользуясь формулами 6 и 3а, найдем

$$y'=(\sin 5x)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=5\cos 5x.$$

3) Полагая $\cos x=u$ и применяя формулы 5 и 7, получим

$$y'=(\cos^2 x)'=(u^2)'=2u\cdot u'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

4) При $x^2=u$ по формулам 6 и 5 найдем

$$(\sin x^2)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=2x\cos x^2.$$

5) Полагаем $2+x^4=u$, и, пользуясь формулой 5, имеем

$$(\sqrt[3]{2+x^4})'=(\sqrt[3]{u})'=\left(u^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u'=$$

$$=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x^3=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$(\sqrt[3]{2+x^4})'=\left[(2+x^4)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}(2+x^4)'=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Второй способ записи без особого обозначения промежуточного аргумента значительно проще. Этому способу записи и следует научиться при дифференцировании сложных функций.

144. 1) $z=(3ax-x^2)^k$; z'? 2) $\beta=2\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}$; $\frac{d\beta}{d\alpha}$?

3) $s=\left(\frac{t}{2t+1}\right)^{10}$, вычислить $s'(-1)$.

4) $r=\sin^3 2\varphi-\cos^3 2\varphi$, вычислить $r'\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Решение. 1) Применяя формулы 5 и 2, найдем

$$z'=k(3ax-x^2)^{k-1}\cdot(3ax-x^2)'=k(3a-2x)(3ax-x^2)^{k-1}.$$

2) Используем формулы 5 и 6:

$$\beta'=2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)'=\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}\cdot\left(\frac{\alpha}{3}\right)'=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{3\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}}.$$

3) Применяем формулы 5 и 4:

$$s'=10\left(\frac{t}{2t+1}\right)^9\cdot\frac{1\cdot(2t+1)-2\cdot t}{(2t+1)^2}=\frac{10t^9}{(2t+1)^{11}}.$$

При $t=-1$ получим $s'(-1)=10$.

4) Сначала запишем данную функцию в виде

$$r=(\sin 2\varphi)^3-(\cos 2\varphi)^3,$$

что всегда полезно при дифференцировании степеней **тригонометрических** функций.

Пользуясь формулами 2, 5, 6 и 7, получим

$$r'=3(\sin 2\varphi)^2(\sin 2\varphi)'-3(\cos 2\varphi)^2(\cos 2\varphi)'=$$

$$=3\sin^2 2\varphi\cdot 2\cos 2\varphi-3\cos^2 2\varphi\cdot(-2\sin 2\varphi)=$$

$$=3\sin 4\varphi(\sin 2\varphi+\cos 2\varphi).$$

При $\varphi=\frac{\pi}{8}$ найдем $r'\left(\frac{\pi}{8}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}.$

Найти производные следующих функций:

145. $y=(2+3x)^5$.

146. $y=\sin(2x-1)$.

147. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

148. $z=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

149. $u=\sin at\cos\frac{t}{a}$.

150. $r=2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

151. $v=\frac{1}{(1+\sin 4y)^3}$.

152. $s=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z-\operatorname{tg} z+z$.

153. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$.

154. $r=\frac{\operatorname{tg} a\varphi-b}{\sec a\varphi}$.

155. $y=\sin^2 x+\sin x^2$; вычислить $y'(0)$.

156. $y=\cos\frac{x}{a}+\cos\frac{a}{x}$; вычислить $y'(a)$.

157*. $z=\sqrt[4]{1+\cos x^4}$; вычислить $z'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}\right)$.

§ 4. Производные показательных и логарифмических функций

Общие формулы и их частные виды:

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; 11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e$;

10а) $(e^u)' = e^u u'$; 11а) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

10б) $(a^x)' = a^x \ln a$; 11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e$;

10в) $(e^x)' = e^x$; 11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Для дифференцирования логарифмической функции с основанием $a \neq e$ можно предварительно преобразовать ее в логарифмическую функцию с основанием e по формуле

$$\log_a u = \log_a e \cdot \ln u.$$

158. Найти производные следующих функций:

1) $y = x^3 3^x$. 2) $f(x) = \sqrt[x]{3} + \frac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

3) $y = \ln \cos 3x$. 4) $r = a^\varphi b^\varphi c^\varphi + \lg(5\varphi) - 4 \lg \sqrt{\varphi}$.

5) $y = \ln \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$. 6) $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$; вычислить $y'(0)$.

Решение. 1) Дифференцируем как произведение и по формулам 5 и 10б:

$$y' = (x^3)' 3^x + x^3 (3^x)' = 3x^2 3^x + x^3 3^x \ln 3 = x^2 3^x (3 + x \ln 3).$$

2) Вводим дробные и отрицательные показатели, затем дифференцируем как сумму и по формуле 10:

$$f'(x) = \left(3^{\frac{1}{x}} + 2^{-5x} + 6^{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' +$$

$$+ 2^{-5x} \ln 2 \cdot (-5x)' + 6^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 6 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 - 5 \cdot 2^{-5x} \ln 2 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} 6^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 6.$$

Полагая $x = 1$, найдем $f'(1) = -3 \ln 3 - \frac{5 \ln 2}{32} + 3 \ln 6 = \frac{91}{32} \ln 2$.

3) Согласно формулам 11а и 7а имеем

$$y' = (\ln \cos 3x)' = \frac{(\cos 3x)'}{\cos 3x} = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} = -3 \operatorname{tg} 3x.$$

4) Здесь предварительно тождественно преобразуем данную функцию:

$$r = (abc)^\varphi + \lg 5 + \lg \varphi - 4 \cdot \frac{1}{2} \lg \varphi = (abc)^\varphi + \lg 5 - \lg e \cdot \ln \varphi.$$

Затем дифференцируем по формулам 10б и 11б:

$$\frac{dr}{d\varphi}=(abc)^{\varphi}\ln(abc)-\frac{\lg e}{\varphi}.$$

5) Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя:

$$y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\ln(a^2-x^2)-\ln(a^2+x^2).$$

Согласно формуле 11а найдем

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}=\frac{-2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{4a^2x}{x^4-a^4}.$$

6) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}=\frac{1}{2}[\ln e^{3x}-\ln(1+e^{3x})]=\frac{1}{2}[3x-\ln(1+e^{3x})];$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{3}{2(1+e^{3x})};\quad y'(0)=\frac{3}{4}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, на основании свойств логарифмов данная логарифмическая функция преобразована сначала к более удобному для дифференцирования виду.

И вообще, *если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию* (произведение, частное, степень, корень), *то полезно сначала выполнить логарифмирование.*

Найти производные следующих функций:

159. $y=2^x+2^{3x}$. **160.** $y=a^{x^2}-e^{-x^2}$.

161. $z=3\sqrt{x}e^{-x}$ **162.** $x=e^{a\varphi}\sin b\varphi$.

163. $s=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. **164.** $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

165. $y=\cos^2 x-2\ln\cos x$. **166.** $z=x(1-\ln x)$.

167. $u=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$. **168.** $v=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

169. $r=\ln\frac{2e^{\varphi}}{e^{\varphi}+1}$; вычислить $r'(0)$.

§ 5. Производные обратных тригонометрических функций

Общие формулы и их частные виды:

12) $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 12а) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 13а) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$; 14а) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$; 15а) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

170. Найти производные следующих функций:

1) $y=5\arcsin kx+3\arccos kx$; 2) $y=\arcsin\frac{a}{x}-\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$;

3) $r=\operatorname{arctg}\frac{m}{\varphi}+\operatorname{arcctg}(m\operatorname{ctg}\varphi)$; $r'(0)$?, $r'(\pi)$?

Решение. 1) По формулам 12 и 13 найдем

$$y'=5\frac{(kx)'}{\sqrt{1-(kx)^2}}+3\left[-\frac{(kx)'}{\sqrt{1-(kx)^2}}\right]=\frac{5k}{\sqrt{1-k^2x^2}}-$$
$$-\frac{3k}{\sqrt{1-k^2x^2}}=\frac{2k}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

2) Используя формулы 12 и 15, имеем

$$y'=\frac{\left(\frac{a}{x}\right)'}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}-\left[-\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right]=$$
$$=\frac{-\frac{a}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}}+\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}=\frac{a}{a^2+x^2}-\frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}},$$

так как $\sqrt{x^2}$ равен не x, а $|x|$ и $x\neq 0$.

3) Применяем формулы 14 и 15:

$$r'=\frac{\left(\frac{m}{\varphi}\right)'}{1+\frac{m^2}{\varphi^2}}-\frac{(m\operatorname{ctg}\varphi)'}{1+m^2\operatorname{ctg}^2\varphi}=\frac{-\frac{m}{\varphi^2}}{\frac{\varphi^2+m^2}{\varphi^2}}-\frac{-m\operatorname{cosec}^2\varphi}{1+m^2\operatorname{ctg}^2\varphi}=$$
$$=-\frac{m}{\varphi^2+m^2}+\frac{m}{\sin^2\varphi+m^2\cos^2\varphi}.$$

Подставляя вместо φ заданные значения 0 и π, найдем

$$r'(0)=-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=0;\quad r'(\pi)=-\frac{m}{\pi^2+m^2}+\frac{1}{m}=\frac{\pi^2}{m(\pi^2+m^2)}.$$

Найти производные следующих функций:

171. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

172. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

173. $z=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

174. $r=\arccos\frac{1}{\varphi^2}$.

175. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

176. $v=\arccos\frac{1}{2x}$.

177. $x=\varphi\operatorname{arctg}\varphi-\ln\sqrt{1+\varphi^2}$; вычислить $x'(-1)$.

178. $y=x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; вычислить $y'(0)$.

179. $Q=\operatorname{arctg}\frac{a+z}{1-az}$; вычислить $Q'(0)$ и $Q'(-1)$.

§ 6. Смешанные задачи на дифференцирование

Найти производные следующих функций:

180. 1) $y=\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a\sin x-\cos x)$; 2) $r=\ln\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}}$;

3) $s=x^2(1+m\sqrt[x]{e})$; показать, что эта функция удовлетворяет уравнению $x^2(s'-1)=(2x-1)s$.

Решение. 1) Последовательно применяя формулы 3, 10, 2, 6 и 7, получим

$$y'=\frac{1}{1+a^2}[(e^{ax})'(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\sin x-\cos x)']=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}[ae^{ax}(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\cos x+\sin x)]=$$
$$=\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a^2\sin x+\sin x)=e^{ax}\sin x.$$

2) Вначале преобразуем данную функцию согласно свойствам логарифмов, затем дифференцируем по формулам 8 и 11:

$$r=\frac{1}{4}[\ln(1+\operatorname{tg}\varphi)-\ln(1-\operatorname{tg}\varphi)];$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{4}\left[\frac{(1+\operatorname{tg}\varphi)'}{1+\operatorname{tg}\varphi}-\frac{(1-\operatorname{tg}\varphi)'}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\sec^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}-\frac{-\sec^2\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)=$$
$$=\frac{\sec^2\varphi(1-\operatorname{tg}\varphi+1+\operatorname{tg}\varphi)}{4(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}=\frac{1}{2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}=\frac{1}{2}\sec 2\varphi.$$

3) Заменим радикал дробным показателем и дифференцируем по формулам 3, 5 и 10:

$$s=x^2\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right);\quad s'=2x\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right)+$$
$$+x^2me^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x+me^{\frac{1}{x}}(2x-1).$$

Подставив s и s' в данное уравнение, получим тождество

$$x^2\left[2x+me^{\frac{1}{x}}(2x-1)-1\right]=(2x-1)x^2\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right);\ 0=0.$$

181. 1) $y=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; y'? 2) $y=\arcsin(\cos x)$; y'?

3) $r=\varphi^2\arccos\frac{2}{\varphi}-2\sqrt{\varphi^2-4}$; вычислить $r'(2)$ и $r'(-2)$.

4)* $y=|1-x^2|$; найти $y'\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'(-2)$ и точки, где функция не дифференцируема.

Решение. 1) Последовательно применяя формулы 2, 4, 7, 5, 6, 11 и 14, получим

$$y' = -\frac{(\cos x)' \sin^2 x - \cos x (\sin^2 x)'}{\sin^4 x} + \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} +$$

$$+ \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin^3 x}.$$

2) Пользуясь формулами 12 и 7, найдем

$$y' = \frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

Смысл этого результата таков: в точках x, где $\sin x > 0$, $y' = -1$; в точках, где $\sin x < 0$, $y' = 1$; в точках, где $\sin x = 0$, т. е. $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, данная функция не дифференцируема (черт. 30).

3) Заменив радикал дробным показателем и применяя формулы 2, 3, 5, 13 и 4, имеем

$$r' = (\varphi^2)' \arccos\frac{2}{\varphi} + \varphi^2\left(\arccos\frac{2}{\varphi}\right)' - 2\left[(\varphi^2-4)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} - \varphi^2\frac{-\frac{2}{\varphi^2}}{\sqrt{1-\frac{4}{\varphi^2}}} - 2\cdot\frac{1}{2}(\varphi^2-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\varphi =$$

$$= 2\left(\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} + \frac{|\varphi|}{\sqrt{\varphi^2-4}} - \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}\right), \text{ так как } \sqrt{\varphi^2} = |\varphi|.$$

При $\varphi > 0$: $r' = 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi}$; $r'(2) = 4\arccos 1 = 0$.

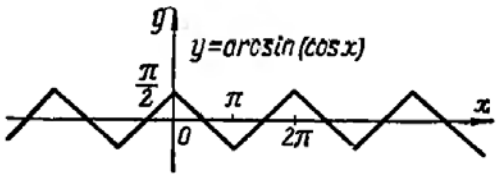
При $\varphi < 0$: $r' = 2\left(\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} - \frac{2\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}\right)$; $r'(-2) = +\infty$.

4)* а) При $1 - x^2 > 0$, т. е. в интервале $-1 < x < 1$, $y' = (1-x^2)' = -2x$, поэтому $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$;

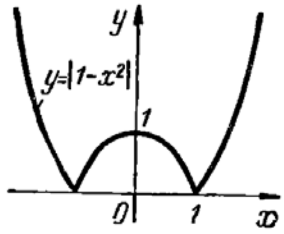
б) при $1 - x^2 < 0$, т. е. в интервалах $-\infty < x < -1$, и $1 < x < +\infty$, $y' = -(1-x^2)' = 2x$, поэтому $y'(-2) = -4$;

в) при $1 - x^2 = 0$, т. е. в точках $x = \pm 1$, данная непрерывная функция не дифференцируема; в этих точках производная y' не существует, но существуют две различные (по знаку) левая и правая производные: $y'_{(-)} = -2$ и $y'_{(+)} = 2$.

В соответствующих точках график функции (черт. 31) имеет по две различных односторонних касательных с угловыми коэффициентами $k_1 = -2$ и $k_2 = 2$ (угловые точки).



Черт. 30



Черт. 31

Найти производные следующих функций:

182. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$.

183. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

184. $y = \frac{1}{(1-x^2)^3}$.

185. $x = \sqrt{\cos 4\alpha}$.

186. $s = \sin^4 t + \cos^4 t$.

187. $r = \varphi \sec^2 a\varphi$.

188. $x = 2e^t \sin t \cos^2 t$.

189. $y = x^4 (8 \ln^2 x - 4 \ln x + 1)$.

190. $u = e^{2v} \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2}$.

191. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$.

192. $x = \ln \frac{t}{\sqrt{t^4 - 1}}$.

193. $u = \ln \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$.

194. $x = t(\cos \ln t - \sin \ln t)$.

195. $y = \frac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$.

196. $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$.

197. $y = \arccos(\cos x)$.

198. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$; вычислить $y'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

199. $u = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$; вычислить $u'(2) + u'(0)$.

200*. $y = ae^{-\sin x} + \sin x - 1$; показать, что $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

201*. $y = 2|\cos x| + \cos x$; найти $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ и угловые точки графика функции.

202*. $y = |x| e^x$; вычислить $y'(-1)$, $y'(1)$ и односторонние производные для угловой точки графика функции.

§ 7. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти y' из уравнения $y = f(x)$, то можно:

а) логарифмировать обе части уравнения (по основанию e)

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

б) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от x,

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x) \text{ (согласно формуле 11);}$$

в) заменить y его выражением через x и определить y':

$$y'=y\varphi'(x)=f(x)\,\varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y=u^v$, где u и v — функции от x.

203. Найти производные следующих функций:

1) $y=x^x$; 2) $r=(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$;

3) $s=\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$; 4) $R=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно находим:

1) а) $\ln y=x\ln x$;

б) $\frac{y'}{y}=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$;

в) $y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$.

2) а) $\ln r=\sin 2\alpha\ln\cos\alpha$;

б) $\frac{r'}{r}=(\sin 2\alpha)'\ln\cos\alpha+\sin 2\alpha(\ln\cos\alpha)'=2\cos 2\alpha\ln\cos\alpha+$

$$+\sin 2\alpha\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=2\cos 2\alpha\ln\cos\alpha-2\sin^2\alpha;$$

в) $r'=2(\cos 2\alpha\ln\cos\alpha-\sin^2\alpha)(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$.

3) а) $\ln s=\ln 2+\ln t-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$;

б) $\frac{s'}{s}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{1-t^2}=\frac{1}{t}+\frac{t}{1-t^2}=\frac{1}{t(1-t^2)}$;

в) $s'=\frac{s}{t(1-t^2)}=\frac{2t}{t(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

4) а) $\ln R=\ln(x-1)+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-2)$;

б) $\frac{R'}{R}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x-2)}=\frac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}$;

в) $R'=\frac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}=\frac{2x^2-3x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$.

Найти производные следующих функций:

204. $y=\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}$.

205. $y=\sqrt[x]{x}$.

206. $r=(\sin\varphi)^{\varphi}$.

207. $y=\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

208. $u=\frac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$.

209. $y=\sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

210. $s=\varphi^{e^{\varphi}}$.

211*. $v=x^{x^x}$.

§ 8. Производные высших порядков

Если y' есть производная от функции $y=f(x)$, то производная от y' называется второй производной, или производной второго порядка от первоначальной функции y, и обозначается y'', или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка:

производная третьего порядка $(y'')'=y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$;

производная четвертого порядка $(y''')'=y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$;

производная n-го порядка $(y^{(n-1)})'=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от данной функции приходится последовательно находить все ее производные низших порядков.

Для произведения двух функций можно получить производную любого n-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

212. Для данных функций найти производные указанного порядка:

1) $y=x^5-7x^3+2$; y'''? 2) $y=\ln x$; $y^{(5)}$? 3) $s=\operatorname{arctg}2x$; $s''(-1)$? 4) $y=e^{-\varphi}\sin\varphi$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y''+2y'+2y=0$. 5) $y=e^x(x^2-1)$; $y^{(24)}$? 6) $y=x^m$; $y^{(k)}$?

Решение. 1) Дифференцируя функцию y, получим

$$(y)'=y'=5x^4-21x^2.$$

Дифференцируя производную y', получим

$$(y')'=y''=20x^3-42x.$$

Дифференцируя вторую производную y'', получим

$$(y'')' = y''' = 60x^2 - 12.$$

$$2)\ y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Для нахождения следующих производных здесь полезно ввести отрицательный показатель степени:

$$y'' = -x^{-2};\ y''' = 2x^{-3};\ y^{(4)} = -6x^{-4};\ y^{(5)} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}.$$

$$3)\ s' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2};$$

$$s'' = -\frac{2(1+4x^2)'}{(1+4x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}.$$

При $x = -1$ найдем $s''(-1) = \frac{16}{25}$.

4) Найдем y' и y'':

$$y' = (e^{-\varphi})' \sin\varphi + e^{-\varphi}(\sin\varphi)' = -e^{-\varphi}\sin\varphi + e^{-\varphi}\cos\varphi =$$
$$= e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi);$$

$$y'' = -e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + e^{-\varphi}(-\sin\varphi - \cos\varphi) = -2e^{-\varphi}\cos\varphi.$$

Подставляя y, y' и y'' в данное уравнение, получим тождество:

$$-2e^{-\varphi}\cos\varphi + 2e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + 2e^{-\varphi}\sin\varphi = 0;\quad 0 = 0.$$

5) Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(24)} = [e^x(x^2-1)]^{(24)} = (e^x)^{(24)}(x^2-1) + 24(e^x)^{(23)}(x^2-1)' +$$
$$+ \frac{24\cdot 23}{2}(e^x)^{(22)}(x^2-1)''.$$

Все следующие слагаемые равны нулю, ибо все высшие производные от функции x^2-1, начиная с третьей, тождественно равны нулю;

$$y^{(24)} = e^x(x^2-1) + 24e^x\cdot 2x + 12\cdot 23e^x\cdot 2 = e^x(x^2+48x+551)$$

(так как производная любого порядка от e^x есть e^x).

6) Дифференцируя k раз, получим:

$$y = x^m;\ y' = mx^{m-1};\ y'' = m(m-1)x^{m-2};\ \ldots;$$
$$y^{(k)} = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)x^{m-k}.$$

В частности, если m — целое положительное число, то

$$y^{(m)} = m! \text{ и } y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \ \ldots\ = 0.$$

213. $z = t^2 + \sin 5t$; z'''? 214. $v = \alpha^5 \ln\alpha$; v'''?

215. $x = (2p-1)^5$; $x^{(4)}(3)$? 216. $y = x^2e^{3x}$; y''?

217. $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^x$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

218. $y=a^{2x}$; $y^{(n)}$? 219. $y=(1+x)^m$; $\frac{d^ky}{dx^k}$?

220. $y=x\sin x$; $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$? 221*. $y=x^{n-1}\ln x$; $y^{(n)}(1)$?

§ 9. Производные неявной функции

Если y есть неявная функция от x, т. е. задана уравнением $f(x, y)=0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y; $\frac{dy}{dx}=\varphi(x, y)$.

Вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции получим, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по переменной x и помня при этом, что y есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x, y)}{dx}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Заменяя здесь $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x, y)$, получим выражение второй производной через x и y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F[x, y, \varphi(x, y)]=\psi(x, y).$$

Совершенно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить только через x и y: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\varphi(x, y)$.

К тому же результату приводит последовательное дифференцирование равенства $f(x, y)=0$ с последующим исключением из полученной системы всех производных низшего порядка.

Для данных неявных функций найти производные указанного порядка.

222. 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{dy}{dx}$? 2) $e^{\varphi-2}+r\varphi-3r-2=0$; $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}$?

3) $x^y=y^x$; $\frac{dx}{dy}$? 4) $x^2+y^2-4x-10y+4=0$; $y'_{x=6}$?

Каков геометрический смысл решения этой задачи?

5) $t-s+\operatorname{arc\,tg} s=0$; s''? $y=x+\ln y$; y''?; x''?

Решение. 1) Дифференцируем по x обе части равенства, где y есть функция от x, получим

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0. \text{ Отсюда найдем } y'=\frac{b^2x}{a^2y}.$$

2) Дифференцируя по φ и считая r функцией φ, найдем

$$e^{\varphi-2}+\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r-3\frac{dr}{d\varphi}=0.$$

Из этого равенства определяем $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{e^{\varphi-2}+r}{3-\varphi}$.

Подставляя данное по условию значение $\varphi=2$ в исходное уравнение, найдем соответствующее значение $r_{\varphi=2}=-1$.

Искомое частное значение производной $\frac{dr}{d\varphi}$ при $\varphi=2$ будет

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=\frac{e^0-1}{3-2}=0.$$

3) Логарифмируем обе части данного уравнения (по основанию e), затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию y:

$$y\ln x=x\ln y;\quad y'\ln x+y(\ln x)'=x'\ln y+x(\ln y)';$$

$$1\cdot\ln x+y\frac{x'}{x}=x'\ln y+x\frac{1}{y}.$$

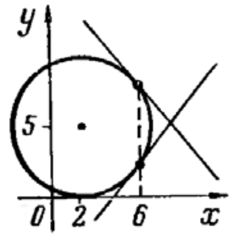
Отсюда найдем:

$$x'\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)=\frac{x}{y}-\ln x;\quad x'=\frac{dx}{dy}=\frac{x(x-y\ln x)}{y(y-x\ln y)}.$$

4) Дифференцируя по x, получим $2x+2yy'-4-10y'=0$.

Отсюда имеем $y'=\frac{x-2}{5-y}$.

Подставляя заданное значение $x=6$ в исходное уравнение, найдем два соответствующих ему значения y: $y_1=2$; $y_2=8$.



Черт. 32

Поэтому при $x=6$ и производная y' имеет два значения:

$$y'_{x=6,\ y=2}=\frac{4}{3};\quad y'_{x=6,\ y=8}=-\frac{4}{3}.$$

Геометрически, в прямоугольной системе координат, заданное в условии задачи уравнение определяет окружность, у которой абсциссу $x=6$ имеют две точки: (6; 2) и (6; 8). Найденные значения производной представляют угловые коэффициенты касательных к этой окружности в той и другой точке (черт. 32).

5) *1-й способ.* Дифференцируем по t и находим s':

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0;\quad s'=\frac{s^2+1}{s^2}=1+s^{-2}.$$

Последнее равенство снова дифференцируем по t и находим s'':

$$s''=-2s^{-3}s'=-\frac{2s'}{s^3}.$$

Заменяя здесь s' через $\frac{s^2+1}{s^2}$, окончательно получим

$$s''=-\frac{2(s^2+1)}{s^5}.$$

2-й способ. Данное равенство последовательно дифференцируем по t два раза:

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0; \tag{а}$$

$$-s''+\frac{s''(1+s^2)-2ss's'}{(1+s^2)^2}=0. \tag{б}$$

Из уравнения (а) определяем s' и, подставляя в уравнение (б), получаем соотношение между t, s и s'', из которого и выражаем s'' через t и s. Результат будет тот же, что и при решении 1-м способом.

6) а. Дифференцируем по x и определяем y':

$$y'=1+\frac{y'}{y};\ y'=\frac{y}{y-1}.$$

Дифференцируем последнее равенство по x и определяем y''

$$y''=\frac{y'(y-1)-y'y}{(y-1)^2}=-\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставляя вместо y' его значение, имеем $y''=-\frac{y}{(y-1)^3}$.

б. Дифференцируем данное равенство по y и определяем x':

$$1=x'+\frac{1}{y};\quad x'=\frac{y-1}{y}.$$

Дифференцируем полученное равенство по y и определяем x'':

$$x''=\frac{1\cdot y-1(y-1)}{y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

223. $5x^2+3xy-2y^2+2=0;\ \frac{dy}{dx}$? **224.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};\ y'_{x=a}$?

225. $e^y\sin x=e^{-x}\cos y;\ \frac{dx}{dy}$? **226.** $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x};\ \frac{dy}{dx}$?

227. $x^3+y^3-3axy=0;\ y''$? **228.** $y=\operatorname{tg}(x+y);\ y''$?

229*. $e^x-e^y=y-x;\ y''$? **230*.** $x+y=e^{x-y};\ y''$?

231. $y+c_1\ln y=x+c_2$; показать, что $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.

§ 10. Производные от функции, заданной параметрически

Если функция y от независимой переменной x задана через посредство вспомогательной переменной (параметра) t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

то производные от y по x определятся формулами:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad \ldots \qquad (A)$$

Все эти формулы составлены по одному общему правилу: производная от параметрически заданной величины z по независимой переменной x равна отношению производных от z и от x, взятых по параметру t.

Для следующих функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

232. 1) $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt; \end{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}?$

Каков геометрический смысл результата?

2) $\begin{cases} x = \alpha^2 + 2\alpha \\ y = \ln(\alpha + 1); \end{cases} \frac{d^2y}{dx^2}?$ 3) $\begin{cases} x = 1 + e^{a\varphi} \\ y = a\varphi + e^{-a\varphi}; \end{cases} \frac{d^3y}{dx^3}?$

Решение. 1) Находим производные от x и от y по параметру t

$$\frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt; \quad \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt.$$

Искомая производная от y по x находится как отношение производных от y и от x по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k(\sin t + \sin kt)}{k(\cos t + \cos kt)} = -\frac{2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t.$$

При $t = 0$ получим $\frac{dy}{dx} = 0$. Согласно геометрическому значению производной (§ 1) в точке $(0; k+1)$, где $t = 0$, касательная к графику данной функции параллельна оси Ox.

2) Находим производные от x и от y по параметру α:

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2\alpha + 2; \quad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

и искомую производную от y по x:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}(\alpha+1)^{-2}.$$

Далее находим производную от y' по α, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по α:

$$\frac{dy'}{d\alpha}=-(\alpha+1)^{-3};\quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\alpha}:\frac{dx}{d\alpha}=\frac{-(\alpha+1)^{-3}}{2(\alpha+1)}=-\frac{1}{2(\alpha+1)^4}.$$

3) Пользуясь общими формулами (А) для производных от функции, заданной параметрически, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{a-ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=e^{-a\varphi}-e^{-2a\varphi};$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2ae^{-2a\varphi}-ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=2e^{-3a\varphi}-e^{-2a\varphi};$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2ae^{-2a\varphi}-6ae^{-3a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=2e^{-3a\varphi}-6e^{-4a\varphi}.$$

233. $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3; \ \dfrac{dy}{dx}\ ? \end{cases}$ **234.** $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}; \ \dfrac{dy}{dx}\ ? \end{cases}$

235. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t; \ \dfrac{d^2y}{dx^2}\ ? \end{cases}$ **236.** $\begin{cases} p=\cos\alpha+\alpha\sin\alpha \\ q=\sin\alpha-\alpha\cos\alpha; \ \dfrac{d^2q}{dp^2}\ ? \end{cases}$

237. $\begin{cases} x=z^2 \\ y=z^3+z; \ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{z=1}\ ? \end{cases}$ **238.** $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t; \ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\frac{\pi}{6}}\ ? \end{cases}$

§ 11. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между двумя кривыми

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат (черт. 33), то уравнения касательной и нормали к ней в точке $M(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$y-y_0=y_0'(x-x_0);\quad y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0), \tag{1}$$

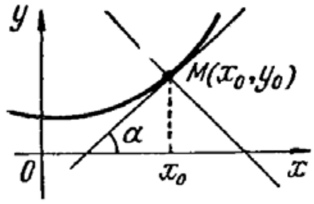
где y_0' — значение в точке x_0 производной $\frac{dy}{dx}$ из уравнения кривой.

Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке. Угол между двумя пересекающимися кривыми определяется как угол между двумя прямыми, касательными к кривым в точке их пересечения (черт. 34) по формуле

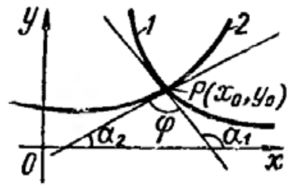
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}, \tag{2}$$

где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения $P(x_0, y_0)$, т. е. частные значения в точке x_0 производных от y по x из уравнений этих кривых:

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=x_0}; \; k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=x_0}.$$



Черт. 33



Черт. 34

239. Составить уравнения касательной и нормали:

1) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке, где $x = 1$;

2) к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Ox;

3) к циклоиде $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$;

4) * к кривой $y = |x^3 - 1|$ в ее угловой точке.

Решение. 1) Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу точки касания $x = 1$, найдем ее ординату $y = -3$.

Для определения углового коэффициента касательной y_0' находим производную от y по x из уравнения параболы и вычисляем ее частное значение в точке $x = 1$:

$$y' = 2x - 4; \; y_0' = y'(1) = -2.$$

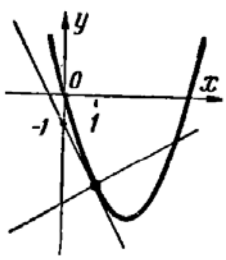
Подставляя значения x_0, y_0 и y_0' в общие уравнения (I), получим уравнение касательной

$$y + 3 = -2(x - 1) \text{ или } 2x + y + 1 = 0$$

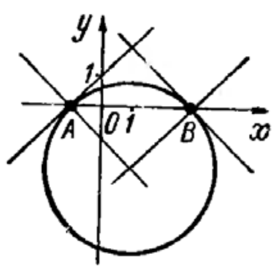
и уравнение нормали

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ или } x - 2y - 7 = 0.$$

Парабола, касательная и нормаль построены на черт. 35.



Черт. 35



Черт. 36

2) Решая совместно заданное уравнение окружности и уравнение оси Ox, $y=0$, находим точки их пересечения: $A(-1; 0)$, $B(3; 0)$ черт. 36. Дифференцируя по x уравнение окружности $2x+2yy'-2+4y'=0$, находим производную $y'=\frac{1-x}{2+y}$ и вычисляем ее значения для точек A и B: $y'_A=1$, $y'_B=-1$. Подставляя в общие уравнения (1), получим искомые уравнения касательной и нормали:
для точки A соответственно $x-y+1=0$ и $x+y+1=0$;
для точки B $x+y-3=0$ и $x-y-3=0$.

3) Подставляя в уравнения циклоиды $t=\frac{\pi}{2}$, находим координаты точки касания: $x=\frac{\pi}{2}-1$; $y=1$.

Затем определяем производную от y по x из уравнений циклоиды, как от функции, заданной параметрически

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

и вычисляем ее значение для точки касания $y'_0=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Подставляя x_0, y_0 и y'_0 в уравнения (1), получим уравнение касательной $2x-2y-\pi+4=0$ и уравнение нормали $2x+2y-\pi=0$.

4)* Найдем производную y' и затем угловую точку данной кривой из условия, что для этой точки производная y' не существует, но существуют различные односторонние производные:

$$y'=|x^3-1|'=\pm 3x^2,$$

где плюс соответствует интервалу $x>1$, в котором $x^3-1>0$, а минус — интервалу $x<1$, где $x^3-1<0$.

Отсюда заключаем, что точка, где $x=1$, является угловой; в этой точке кривая имеет две односторонние касательные с угловыми коэффициентами

$$k_1=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(-)}(1)=-3 \text{ и } k_2=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(+)}(1)=3.$$

Пользуясь общими уравнениями (1), получим уравнения касательных $3x-y-3=0$ и $3x+y-3=0$ и уравнения нормалей $x+3y-1=0$ и $x-3y-1=0$ (черт. 37).

240. Найти углы, под которыми пересекаются следующие линии:

1) прямая $x+y-4=0$ и парабола $2y=8-x^2$;
2) эллипс $x^2+4y^2=4$ и парабола $4y=4-5x^2$;
3) синусоида $y=\sin x$ и косинусоида $y=\cos x$.

Решение. 1) Совместно решая уравнения параболы и прямой, находим, что они пересекаются в двух точках: $A(0;\ 4)$ и $B(2;\ 2)$, черт. 38.

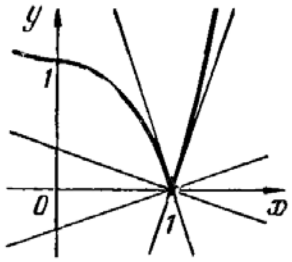
Далее находим производную от y по x из уравнения параболы: $2y' = -2x$, $y' = -x$ и определяем угловые коэффициенты касательных к параболе в точках A и B, как частные значения этой производной:

$$y'_A = k_A = 0;\ y'_B = k_B = -2.$$

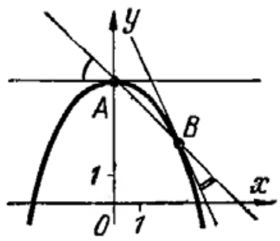
Угловой коэффициент прямой один и тот же во всех ее точках; у данной прямой он равен -1.

Согласно формуле (2) получим

$$\operatorname{tg} A = 1,\ A = 45^\circ;\quad \operatorname{tg} B = \frac{-1+2}{1+2} = \frac{1}{3},\quad B \approx 18{,}5^\circ.$$



Черт. 37



Черт. 38

2) Решая совместно уравнения кривых, находим их общие точки: $A(1{,}2;\ -0{,}8)$, $B(0;\ 1)$ и $C(-1{,}2;\ -0{,}8)$, черт. 39. Затем определяем угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных в любой точке эллипса и параболы как производные от y по x из их уравнений

$$k_1 = -\frac{x}{4y} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{5}{2}x.$$

Подставляя координаты точки A, получим $k_1 = \frac{3}{8}$ и $k_2 = -3$. Следовательно, в точке A:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{8}+3}{1-\frac{9}{8}} = -27;\quad \varphi \approx 92^\circ.$$

Под таким же углом кривые пересекаются и в точке C вследствие их симметричности относительно оси Oy.

В точке B имеем: $k_1 = k_2 = 0$, следовательно, в точке B кривые имеют общую касательную, т. е. касаются друг друга. В этой точке угол между кривыми равен нулю.

3) Абсциссы точек пересечения кривых (черт. 40) определяются уравнением $\sin x = \cos x$, решая которое, получим

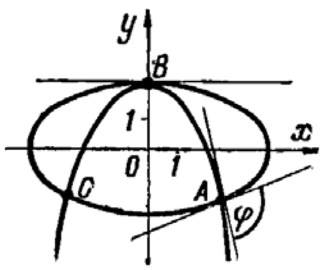
$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \; (n = 0, \; \pm 1, \; \pm 2 \; \ldots).$$

Дифференцированием находим угловые коэффициенты касательных к синусоиде и косинусоиде: $k_1 = \cos x$; $k_2 = -\sin x$.

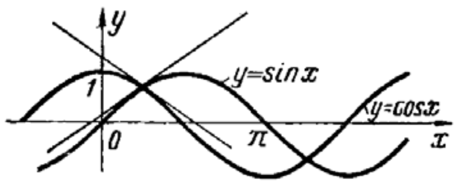
Искомый угол между кривыми определяем по общей формуле (2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \sin x} = \pm \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Положительному знаку соответствует острый угол $\varphi \approx 70{,}5°$, отрицательному — тупой, смежный с ним угол $\varphi_1 \approx 109{,}5°$.



Черт. 39



Черт. 40

241. В каких точках кривой $x = t - 1$, $y = t^3 - 12t + 1$ касательная параллельна: 1) оси Ox; 2) прямой $9x + y + 3 = 0$?

Решение. Используем здесь условие параллельности прямых, заключающееся в равенстве их угловых коэффициентов.

Найдем производную от y по x из уравнений кривой:

$$y' = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 12}{1} = 3t^2 - 12.$$

Эта производная представляет угловой коэффициент касательной к данной кривой в любой ее точке.

1) Приравнивая y' угловому коэффициенту оси Ox, который равен нулю, получим $3t^2 - 12 = 0$; $t^2 = 4$; $t = \pm 2$.

Подставляя эти значения параметра t в данные уравнения кривой, найдем координаты тех ее точек, где касательная параллельна оси Ox: $(1; -15)$; $(-3;\ 17)$.

2) Приравнивая y' угловому коэффициенту данной прямой, который равен -9, получим $3t^2 - 12 = -9$; $t^2 = 1$; $t = \pm 1$.

По найденным значениям параметра t из уравнений кривой определяем координаты искомых точек, где касательная к кривой параллельна данной прямой: $(0;\ -10)$, $(-2;\ 12)$.

242*. Составить уравнения касательных к параболе $y=x^2-4x+1$, проходящих через не лежащую на ней точку: 1) $O(0;\ 0)$; 2) $A(1;\ 1)$.

Решение. Уравнение касательной к данной параболе имеет общий вид

$$y-y_0=(x^2-4x+1)'_0(x-x_0),$$

или

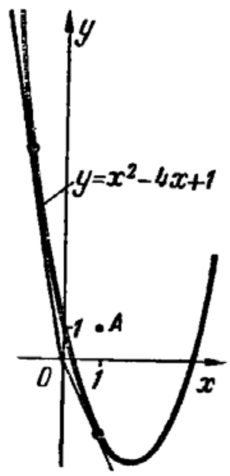
$$y-(x_0^2-4x_0+1)=(2x_0-4)(x-x_0),$$

где $(x,\ y)$ — текущая точка на касательной;
$(x_0,\ y_0)$ — неизвестная точка касания.

1) Так как касательная проходит через точку O, то

$$0-(x_0^2-4x_0+1)=(2x_0-4)(0-x_0).$$

Решая это квадратное уравнение, находим для абсциссы точки касания x_0 два значения: $x_0=\pm 1$, а отсюда и уравнения двух касательных: $2x+y=0$ и $6x+y=0$.



Черт. 41

2) Для точки A те же рассуждения приводят к квадратному уравнению $x_0^2-2x_0+4=0$, корни которого комплексные. Поэтому через точку A нельзя провести к данной параболе ни одной касательной.

Полученные результаты имеют простой геометрический смысл: из каждой точки, принадлежащей внешней области параболы, можно провести к ней две касательные, а из точки, принадлежащей ее внутренней области, — ни одной (черт. 41).

В общем случае задача о проведении касательных к кривой $y=f(x)$ через точку $(a,\ b)$, не лежащую на этой кривой, решается этим же способом, исходя из общего уравнения касательной

$$y-y_0=y'_0(x-x_0).$$

Эта задача имеет столько же решений, сколько вещественных корней имеет уравнение

$$b-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0).$$

В задачах 243—248 найти уравнения касательных и нормалей к данным кривым в указанных точках и построить кривые, касательные и нормали.

243. К параболе $y=4-x^2$ в точке, где $x=-1$.

244. К гиперболе $y^2-2x^2=1$ в точках, где $x=2$.

245. К эллипсу $x=2\sqrt{3}\cos t,\ y=2\sin t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{6}$.

246. К астроиде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{4}$.

247*. К кривой $y=|\sin x|$ в ее угловой точке, где $x=\pi$.

248*. К кривой $y=|2x-x^2|$ в ее угловых точках.

В задачах 249—254 найти углы, под которыми пересекаются данные линии, и построить эти линии и углы.

249. $9y=x^3$; $x-y=0$. **250.** $y=\cos x$; $2y=1$.

251*. $y^2=2ax+a^2$; $y^2=b^2-2bx$. **252.** $y=e^x$; $y=e^{3x}$.

253. $x^2-y^2=6$; $x^2+4y^2=16$. **254.** $y=\sin x$; $y=\sin 2x$.

255. Зная, что касательная к параболе $y=ax^2+bx+c$ в ее вершине параллельна оси Ox, найти вершины следующих парабол:

1) $y=x^2+2x-1$; 2) $y=1+8x-2x^2$; 3) $2y=2x-x^2$ и построить их.

256. На окружности $x^2+y^2=25$ найти точки, где касательная параллельна прямой $3x+4y-12=0$. Построить окружность, прямую и касательные.

257. На каждой из следующих кривых:

1) $y=2x^3-9x^2+12x-5$; 2) $y=x+\sqrt{x}$;
3) $x=t^2+1$, $y=3-t^2$; 4) $x^2+3y^2-2x+6y-8=0$

найти такие точки, где касательная параллельна оси Ox.

258. Найти угол между касательными к эллипсу $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, в точках, где $t=\frac{\pi}{6}$ и $t=\frac{\pi}{3}$. Построить эллипс и касательные.

259*. Построить на отрезке $[-2; 2]$ график функции $y=|x^3+x|$ и найти угол между касательными в его угловой точке.

260. Построить и найти углы, образуемые параболой $y=2x-x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами 1 и 4.

261*. Определить угол между касательными к параболе $y=x^2-3x+1$, проведенными из точки (4; 1). Построить параболу и касательные.

§ 12. Скорость изменения переменной величины. Скорость и ускорение прямолинейного движения

Если величина z изменяется с течением времени t, то скорость ее изменения определяется производной $\frac{dz}{dt}$.

Зная зависимость между двумя переменными x и y, можно найти зависимость между скоростями их изменения по формуле производной сложной функции

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Если точка движется прямолинейно, то ее скорость v и ускорение w определяются первой и второй производными от пути s по времени t:

$$v=\frac{ds}{dt}; \quad w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

262. Точка движется по кубической параболе $12y=x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение. Считая в уравнении параболы y сложной функцией от времени t и дифференцируя его по t, получим

$$12\frac{dy}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}.$$

Отсюда найдем отношение скоростей изменения ординаты и абсциссы:

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{4}.$$

При $|x|<2$ это отношение будет меньше единицы, при $|x|=$ $=2$ — равно единице и при $|x|>2$ оно будет больше единицы. Следовательно:

1) при $-2<x<2$ ордината изменяется медленнее абсциссы;

2) при $x=\pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы:

3) при $x<-2$ и $x>2$ ордината изменяется быстрее абсциссы.

263. Резервуар, имеющий форму полушара с внутренним радиусом R (*м*), наполняется водой со скоростью Q (*л*) в секунду. Определить скорость повышения уровня воды в резервуаре в момент, когда он будет равен $0{,}5R$.

Решение. Обозначим через h уровень воды в *м* и через v ее объем в *м*^{3}. Найдем зависимость между переменными h и v, пользуясь формулой для объема шарового сегмента

$$v=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Дифференцируя это равенство по времени t, найдем зависимость между скоростями изменения переменных h и v:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\left[2h\left(R-\frac{h}{3}\right)-\frac{1}{3}h^2\right]\frac{dh}{dt}=\pi(2Rh-h^2)\frac{dh}{dt}.$$

Полагая, согласно условию, $\frac{dv}{dt}=0{,}001\,Q\left(\frac{м^3}{сек}\right)$,

получим $\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}001\,Q}{\pi h(2R-h)}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

При $h=\frac{R}{2}$ получим $\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}004\,Q}{3\pi R^2}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

264. Скорость прямолинейного движения тела пропорциональна квадратному корню из пройденного пути (как, например, при свободном падении). Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. По закону Ньютона сила F, вызывающая движение, пропорциональна ускорению

$$F = k\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Согласно условию $\frac{ds}{dt} = \lambda\sqrt{s}$. Дифференцируя это равенство, найдем

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \lambda\sqrt{s} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Следовательно, действующая сила $F = \frac{k\lambda^2}{2}$ (const).

265. Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Показать, что ускорение движения пропорционально отклонению x.

Решение. Найдем скорость v и ускорение w движения в любой момент времени t:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t; \quad w = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

При $t = \frac{2\pi}{\omega}$, $v = A\omega$, $w = 0$.

Сравнивая выражения для ускорения w и для отклонения x, видим, что первое отличается от второго только постоянным множителем: $w = -\omega^2 x$.

266. Зависимость количества Q вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = a(1 + be^{-mt})$. Определить скорость реакции.

267. Точка движется по параболе $y = 5 - x^2$ так, что ее абсцисса x изменяется с течением времени t по закону $x = at^2$. С какой скоростью изменяется ордината точки?

268. Радиус шара r равномерно возрастает со скоростью 2 *см/сек*. С какими скоростями возрастают поверхность и объем шара? Каковы будут эти скорости в момент, когда r достигнет 10 *см*?

269. Движение точки по оси Ox определяется формулой $x = (t-2)^2 e^{-t}$. Определить скорость и ускорение движения и те моменты времени, когда точка меняет направление движения.

270. Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки и действующую на нее силу.

§ 13. Дифференциал функции

Из определений производной $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и предела переменной следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\varepsilon$ или $\Delta y=y'\Delta x+\varepsilon\,\Delta x$, где $\varepsilon\longrightarrow 0$ при $\Delta x\longrightarrow 0$, т. е. что приращение функции можно разбить на две части.

Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется дифференциалом функции и обозначается знаком d:

$$dy=y'\,\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной x равен ее приращению, $dx=\Delta x$. Поэтому

$$dy=y'\,dx, \tag{a}$$

т. е. *дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной.*

Для всякой данной функции $y=f(x)$ производная y' зависит только от одной переменной x, тогда как ее дифференциал dy зависит от двух независимых друг от друга переменных: x и Δx.

Нахождение дифференциала функции называется дифференцированием, так же как и нахождение производной, так как согласно формуле (а), чтобы найти дифференциал какой-либо функции, надо найти производную этой функции и умножить ее на дифференциал независимой переменной.

Формула (а) верна и в случае, если y есть сложная функция, т. е. если x есть функция переменной t.

При достаточно малых значениях $|dx|$ приращение функции может быть заменено ее дифференциалом с как угодно малой относительной ошибкой:

$$\Delta y\approx dy.^*$$

Это приближенное равенство применяется для приближенных вычислений, так как вычисление дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее приращения.

271. Найти дифференциалы функций:

1) $y=x^3-3^x$; 2) $F(\varphi)=\cos\frac{\varphi}{3}+\sin\frac{3}{\varphi}$;

3) $z=\ln(1+e^{10x})+\operatorname{arcctg} e^{5x}$; вычислить $dz|_{x=0;\ dx=0,1}$

Решение. Находим производную данной функции и, умножив ее на дифференциал независимой переменной, получим

---

* Исключая точки, где $y'=0$.

искомый дифференциал данной функции:

1) $dy = y'\,dx = (x^3 - 3^x)'\,dx = (3x^2 - 3^x \ln 3)\,dx$;

2) $dF(\varphi) = d\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right)' d\varphi =$

$$= \left[-\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\left(\frac{\varphi}{3}\right)' + \cos\frac{3}{\varphi}\cdot\left(\frac{3}{\varphi}\right)'\right] d\varphi = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{3}{\varphi^2}\cos\frac{3}{\varphi}\right) d\varphi;$$

3) $dz = \left[\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}} - \frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right] dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\right) dx =$

$$= \frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}\,dx.$$

Полагая $x=0$ и $dx=0{,}1$, получим $dz=0{,}25$.

272. Вычислить приближенное значение: 1) $\sqrt[4]{17}$; 2) $\operatorname{arc\,tg} 0{,}98$; 3) $\sin 29°$.

Решение. Если требуется вычислить $f(x_1)$ и если проще вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, то при достаточно малой по абсолютному значению разности $x_1 - x_0 = dx$ можно заменить приращение функции ее дифференциалом $f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,dx$ и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx. \qquad (б)$$

1) Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. Пусть $x_0 = 16$, тогда $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$,

$$f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}, \quad dx = x_1 - x_0 = 1.$$

Подставляя в формулу (б), получим

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx = 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$$

2) Пусть $\operatorname{arctg} 0{,}98$ есть частное значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0{,}98 = x_1$. Пусть $x_0 = 1$, тогда $y(x_0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(x_0) =$

$$= \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad dx = x_1 - x_0 = -0{,}02.$$

Пользуясь формулой (б), найдем:

$$\operatorname{arctg} 0{,}98 \approx y(x_0) + y'(x_0)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}02) \approx 0{,}7754.$$

3) Полагая, что $\sin 29°$ есть частное значение функции $y = \sin x$ при $x=\frac{\pi}{180}\cdot 29=x_1$ и что $x_0=\frac{\pi}{180}\cdot 30=\frac{\pi}{6}$, получим

$$y(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\quad y'(x_0)=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx=x_1-x_0=\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29°\approx y(x_0)+y'(x_0)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0{,}4848.$$

Найти дифференциалы функций:

273. $y=(a+bx)^m$. **274.** $z=e^{-t}(2-2t-t^2)$.

275. $u=\frac{x^n}{n^2}(1-n\ln x)$. **276.** $v=(1-\ln\sin\varphi)\sin\varphi$.

Вычислить с точностью до 0,01 дифференциалы функций:

277. $y=x(1+x)(1-x)$ при $x=-10$ и $dx=0{,}1$.

278. $z=x\sqrt{x^2+5}$ при $x=2$ и $dx=\frac{1}{5}$.

279. $r=\varphi+(\varphi^2+1)\operatorname{arcctg}\varphi$ при $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ и $d\varphi=0{,}2$.

280. $v=\frac{2\sin 2x-3\cos 2x}{e^{3x}}$ при $x=0$ и $dx=-0{,}03$.

281. Вычислить приближенное значение функции $y=x^7-3x^4+4x^3-2$ при $x=1{,}002$, исходя из ее значения при $x=1$ и заменяя приращение функции дифференциалом *.

282. Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 44°56'$, исходя из значения функции $y=\operatorname{tg} x$ при $x=45°$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

283. Найти приближенное значение $\arccos 0{,}4993$, исходя из значения функции $y=\arccos x$ при $x=0{,}5$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

284. Найти приближенное значение $\ln 1{,}01$.*

285. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.*

§ 14. Вектор-функция скалярного аргумента и ее дифференцирование. Касательная к пространственной кривой

Переменный вектор $\bar{r}$ называется вектор-функцией скалярного аргумента t, если каждому рассматриваемому числовому значению t соответствует определенное значение $\bar{r}$ (т. е. определенный модуль и определенное направление вектора $\bar{r}$).

* Все вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками.

Если начало переменного вектора $\bar{r}=\bar{r}(t)$ неизменно помещается в начале координат O, т. е. если $\bar{r}(t)$ есть радиус-вектор $\overline{OM}$, то при изменении скаляра t его подвижный конец M описывает некоторую линию, которая называется **годографом** этого вектора.

При разложении радиуса-вектора $\bar{r}(t)$ по ортам $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ его проекции $r_x=x(t)$, $r_y=y(t)$, $r_z=z(t)$ совпадают с координатами его конца $M(x, y, z)$, а система $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ представляет параметрические уравнения его годографа.

Производной вектор-функции $\bar{r}(t)$ называется предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$; она обозначается $\frac{d\bar{r}}{dt}$, или $\dot{\bar{r}}$, или $\bar{r}'$.

Правила дифференцирования (нахождения производной) вектор-функции $\bar{r}(t)$ аналогичны правилам дифференцирования скалярных функций:

$$\bar{c}'=0, \text{ если } \bar{c} \text{ — постоянный вектор.}$$
$$(\bar{r}_1\pm\bar{r}_2)'=\bar{r}'_1\pm\bar{r}'_2;\quad (\bar{r}u)'=\bar{r}'u+\bar{r}u'.$$

Если $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, то $\dot{\bar{r}}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}$. Вектор $\dot{\bar{r}}$ направлен по касательной к годографу вектора $\bar{r}$.

Если вектор $\bar{r}(t)$ изменяется только по направлению, то его годограф представляет линию, расположенную на сфере радиуса $R=|\bar{r}|$ с центром в начале координат, а вектор $\dot{\bar{r}}$ перпендикулярен к годографу вектора $\bar{r}$; если вектор $\bar{r}(t)$ изменяется только по модулю, то его годограф представляет луч, исходящий из начала координат, а вектор $\dot{\bar{r}}$ направлен по этому лучу.

Всякую кривую можно рассматривать как годограф радиуса-вектора ее текущей точки $M(x, y, z)$. Поэтому, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — параметрические уравнения кривой и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка этой кривой, то касательная прямая к этой кривой в точке M_0 определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0}, \tag{1}$$

а нормальная плоскость (перпендикулярная к касательной) определяется уравнением

$$(x-x_0)\dot{x}_0+(y-y_0)\dot{y}_0+(z-z_0)\dot{z}_0=0. \tag{2}$$

286. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

1) $x=t^3$, $y=t^2$, $z=t$ в точке, где $t=-1$;

2) $x=y^2$, $y=z^2$ в точке, где $z=2$.

Решение. 1) Определяем координаты точки касания: $x=-1$, $y=1$, $z=-1$ (подставляя $t=-1$ в данные уравнения). Находим производные от x, y и z по t и вычисляем их значения в точке касания: $\dot{x}=3t^2$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=1$; $\dot{x}(-1)=3$, $\dot{y}(-1)=-2$, $\dot{z}(-1)=1$.

Подставляя в общие уравнения (1) и (2) координаты точки касания и вычисленные значения производных, получим уравнения касательной прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ и уравнение нормальной плоскости $3(x+1)-2(y-1)+z+1=0$ или $3x-2y+$ $+z+6=0$.

2) Здесь кривая определена как пересечение двух поверхностей. Вначале преобразуем уравнения кривой к параметрическому виду. Полагая $z=t$, получим $y=t^2$, $x=t^4$.*

Далее определяем координаты точки касания: $x=16$, $y=4$, $z=2$ и значения производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в этой точке: $\dot{x}=4t^3$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=1$; $\dot{x}(2)=32$, $\dot{y}(2)=4$, $\dot{z}(2)=1$.

Подставляя в общие уравнения (1) и (2), получим уравнения касательной

$$\frac{x-16}{32}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-2}{1}$$

и уравнение нормальной плоскости

$$32(x-16)+4(y-4)+z-2=0 \quad \text{или} \quad 32x+4y+z-530=0.$$

287. Найти уравнения касательной к винтовой линии $y=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в точке, где $t=t_0$, и угол, образуемый ею с осью Oz.

Решение. Обозначив координаты точки касания (x_0, y_0, z_0) и пользуясь общими уравнениями (1), получим следующие уравнения касательной:

$$\frac{x-x_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-y_0}{a\cos t_0}=\frac{z-z_0}{b}.$$

Отсюда направляющий косинус угла, образованного касательной с осью Oz:

$$\cos\gamma=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2 t_0+a^2\cos^2 t_0+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Этот результат показывает, что все касательные к винтовой линии образуют с осью Oz один и тот же угол.

* Можно получить и другие параметрические уравнения данной линии. Вообще, если линия задана уравнениями $f(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)=0$, то для нее можно получить бесчисленное множество различных параметрических уравнений вида $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$.

В задачах 288—290 написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

288. $x=2t,\ y=\ln t,\ z=t^2$ в точке, где $t=1$.

289. $x=\cos^2\frac{t}{2},\ y=\sin t,\ z=\sin\frac{t}{2}$ в точке, где $t=\pi$.

290. $y=x,\ z=x^2-y^2$ в начале координат.

291.* Найти направляющие косинусы касательного вектора к кривой $y^2=2x,\ z^2=8x$ в точках, где $x=2$.

§ 15. Скорость и ускорение криволинейного движения

Если в любой момент времени t положение движущейся точки M определяется ее радиусом-вектором $\overline{OM}=\bar{r}(t)$, то $\dot{\bar{r}}$ есть вектор скорости, $\ddot{\bar{r}}$ есть вектор ускорения, а годограф вектора $\bar{r}$ есть траектория движения точки M.

Вектор скорости $\dot{\bar{r}}$ направлен по касательной к траектории, а его модуль равен производной от пути по времени $|\dot{\bar{r}}|=\frac{ds}{dt}$.

292. Зная уравнение движения точки, определить (назвать), какую линию представляет ее траектория и найти скорость и ускорение этой точки:

1) $\bar{r}=(3t-2)\,\bar{i}-4t\bar{j}$; 2) $\bar{r}=2\cos t\cdot\bar{i}+\sin t\cdot\bar{k}$;

3) $\bar{r}=(2t^2-3)\,\bar{i}-3t^2\bar{j}+(4t^2-5)\,\bar{k}$;

4) $\bar{r}=a\sin\omega t\cdot\bar{i}+a\cos\omega t\cdot\bar{j}+bt\bar{k}$.

Решение. 1) Траектория точки есть годограф ее радиуса-вектора $\bar{r}\,\{3t-2;\ -4t\}$, т. е. линия, определяемая параметрическими уравнениями $x=3t-2,\ y=-4t$. Исключая из них параметр (время) t, получим прямую $4x+3y+8=0$, расположенную в плоскости xOy.

Скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{w}$ движения точки найдем как первую и вторую производные от $\bar{r}$ по t:

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=3\bar{i}-4\bar{j};\quad \bar{w}=\ddot{\bar{r}}=0.$$

Следовательно, точка движется прямолинейно с постоянной скоростью, модуль которой $|v|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

2) Здесь траектория точки есть эллипс, определяемый параметрическими уравнениями $x=2\cos t,\ z=\sin t$ или уравнением $\frac{x^2}{4}+z^2=1$, который расположен в плоскости xOz.

Скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-2\sin t\cdot\bar{i}+\cos t\cdot\bar{k}$, ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=-2\cos t\cdot\bar{i}-\sin t\cdot\bar{k}$.

3) Параметрические уравнения траектории точки $x = 2t^2 - 3$, $y = -3t^2$, $z = 4t^2 - 5$ после исключения параметра t преобразуются в канонические уравнения прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{4}$.

Скорость точки $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = 4t\bar{i} - 6t\bar{j} + 8t\bar{k}$, ускорение $\bar{w} = \ddot{\bar{r}} = 4\bar{i} - 6\bar{j} + 8\bar{k}$ — постоянно (не зависит от времени t).

Здесь движение точки является прямолинейным и равномерно-переменным.

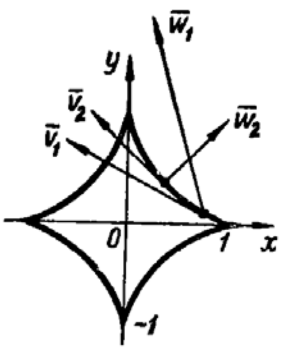
4) Траектория точки есть цилиндрическая винтовая линия $x = a \sin \omega t$, $y = a \cos \omega t$, $z = bt$.

Скорость точки $v = \dot{\bar{r}} = a\omega \cos \omega t \cdot \bar{i} - a\omega \sin \omega t \cdot \bar{j} + b\bar{k}$,

ускорение $\bar{w} = \ddot{\bar{r}} = -a\omega^2 \sin \omega t \cdot \bar{i} - a\omega^2 \cos \omega t \cdot \bar{j}$.

Здесь движение точки является равномерным, так как модуль скорости $|\bar{v}| = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$ остается неизменным.

293. Зная уравнение движения точки $\bar{r} = \cos^3 t \cdot \bar{i} + \sin^3 t \cdot \bar{j}$, построить ее траекторию и векторы скорости и ускорения в моменты времени $t_1 = \frac{\pi}{6}$ и $t_2 = \frac{\pi}{4}$.



Черт. 42

Решение. Траектория точки или годограф вектора $\bar{r}$ есть астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

В любой момент времени t скорость точки $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = -3\cos^2 t \sin t \cdot \bar{i} + 3 \sin^2 t \cos t \cdot \bar{j}$,

а ее ускорение $\bar{w} = \ddot{\bar{r}} = 3 \cos t\,(3 \sin^2 t - 1)\,\bar{i} + 3 \sin t\,(3\cos^2 t - 1)\,\bar{j}$.

В момент $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $\bar{v}_1 = -\frac{9}{8} i + \frac{3\sqrt{3}}{8}\bar{j}$, $\bar{w}_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\bar{i} + \frac{15}{8}\bar{j}$.

В момент $t_2 = \frac{\pi}{4}$, $v_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\bar{j} - \bar{i})$, $\bar{w}_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\bar{i} + \bar{j})$.

Траектория точки и найденные векторы ее скорости и ускорения в моменты $t_1 = \frac{\pi}{6}$ и $t_2 = \frac{\pi}{4}$ построены на черт. 42.*

В задачах 294—296 по данному векторному уравнению движения точки построить ее траекторию и векторы скорости и ускорения в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$.

294. $\bar{r} = a \cos t \cdot \bar{i} + a \sin t \cdot \bar{j}$. **295.** $\bar{r} = 3t\bar{j} + (4t - t^2)\bar{k}$.

296. $\bar{r} = 3(t - \sin t)\bar{i} + 3(1 - \cos t)\bar{j}$.

---

* Координаты x, y начала каждого вектора определяются из уравнений траектории по данным значениям t.

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

§ 1. Теорема (формула) Тейлора

Многочисленные применения дифференциального исчисления в естествознании и технике основываются на теоремах Ролля, Лагранжа, Коши и Тейлора. В каждой из этих теорем утверждается существование некоторого среднего значения аргумента $x=c$, вследствие чего все они называются теоремами о среднем.

Теорема Тейлора. *Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку a, может быть представлена в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена R_n:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n), \tag{T}$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где c — некоторое среднее значение между a и x,

$$c=a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1.$$

Эта теорема является самой общей теоремой о среднем, из которой вытекают все остальные.

Формула Тейлора (T) позволяет приближенно представить (аппроксимировать) произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{*}$$

(называемого многочленом Тейлора) и вместе с тем позволяет оценить возникающую при этом погрешность R_n, которая во многих случаях может быть сделана как угодно малой. Поэтому она является одной из важнейших формул математического анализа, которая широко применяется и как тонкий инструмент теоретического исследования и как средство решения многих практических задач.

Частный, простейший вид формулы Тейлора при $a=0$ принято называть формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n;\quad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{M}$$

Она дает разложение функции по степеням самой независимой переменной.

Однако для многих функций эта простейшая формула Тейлора неприменима, ибо при $x=0$ многие функции или их производные не существуют $\left(\text{например: } \ln x;\ \sqrt{x};\ \operatorname{ctg} x;\ \frac{1}{x}\right)$.

297. Каждую из данных функций аппроксимировать многочленом n-й степени относительно x, оценить погрешность и установить, при каких значениях x она может быть сделана сколь угодно малой.

1) e^x; 2) $\sin x$; 3) $\cos x$.

Решение. Чтобы получить приближенное выражение данной функции $f(x)$ в виде многочлена относительно независимой переменной x, следует написать для этой функции многочлен Маклорена. Затем для оценки той погрешности, которая возникает в результате замены данной функции ее многочленом Маклорена, следует найти остаточный член R_n формулы Маклорена, применяя его общую формулу к данной функции, и, наконец, для определения тех значений x, при которых погрешность может быть сделана сколь угодно малой, необходимо исследовать поведение остаточного члена при $n\to+\infty$ и при различных значениях x. Погрешность может быть сделана сколь угодно малой только при тех значениях x, при которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$.

1) Вычислив значения данной функции и ее производных при $x=0$:

$$f(x)=e^x;\quad f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots=f^{(k)}(x)=e^x;$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(k)}(0)=1$$

и пользуясь многочленом Маклорена (*), получим искомое приближенное выражение данной трансцендентной функции в виде многочлена n-й степени:

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Погрешность этого приближенного равенства определяется остаточным членом формулы Маклорена. Для функции e^x

получим

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Очевидно, что величина погрешности R_n зависит как от степени n аппроксимирующего многочлена, так и от значений переменной x.

При неограниченном возрастании n и при любом значении x величина $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ является бесконечно малой, что было установлено в решении задачи 40, а величина $e^{\Theta x}$ является ограниченной. Поэтому при любом значении x и при $n \to +\infty$ остаточный член в разложении функции e^x неограниченно убывает, стремясь к нулю:

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} = 0.$$

Из этого следует, что при любом значении x можно аппроксимировать трансцендентную функцию e^x ее многочленом Маклорена с любой желаемой точностью и что последовательное повышение степени аппроксимирующего многочлена дает и последовательное повышение точности аппроксимации.

Полагая $n = 1, 2, 3$, получим приближенные формулы

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

которые расположены в порядке возрастающей точности.

2) Вычисляем значения функции $\sin x$ и ее производных при $x = 0$:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x, & f(0) = 0, \\
f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) = 1, \\
f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) = 0, \\
f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) = -1, \\
\dots\dots\dots\dots & \\
f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), & f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2}.
\end{array}$$

Здесь при $x = 0$ все производные четного порядка равны нулю. Поэтому аппроксимирующий эту функцию многочлен Маклорена будет содержать только нечетные степени x:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \pm \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \tag{2}$$

(x — радианная мера угла).

Это приближенное равенство отчетливо выражает **нечетность** функции $\sin x$, т. е. что $\sin(-x) = -\sin x$.

Погрешность этого приближенного равенства определим по общей формуле остаточного члена R_n формулы Маклорена.

Для функции $\sin x$ погрешность

$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left[\Theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right], \ 0 < \Theta < 1.^*$$

Используя очевидное неравенство $|\sin\alpha| \leqslant 1$, избавимся от неизвестной величины Θ и получим простое выражение для оценки погрешности, возникающей при замене функции $\sin x$ многочленом (2)

$$|R_{2m}| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Как было доказано в задаче 40 при $n \to +\infty$ и при любом значении x величина $\frac{x^n}{n!}$ стремится к нулю. Вследствие этого при $m \to +\infty$ и остаточный член R_{2m} формулы Маклорена для функции $\sin x$ также стремится к нулю при любом значении x, т. е.

$$\lim_{m \to +\infty} R_{2m} = 0.$$

Следовательно, при любом значении x можно заменить функцию $\sin x$ ее многочленом Маклорена с любой сколь угодно малой погрешностью. При этом последовательное уменьшение погрешности достигается путем последовательного увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена (2).

Полагая $m = 1, 2, 3$, получим простейшие приближенные выражения для $\sin x$:

$$\sin x \approx x, \qquad |R_2| \leqslant \frac{|x|^3}{3!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad |R_4| \leqslant \frac{|x|^5}{5!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \qquad |R_6| \leqslant \frac{|x|^7}{7!}.$$

Вторая из этих формул точнее первой, а третья точнее второй.

3) При $x = 0$ значения функции $\cos x$ и ее производных будут:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 0,\\
f''(x) &= -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) &= -1,\\
f'''(x) &= \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) &= 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^{(k)}(x) &= \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), & f^{(k)}(0) &= \cos k\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

---

* R_{2m} соответствует многочлену Маклорена $2m$-й степени, который для функции $\sin x$ тождествен многочлену $(2m-1)$-й степени.

Здесь значения всех производных нечетного порядка равны нулю. Поэтому многочлен Маклорена, аппроксимирующий функцию $\cos x$, содержит только четные степени x:

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \pm \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \qquad (3)$$

Эта приближенная формула отчетливо выражает четность функции $\cos x$, т. е. что $\cos(-x)=\cos x$.

Погрешность этой приближенной формулы будет

$$R_{2m+1}=\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos\left[\Theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0<\Theta<1.$$

Избавляясь от неизвестной Θ, в силу неравенства $|\cos\alpha|\leqslant 1$, получим неравенство

$$|R_{2m+1}|\leqslant\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

которое позволяет легко оценить погрешность при замене функции $\cos x$ многочленом (3).

Исследуя поведение погрешности R_{2m+1} при различных значениях x и при $m\to+\infty$, посредством таких же рассуждений, как и в двух предыдущих задачах, приходим к выводу:

При любом значении x и при $m\to+\infty$ остаточный член R_{2m+1} формулы Маклорена для функции $\cos x$ стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{m\to+\infty} R_{2m+1}=0.$$

Из этого следует, что при любом значении x функцию $\cos x$ можно аппроксимировать ее многочленом Маклорена с любой заданной точностью, причем последовательное повышение точности аппроксимации достигается путем простого увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена (3).

Полагая $m=1$, 2, 3, получим простейшие приближенные формулы для $\cos x$:

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}, \qquad |R_3|\leqslant\frac{x^4}{4!},$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}, \qquad |R_5|\leqslant\frac{x^6}{6!},$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}, \qquad |R_7|\leqslant\frac{x^8}{8!},$$

которые расположены в порядке повышающейся точности.

298. Аппроксимировать функции: 1) x^m и 2) $\ln x$ многочленами n-й степени относительно двучлена $x-1$ и оценить погрешность. Затем, полагая $x-1=t$, получить разложения функций по степеням t.

Решение. Чтобы аппроксимировать данную функцию $f(x)$ многочленом относительно двучлена $x-1$, следует написать для нее многочлен Тейлора, полагая $a=1$. Погрешность, возникающая при замене данной функции ее многочленом Тейлора, определяется величиной остаточного члена R_n формулы Тейлора.

1) Для функции x^m, где m — любое вещественное число, имеем:

$$\begin{array}{ll}
f(x) \;\;= x^m, & f(1) \;\;= 1, \\
f'(x) \;= mx^{m-1}, & f'(1) \;= m, \\
f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, & f''(1) = m(m-1), \\
f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, & f'''(1) = m(m-1)(m-2), \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots & f^{(k)}(1) = m(m-1)(m-2)\dots \\
\quad\dots(m-k+1)x^{m-k}, & \quad\dots(m-k+1).
\end{array}$$

Пользуясь многочленом Тейлора (*), получим

$$x^m \approx 1 + \frac{m}{1!}(x-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(x-1)^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n.$$

Погрешность этого приближенного равенства найдем по общей формуле остаточного члена R_n формулы Тейлора, полагая $f(x) = x^m$ и $a = 1$:

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}[1+\Theta(x-1)]^{m-n-1},\; 0 < \Theta < 1.$$

Полагая $x - 1 = t$, получим

$$(1+t)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \dots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}t^n, \tag{4}$$
$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}t^{n+1}(1+\Theta t)^{m-n-1}.$$

Последняя формула представляет обобщение бинома Ньютона для любого показателя m. В частности, когда показатель m — целое положительное число, то R_m обращается в нуль, а равенство (4) обращается в элементарную формулу бинома Ньютона. Если m не будет целым положительным числом, то равенство (4) дает приближенное выражение бинома в виде многочлена с биномиальными коэффициентами, которые составлены по тому же закону, что и в элементарной формуле бинома Ньютона.

Как доказывается в теории рядов, погрешность R_n биномиальной формулы (4) может быть сделана сколь угодно малой величиной, т. е. стремится к нулю с возрастанием n только для тех значений t, которые по абсолютному значению меньше единицы:

$$-1 < t < 1.$$

Полагая $n=1, 2, 3$, получим простейшие приближенные биномиальные формулы:

$$(1+t)^m \approx 1+mt,$$

$$(1+t)^m \approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2,$$

$$(1+t)^m \approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}t^3.$$

Вторая из этих формул точнее первой, а третья точнее второй.

2) Для функции $\ln x$ получим:

$$\begin{aligned} &f(x)=\ln x, && f(1)=0,\\ &f'(x)=x^{-1}, && f'(1)=1,\\ &f''(x)=-1\cdot x^{-2}, && f''(1)=-1,\\ &f'''(x)=1\cdot 2\cdot x^{-3}, && f'''(1)=2!\\ &f^{(4)}(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}, && f^{(4)}(1)=-3!\end{aligned}$$

. . . .

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \quad f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\ln x \approx \frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность этой приближенной формулы

$$R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\frac{x-1}{1+\Theta(x-1)}\right]^{n+1}, \quad 0<\Theta<1.$$

Полагая $x-1=t$, получим

$$\ln(1+t)\approx t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}; \qquad (5)$$

$$R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{t}{1+\Theta t}\right)^{n+1}.$$

Здесь $R_n \to 0$ с возрастанием n при $-1<t\leqslant 1$, т. е. погрешность вычисления логарифмов по формуле (5) можно довести до любой сколь угодно малой величины только для значений t из указанного полуоткрытого интервала.

При $n=1, 2, 3$ получим приближенные формулы

$$\ln(1+t)\approx t,$$

$$\ln(1+t)\approx t-\frac{t^2}{2},$$

$$\ln(1+t)\approx t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3},$$

которые следуют в порядке возрастающей точности.

Аналогичным образом, как в задачах 297 и 298, *многие другие трансцендентные и сложные алгебраические функции можно аппроксимировать посредством формулы Тейлора простейшими алгебраическими функциями — степенными многочленами с любой* *заданной точностью*, что имеет огромное теоретическое и практическое значение.

299. Вычислить с точностью до 10^{-6} приближенное значение: 1) $\cos 5^\circ$; 2) $\sin 49^\circ$; 3) $\sqrt[4]{83}$; 4) $\sqrt[3]{121}$.

Решение. 1) Воспользуемся приближенной формулой для $\cos x$, полученной в решении задачи 297.

Подставляя в эту формулу радианную меру угла 5°, получим

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!\,36^2} + \frac{\pi^4}{4!\,36^4} - \ldots \pm \frac{\pi^{2n}}{(2n)!\,36^{2n}}.$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этой формулы для получения заданной точности вычисления, оценим величины последовательных остаточных членов R_{2m+1}:

$$|R_1| \leqslant \frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2!\,36^2} < 0{,}004,$$

$$|R_3| \leqslant \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4!\,36^4} < 0{,}000003,$$

$$|R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!\,36^6} < 0{,}00000003.$$

Величина $|R_5| < 10^{-6}$. Поэтому для получения заданной точности вычисления достаточно взять три первых члена формулы, предшествующих R_5:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{24\cdot 36^4} \approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx 0{,}96195.$$

Здесь для обеспечения заданной точности значения числа π и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т. е. с точностью до 10^{-7} ($\pi \approx 3{,}1415917$).

2) Чтобы вычислить $\sin 49^\circ$, напишем формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!}\sin\left(a + 2\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\sin\left(a + n\frac{\pi}{2}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ так как } |\sin\alpha| \leqslant 1.$$

По этой формуле можно вычислять значения $\sin x$ при любых значениях x и a и с любой желаемой точностью, так как по мере увеличения числа членов в ней погрешность R_n неограниченно убывает, стремясь к нулю. При этом чем меньше будет величина разности $|x-a|$, тем меньше потребуется брать первых членов этой формулы для достижения какой-либо заданной точности вычисления.

Полагая $x=\frac{\pi}{180}\cdot 49$ и $a=\frac{\pi}{180}\cdot 45$, получим

$$x-a=\frac{\pi}{180}(49-45)=\frac{\pi}{45},$$

$$\sin 49^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{1!\,45}-\frac{\pi^2}{2!\,45^2}-\frac{\pi^3}{3!\,45^3}+\ldots\pm\frac{\pi^n}{n!\,45^n}\right)+R_n,$$

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!\,45^{n+1}}.$$

Для определения числа первых членов этой формулы, обеспечивающих заданную точность вычисления, оцениваем величины последовательных остаточных членов R_n:

$$|R_1|\leqslant\frac{\pi^2}{2!\,45^2}<0{,}003,$$

$$|R_2|\leqslant\frac{\pi^3}{3!\,45^3}<0{,}00006,$$

$$|R_3|\leqslant\frac{\pi^4}{4!\,45^4}<0{,}0000009<10^{-6}.$$

Следовательно, заданная точность вычисления будет достигнута, если взять четыре первых члена формулы, предшествующих R_3:

$$\sin 49^\circ\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{45}-\frac{\pi^2}{2\cdot 45^2}-\frac{\pi^3}{6\cdot 45^3}\right)\approx$$

$$\approx 0{,}7071068\,(1+0{,}0698131-0{,}0024369-0{,}0000567)\approx 0{,}754709.$$

(Значения π, $\sqrt{2}$ и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т. е. с семью десятичными знаками.)

Иначе можно было вычислить $\sin 49^\circ$ по формуле Маклорена для функции $\sin x$, однако при этом для достижения заданной точности пришлось бы взять очень много членов этой формулы.

3) Преобразуем заданный корень

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

и применим обобщенную формулу бинома (4), полученную в решении задачи 298.

Полагая $t=\frac{2}{81}$ и $m=\frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{83}=3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162\cdot 108}+\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486}-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54}+\ldots+R_n\right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим:

$$3|R_1| < \frac{3}{162\cdot 108} < 0,0002,$$

$$3|R_2| < \frac{3\cdot 7}{162\cdot 108\cdot 486} < 0,000003,$$

$$3|R_3| < \frac{3\cdot 7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54} < 0,00000006.$$

Следовательно, для получения заданной точности вычисления достаточно взять сумму четырех членов биномиальной формулы, которые предшествуют остатку R_3:

$$\sqrt[4]{83} \approx 3\,(1 + 0,0061728 - 0,0000572 + 0,0000008) \approx 3,018349.$$

4) Преобразуя данный корень

$$\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{125-4} = 5\left(1 - \frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

и подставляя в биномиальную формулу $t = -\frac{4}{125} = -0,032$ и $m = \frac{1}{3}$, получим

$$\sqrt[3]{121} = 5\left(1 - \frac{0,032}{3} - \frac{0,032^2}{9} - \frac{5\cdot 0,032^3}{81} - \frac{10\cdot 0,032^4}{243} - \ldots + R_n\right).$$

Путем последовательных испытаний величины погрешности $5|R_n|$ находим

$$5|R_3| = \frac{5\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\right|}{4!}\times$$

$$\times 0,032^4\,(1 - 0,032\Theta)^{\frac{1}{3}-3-1} < 10^{-6},$$

т. е. находим, что заданная точность вычисления обеспечивается четырьмя первыми членами биномиальной формулы, предшествующими R_3:

$$\sqrt[3]{121} \approx 5\,(1 - 0,0106667 - 0,0001138 - 0,0000020) \approx 4,946088.$$

Подобным образом *с помощью формулы Тейлора можно находить числовые значения всех других* трансцендентных и сложных алгебраических *функций.* Именно таким путем составлены все таблицы числовых значений для логарифмических, показательных, тригонометрических функций, для квадратных и кубических корней и для многих других функций.

300. Для каждой из следующих функций:

1) 3^x, 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 3) xe^x

найти приближенное выражение в виде многочлена n-й степени относительно x, определить возникающую при этом погрешность и установить, при каких значениях x она может быть сделана сколь угодно малой.

301. Найти приближенные выражения в виде многочленов 3-й степени относительно x для следующих функций:

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $x \cos x$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

302. Аппроксимировать функции: 1) $e^{\frac{x}{a}}$ и 2) $\cos x$ многочленами n-й степени относительно двучлена $x-a$ и оценить возникающую при этом погрешность.

303. Аппроксимировать многочленами 4-й степени относительно двучлена $x-a$ функции: 1) $\sqrt[3]{x}$ при $a=-1$; 2) $\sin 3x$ при $a=-\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg} x$ при $a=\frac{\pi}{4}$.

304. Вычислить с точностью до 0,001:

1) $\sin 18°$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\sqrt{70}$; 4) $\sqrt[5]{245}$.

305. Вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\cos 10°$; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) $\sqrt[7]{129}$; 4) $\sin 36°$.

§ 2. Правило Лопиталя и применение его к нахождению предела функции

В задачах § 7 гл. I были разъяснены элементарные способы нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Кроме этих элементарных способов, весьма эффективным средством для нахождения предела функции в указанных особых случаях является следующее правило Лопиталя: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных* (если последний предел существует или равен бесконечности).

а) Случаи нахождения предела:

1) $\frac{0}{0}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно малых величин;

2) $\frac{\infty}{\infty}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно больших величин.

Согласно правилу Лопиталя в этих случаях можно заменять отношение величин отношением их производных, т. е. если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to a$ или $x \to \infty$, то

$$\lim \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)}.$$

Если последний предел существует или равен бесконечности, то он будет равен искомому пределу. Если же отношение производных также будет представлять случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно снова и снова применять правило Лопиталя, если это полезно, до получения результата.

Найти пределы:

306. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; 2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n}$, где $k > 0$, n — натуральное число;

6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, применяем затем правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16} = \lim \frac{4x^3}{3x^2+10x-6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$;

2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \lim \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} = \lim \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \lim \frac{a \sin ax}{b \sin bx} = \lim \frac{a^2 \cos ax}{b^2 \cos bx} = \frac{a^2}{b^2}$.

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

5) $$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = \lim \frac{ke^{kx}}{nx^{n-1}} = \lim \frac{k^2e^{kx}}{n(n-1)x^{n-2}} = \\ = \ldots = \lim \frac{k^n e^{kx}}{n!} = +\infty.$$

Здесь правило Лопиталя применено n раз.

6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim \frac{\sec^2 x}{\sec x \operatorname{tg} x} = \lim \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x} = \lim \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \ldots$

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно. Предел легко найти без этого правила путем элементарного преобразования:

$$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim \frac{\sin x \cos x}{\cos x} = \lim \sin x = 1.$$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно, ибо отношение производных $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ не имеет предела при $x\to\infty$.

Искомый предел можно найти элементарным путем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1, \text{ так как } |\sin x|\leqslant 1.$$

Это не противоречит теореме Лопиталя, ибо в ней утверждается лишь то, что *если отношение производных стремится к пределу, то к тому же пределу стремится и отношение функций, но не наоборот.*

307. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$.

308. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

309. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$.

310. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

311. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

312. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

313. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

314. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{\arcsin 5x}$.

б) *Случаи нахождения предела:*

3) $0\cdot\infty$ — когда функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую;

4) $\infty-\infty$ — когда функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

315. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x$;

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)$.

Решение. Установив, что имеет место случай $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$, преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применяем правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x=\lim\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=\lim\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}$;

$$2)\ \lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x=\lim\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}=-3\lim\sqrt[3]{x}=0;$$

$$3)\ \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)=\lim\frac{\sin\varphi-1}{\cos\varphi}=\lim\frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}=0;$$

$$4)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)=\lim\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\frac{-\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=-\lim\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=-\lim\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=-\frac{1}{2};$$

здесь правило Лопиталя применено дважды;

$$5)\ \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)=\lim\frac{t-\sin t}{t\sin t}=\lim\frac{1-\cos t}{\sin t+t\cos t}=$$

$$=\lim\frac{\sin t}{2\cos t-t\sin t}=0;$$

здесь правило Лопиталя применено дважды.

316. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\operatorname{tg}5x.$

317. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}-\operatorname{cosec}\frac{x}{3}\right).$

318. $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\sqrt{x}}.$

319. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln(x+e^x).$

320. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{5}{x^5-1}-\frac{7}{x^7-1}\right).$

321. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x.$

322. $\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\operatorname{ctg}\varphi-\frac{1}{\varphi}\right).$

323.* $\lim\limits_{t\to0}(\operatorname{cosec}^2 t-4\operatorname{cosec}^2 2t).$

в) Случаи нахождения предела:

5) 1^∞ — когда функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности;

6) ∞^0 — когда функция представляет степень, основание которой стремится к бесконечности, а показатель — к нулю;

7) 0^0 — когда функция представляет степень, основание и показатель которой стремятся к нулю.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $0\cdot\infty$ $\left(\text{а затем к случаю } \frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty}\right)$ следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

324. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}$.

Решение. 1) Сначала устанавливаем, что имеет место случай 1^{∞}. Затем логарифмируем функцию и ищем предел ее логарифма:

$$a = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\ln a = \ln \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \lim \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\ln a = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} : (-2 \operatorname{cosec}^2 2x)\right] = -1.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a = e^{-1}$.

2) Установив, что имеет место случай ∞^0, делаем преобразования:

$$a = \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}; \quad \ln a = \lim_{x \to +\infty} \ln (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\ln (\ln x)}{x};$$

получили случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x \ln x} : 1\right) = 0,$$

откуда следует, что искомый предел $a = e^0 = 1$.

3) Убедившись, что имеет место случай 0^0, преобразовываем:

$$a = \lim_{x \to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}; \quad \ln a = \lim_{x \to +0} \ln x^{\frac{6}{1+2\ln x}} = \lim \frac{6 \ln x}{1+2\ln x};$$

получили случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a = 6 \lim_{x \to +0} \left(\frac{1}{x} : \frac{2}{x}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Следовательно, искомый предел $a = e^3$.

4) Установив, что имеет место случай 1^∞, преобразовываем:

$$a=\lim_{x\to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}};\quad \ln a=\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{m}{x^2-1}}=\lim\frac{m\ln x}{x^2-1};$$

получили случай $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a=m\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}:2x\right)=\frac{m}{2}.$$

Следовательно,

$$a=e^{\frac{m}{2}}=\sqrt{e^m}.$$

325. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$. **326.** $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$.

327. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^x$. **328.** $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

329. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}$. **330.** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

331. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $e^{2x}-e^x\approx x$; 2) $x-\operatorname{arctg}x\approx\frac{x^3}{3}$;

3) $\arcsin x-x\approx\frac{x^3}{6}$; 4) $4x-\ln(4x+1)\approx 8x^2$;

5) $\sqrt[n]{1+x}-1\approx\frac{x}{n}$; 6) $e^{4x}-4x-1\approx 8x^2$.

§ 3. Возрастание и убывание функции

При изучении поведения функции в зависимости от изменения независимой переменной обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. что каждое следующее ее значение больше предыдущего.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают, то и функция называется возрастающей, а если они убывают, то и функция называется убывающей.

Некоторые функции во всей своей области определения изменяются монотонно — только возрастают или только убывают (например 2^x, $\operatorname{arcctg}x$).

Многие функции изменяются не монотонно. В одних интервалах изменения независимой переменной они возрастают, а в других интервалах убывают (например, $\sin x$, $\cos x$).

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y'>0$, *то функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает в этом интервале.**

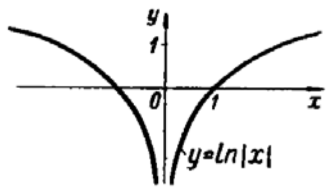
332. Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций:

1) $p=\ln(1-x^2)$; 2) $z=x(1+2\sqrt{x})$; 3)* $y=\ln|x|$.

Решение. 1) Производная $p'=-\frac{2x}{1-x^2}$ положительна при $-1<x<0$ и $x>1$ и отрицательна при $0<x<1$ и при $x<-1$. Учитывая, что область определения функции p есть интервал $-1<x<1$, заключаем: в интервале $(-1; 0)$ функция p возрастает, а в интервале $(0; 1)$ она убывает.

2) Функция z определена в полуоткрытом интервале $0\leqslant x<+\infty$; ее производная $z'=1+3\sqrt{x}>0$ — во всем этом интервале. Поэтому функция z монотонная, она возрастает во всей своей области определения.

3)* Функция y определена на всей числовой оси, исключая точку $x=0$; ее производная $y'=(\ln|x|)'=\frac{|x|'}{|x|}=\pm\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$; $y'>0$ при $x>0$; $y'<0$ при $x<0$. Отсюда следует, что функция y убывает в интервале $(-\infty; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. График этой четной функции приведен на черт. 43.



Черт. 43

333. Исследовать на возрастание и убывание следующие функции:

1) $y=x^3+3x^2+3x$; 2) $y=x^3-3x+5$; 3) $y=e^{kx}$;
4) $y=\sqrt{(x^2-9)^3}$; 5) $y=\cos x-x$; 6)* $y=x|x|$.

§ 4. Максимум и минимум (экстремум) функции

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) *только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна нулю или не существует*** Такие точки называются **критическими**. В соответствующих точках графика функции касательная параллельна

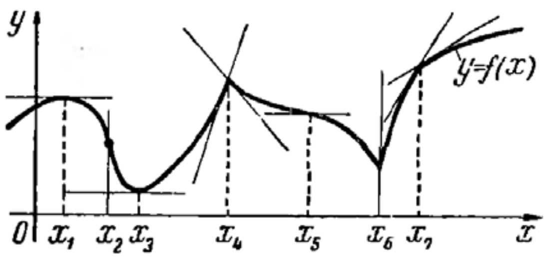
* В интервале возрастания (убывания) функции могут быть отдельные точки, в которых $y'=0$.

** Это необходимые условия экстремума, но недостаточные; они могут выполняться и в точках, где нет экстремума, например в точках x_2, x_5, x_7, черт. 44.

оси абсцисс ($y'=0$), или оси ординат ($y'=\infty$) или нет определенной касательной (например, как в угловой точке).

На графике функции (черт. 44) отчетливо видно, что *точками экстремума являются все точки, где функция меняет свое поведение и непрерывна.*

Точки x_1 и x_4, при переходе через которые аргумента x возрастание функции сменяется на убывание, являются точками максимума, а точки x_3 и x_6, при переходе через которые аргумента x убывание функции сменяется на возрастание, являются точками минимума.



Черт. 44

Поскольку поведение функции характеризуется знаком ее производной, то *функция будет иметь экстремум в тех точках, где ее производная меняет свой знак, а сама функция непрерывна**.

Отсюда вытекает следующее правило исследования функции на экстремум.

Чтобы найти точки экстремума функции $y=f(x)$, в которых она непрерывна, нужно:

I. Найти производную y' и критические точки, в которых $y'=0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции.

IIа. Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки.

Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

1) y' меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 есть точка максимума;

2) y' меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 есть точка минимума;

3) y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

Иногда проще исследовать критические точки, где $y'=0$, по знаку второй производной, — вместо правила IIа можно пользоваться следующим правилом:

IIб. Найти вторую производную y'' и определить ее знак в каждой критической точке.

---

* Это достаточные условия экстремума (если они выполнены в какой-либо точке, то она обязательно будет точкой экстремума).

Если в критической точке x_0, где $y' = 0$:

1) $y'' > 0$, то x_0 есть точка минимума;

2) $y'' < 0$, то x_0 есть точка максимума;

3) $y'' = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым. Такую критическую точку, как и всякую другую, можно исследовать по правилу IIa.

Далее следует найти экстремумы функции, т. е. вычислить значения функции в найденных точках экстремума.

При исследовании на экстремум некоторых типов функций возможны существенные упрощения. Например, если функция представляет дробь с постоянным числителем или корень с целым положительным показателем.

Характер упрощений, возможных при исследовании на экстремум указанных функций, разъясняется в решении задачи 335.

334. Исследовать на максимум и минимум функции:

1) $y = (1 - x^2)^3$; 2) $u = x\sqrt{1 - x^2}$;

3) $v = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$; 4) $p = x^3 - 12x$;

5) $q = x^2 + \sqrt{x^5}$; 6) $r = \sin^2 x$;

7)* $s = 1 + |\operatorname{arctg}(x - 1)|$.

Решение. 1) Согласно правилу исследования функции на экстремум:

I. Находим производную: $y' = 3(1 - x^2)^2(-2x) = -6x(1 - x^2)^2$ и критические точки. Полагая $y' = 0$, получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Функция y определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому точки x_1, x_2 и x_3 являются критическими.

Других критических точек нет, так как производная y' существует всюду.

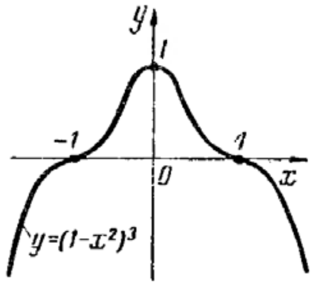
II. Исследуем критические точки, определяя знак y' слева и справа от каждой этой точки (по правилу IIa). Для сокращения вычислений и для наглядности это исследование удобно записать в виде следующей таблицы:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
y	возр.	нет экстр.	возр.	max	убыв.	нет экстр.	убыв.

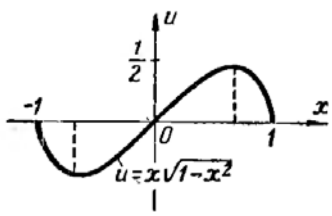
В первой строке помещены все критические точки в порядке расположения их на числовой оси; между ними вставлены промежуточные точки, расположенные слева и справа от критических точек. Во второй строке помещены знаки производной в указанных промежуточных точках, т. е. знаки $y'(-2), y'\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $y'(2)$. В третьей строке — заключение о поведении функции. Исследуемая функция имеет одну точку экстремума — точку максимума $x=0$, где $y_{max}=y(0)=1$. До этой точки в интервале $(-\infty, 0)$ функция неизменно возрастает, а после нее в интервале $(0; +\infty)$ она неизменно убывает (черт. 45).

2) I. Ищем критические точки. Производная $u'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ обращается в нуль при $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и не существует (разрывна) при $x_{3,4}=\pm 1$. Однако критическими точками являются только точки x_1 и x_2: они лежат внутри области определения функции u,



Черт. 45



Черт. 46

которая представляет отрезок $[-1; 1]$, и в них эта функция непрерывна. Точки x_3 и x_4 не являются критическими, так как они лежат не внутри области определения функции u, а на ее границах.

II. Исследуем критические точки по знаку производной u' в соседних с ними точках. Составим следующую таблицу:

x	$-0{,}9$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0{,}9$
u'	$-$	0	$+$	0	$-$
u	убыв.	min	возр.	max	убыв.

Согласно этой таблице функция u имеет две точки экстремума: точку минимума $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $u_{min}=u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$, и точку максимума $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $u_{max}=u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$ (черт. 46).

3). I. Находим производную

$$v'=2\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

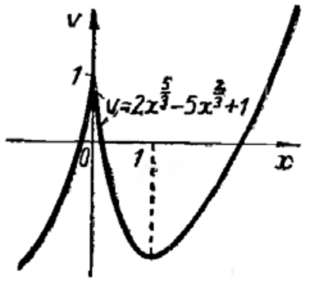
и критические точки: $v' = 0$ при $x = 1$; v' не существует (равна ∞) при $x = 0$. Функция v определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому обе найденные точки являются критическими.

II. Исследуем критические точки по знаку производной v' в соседних с ними точках. Составим таблицу:

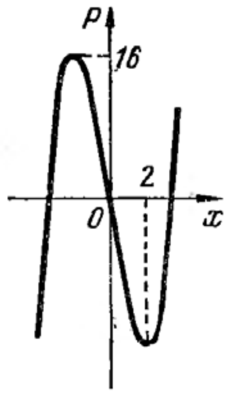
x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
v'	$+$	∞	$-$	0	$+$
v	возр.	max	убыв.	min	возр.

Из таблицы следует, что функция v имеет две точки экстремума: точку максимума $x = 0$, где $v_{\max} = v(0) = 1$, и точку минимума $x = 1$, где $v_{\min} = v(1) = -2$ (черт. 47).

4) I. Найдем критические точки. Производная $p' = 3x^2 - 12$ равна нулю в точках $x = \pm 2$. Эти точки являются критическими, так как функция p определена и непрерывна на всей числовой оси. Производная p' существует всюду. Поэтому других критических точек функция p не имеет.



Черт. 47



Черт. 48

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной p'' в самих этих точках (по правилу II б): $p'' = 6x$; $p''(-2) = -12 < 0$, следовательно, критическая точка $x = -2$ есть точка максимума, где $p_{\max} = p(-2) = 16$; $p''(2) = 12 > 0$, поэтому критическая точка $x = 2$ есть точка минимума, где $p_{\min} = p(2) = -16$ (черт. 48).

5) I. Ищем производную $q' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 2x$ и критические точки: q' обращается в нуль в точке $x = 0$. В этой точке функция q непрерывна, но она не лежит внутри области определения функции q, которая представляет интервал $0 \leqslant x < +\infty$. Поэтому точка $x = 0$ не является критической; q' не обращается в нуль в других точках и существует во всей области определения

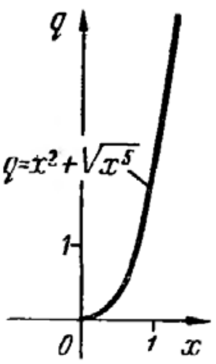
функции. Поэтому функция q, как не имеющая ни одной критической точки, не имеет экстремума. Во всей своей области определения она неизменно (монотонно) возрастает, ибо $q' \geqslant 0$ во всей этой области (черт. 49).

Если не учесть, что точка $x = 0$ не лежит внутри области определения функции q, то, применяя правило IIб, $q'' = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} + 2$, $q''(0) = 2 > 0$, приходим к ошибочному заключению, что в этой точке функция q имеет минимум.

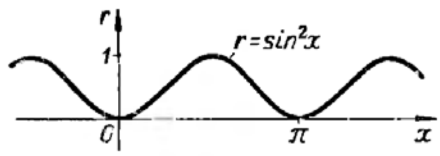
6) I. Находим критические точки: $r' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$; $r' = 0$ при $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Все точки x_k являются критическими, так как функция r определена и непрерывна на всей числовой оси; r' существует всюду, поэтому других критических точек нет.

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной в самих этих точках: $r'' = 2\cos 2x$; $r''(x_k) = 2\cos k\pi$. При четном k, $r''(x_k) = 2 > 0$, точки x_k являются точками минимума, где $r_{\min} = 0$; при нечетном k, $r''(x_k) = -2 < 0$, точки x_k являются точками максимума, где $r_{\max} = 1$ (черт. 50).



Черт. 49



Черт. 50

Здесь оказалось, что у функции r максимумы и минимумы строго чередуются. То же будет и у любой непрерывной функции, имеющей несколько экстремумов.

7)* I. Находим критические точки: $s' = \pm \frac{1}{1 + (x-1)^2}$, где знак плюс соответствует интервалу $1 < x < +\infty$, а минус — интервалу $-\infty < x < 1$. Производная s' нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x = 1$. Эта точка является критической, так как функция s определена и непрерывна на всей числовой оси.

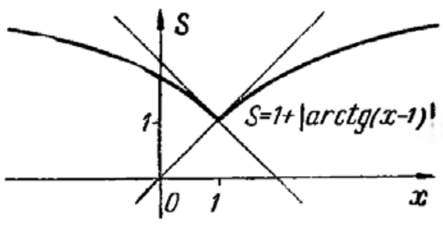
x	0	1	2
s'	—	не сущ.	+
s	убыв.	min	возр.

II. Исследуем критическую точку $x = 1$ по знаку производной s' слева и справа от этой точки. Составив таблицу, заключаем, что $x = 1$ есть точка минимума, где $s_{\min} = s(1) = 1$. На графике функции (черт. 51) это будет угловая точка с двумя различными односторонними касательными, угловые коэффициенты которых равны -1 и $+1$.

335*. Найти экстремумы функций:

1) $y=\dfrac{30}{12-36x^2+20x^3-3x^4}$;

2) $u=\sqrt{e^{x^2}-1}$.



Черт. 51

1) *Дробь с постоянным положительным числителем имеет экстремумы в тех же точках, что и ее знаменатель, но они будут противоположного смысла: там, где знаменатель имеет максимум, эта дробь имеет минимум, и наоборот.* (Из этого общего положения исключается случай, когда экстремум знаменателя равен нулю.)

Используя это свойство, найдем точки экстремума знаменателя, т. е. вспомогательной функции $y_1=12-36x^2+20x^3-3x^4$.

I. Найдем критические точки. $y_1'=-72x+60x^2-12x^3$; $y_1'=0$ в точках $x=0$, $x=2$ и $x=3$. Все они являются критическими, поскольку функция y_1 определена и непрерывна на всей числовой оси. Других критических точек нет, ибо производная y_1' всюду существует.

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной в самих этих точках (по правилу IIб); $y_1''=-72+120x-36x^2$; $y_1''(0)=-72<0$, следовательно, критическая точка $x=0$ есть точка максимума; $y_1''(2)>0$, следовательно, точка $x=2$ есть точка минимума; $y_1''(3)<0$, следовательно, точка $x=3$ есть точка максимума функции y_1.

Для заданной функции y найденные точки экстремума функции y_1 будут иметь противоположный смысл: для функции y точка $x=0$ есть точка минимума, где $y_{\min}=y(0)=2{,}5$; $x=2$ есть точка максимума, где $y_{\max}=y(2)=-1{,}5$; $x=3$ есть точка минимума, где $y_{\min}=y(3)=-2$.

2) *Точки экстремума сложной функции $y=\sqrt[n]{\varphi(x)}$, при целом положительном n, совпадают с точками экстремума подкоренной функции $\varphi(x)$, лежащими внутри области определения функции y.*

Воспользуемся этим свойством и найдем точки экстремума подкоренной функции $u_1=e^{x^2}-1$.

I. Ищем критические точки: $u_1'=2xe^{x^2}$, $u_1'=0$ в точке $x=0$, которая является критической, так как функция u_1 определена и непрерывна на всей числовой оси. Производная u_1' существует всюду, поэтому других критических точек функция u_1 не имеет.

II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку второй производной в этой точке. $u_1'' = 2e^{x^2}(1+2x^2)$; $u_1''(0)=2>0$, поэтому точка $x=0$ есть точка минимума функции u_1.

Согласно указанному здесь свойству точка $x=0$, как лежащая внутри области определения функции u, будет также точкой минимума и для функции u. При $x=0$, $u_{\min}=0$.

Без использования указанного свойства решение этой задачи было бы затруднительно. (Найденная точка является угловой точкой графика функции u, где u' не существует.)

Исследовать на экстремум следующие функции:

336. $y=x^2(x-6)$.

337. $y=3-2x^2-x^4$.

338. $y=x^3-3x^2+3x$.

339. $y=\frac{4x}{x^2+4}$.

340. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$.

341. $y=3-2\sqrt[3]{x^2}$.

342*. $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

343*. $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$.

344. $y=e^{-x}+e^{2x}$.

345. $y=3x+\operatorname{tg} x$.

346. $y=x^2e^{-x}$.

347. $y=\frac{x}{\ln x}$.

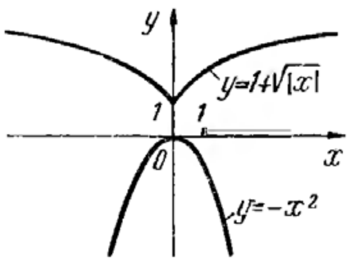
348. $y=\sin x+\cos x$.

349*. $y=|x^3-3x^2|$.

§ 5. Наибольшее и наименьшее значения функции

Наибольшим значением функции называется самое большее, а наименьшим значением — самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только о д н о наибольшее значение и только о д н о наименьшее значение или может не иметь их совсем. Например, во всей своей области определения функция $\sin x$ имеет наибольшее значение, равное единице, и наименьшее значение, равное минус единице; функции $\operatorname{tg} x$ и x^3 не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений; функция $-x^2$ имеет наибольшее значение, равное нулю, но не имеет наименьшего значения; функция $1+\sqrt{|x|}$ имеет наименьшее значение, равное единице, но не имеет наибольшего значения (черт. 52).



Черт. 52

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

1) *Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция $f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на границах этого отрезка.*

Отсюда вытекает практическое правило для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна:

I. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

II. Вычислить значения функций на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$.

III. Сравнить полученные значения функции: самое большее из них будет наибольшим значением, а самое меньшее — наименьшим значением функции на всем данном отрезке.

350. Найти наибольшее и наименьшее значения каждой из следующих функций:

1) $u = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке $[-4; 4]$;

2) $p = x^2 \ln x$ на отрезке $[1, e]$;

3) $r = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

4) $y = \operatorname{arc\,tg} x^2$.

Решение. Согласно практическому правилу:

1) I. Найдем критические точки функции u, лежащие внутри отрезка $[-4; 4]$, и вычислим ее значения в этих точках: $u' = 3x^2 - 6x - 9$; $u' = 0$ в точках $x = -1$ и $x = 3$. Эти точки лежат внутри отрезка $[-4; 4]$ и являются критическими. Других критических точек нет, так как производная u' существует всюду. Значения функции u в критических точках: $u(-1) = 40$; $u(3) = 8$.

II. Вычислим значения функции на концах отрезка $[-4; 4]$: $u(-4) = -41$; $u(4) = 15$.

III. Сравнивая все вычисленные значения функции во внутренних критических точках и на концах отрезка, заключаем: наибольшее значение функции u на отрезке $[-4; 4]$ равно 40 и достигается ею во внутренней критической точке $x = -1$, а ее наименьшее значение равно -41 и достигается на левой границе отрезка $x = -4$ (черт. 53).

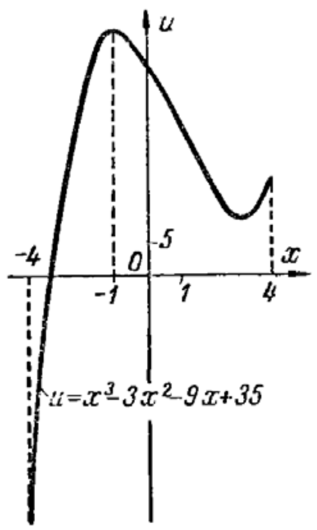
2) I. Ищем критические точки: $p' = x(1 + 2\ln x)$; $p' = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$. Точка x_1 лежит вне области определения данной функции $0 < x < +\infty$; точка x_2 лежит вне заданного

отрезка [1; e]. Производная p' существует во всем интервале определения функции p. Поэтому внутри заданного отрезка нет критических точек.

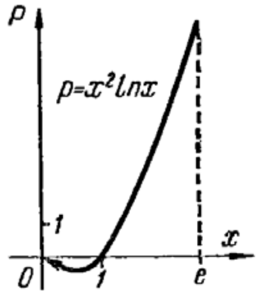
II. Вычислим значения функции p на концах отрезка: $p(1) = 0$; $p(e) = e^2$.

III. Поскольку внутри отрезка [1, e] нет критических точек, то функция изменяется на этом отрезке монотонно и ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке достигаются на концах отрезка: $p_{нм} = p(1) = 0$, $p_{нб} = p(e) = e^2$ (черт. 54).

3) I. Найдем критические точки: $r' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2 \cdot 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$; $r' = 0$ при $\cos\frac{3x}{2} = 0$ и $\cos\frac{x}{2} = 0$; корни первого уравнения $x_k = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, корни второго уравнения $x_k = \pi(2k+1)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Черт. 53



Черт. 54

Из них внутри заданного отрезка $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ лежат критические точки $x_{\text{I}} = \frac{\pi}{3}$ и $x_{\text{II}} = \pi$. Производная r' существует всюду, поэтому других критических точек функция r не имеет. Значения функции в найденных внутренних критических точках x_{I} и x_{II}:

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad r(\pi) = 0.$$

II. Вычислим значения функции на концах отрезка: $r(0) = 0$; $r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

III. Сравнение вычисленных значений функции во внутренних критических точках и на концах отрезка показывает, что ее наибольшее значение на этом отрезке $r_{нб} = r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а наименьшее значение $r_{нм} = r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

4) Здесь изменение аргумента x не ограничено каким-либо отрезком, а функция определена на всей числовой оси. Поэтому следует рассмотреть все значения функции, принимаемые ею при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$.

I. Найдем критические точки: $y' = \frac{2x}{1+x^4}$; $y'=0$ в точке $x=0$. Эта точка является критической, так как функция всюду определена и непрерывна. Других критических точек нет, так как производная y' существует всюду.

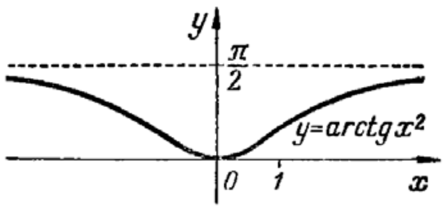
II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку первой производной слева и справа от этой точки (см. табл.). Это исследование показывает, что точка $x=0$ есть точка минимума, где $y_{\min}=0$.

III. Основываясь на указанном выше свойстве 1 непрерывных функций, заключаем: функция y, как имеющая единственный экстремум — минимум и не имеющая точек разрыва, имеет наименьшее значение, совпадающее с ее минимумом,

$$y_{нм} = y_{\min} = 0,$$

но не имеет наибольшего значения, хотя она не растет неограниченно. При $x \to \pm\infty$ она асимптотически приближается к значению $\frac{\pi}{2}$ (черт. 55).

x	-1	0	1
y'	$-$	0	$+$
y	убыв	$\widetilde{\min}$	возр



Черт. 55

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

351. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке $[0;\ 3]$.

352. $u = x - 2\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$.

353. $v = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

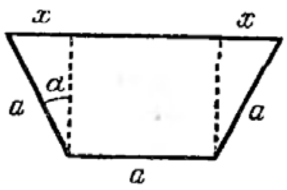
354. $y = e^{-x^2}$. **355.** $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

§ 6. Задачи о наибольших или наименьших значениях величин

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значение величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.

Широкая распространенность и большое значение этих задач послужили одним из главных поводов к развитию математического анализа.

Для решения такой задачи следует, исходя из ее условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее или наименьшее значение полученной функции. При этом интервал изменения независимой переменной, который может быть конечным или бесконечным, также определяется из условия задачи.



Черт. 56

356. Из трех одинаковых тонких досок изготовить желоб с наибольшим поперечным сечением.

Решение. Поперечное сечение желоба будет представлять равнобочную трапецию (черт. 56), площадь которой s зависит от наклона боковых сторон. Выберем за независимую переменную угол α между боковой стороной и высотой трапеции и выразим через эту переменную исследуемую площадь s:

$$x = a\sin\alpha,\ \ h = a\cos\alpha \ \text{ и } \ s = h(a + x)$$

или

$$s = a^2(1 + \sin\alpha)\cos\alpha,$$

где по смыслу задачи α может изменяться на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Далее найдем наибольшее значение функции $s(\alpha)$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем критические точки функции s, лежащие внутри этого отрезка:

$$s' = a^2[\cos^2\alpha - (1 + \sin\alpha)\sin\alpha] = a^2(1 - \sin\alpha - 2\sin^2\alpha).$$

Приравнивая производную s' нулю, получим уравнение:

$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0,$$

решая которое, как квадратное, найдем

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \ \text{ и } \ \sin\alpha = -1.$$

Из всех точек α, определяемых этими двумя уравнениями, внутри отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ лежит только одна точка $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Эта точка является критической, в ней выполняются все необходимые для этого условия. Производная s' существует всюду, поэтому других критических точек нет.

Вычислим значения функции s в найденной внутренней критической точке и на концах отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1{,}28a^2;\quad s(0) = a^2;\quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Сравнивая эти значения, заключаем: наибольшее значение функции s на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ достигается во внутренней точке $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Таким образом, желоб из трех одинаковых досок будет иметь наибольшее поперечное сечение, когда это сечение представляет равнобочную трапецию, верхнее основание которой вдвое больше нижнего.

357. Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объемом v и с наименьшей полной поверхностью.

Решение. Обозначив радиус и высоту цилиндра через r и h, а его полную поверхность через s, получим

$$s = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Здесь переменные r и h не являются независимыми, а связаны между собой равенством $v = \pi r^2 h$, так как согласно условию цилиндр должен иметь заданный объем v. Определяя из этого равенства h и подставляя в выражение полной поверхности, получим

$$s = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right),$$

где r изменяется в интервале $0 < r < +\infty$.

Выразив таким образом исследуемую полную поверхность цилиндра s через одну переменную r, найдем теперь ее наименьшее значение при изменении r в интервале $(0;\ +\infty)$.

Найдем критические точки; $s' = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right) = 2\frac{2\pi r^3 - v}{r^2}$; $s' = 0$ в единственной точке $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, которая лежит в рассматриваемом интервале. Эта точка является критической, так как в ней выполняются все необходимые для этого условия. Других критических точек в интервале $(0;\ +\infty)$ функция s не имеет, так как ее производная s' существует во всем этом интервале.

Исследуем найденную критическую точку по знаку второй производной в этой точке:

$$s'' = 4\left(\pi + \frac{v}{r^3}\right);\ s''\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0,$$

откуда следует, что критическая точка $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ есть точка минимума.

Функция $s(r)$ непрерывна в интервале $(0;\ +\infty)$. Поэтому согласно свойству 1 непрерывных функций единственный минимум функции s в интервале $(0;\ +\infty)$ совпадает с ее наименьшим значением в этом интервале.

При $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ получим $h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r$.

Следовательно, цилиндрическая закрытая цистерна, имеющая любой заданный объем, будет иметь наименьшую полную поверхность, когда ее осевое сечение представляет квадрат.

358. Из куска жести, форма и размеры которого (в *дм*) показаны на черт. 57, вырезать прямоугольник с наибольшей площадью.

Решение. Обозначим стороны вырезаемого прямоугольника через x и y. Тогда его площадь $S = xy$. Выразим y через x, исходя из подобия треугольников BDC и AEC:

$$BD = 11 - x; \quad DC = y - 6; \quad AE = 8; \quad EC = 4.$$

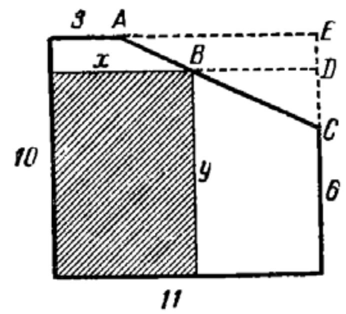
Подставляя в пропорцию $\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC}$, получим $\frac{11-x}{y-6} = \frac{8}{4}$, откуда $y = \frac{23-x}{2}$. Заменяя y в выражении площади, имеем

$$S = \frac{1}{2}(23x - x^2),$$

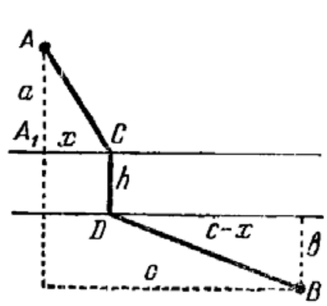
где x согласно условию задачи изменяется на отрезке $[3;\ 11]$.

Ищем далее наибольшее значение функции $S(x)$ на указанном отрезке. $S' = \frac{1}{2}(23 - 2x)$; $S' = 0$ в точке $x = \frac{23}{2}$, но эта точка лежит вне рассматриваемого отрезка; S' существует всюду, поэтому на отрезке $[3;\ 11]$ нет ни одной критической точки. При изменении x от 3 до 11 производная $S' > 0$, а функция S неизменно возрастает и достигает наибольшего значения на правом конце отрезка $x = 11$.

Итак, прямоугольник, вырезанный из данного куска жести, будет иметь наибольшую площадь, когда точка B совпадает с точкой C; $S_{нб} = S(11) = 66$ *дм²*.



Черт. 57



Черт. 58

359. Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

Решение. Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов (черт. 58). Расстояния a, b, c и h

согласно условию задачи являются постоянными. Если мост построен в указанном в плане месте, то длина дороги между пунктами A и B

$$l = AC + h + DB.$$

Выбрав за независимую переменную x расстояние A_1C, получим

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad DB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

и

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (x-c)^2},$$

где x изменяется на отрезке $[0; c]$, что очевидно.

Теперь найдем наименьшее значение функции $l(x)$ на отрезке $[0; c]$.

Найдем производную l' и критические точки, лежащие внутри отрезка $[0; c]$:

$$l' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{b^2+(x-c)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2+(x-c)^2} + (x-c)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{(a^2+x^2)[b^2+(x-c^2)]}};$$

$$l' = 0, \text{ когда } x\sqrt{b^2+(x-c)^2} + (x-c)\sqrt{a^2+x^2} = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$x^2[b^2 + (x-c)^2] = (x-c)^2(a^2+x^2); \quad b^2x^2 = a^2(x-c)^2;$$

$$x_1 = \frac{ac}{a-b} \text{ и } x_2 = \frac{ac}{a+b}.$$

Точка x_1 лежит вне отрезка $0 \leqslant x \leqslant c$: при $a > b$, $x_1 > c$; при $a < b$, $x_1 < 0$. Точка x_2 лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях a, b и c, так как при этом $x_2 > 0$ и $\frac{a}{a+b} < 1$, т. е. $x_2 < c$.

x	0	x_2	c
l'	—	0	+
l	убыв	min	возр

Производная l' существует всюду, поэтому функция l других критических точек не имеет.

Внутри отрезка $[0; c]$ функция l имеет одну критическую точку x_2. Исследуя эту критическую точку по знаку производной l' слева и справа от нее, как это показано в таблице, убеждаемся, что точка x_2 есть точка минимума.

Согласно свойству 1 непрерывных функций, в этой единственной на отрезке $[0; c]$ точке минимума непрерывная функция l имеет и наименьшее значение из всех ее значений на этом отрезке.

Следовательно, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние $A_1C = \frac{ac}{a+b}$.

360. Из куска проволоки длиной l согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей.

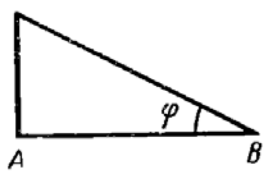
361. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 $м^2$, а длина забора была наименьшая?

362. В прямоугольном листе картона длиной 48 *см* и шириной 30 *см* вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?

363. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 *м*. (Освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света.)

364. Из данного круга вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус с наибольшим объемом.

365. Завод A расположен на расстоянии a *км* от железной дороги, идущей в город B, и на расстоянии b *км* от города B. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в k раз дороже, чем по железной дороге?



Черт. 59

366. Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершенного конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте и должна иметь заданный объем. Показать, что количество материала для постройки цистерны потребуется наименьшее, если угол при вершине осевого сечения конуса будет равен $2 \arccos \frac{2}{3} \approx 96°$.

367. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобочная трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими, т. е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?

368*. От канала шириной 4 *м* отходит под прямым углом другой канал шириной 2 *м*. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен)?

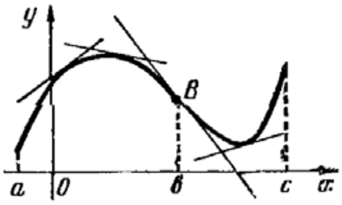
369*. Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями v_1 и v_2. В какой момент расстояние между движущимися точками будет наименьшее, если в начальный момент они занимали положения $(-3;\ 0)$ и $(0;\ 5)$?

370*. Шар свободно скатывается по наклонной плоскости (черт. 59). Если основание AB остается неизменным, то каков должен быть угол наклона φ, чтобы время скатывания шара было наименьшее?

§ 7. Направление выпуклости кривой и точки перегиба

Если в некотором интервале кривая расположена ниже любой своей касательной, то она называется выпуклой вверх, а если она расположена выше любой своей касательной, то называется выпуклой вниз в этом интервале.

Точкой перегиба называется точка на кривой, где меняется направление ее выпуклости.



Черт. 60

На черт. 60 в интервале (a, b) кривая выпукла вверх, в интервале (b, c) она выпукла вниз, а точка B есть точка перегиба.

Направление выпуклости кривой $y=f(x)$ характеризуется знаком второй производной y'': если в некотором интервале $y''>0$, то кривая выпукла вниз, а если $y''<0$, то кривая выпукла вверх в этом интервале.

Абсциссы точек перегиба кривой $y=f(x)$, или графика функции $f(x)$, являются точками, в которых меняется поведение производной y'. Поэтому их можно найти по следующему правилу:

I. Найти y'' и точки x, в которых $y''=0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области ее расположения.

II. Определить знак y'' слева и справа от каждой из этих точек. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от нее y'' имеет разные знаки.

Интервалы, где кривая выпукла вверх и где она выпукла вниз, определяются из условия, что их границами могут быть только абсциссы точек перегиба, точки разрыва и граничные точки области расположения кривой.

371. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривых:

1) $y=3x^5-5x^4+4$; 2) $y=3-\sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $y=4\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$; 4) $y=\frac{1}{(x+1)^3}$;

5)* $y=2-|x^5-1|$.

Решение. Находим точки перегиба кривой, руководствуясь указанным правилом.

1) I. Ищем точки x, в которых $y''=0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области расположения кривой:

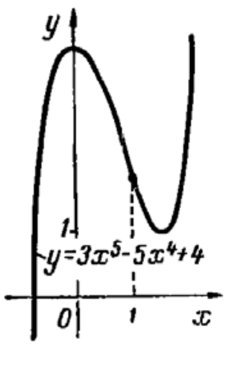
$$y'=15x^4-20x^3;\quad y''=60x^3-60x^2=60x^2(x-1).$$

$y''=0$ в точках $x=0$ и $x=1$. Эти точки являются искомыми, так как область расположения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек x, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду.

II. Исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждой из них. Запишем это исследование в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	10
y''	$-$	0	$-$	0	$+$
y	в. вверх	нет перегиба	в. вверх	перегиб	в. вниз

Из таблицы следует, что $x=1$ есть абсцисса точки перегиба кривой: $y(1)=2$. Поскольку эта кривая непрерывная, то во всем интервале $(-\infty, 1)$ она выпукла вверх, а во всем интервале $(1, +\infty)$ — выпукла вниз (черт. 61).



Черт. 61

2) I. Находим вторую производную:

$$y'=-\frac{7}{5}(x+2)^{\frac{2}{5}};$$

$$y''=-\frac{14}{25}(x+2)^{-\frac{3}{5}}=-\frac{14}{25\sqrt[5]{(x+2)^3}}.$$

Здесь y'' нигде не обращается в нуль, а при $x=-2$ она не существует.

При $x=-2$ кривая может иметь перегиб, так как ее областью расположения и областью непрерывности является вся ось абсцисс.

II. Исследуем значение $x=-2$ по знаку y'' при значениях x, меньших и больших его. Согласно таблице $x=-2$ есть абсцисса точки перегиба.

x	-10	-2	0
y''	$+$	∞	$-$
y	в. вниз	перегиб	в. вверх

Слева от нее во всем интервале $(-\infty, -2)$ данная непрерывная кривая выпукла вниз, а справа, в интервале $(-2, +\infty)$, она выпукла вверх; $y(-2)=3$.

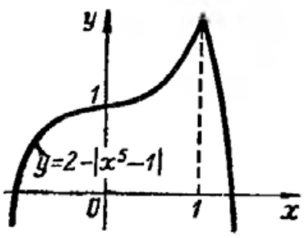
3) I. $y' = 10(x-1)^{\frac{3}{2}} + 30(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

$$y'' = 15(x-1)^{\frac{1}{2}} + 15(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}.$$

Здесь y'' обращается в нуль при $x=0$ и не существует (равна $+\infty$) при $x=1$. Но ни одно из этих значений x не может быть абсциссой точки перегиба, так как областью расположения кривой является интервал $1 \leqslant x < +\infty$; $x=0$ лежит вне этой области, а $x=1$ есть граница этой области, т. е. лежит не внутри ее. Кривая не имеет точек перегиба; во всей области своего расположения она выпукла вниз, так как во всей этой области $y'' > 0$.

4) I. $y' = -\frac{3}{(x+1)^4}$; $y'' = \frac{12}{(x+1)^5}$.

Здесь y'' не может обратиться в нуль, а при $x=-1$ она не существует. Однако $x=-1$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как в этой точке кривая разрывна. При $x<-1$, $y''<0$; при $x>-1$, $y''>0$. Поэтому в интервале $(-\infty, -1)$ кривая выпукла вверх, а в интервале $(-1, +\infty)$ она выпукла вниз. *Не имея точек перегиба, эта кривая меняет направление выпуклости при переходе x через точку разрыва $x=-1$.*



Черт. 62

5)* I. $y' = \pm 5x^4$; $y'' = \pm 20x^3$, где знак плюс соответствует значениям x из интервала $(-\infty, 1)$, в котором $x^5-1<0$, а знак минус соответствует значениям x из интервала $(1, +\infty)$, в котором $x^5-1>0$. y'' не существует при $x=1$; $y''=0$ при $x=0$. Эти значения x могут быть абсциссами точек перегиба данной кривой, так как ее областью расположения и областью непрерывности является вся ось абсцисс.

x	-10	0	$\frac{1}{2}$	1	10
y''	$-$	0	$+$	не сущ.	$-$
y	в. вверх	перегиб	в. вниз	перегиб	в. вверх

II. Определяя знак y'' слева и справа от точек $x=0$ и $x=1$, заключаем, что $x=0$ и $x=1$ — абсциссы точек перегиба. Левее точки $x=0$ кривая выпукла вверх, между точками $x=0$ и $x=1$ она выпукла вниз и правее точки $x=1$ выпукла вверх (черт. 62). Ординаты точек перегиба определяются из уравнения кривой по известным их абсциссам: $y(0)=1$; $y(1)=2$. Здесь точка перегиба (1; 2) совпадает с угловой точкой кривой, в которой она имеет максимальное значение ординаты и две различные односторонние касательные $y-2=\pm 5(x-1)$.

Найти точки перегиба и исследовать направление выпуклости кривых:

372. $y=x^3-3x^2-9x+9$. **373.** $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

374. $y=1-\ln(x^2-4)$. **375.** $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

376. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$. **377.** $y=\frac{1}{x^2-4}$.

378*. $y=\arcsin\frac{1}{x}$. **379*.** $y=1-|x^2-2|$.

§ 8. Асимптоты

Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Кривая может приближаться к своей асимптоте теми же способами, как и переменная к своему пределу: оставаясь с одной стороны от асимптоты, как, например, в задаче 380 (1) или с разных сторон, бесчисленное множество раз пересекая асимптоту и переходя с одной ее стороны на другую, как, например, в задаче 380 (3).

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

а) если при $x=a$ кривая $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. если при $x\to a-0$ или при $x\to a+0$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x=a$ является ее вертикальной асимптотой;

б) невертикальные асимптоты кривой $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения вида $y=kx+b$, где параметры k и b определяются формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ и } b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$$

при одинаковом в обеих формулах поведении x, т. е. в обеих формулах $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

380. Найти асимптоты кривых:

$$1)\ y=\frac{x^2-6x+3}{x-3};\ 2)\ y=xe^x;\ 3)\ y=x+\frac{\sin x}{x};\ 4)\ y=x\operatorname{arcctg}x;$$

$$5)\ y=\ln(4-x^2);\quad 6)^*\ y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}.$$

Решение. 1) (а) При $x=3$ данная кривая имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x=3$ есть ее вертикальная асимптота;

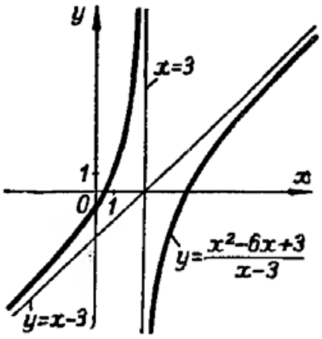
(б) далее ищем невертикальные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x}=\lim\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1;$$

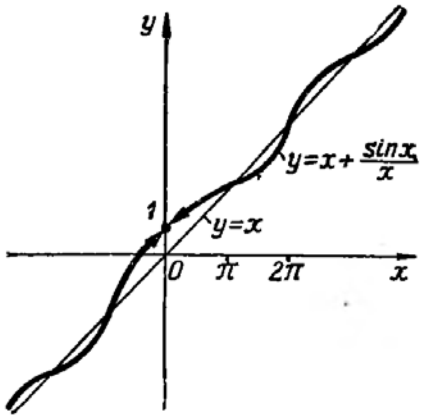
$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=$$

$$=\lim\frac{3-3x}{x-3}=\lim\frac{\frac{3}{x}-3}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение невертикальной асимптоты: $y=x-3$. Других невертикальных асимптот кривая не имеет, так как при



Черт. 63



Черт. 64

$x\to-\infty$ значения k и b будут те же самые. Кривая (гипербола) изображена на черт. 63.

2) (а) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна;

(б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim e^x=+\infty$,

т. е. при $x\to+\infty$ угловой коэффициент асимптоты не существует, вследствие чего при $x\to+\infty$ кривая не имеет асимптоты;

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim e^x=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim xe^x=\lim\frac{x}{e^{-x}}=\lim\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

(Здесь применено правило Лопиталя.)

Следовательно, при $x\to-\infty$ кривая имеет невертикальную асимптоту $y=0$ (ось Ox).

3) (а) Кривая $y = x + \frac{\sin x}{x}$ не имеет бесконечных разрывов, поэтому не имеет и вертикальных асимптот;

(б) $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$, так как $|\sin x| \leqslant 1$;

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim \frac{\sin x}{x} = 0.$$

При $x \to -\infty$ параметры асимптоты имеют те же значения.

Следовательно, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y = x$. Эта кривая бесчисленное множество раз пересекает свою асимптоту, переходя с одной ее стороны на другую (черт. 64).

Способ приближения кривой к своей невертикальной асимптоте определяется путем исследования знака разности ординат кривой и асимптоты. Здесь эта разность $y_{кр} - y_{ас} = \frac{\sin x}{x}$ бесчисленное множество раз меняет свой знак в точках, где

$$x = k\pi, \quad k = \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

4) (а) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна;

$$(б) \quad k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim x \operatorname{arcctg} x = \lim \frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}}.$$

Применяя правило Лопиталя дважды, получим

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = \lim \frac{2x}{2x} = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет асимптоту $y = 1$;

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi;$$

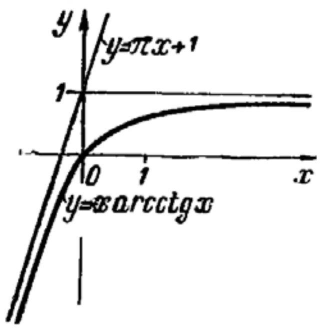
$$b = \lim_{x\to-\infty} (y - kx) = \lim (x \operatorname{arcctg} x - \pi x) = \lim x (\operatorname{arcctg} x - \pi) =$$

$$= \lim \frac{\operatorname{arcctg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

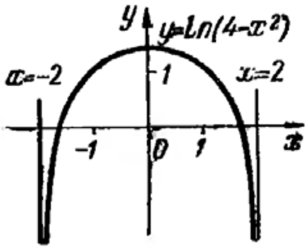
Следовательно, при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y = \pi x + 1$ (черт. 65).

5) (а) Кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 2$, так как при $x = \pm 2$ она имеет бесконечные разрывы;

(б) невертикальных асимптот кривая не имеет, ибо ее областью расположения является интервал $-2 < x < 2$ и поэтому x не может стремиться к бесконечности (черт. 66).



Черт. 65



Черт. 66

6)* (а) Вертикальных асимптот кривая не имеет;

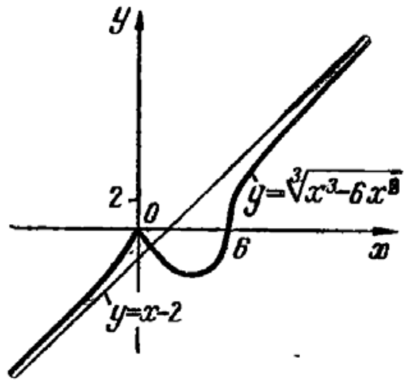
$$(б)\quad k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x}=\lim\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x\right).$$

Заменяя x через $\frac{1}{\alpha}$ и применяя затем правило Лопиталя, получим

$$b=\lim_{\alpha\to+0}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^3}-\frac{6}{\alpha^2}}-\frac{1}{\alpha}\right)=\lim\frac{\sqrt[3]{1-6\alpha}-1}{\alpha}=$$

$$=\lim\frac{\frac{1}{3}(1-6\alpha)^{-\frac{2}{3}}(-6)}{1}=-2.$$



Черт. 67

При $x\to-\infty$ значения параметров k и b асимптоты будут те же самые. Следовательно, при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ данная кривая имеет асимптоту $y=x-2$. Эта непрерывная кривая пересекает свою асимптоту в точке, где $x=\frac{2}{3}$, и неограниченно приближается к ней при $x\to-\infty$ сверху, а при $x\to+\infty$ снизу (черт. 67).

Найти асимптоты кривых:

381. $y=\frac{2x^2-9}{x+2}$. **382.** $y=\frac{x^5}{x^4-1}$.

383. $y=xe^{-x}$. **384.** $y=x\operatorname{arctg}x$.

385*. $y=2x-\frac{\cos x}{x}$. **386*.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

§ 9. Общая схема исследования функций и построения их графиков

Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме:

I. Найти область определения функции.

II. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках.

III. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.

IV. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции[1].

V. Найти асимптоты графика функции: а) вертикальные и б) невертикальные.

VI. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

VII. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости вверх и вниз.

VIII. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения. Построение графика функции целесообразно выполнять по его элементам, вслед за выполнением отдельных пунктов исследования.

387. Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$; 2) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$;

3) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

5) $y=x^2\sqrt[x]{e}$; 6) $y=x+2\operatorname{arcctg} x$; 7)* $y=|e^x-1|$.

Решение. Руководствуясь указанной общей схемой, последовательно находим:

1) I. Областью определения данной функции, как и всякого многочлена, является вся числовая ось.

II. Функция не имеет точек разрыва. Как у всякой элементарной функции, ее область непрерывности совпадает с областью определения.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. При $x=0$ из данного уравнения найдем $y=0$, а при $y=0$ найдем $x=0$ и $x=4$. Это значит, что график функции пересекает координатные оси в точках (0; 0) и (4; 0).

[1] Выполнение этого пункта исследования требует решения уравнения $f(x)=0$ и может быть опущено в задачах этого параграфа, если это решение нельзя получить элементарным путем. Общий метод решения уравнений разъясняется в следующем § 10.

Интервалы, где функция сохраняет знак, определяются из условия, что их границами могут быть только точки пересечения графика функции с осью Ох, точки разрыва и границы области определения функции.

Для исследуемой функции такими точками являются точки $x=0$ и $x=4$. Определяя знак функции при каком-либо значении x из интервала $(-\infty, 0)$, например $y(-1)<0$, заключаем, что во всем этом интервале функция имеет отрицательные значения; во всем интервале $(0; 4)$ функция имеет положительные значения, ибо $y(1)>0$; во всем интервале $(4, +\infty)$ функция имеет отрицательные значения, так как $y(10)<0$.

V. а) Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна;

$$б)\ k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{5}\lim x^2(4-x)=-\infty.$$

При $x\longrightarrow-\infty$ угловой коэффициент k асимптоты также не существует. Поэтому невертикальных асимптот график функции также не имеет.

$$VI.\ y'=\frac{1}{5}(12x^2-4x^3)=\frac{4}{5}x^2(3-x);$$

$y'=0$ в точках $x=0$ и $x=3$, которые являются критическими, так как они удовлетворяют всем необходимым для этого условиям. Других критических точек нет, поскольку производная y' существует всюду.

Исследуем критические точки по знаку y' слева и справа от каждой из этих точек:

x	-1	0	1	3	10
y'	+	0	+	0	—
y	возр.	нет экстр.	возр.	$\overset{\frown}{\max}$	убыв.

Следовательно, $x=3$ есть точка максимума: $y_{\max}=y(3)=5{,}4$.

Интервалы возрастания и убывания функции определяются из условия, что их границами могут быть только точки экстремума, точки разрыва и границы области определения функции.

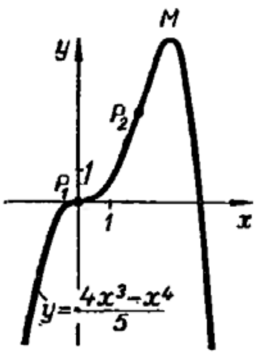
Исследуемая функция всюду непрерывна и имеет единственную точку максимума $x=3$. Поэтому в интервале $(-\infty, 3)$ она возрастает, а в интервале $(3, +\infty)$ — убывает.

VII. $y''=\frac{12}{5}x\,(2-x)$ всюду существует и обращается в нуль при $x=0$ и $x=2$. Эти значения x могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуем их, определяя знак y'' слева и справа:

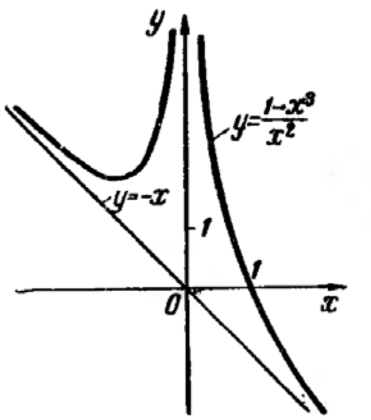
x	-1	0	1	2	10
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	в. вверх	перегиб	в. вниз	перегиб	в. вверх

Следовательно, график функции имеет две точки перегиба (0; 0) и (2; 3,2) (их ординаты найдены из данного уравнения).

Так как исследуемая функция непрерывна на всей числовой оси, то, согласно таблице, в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ ее график обращен выпуклостью вверх, а в интервале (0; 2) он обращен выпуклостью вниз.



Черт. 68



Черт. 69

VIII. Учитывая все полученные результаты исследования, строим график функции (черт. 68).

2) I. Функция $y=\frac{1-x^3}{x^2}$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$.

II. В точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв: при $x\to-0$ и при $x\to+0$ $\lim y=+\infty$. Во всех других точках числовой оси функция непрерывна.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. График функции пересекает ось Ox в точке (1; 0) и не пересекает оси Oy.

Слева от точки разрыва, при $-\infty<x<0$, $y>0$; между точкой разрыва и точкой пересечения с осью Ox, при $0<x<1$, $y>0$; справа от точки пересечения с осью Ox, при $1<x<+\infty$, $y<0$.

V. а) Прямая $x=0$ (ось ординат) является вертикальной асимптотой графика функции, ибо при $x=0$ она имеет бесконечный разрыв;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{1-x^3}{x^3}=-1;$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\left(\frac{1-x^3}{x^2}+x\right)=\lim\frac{1}{x^2}=0.$$

Следовательно, прямая $y=-x$ есть невертикальная асимптота. При $x\to-\infty$ параметры k и b имеют те же значения, поэтому других асимптот нет.

VI. $y'=-\frac{x^3+2}{x^3}$; $y'=0$ в точке $x=-\sqrt[3]{2}$, которая является критической; y' не существует в точке $x=0$, но эта точка не является критической, так как она есть точка разрыва.

Исследуем критическую точку по знаку y'':

$$y''=\frac{6}{x^4};\ y''(-\sqrt[3]{2})>0,$$

следовательно, $x=-\sqrt[3]{2}$ есть точка минимума:

$$y_{\min}=y(-\sqrt[3]{2})=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Слева от точки минимума при $-\infty<x<-\sqrt[3]{2}$, $y'<0$ функция убывает; между точкой минимума и точкой разрыва при $-\sqrt[3]{2}<x<0$, $y'>0$ функция возрастает; справа от точки разрыва при $0<x<+\infty$, $y'<0$ функция убывает.

VII. $y''=\frac{6}{x^4}$; $y''\neq0$; y'' не существует при $x=0$, но это значение x не может быть абсциссой точки перегиба, так как оно является точкой разрыва. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.

Во всей области определения функции $y''>0$, поэтому ее график всюду обращен выпуклостью вниз.

VIII. Используя все полученные данные, строим график функции (черт. 69).

3) I, II. Функция $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция нечетная, ибо $y(-x)=-y(x)$; ее график будет симметричен относительно начала координат.

IV. График функции пересекается с осями координат только в начале координат.

При $x<0$ значения $y<0$; при $x>0$ значения $y>0$.

V. а) Вертикальных асимптот график функции не имеет;

б) $$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=$$
$$=\lim\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)=0;$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]=$$
$$=\lim\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=0.$$

Подставляя найденные значения $k=b=0$ в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение невертикальной асимптоты: $y=0$.

Тот же результат получится и при $x\to-\infty$.

VI. $$y'=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}};$$

y' нигде не обращается в нуль; y' не существует в точках $x=\pm1$, которые являются критическими. Исследуя критические точки по знаку y' в соседних с ними точках слева и справа:

x	-5	-1	0	1	5
y'	$-$	∞	$+$	∞	$-$
y	убыв.	$\vee$ min	возр.	$\wedge$ max	убыв.

заключаем, что $x=-1$ есть точка минимума, где $y_{\min}=y(-1)=-\sqrt[3]{4}$, а $x=1$ есть точка максимума, где $y_{\max}=y(1)=\sqrt[3]{4}$.

Слева от точки минимума в интервале $(-\infty, -1)$ и справа от точки максимума в интервале $(1, +\infty)$, где $y'<0$, функция убывает, а между точками минимума и максимума в интервале $(-1; 1)$, где $y'>0$, функция возрастает.

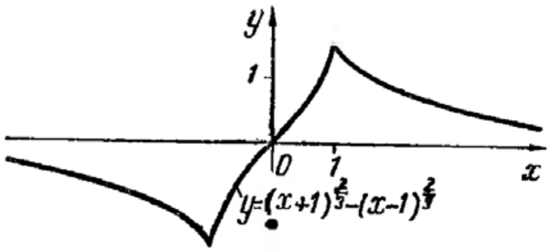
VII. $$y''=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{4}{3}}+\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}};$$

$y''=0$ в точке $x=0$; y'' не существует в точках $x=\pm1$. Эти точки оси Ox могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуя их по знаку y'' в соседних с ними точках слева и справа:

x	-5	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	5
y''	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$
y	в. вверх	нет перегиба	в. вверх	перегиб	в. вниз	нет перегиба	в. вниз

заключаем, что $x=0$ есть абсцисса точки перегиба; $y(0) = 0$.

Слева от точки перегиба, в интервале $(-\infty, 0)$, где $y'' < 0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а справа от точки перегиба, в интервале $(0, +\infty)$, где $y'' > 0$, график функции обращен выпуклостью вниз.



Черт. 70

VIII. Основываясь на полученных результатах исследования, строим график функции (черт. 70).

4) I, II. Функция $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция является четной, так как $y(-x)=y(x)$, и периодической, так как $y(x)=y\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, с периодом $\frac{\pi}{2}$. Достаточно исследовать поведение этой функции и построить ее график в интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; в остальных точках числовой оси поведение функции и ее график будут повторяться.

IV. При $x=0$, $y=1$; $y \neq 0$. График функции пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$ и не пересекает ось Ox. При любом значении x функция имеет положительное значение.

V. а) График функции не имеет вертикальных асимптот, поскольку она непрерывна на всей числовой оси;

б) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{x} = 0;$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (y-kx) = \lim(\sin^4 x+\cos^4 x)$ — не существует.

При $x \to -\infty$ невертикальной асимптоты также не существует.

График функции не имеет никаких асимптот.

VI. $y' = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x = 4\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) =$
$= -2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x;$

y' обращается в нуль в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ в точках $x=0$ и $x=\frac{\pi}{4}$, которые являются критическими. Других критических точек в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ нет, так как y' существует всюду. Исследуем критические точки по знаку y'' (по правилу IIб): $y'' = -4\cos 4x$; $y''(0) = -4 < 0$, следовательно, $x = 0$ есть точка максимума, где $y_{\max} = y(0) = 1$; $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$, поэтому $x = \frac{\pi}{4}$ есть точка минимума, где $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

В интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, где $y' < 0$, функция убывает, а в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, где $y' > 0$, функция возрастает.

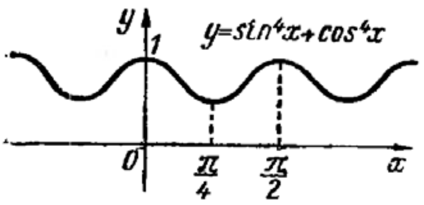
VII. $y'' = -4\cos 4x$; y'' существует всюду и обращается в нуль в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ при $x = \frac{\pi}{8}$ и $x = \frac{3\pi}{8}$. Эти точки оси Ox могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуя их по знаку y'' в соседних точках:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	в. вверх	перегиб	в. вниз	перегиб	в. вверх

заключаем, что в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ график функции имеет две точки перегиба: $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

Ординаты этих точек вычислены из данного уравнения.

В интервалах $\left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$, где $y'' < 0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а в интервале $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$, где $y'' > 0$, он обращен выпуклостью вниз.



Черт. 71

VIII. Согласно полученным результатам исследования строим график функции в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна периоду данной функции, и затем повторяем его влево и вправо по периодическому закону (черт. 71).

5) I. Функция $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$.

II. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв: она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке

$$\lim_{x \to -0} y = 0, \text{ ибо } \lim_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

При $x \to +0$ имеет место случай нахождения предела $0 \cdot \infty$. Преобразуя функцию к виду дроби и дважды применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to +0} y = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} =$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \frac{e^{+\infty}}{2} = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x=0$ разрыв функции бесконечный. В остальных точках числовой оси она непрерывна.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. С осями координат график функции не пересекается; согласно п. II исследования начало координат является предельной точкой левой ветви графика.

Определяя знак функции в какой-либо точке слева от точки разрыва, например $y(-2) > 0$, и в какой-либо точке справа от нее, например $y(2) > 0$, заключаем, что функция имеет положительные значения во всей своей области определения.

V. а) Вертикальной асимптотой графика функции является прямая $x=0$, ибо при $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв;

б) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

При $x \to -\infty$ угловой коэффициент невертикальной асимптоты также не существует, т. е. таких асимптот график функции не имеет.

VI. $y' = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$; $y'=0$ в точке $x=\frac{1}{2}$, которая является критической; y' не существует в точке $x=0$, но она не является критической, так как это точка разрыва.

Исследуя критическую точку по знаку y'' в этой точке:

$$y'' = \frac{2x^2-2x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}; \quad y''\left(\frac{1}{2}\right) > 0,$$

заключаем, что $x=\frac{1}{2}$ есть точка минимума: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$.

Определяя знак y' в интервалах, границами которых являются точки разрыва и экстремума, заключаем: в интервалах $(-\infty, 0)$ и $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, где $y' < 0$, функция убывает, а в интервале $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, где $y' > 0$, она возрастает.

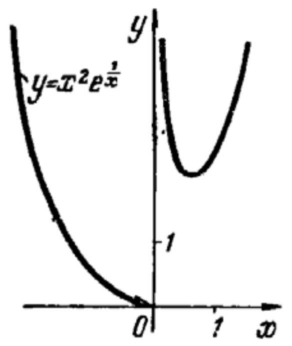
VII. $y''=\frac{2x^2-2x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ нигде не обращается в нуль и существует во всей области определения функции. Поэтому график функции не имеет точек перегиба.

Определяя знак y'' в какой-либо точке слева от точки разрыва, например $y''(-2)>0$, и в какой-либо точке справа от нее, например $y''(3)>0$, заключаем, что график функции всюду обращен выпуклостью вниз.

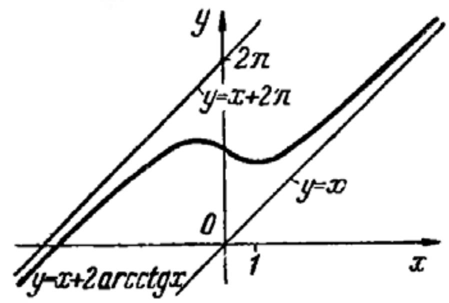
VIII. Ввиду недостаточности полученных данных находим дополнительно несколько точек графика, беря подходящие значения x и определяя соответствующие значения y из данного уравнения:

$$\left(-2,\ \frac{4}{\sqrt{e}}\right),\ \left(-1,\ \frac{1}{e}\right),\ (1,\ e).$$

Наконец, строим график функции (черт. 72).



Черт. 72



Черт. 73

б) I, II. Функция $y=x+2\operatorname{arcctg}x$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

V. а) Вертикальных асимптот нет;

$$\text{б) } k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\left(1+\frac{2\operatorname{arcctg}x}{x}\right)=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim 2\operatorname{arcctg}x=2\operatorname{arcctg}(+\infty)=0;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim 2\operatorname{arcctg}x=2\operatorname{arcctg}(-\infty)=2\pi.$$

Следовательно, график функции имеет две невертикальные асимптоты: $y=x$ и $y=x+2\pi$.

VI. $y'=1-\frac{2}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ существует всюду и обращается в нуль в точках $x=\pm 1$, которые являются критическими. Исследуем эти точки по знаку второй производной:

$$y''=\frac{4x}{(1+x^2)^2};\ y''(-1)<0;\ y''(1)>0.$$

Следовательно, $x=-1$ есть точка максимума, а $x=1$ есть точка минимума: $y_{\max}=y(-1)=\frac{3\pi}{2}-1$; $y_{\min}=y(1)=\frac{\pi}{2}+1$.

В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, где $y'>0$, функция возрастает, а в интервале $(-1; 1)$, где $y'<0$, функция убывает.

VII. $y''=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$ всюду существует и обращается в нуль в точке $x=0$. Определяя знак y'' слева и справа от этой точки: $y''(-1)<0$ и $y''(1)>0$, заключаем, что при $x=0$ график функции имеет точку перегиба. Слева от нее, в интервале $(-\infty, 0)$, где $y''<0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а справа, в интервале $(0, +\infty)$, где $y''>0$, он обращен выпуклостью вниз; $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

VIII. Согласно результатам исследования строим график функции (черт. 73).

7)* I, II. Функция $y=|e^x-1|$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. Функция всюду неотрицательна; ее график проходит через начало координат.

V. а) Вертикальных асимптот график функции не имеет.

б) При $x\geqslant 0$, $y=e^x-1$; при $x<0$, $y=1-e^x$,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{e^x-1}{x}=\lim\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

т. е. при $x\to+\infty$ асимптоты нет;

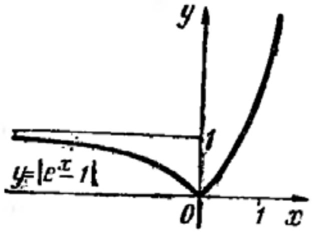
$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{1-e^x}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim(1-e^x)=1,$$

т. е. при $x\to-\infty$ график функции имеет невертикальную асимптоту $y=1$.

VI. $y'=\pm e^x$, где знак плюс соответствует значениям x из интервала $(0, +\infty)$, где $e^x-1>0$, а знак минус соответствует значениям x из интервала $(-\infty, 0)$, где $e^x-1<0$; y' нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x=0$, которая является критической. Слева от этой точки, где $y'=-e^x<0$, функция убывает, а справа от нее, где $y'=e^x>0$, функция возрастает. Это значит, что $x=0$ есть точка минимума: $y_{\min}=y(0)=0$.

VII. $y''=\pm e^x$, где как и у y' знак плюс соответствует значениям $x>0$, а знак минус соответствует значениям $x<0$; y'' нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x=0$. Слева от этой точки, где $y''=-e^x<0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а справа от нее, где $y''=e^x>0$, график функции обращен выпуклостью вниз. Следовательно, $x=0$ есть абсцисса точки перегиба; $y(0)=0$.



Черт. 74

Здесь точка перегиба совпала с угловой точкой, в которой график функции имеет две различные односторонние касательные: $y=-x$, $y=x$ и минимальное значение ординаты.

VIII. Для построения графика функции дополнительно найдем несколько его точек, например $(1;\ e-1)$, $(-1;\ 1-e^{-1})$, $(-2;\ 1-e^{-2})$ и определим угловые коэффициенты касательных (левую и правую производные) в угловой точке $(0;\ 0)$:

$$k_1=y'_{(-)}(0)=-1,\quad k_2=y'_{(+)}(0)=1.$$

Согласно полученным данным график функции изображен на черт. 74.

Исследовать функции и построить их графики:

388. $y=x^3+3x^2$. **389.** $y=16x(x-1)^3$.

390. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$. **391.** $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

392. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. **393.** $y=(x-3)\sqrt{x}$.

394. $y=2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$. **395.** $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

396. $y=\sin x-\cos x$. **397.** $y=x-2\operatorname{arc\,tg} x$.

398*. $y=x-|\sin x|$. **399*.** $y=\arcsin|x|$.

§ 10. Приближенное решение уравнений

1) *Графический метод. Отделение корней.* Действительные корни уравнения $f(x)=0$ являются абсциссами точек пересечения кривой $y=f(x)$ с осью Ox, а если это уравнение преобразуется к виду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, то его действительные корни будут абсциссами точек пересечения кривых $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$.

Пользуясь этим, как было показано в решении задачи 16, можно находить приближенные значения действительных корней алгебраических и трансцендентных уравнений путем построения соответствующих кривых.

Однако этим графическим методом можно получить лишь грубо приближенные значения корней уравнения, но нельзя их вычислить с наперед заданной большой точностью.

Поэтому графический метод обычно применяется лишь как вспомогательное средство для определения числа действительных корней уравнения и для их о т д е л е н и я, т. е. для нахождения таких отрезков оси Ox, внутри которых содержится только по одному корню. Затем, после такого отделения корней, каждый из них может быть вычислен с любой желаемой точностью посредством аналитических методов.

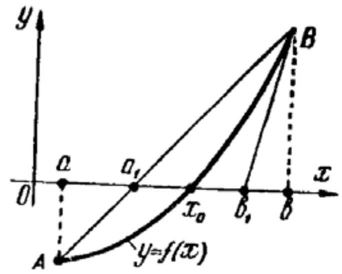
2) *Уточнение корней уравнения методом хорд и касательных.* Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ сохраняет знак и если $f(a)\cdot f(b)<0$, то внутри этого отрезка содержится только один действительный корень функции $f(x)$ или уравнения $f(x)=0$.

Если, кроме того, на этом отрезке $f''(x)$ также сохраняет знак, то можно найти границы a_1 и b_1 более узкого отрезка, содержащего тот же корень, по формулам

$$a_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad b_1=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \qquad (*)$$

где β — тот конец отрезка $[a, b]$, в котором $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$.

Геометрически (черт. 75) границы нового отрезка a_1 и b_1 представляют абсциссы точек пересечения с осью Ox хорды AB и касательной Bb_1, которые будут ближе к искомому корню x_0, чем границы исходного отрезка $[a, b]$.



Черт. 75

Далее, исходя из полученного суженного отрезка, по тем же формулам (*) можно найти границы a_2 и b_2 еще более узкого отрезка, содержащего в себе корень x_0.

Повторяя этот процесс последовательного сужения отрезка, содержащего корень x_0, т. е. повторяя применение формул (*), можно найти приближенное значение корня x_0 с любой заданной точностью*.

Чтобы найти x_0 с точностью до δ, следует вести вычисление a_n и b_n до тех пор, когда впервые окажется

$$|a_n-b_n|<\delta \text{ или } \delta<|a_n-b_n|<2\delta. \qquad (**)$$

Тогда, с точностью до δ, в первом случае $x_0\approx a_n$ (или $x_0\approx b_n$), а во втором случае $x_0\approx\frac{a_n+b_n}{2}$.

400. Отделить действительные корни следующих уравнений: 1) $x^2-\cos x=0$; 2) $2x^3+x+1=0$; 3) $x-\operatorname{ctg} x=0$.

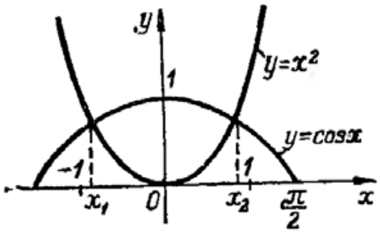
---

* 1) Здесь возможно $a_n \lessgtr b_n$. Если, как всегда $a<b$, то при $\beta=b$ будет $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, ..., а при $\beta=a$ будет $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, ...

2) При повторном применении формул (*) во вторую из них (формулу касательных) всегда подставляется новая граница b_n, вычисленная по этой второй формуле.

Решение. Чтобы отделить действительные корни данного уравнения, т. е. чтобы каждый из них заключить внутри особого небольшого отрезка, воспользуемся графическим методом.

1) Преобразуем данное уравнение к виду $x^2 = \cos x$ и построим кривые $y = x^2$ и $y = \cos x$, в одних и тех же координатных осях и при одной и той же единице масштаба (черт. 76).



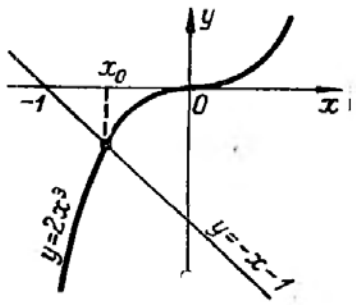
Черт. 76

Число точек пересечения этих кривых равно числу действительных корней данного уравнения, а их абсциссы являются этими корнями.

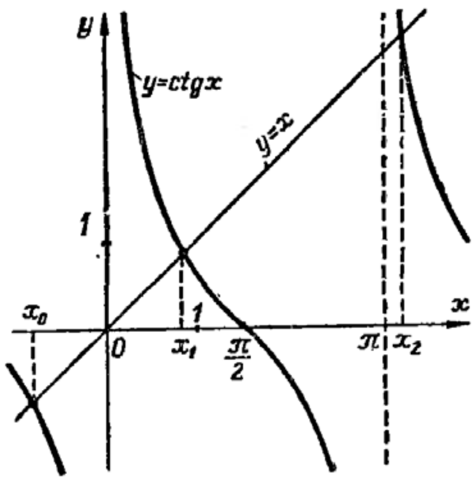
Согласно этому положению из чертежа находим: данное трансцендентное уравнение $x^2 - \cos x = 0$ имеет два действительных корня, один из которых x_1 содержится на отрезке $[-1; -0{,}8]$, а другой x_2 на отрезке $[0{,}8;\ 1]$.

2) Преобразуя уравнение $2x^3 + x + 1 = 0$ к виду $2x^3 = -x - 1$ и построив кривые $y = 2x^3$ и $y = -x - 1$ в одних координатных осях (черт. 77), заключаем: данное алгебраическое уравнение имеет только один действительный корень, содержащийся на отрезке $[-0{,}6;\ -0{,}5]$.

3) Приводим уравнение $x - \operatorname{ctg} x = 0$ к виду $x = \operatorname{ctg} x$ и построим кривые $y = x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (черт. 78). Котангенсоида имеет



Черт. 77



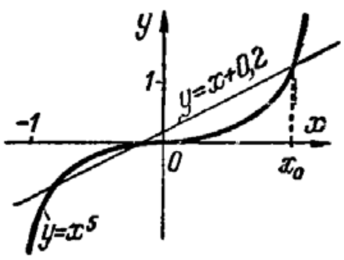
Черт. 78

бесчисленное множество бесконечных ветвей, каждая из которых пересекает прямую $y = x$. Поэтому данное уравнение имеет бесчисленное множество действительных корней. Наименьший положительный корень x_1 этого уравнения содержится на отрезке $[0{,}8;\ 0{,}9]$.

401. Вычислить с точностью до 0,0001 наибольший корень уравнения

$$x^5 - x - 0,2 = 0.$$

Решение. Вначале отделим искомый корень графическим методом. Преобразуя уравнение к виду $x^5 = x + 0,2$ и построив кривые $y = x^5$ и $y = x + 0,2$ в одних координатных осях (черт. 79), при указанных неодинаковых по осям, но одинаковых для обеих кривых единицах масштаба, заключаем, что искомый наибольший корень содержится на отрезке $[1;\ 1,1]$.



Черт. 79

Далее вычислим приближенное значение корня с заданной точностью, пользуясь методом хорд и касательных, т. е. применяя формулы (*), сужающие отрезок, заключающий в себе этот корень.

Однако, прежде чем применять эти формулы, следует убедиться в том, что функция $f(x) = x^5 - x - 0,2$ и найденный отрезок $[1;\ 1,1]$ удовлетворяют необходимым условиям, т. е. что:

а) значения функции $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки и что

б) первая и вторая производные от функции на этом отрезке сохраняют каждая свой знак:

$$\text{а) } f(1) = -0,2 < 0; \quad f(1,1) = 0,31051 > 0;$$
$$\text{б) } f'(x) = 5x^4 - 1 > 0 \text{ и } f''(x) = 20x^3 > 0$$

для всех значений x на отрезке $[1;\ 1,1]$.

Так как $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$ при $x = 1,1$, то, обозначив концы отрезка $a = 1$, $b = 1,1 = \beta$ и применяя формулы (*), получим:

$$a_1 = 1 - \frac{(1,1-1)\,f(1)}{f(1,1) - f(1)} = 1 + \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,51051} = 1,039;$$
$$b_1 = 1,1 - \frac{f(1,1)}{f'(1,1)} = 1,1 - \frac{0,31051}{6,3205} = 1,051.$$

К полученным новым границам a_1 и b_1 более узкого отрезка, содержащего искомый корень, применяем те же формулы (*):

$$a_2 = a_1 - \frac{(b_1 - a_1)\,f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 1,039 + \frac{0,012 \cdot 0,0282}{0,0595} = 1,04469;$$
$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1,051 - \frac{0,0313}{5,1005} = 1,04487.$$

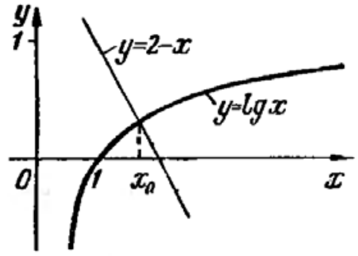
Длина полученного отрезка $[a_2,\ b_2]$ меньше 2δ, но больше δ:

$$0,0001 < |a_2 - b_2| = 0,00018 < 0,0002.$$

Поэтому искомое приближенное значение наибольшего корня данного уравнения с точностью до 0,0001 будет

$$x_0 \approx \frac{a_2+b_2}{2} = 1,0448.$$

402. Вычислить с точностью до 0,000001 действительный корень уравнения $2-x-\lg x=0$.



Черт. 80

Решение. Чтобы отделить искомый корень, преобразуем уравнение к виду $\lg x = 2-x$ и построим кривые $y=\lg x$ и $y=2-x$ (черт. 80). По чертежу определяем, что искомый корень содержится внутри отрезка [1,6; 1,8].

Для проверки условий, соблюдение которых необходимо при пользовании методом хорд и касательных, вычисляем значения функции $f(x)=2-x-\lg x$ на концах найденного отрезка и находим производные $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f(1,6)=2-1,6-0,2041=0,1959>0;$$
$$f(1,8)=2-1,8-0,2553=-0,0553<0;$$
$$f'(x)=-1-\frac{1}{x}\lg e; \quad f''(x)=\frac{1}{x^2}\lg e;$$

$f'(x)<0$, $f''(x)>0$ на всем отрезке [1,6; 1,8].

Убедившись, что на концах отрезка функция $f(x)$ имеет разные знаки и что на всем этом отрезке производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак, обозначаем концы отрезка: $a=1,6=\beta$; $b=1,8$ и применяем уточняющие формулы (*):

$$a_1 = 1,6-\frac{(1,8-1,6)f(1,6)}{f(1,8)-f(1,6)} = 1,6+0,1559 = 1,7559;$$

$$b_1 = 1,6-\frac{f(1,6)}{f'(1,6)} = 1,6+0,1540 = 1,7540.$$

Повторно применяем формулы (*) до тех пор, пока не получим отрезок $[b_n, a_n]$, длина которого будет удовлетворять одному из условий (**):

$$a_2 = 1,7559-\frac{(1,7540-1,7559)f(1,7559)}{f(1,7540)-f(1,7559)} = 1,75558;$$

$$b_2 = 1,7540-\frac{f(1,7540)}{f'(1,7540)} = 1,75557;$$

$$a_3 = 1,7555816; \quad b_3 = 1,7555807.$$

Здесь длина отрезка $[b_3, a_3]$ менее 0,000001; $a_3-b_3=0,0000009$. Поэтому искомое приближенное значение корня данного уравнения с точностью до 0,000001

$$x_0 \approx b_3 = 1,755581.$$

В задачах 403—406 определить число действительных корней уравнения и вычислить наибольший из них с точностью до 0,01.

403. $x^3-9x-5=0$. **404.** $x^4-x-10=0$.

405. $x-\sin 2x=0$. **406.** $x-2+e^x=0$.

В задачах 407—410 найти приближенные значения действительных корней уравнения с точностью до 0,01.

407. $x^3-6x+3=0$. **408.** $x^4+10x-100=0$.

409. $(x-1)^2-2\sin x=0$. **410.** $e^x-2(1-x)^2=0$.

§ 11. Кривизна плоской кривой

Если плоская линия отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$ или уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то ее кривизна K в любой точке определяется формулой

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

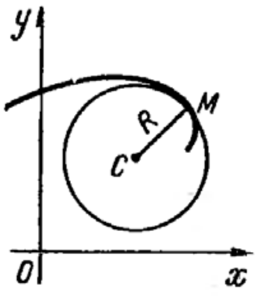
где $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ — первая и вторая производные от x и y по параметру t.

Кривизна линии в некоторой ее точке характеризует отклонение линии от своей касательной в этой точке.

Из всех плоских линий *постоянную кривизну имеют только прямая и окружность*. У всех других линий кривизна меняется от точки к точке. *Кривизна прямой всюду равна нулю*; у других линий кривизна может равняться нулю только в отдельных точках. *Кривизна окружности радиуса R всюду равна $\frac{1}{R}$*.

Величина R, обратная кривизне кривой в некоторой ее точке, $R=\frac{1}{K}$, называется радиусом кривизны кривой в этой точке.

Кругом кривизны кривой в ее точке M называется окружность с радиусом, равным радиусу кривизны кривой в точке M, центр которой C лежит на нормали к кривой в точке M со стороны ее вогнутости (черт. 81).



Черт. 81

Координаты (X, Y) центра кривизны (центра круга кривизны) кривой в ее точке $M(x, y)$ определяются формулами

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{y}=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y',$$

$$Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{x}=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{2}$$

Геометрическое место центров кривизны $C(X, Y)$ линии называется эволютой этой линии. Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями эволюты.

Сама кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

411. Найти кривизну кривой: 1) $x=t^2$, $y=2t^3$ в точке, где $t=1$; 2) $y=\cos 2x$ в точке, где $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. 1) Находим производные $\dot{x}=2t$, $\ddot{x}=2$, $\dot{y}=6t^2$, $\ddot{y}=12t$, вычисляем их значения в точке, где $t=1$:

$$\dot{x}=2,\ \ddot{x}=2,\ \dot{y}=6,\ \ddot{y}=12$$

и, подставляя в формулу (1), получим

$$K=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\cdot 12-6\cdot 2}{(2^2+6^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{20\sqrt{10}}.$$

2) Из данного уравнения находим первую и вторую производные от y по x:

$$y'=-2\sin 2x,\ y''=-4\cos 2x,$$

вычисляем их значения в данной точке: $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ и, подставляя в формулу (1), получим $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=4$.

412. Определить радиусы кривизны в вершинах эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Решение. Найдем производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$ и определим радиус кривизны эллипса в любой его точке:

$$R(t)=\frac{1}{K(t)}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Для вершин эллипса, лежащих на его оси $2a$, параметр t равен 0 или π. Поэтому радиус кривизны эллипса в этих вершинах $R(0)=R(\pi)=\frac{b^2}{a}$.

В двух других вершинах эллипса, лежащих на оси $2b$, $t=\frac{\pi}{2}$ или $t=\frac{3\pi}{2}$. В этих вершинах радиус кривизны эллипса $R\left(\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{a^2}{b}$.

413. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1) $y=4x-x^2$ в ее вершине;

2) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{2}$.

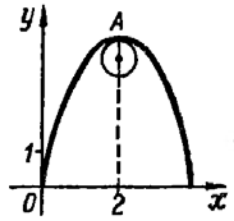
Решение. 1) Данное уравнение определяет параболу, ось которой параллельна оси Oy. Найдем ее вершину как точку, где касательная параллельна оси Ox, т. е. где $y'=0$:

$$y'=4-2x;\ y'=0 \text{ при } x=2;\ y(2)=4.$$

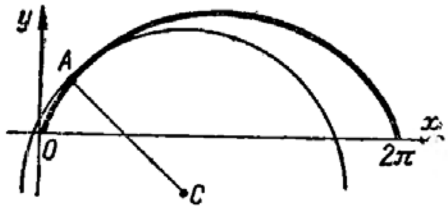
Далее по формулам (2) находим координаты центра кривизны C данной параболы в ее вершине (2; 4)

$$X=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y'=2;\quad Y=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=\frac{7}{2}$$

и строим параболу и круг кривизны в ее вершине (черт. 82).



Черт. 82



Черт. 83

2) Находим производные $\dot{x}=1-\cos t$, $\ddot{x}=\sin t$, $\dot{y}=\sin t$, $\ddot{y}=\cos t$, их значения при $t=\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ \ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ \ddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

и по формулам (2) координаты центра кривизны

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{y}=\frac{\pi}{2}+1;\ Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{x}=-1.$$

Затем строим данную циклоиду, ее точку $A\left(\frac{\pi}{2}-1;\ 1\right)$, где $t=\frac{\pi}{2}$, найденный центр кривизны $C\left(\frac{\pi}{2}+1;\ -1\right)$ и круг кривизны (черт. 83).

414. В каких точках параболы $y=\sqrt{2}x^2$ радиус кривизны равен единице?

Решение. Находим производные $y'=2\sqrt{2}x$, $y''=2\sqrt{2}$ и по формуле (1) радиус кривизны параболы в любой ее точке с абсциссой x:

$$R(x)=\frac{(1+8x^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

Полагая $R(x)=1$, получим абсциссы искомых точек

$$2\sqrt{2}=(1+8x^2)^{\frac{3}{2}};\ (2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}=1+8x^2;\ 8x^2=1;\ x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

415. В какой точке кривая $y=e^x$ имеет наибольшую кривизну?

Решение. Находим производные $y'=y''=e^x$ и кривизну данной кривой в любой точке:

$$K(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}.$$

Далее ищем наибольшее значение функции $K(x)$, которая определена и непрерывна на всей числовой оси:

$$K'(x)=\frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}};\quad K'(x)=0 \text{ при } 1-2e^{2x}=0,$$

т. е. в единственной точке $x_0=-\frac{\ln 2}{2}$. Определяя знаки $K'(x)$ слева и справа от этой критической точки: $K'(-10)>0$, $K'(0)<0$, устанавливаем, что она является точкой максимума функции $K(x)$. Поскольку x_0 есть единственная точка экстремума непрерывной функции $K(x)$ во всем интервале $(-\infty, +\infty)$, то в этой точке она достигает и своего наибольшего значения. Следовательно, искомая точка есть $\left(-\frac{\ln 2}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Ордината этой точки вычислена из данного уравнения кривой по известной ее абсциссе.)

416. Найти уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1) $x^2=2(1-y)$; 2) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

Решение. 1) Из данного уравнения параболы находим производные: $y'=-x$, $y''=-1$ и по формулам (2) находим координаты любой точки на ее эволюте:

$$X=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y'=x-\frac{1+x^2}{-1}(-x);\qquad Y=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1+x^2}{-1};\qquad \begin{cases} X=-x^3,\\ Y=-\frac{3}{2}x^2.\end{cases}$$

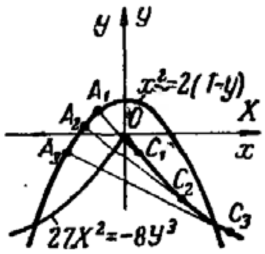
Это параметрические уравнения эволюты. Исключая из них параметр x, получим $27X^2=-8Y^3$ — уравнение полукубической параболы. Данная парабола и найденная ее эволюта изображены на черт. 84.

2) Из уравнений эллипса найдем производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$ и по формулам (2) получим,

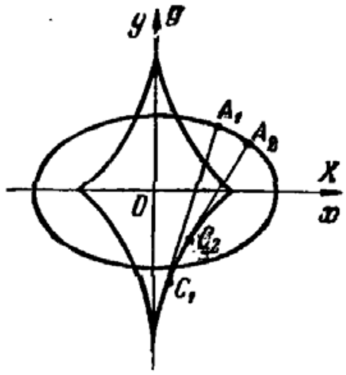
после упрощений, параметрические уравнения эволюты эллипса

$$X = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ Y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t, \quad \text{где } c^2 = a^2 - b^2.$$

Эллипс и его эволюта построены на черт. 85.



Черт. 84



Черт. 85

Найти радиус кривизны кривой:

417. $xy = 4$ в точке (2; 2) и в точке, где $x = 8$.

418. $y = e^{-x^2}$ в точке пересечения с осью Oy.

419. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке, где $t = \pi$.

420. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в любой ее точке.

Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

421. $3y = x^3$ в точке, где $x = -1$.

422. $y^3 = x^2$ в точке, где $y = 1$.

423. $y = \ln x$ в точке пересечения с осью Ox.

424. $y = e^x$ в точке пересечения с осью Oy.

Найти точки кривых с наименьшим радиусом кривизны:

425. $y = \ln x$. **426.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Найти уравнение эволюты крнвой и построить кривую и ее эволюту:

427. $y^2 - 2x = 0$. **428.** $x^2 - y^2 = a^2$.

429. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.