

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

ФИЗИКА

Издание второе, переработанное и дополненное

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного
технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебного пособия
для студентов всех направлений подготовки
заочной и дистанционной форм обучения*

Нижегород 2012

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3

Ф 503

Авторы:

**И.А. Вдовиченко, Т.В. Кожевникова, Н.И. Кузикова, А.В. Назаров,
Н.А. Новоселова, Е.А. Попов, Т.О. Прончатова-Рубцова,
Л.Г. Рудоясова, Г.И. Шишков**

Рецензенты:

заведующий кафедрой «Акустика» Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, доктор физико-математических наук, профессор *С.Н. Гурбатов*;
начальник отдела Научно-исследовательского института измерительных систем им. Ю.Е. Седакова, доктор технических наук, профессор *В.А. Козлов*

Ф 503 Физика: учеб. пособие / И.А. Вдовиченко, Т.В. Кожевникова, Н.И. Кузикова [и др.] / под ред. Г.И. Шишкова. – 2-е изд., перераб. и доп. Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2012. – 191 с.

ISBN 978-5-502-0015-4

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса физики для студентов всех направлений подготовки бакалавров заочной и дистанционной форм обучения, составленной с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения.

Изложен опорный конспект лекций по физическим основам механики, молекулярной физики, колебаний, термодинамики, электричества и магнетизма, оптики, квантовой физики. Приведены примеры решения типовых задач.

Рис. 100. Табл. 2. Библиогр.: 10 назв.

**УДК 53 (075.8)
ББК 22.3**

ISBN 978-5-502-0015-4

© Нижегородский государственный
технический университет
им. Р.Е. Алексеева, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Раздел первый	
МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	8
1. Кинематика поступательного движения	8
1.1. Способы описания движения тел.....	8
1.2. Скорость. Ускорение.....	9
1.3. Виды движений.....	11
2. Кинематика вращательного движения	12
2.1. Угловая скорость.....	13
2.2. Угловое ускорение.....	13
2.3. Связь линейных и угловых характеристик.....	14
2.4. Примеры решения задач.....	15
3. Динамика поступательного движения	17
3.1. Законы Ньютона.....	17
3.2. Силы в природе.....	18
3.2.1. Упругие силы.....	19
3.2.2. Силы трения.....	19
3.2.3. Сила тяжести и вес тела.....	20
3.3. Закон всемирного тяготения.....	21
3.4. Примеры решения задач.....	22
4. Законы сохранения	25
4.1. Механическая система тел.....	25
4.2. Закон сохранения импульса.....	25
4.3. Энергия, работа, мощность.....	26
4.4. Кинетическая и потенциальная энергии.....	28
4.5. Закон сохранения энергии.....	29
4.6. Соударение тел.....	30
4.7. Примеры решения задач.....	32
5. Динамика вращательного движения. Закон сохранения момента импульса	35
5.1. Момент инерции.....	35
5.2. Момент силы.....	37
5.3. Момент импульса.....	38
5.4. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела.....	39

5.5. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращения.....	39
5.6. Примеры решения задач.....	40
6. Элементы механики жидкости.....	46
6.1. Уравнение неразрывности.....	47
6.2. Уравнение Бернулли.....	48
6.3. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения.....	49
6.4. Примеры решения задач.....	50
7. Молекулярно – кинетическая теория идеальных газов.....	52
7.1. Опытные законы идеального газа.....	52
7.2. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов.....	54
7.3. Термодинамика.....	56
7.4. Число степеней свободы молекул.....	57
7.5. Внутренняя энергия.....	58
7.6. Теплота и работа.....	58
7.7. Первое начало термодинамики.....	59
7.8. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.....	60
7.9. Теплоемкость.....	61
7.10. Адиабатический процесс.....	61
7.11. Тепловые двигатели и холодильные машины, их КПД. Цикл Карно.....	62
7.12. Примеры решения задач.....	64

Раздел второй

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....	68
------------------------------	-----------

8. Электростатика.....	68
8.1. Электрическое поле.....	68
8.2. Теорема Остроградского – Гаусса.....	70
8.3. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал электростатического поля.....	72
8.4. Связь между напряженностью и потенциалом.....	73
8.5. Электрический диполь. Поляризация диэлектриков.....	73
8.6. Электрическое смещение. Теорема Остроградского – Гаусса для поля вектора \vec{D} в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.....	74
8.7. Проводники в электростатическом поле.....	75
8.8. Электроёмкость. Конденсаторы.....	76
8.9. Примеры решения задач.....	79

9. Постоянный электрический ток	87
9.1. Электрический ток. Сила и плотность тока.....	87
9.2. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение.....	88
9.3. Закон Ома. Сопротивление проводников.....	88
9.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.....	89
9.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	90
9.6. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.....	91
9.7. Примеры решения задач.....	92
10. Магнитное поле в вакууме	95
10.1. Магнитный момент. Магнитная индукция.....	95
10.2. Закон Ампера.....	96
10.3. Сила Лоренца.....	96
10.4. Напряженность магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа.....	97
10.5. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для поля \vec{B}	98
10.6. Примеры решения задач.....	99
11. Электромагнитная индукция	103
11.1. Основной закон электромагнитной индукции.....	103
11.2. Самоиндукция. Индуктивность.....	104
11.3. Взаимная индукция.....	105
11.4. Энергия магнитного поля.....	106
11.5. Теория Максвелла для электромагнитного поля.....	106
11.6. Примеры решения задач.....	108
12. Колебания	114
12.1 Механические колебания.....	114
12.1.1. Гармонические колебания.....	115
12.1.2. Энергия гармонических колебаний.....	118
12.1.3. Математический маятник.....	119
12.1.4. Физический маятник.....	120
12.2. Электрические колебания.....	121
12.2.1. Собственные незатухающие колебания.....	121
12.2.2. Собственные затухающие колебания. Вынужденные колебания.....	122
12.2.3. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.....	124
12.2.4. Резонанс напряжений.....	126
12.2.5. Резонанс токов.....	127
12.3. Сложение гармонических колебаний одного направления.....	128
12.4. Сложение взаимно ортогональных гармонических колебаний.....	129
12.5. Примеры решения задач.....	131

Раздел третий

ВОЛНЫ. ОПТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ	137
13. Волны	137
13.1. Упругие волны.....	137
13.2. Стоячие волны.....	139
13.3. Электромагнитные волны.....	140
14. Интерференция света	142
14.1. Условия минимума и максимума интерференционной картины.....	143
14.2. Интерференция волн, создаваемых двухщелевой диафрагмой (опыт Юнга).....	144
14.3. Интерференция в тонких пленках (пластинах).....	145
14.4. Интерференция на клине.....	146
14.5. Интерференция при наблюдении колец Ньютона.....	147
14.6. Примеры решения задач.....	149
15. Дифракция света	151
15.1. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера.....	152
15.2. Зоны Френеля. Метод зон Френеля.....	152
15.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии.....	154
15.4. Дифракция Фраунгофера.....	157
15.4.1. Дифракция Фраунгофера на щели.....	157
15.4.2. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке.....	159
15.4.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор.....	161
15.5. Примеры решения задач.....	163
16. Поляризация света	167
16.1. Естественный и поляризованный свет.....	167
16.2. Явление двойного лучепреломления. Закон Малюса. Закон Брюстера.....	168
16.3. Вращение плоскости поляризации.....	170
16.4. Примеры решения задач.....	170
17. Элементы квантовой физики	176
17.1. Тепловое излучение.....	176
17.2. Фотоэлектрический эффект. Фотоны.....	179
17.3. Эффект Комптона.....	181
17.4. Давление света.....	182
17.5. Примеры решения задач.....	183
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	187
ПРИЛОЖЕНИЕ	188

ВВЕДЕНИЕ

Физика принадлежит к числу фундаментальных наук, составляющих основу теоретической подготовки инженеров и играющих роль той базы, без которой невозможна успешная деятельность инженера в любой области современной техники. На протяжении последних трех столетий развитие техники тесно переплеталось с развитием физики, которая предвляла и научно обосновывала принципиально новые направления в технике. В XX веке эта связь стала неразрывной.

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших технических учебных заведений и содержит краткий теоретический материал по физическим основам классической механики, молекулярной физики и термодинамики, электричества и магнетизма, теории колебаний и волн, волновой и квантовой оптики.

В каждом разделе сначала излагается теория соответствующего вопроса, а затем на ряде наиболее поучительных и интересных в физическом отношении задач показывается, как следует подходить к их решению. Задачи тесно связаны с основным текстом, часто являются его развитием и дополнением, поэтому работа над ними не менее важна, чем изучение основного текста.

Учитывая, что к данному изданию могут быть замечания, авторы будут благодарны читателям за пожелания по улучшению книги, которые можно направлять по электронному адресу: physics@nntu.nnov.ru.

Раздел первый

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Кинематика – это раздел физики, который изучает движение тел, не вскрывая причин, вызывающих это движение.

1.1. Способы описания движения тел

Существуют различные способы описания движения тел: координатный и векторный. При координатном способе задания положения тела в декартовой (прямоугольной) системе координат движение материальной точки определяется тремя функциями, выражающими зависимость координат от времени (рис.1.1):

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Зависимость координат от времени называется *законом движения* (или уравнением движения).

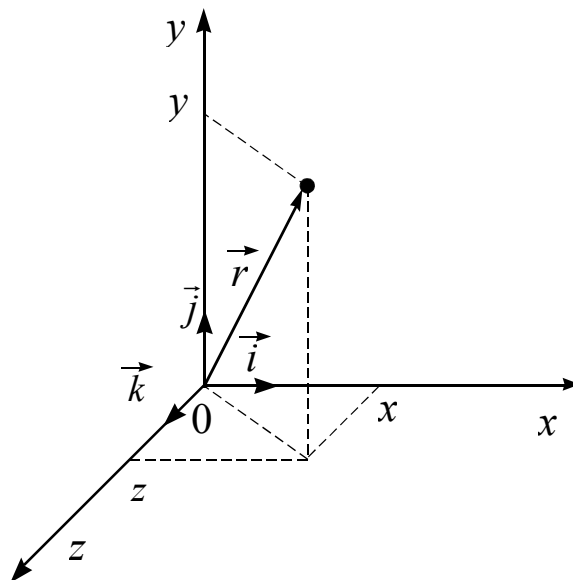


Рис. 1.1

При векторном способе положение точки в пространстве определяется в любой момент времени радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, проведенным из начала координат в точку наблюдения (рис. 1.1):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

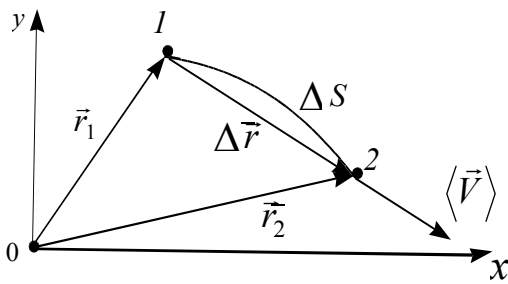


Рис.1.2

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты координатных осей; x, y, z – проекции вектора \vec{r} на соответствующие оси системы координат $x=r_x, y=r_y, z=r_z$. Модуль радиус-вектора определяется как $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Кривая 1-2 (рис.1.2), вдоль которой движется материальная точка, называется *траекторией движения этой точки*. Длина участка траектории, пройденного точкой при ее движении, называется *пройденным путем* ΔS и является скалярной функцией времени $\Delta S = \Delta S(t)$.

Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени, называется *перемещением*. При прямолинейном движении в одном направлении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и тогда $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$.

1.2. Скорость. Ускорение

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина \vec{V} – скорость, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Вектором средней скорости $\langle \vec{V} \rangle$ называется отношение приращения радиус-вектора $\Delta \vec{r}$ точки к промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за который это приращение произошло:

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

При этом направление вектора средней скорости $\langle \vec{V} \rangle$ совпадает с направлением вектора $\Delta \vec{r}$ (рис. 1.2).

При неограниченном уменьшении интервал времени Δt стремится к бесконечно малой величине dt , перемещение $\Delta \vec{r}$ – к $d\vec{r}$, а средняя скорость $\langle \vec{V} \rangle$ – к своему предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью* \vec{V} :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость \vec{V} , таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Вектор \vec{V} направлен по касательной к траектории в сторону движения.

По мере уменьшения Δt путь ΔS все больше будет приближаться к $|\Delta \vec{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$V = |\vec{V}| = \frac{dS}{dt}.$$

Тогда $dS = vdt$ и путь, пройденный точкой за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$, равен $\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} v dt$. Графически пройденный путь можно найти как площадь под кривой АВ на графике зависимости модуля скорости от времени (рис. 1.3).

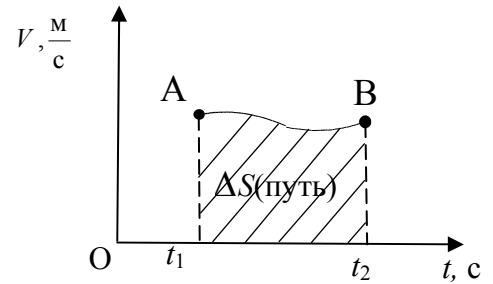


Рис. 1.3

В прямоугольной системе координат

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \text{ где } v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости вычисляется как $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Средней путевой скоростью называют отношение всего пройденного пути ΔS к промежутку времени Δt , за который этот путь был пройден:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Единицей измерения скорости в системе СИ является метр в секунду ($\frac{м}{с}$).

Ускорение – физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и по направлению.

Средним ускорением $\langle \vec{a} \rangle$ называется векторная величина, равная отношению изменения вектора скорости $\Delta \vec{v}$ к интервалу времени Δt , за который это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение есть векторная величина, равная первой производной вектора скорости по времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

В прямоугольной системе координат ускорение записывается в виде:

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z,$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$.

Вектор ускорения \vec{a} при криволинейном движении тела обычно представляют в виде суммы двух составляющих (рис. 1.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где \vec{a}_τ – тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории движения; \vec{a}_n – нормальное ускорение, направленное по нормали к траектории (перпендикулярно касательной) и к центру её кривизны.

Из рисунка видно, что модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

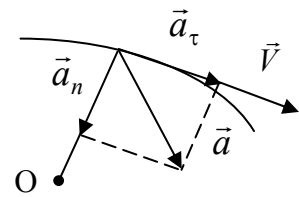


Рис. 1.4

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения только модуля скорости, следовательно,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} .$$

Нормальное ускорение \vec{a}_n определяет быстроту изменения направления скорости и численно находится как

$$a_n = \frac{v^2}{R} ,$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Единицей измерения ускорения в системе СИ является метр на секунду в квадрате $\left(\frac{м}{с^2}\right)$.

1.3. Виды движений

В зависимости от значений тангенциального и нормального ускорений движение можно классифицировать следующим образом:

- 1) $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;
- 2) $\vec{a}_\tau = \text{const}, \vec{a}_n = 0$ – равнопеременное прямолинейное движение;
- 3) $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности;
- 4) $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение.

Равномерное прямолинейное движение

Движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, называется *равномерным прямолинейным движением*.

В этом случае величина и направление мгновенной скорости постоянны, а радиус-вектор и пройденный путь линейно зависят от времени:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \text{const}, \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}t, \\ S &= |\vec{r} - \vec{r}_0| = vt, \end{aligned}$$

где $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$.

Равнопеременное прямолинейное движение

Движение, при котором скорость материальной точки за любые равные промежутки времени изменяется на одинаковую величину, называется *равнопеременным прямолинейным движением*. В этом случае

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \text{const}, \\ \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{a}t, \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{V}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \end{aligned}$$

где $\vec{V}_0 = \vec{V}(t=0)$.

Если направления векторов скорости точки \vec{V} и ускорения \vec{a} - совпадают ($\vec{V} \uparrow \uparrow \vec{a}$), то движение называют *равноускоренным*. В противном случае ($\vec{V} \uparrow \downarrow \vec{a}$) - *равнозамедленным*.

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси y (рис. 2.1). Все точки тела при вращении описывают окружности разных радиусов R , центры которых лежат на оси вращения. За время одного полного оборота T любая точка проходит путь равный $2\pi R$. Следовательно, различные точки тела за время одного оборота проходят разные пути и двигаются с разными линейными скоростями:

$$V = \frac{2\pi R}{T}.$$

Введем характеристики, описывающие вращательное движение твердого тела как единого целого: вектор элементарного углового перемещения $d\vec{\phi}$, угловую скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\epsilon}$. Пусть некоторая точка движется по окружности радиусом R

(рис. 2.2). Ее положение через промежуток времени dt зададим углом $d\phi$. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматривают как векторы. Модуль вектора $d\vec{\phi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. определяется по правилу правого винта.

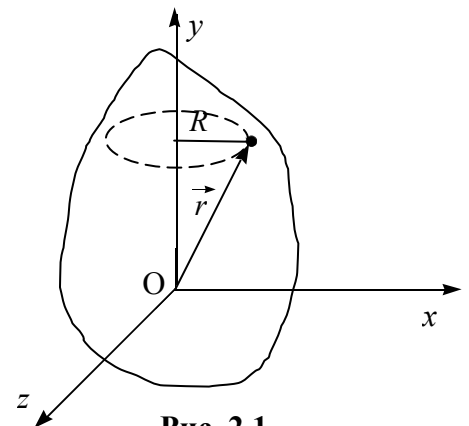


Рис. 2.1

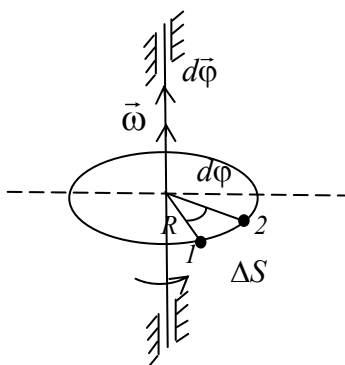


Рис. 2.2

2.1. Угловая скорость

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ называется векторная величина, численно равная первой производной угла поворота по времени, направление которой совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Единицей измерения угловой скорости в системе СИ является *радиан в секунду* $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$. Модуль угловой скорости $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Вращение с постоянной угловой скоростью ($\vec{\omega} = \text{const}$) называется равномерным, тогда

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота за время Δt .

Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения T . Под периодом T понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π . В этом случае

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

отсюда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число ν оборотов, совершаемых телом в единицу времени, равно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Угол поворота

$$\Delta\varphi = 2\pi N,$$

где N – число оборотов, совершенных твердым телом за Δt секунд.

2.2. Угловое ускорение

Вектор $\vec{\omega}$ может меняться с течением времени как за счет изменения величины скорости вращения тела вокруг оси, так и за счет изменения направления вращения. Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется векторная величина, равная первой производной вектора угловой скорости по времени:

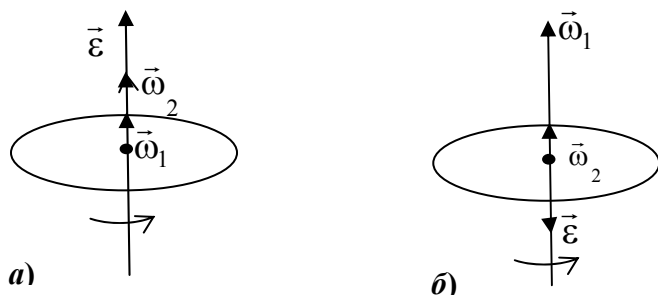


Рис. 2.3

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора приращения угловой скорости $\Delta \vec{\omega}$. При ускоренном движении $\Delta \vec{\omega} \uparrow \vec{\omega}$ и вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} \uparrow \vec{\varepsilon}$), при замедленном движении $\Delta \vec{\omega} \downarrow \vec{\omega}$ и вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен противоположно $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} \downarrow \vec{\varepsilon}$) (рис.2.3). Единицей измерения углового ускорения в системе СИ является *радиан на секунду в квадрате* $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)$.

Равнопеременное вращение можно описать системой уравнений:

$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}(t=0)$ – начальная угловая скорость; $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ – начальный угол поворота; ε – модуль углового ускорения.

2.3. Связь линейных и угловых характеристик

Установим связь между модулями линейной и угловой скоростей:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$V = \omega R.$$

В векторной форме это соотношение записывается в виде векторного произведения $\vec{V} = [\vec{\omega} \vec{r}]$, где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из лежащей на оси вращения точки О начала координат (рис.2.4).

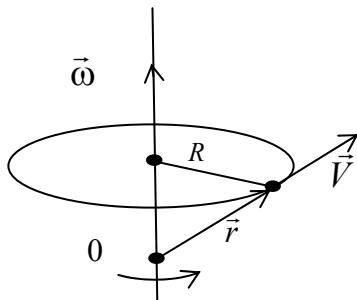


Рис. 2.4

Модуль нормального ускорения точки вращающегося тела равен

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R,$$

где R – расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения.

Модуль тангенциального ускорения равен

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \text{ тогда}$$

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,$$

где ε – модуль углового ускорения. В результате $a_\tau = \varepsilon R$.

Таким образом, линейная скорость V , нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения растут линейно с увеличением расстояния от точки до оси враще-

ния, а все вращательные характеристики (угол поворота $\Delta\varphi$, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$) одинаковы для всех точек твердого тела.

2.4. Примеры решения задач

1. Уравнение движения материальной точки по прямой имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4\text{м}$, $B = 2\text{м/с}$, $C = 0,2\text{м/с}^3$. Найти: 1) положение точки в моменты времени $t_1 = 2\text{с}$, $t_2 = 5\text{с}$; 2) среднюю путевую скорость $\langle V \rangle$ за время, прошедшее между этими моментами; 3) мгновенные скорости V_1 и V_2 в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение $\langle a \rangle$ за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения a_1 и a_2 в указанные моменты времени.

Дано

$$\begin{aligned} x &= A + Bt + Ct^3; \\ A &= 4\text{м}; B = 2\text{м/с}; \\ C &= 0,2\text{м/с}^3; \\ t_1 &= 2\text{с}; t_2 = 5\text{с} \end{aligned}$$

Решение

Положение точки в заданные моменты времени найдем, подставив в уравнения движения числовые значения коэффициентов A , B , C и моментов времени t_1 и t_2 :

$$x(t_1) = 4 + 2 \cdot 2 + 0,2 \cdot 2^3 = 9,6 \text{ (м)},$$

$$x(t_2) = 4 + 2 \cdot 5 + 0,2 \cdot 5^3 = 39 \text{ (м)}.$$

Средняя путевая скорость определяется как путь, пройденный точкой, деленный на время ее движения:

$$1) x_1 = ?; x_2 = ?$$

$$2) \langle V \rangle = ?$$

$$3) V_1 = ?; V_2 = ?$$

$$4) \langle a \rangle = ?$$

$$5) a_1 = ?; a_2 = ?$$

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \\ \langle V \rangle &= \frac{39 - 9,6}{5 - 2} = 9,8 \text{ (м/с)}. \end{aligned}$$

Мгновенная скорость есть первая производная от координаты x по времени: $V_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$.

Подставив численные значения коэффициентов B , C и моментов времени t_1 и t_2 , получим

$$V_1 = V(t_1) = 2 + 3 \cdot 0,2 \cdot 2^2 = 4,4 \text{ (м/с)},$$

$$V_2 = V(t_2) = 2 + 3 \cdot 0,2 \cdot 5^2 = 17 \text{ (м/с)}.$$

Среднее ускорение определяется как отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}, \\ \langle a \rangle &= \frac{17 - 4,4}{5 - 2} = 4,2 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Ускорение точки найдем как первую производную скорости по времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6Ct.$$

В заданные моменты времени

$$a_1 = 6 \cdot 0,2 \cdot 2 = 2,4 (\text{м/с}^2), a_2 = 6 \cdot 0,2 \cdot 5 = 6 (\text{м/с}^2).$$

2. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,5 \text{ м/с}^2$. Определить полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3 \text{ м}$, если точка движется на этом участке со скоростью $V = 2 \text{ м/с}$.

Дано

$$a_\tau = 0,5 \text{ м/с}^2;$$

$$R = 3 \text{ м};$$

$$V = 2 \text{ м/с}$$

$$a = ?$$

Решение

Полное ускорение \vec{a} точки, движущейся по кривой, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения \vec{a}_τ , направленного по касательной к траектории, и нормального \vec{a}_n , направленного к центру кривизны траектории,

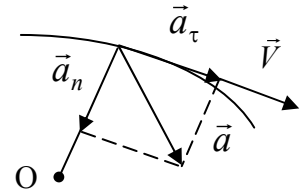
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Так как векторы \vec{a}_τ и \vec{a}_n взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Модуль нормального ускорения a_n точки выражается формулой

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{2^2}{3} \approx 1,33 (\text{м/с}^2).$$



Подставляя численные значения, получим

$$a = \sqrt{0,5^2 + 1,33^2} \approx 1,42 (\text{м/с}^2).$$

3. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью $V_1 = 16 \text{ км/ч}$, а на второй половине его скорость была $V_2 = 12 \text{ км/ч}$. Определить среднюю путевую скорость $\langle V \rangle$ за все время движения.

Дано

$$V_1 = 16 \text{ км/ч};$$

$$V_2 = 12 \text{ км/ч};$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \frac{\Delta S}{2}$$

$$\langle V \rangle = ?$$

Решение

Средняя путевая скорость определяется как путь ΔS , пройденный точкой, деленный на время ее движения Δt :

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, а Δt_1 и Δt_2 — время прохождения велосипедистом соответственно первой и второй половин пути:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{\Delta S}{2V_1}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_2} = \frac{\Delta S}{2V_2}.$$

$$\text{Тогда } \Delta t = \frac{\Delta S}{2V_1} + \frac{\Delta S}{2V_2} = \frac{\Delta S}{2} \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}.$$

В результате получим $\langle V \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2V_1V_2}{V_1+V_2} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 12}{16+12} \approx 13,7$ (км/ч).

3. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Законы Ньютона

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами, которые обуславливают тот или иной характер движения.

В основе так называемой классической, или ньютоновской, механики лежат три закона, сформулированные И. Ньютоном в 1687 г. Законы Ньютона возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Классическая механика является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Опыт показывает, что в природе:

- 1) нет самопроизвольных изменений скоростей;
- 2) отсутствуют мгновенные изменения скоростей.

Тело изменяет свою скорость, когда на него действуют другие тела. Если воздействия со стороны других тел отсутствуют, то скорость тела остается неизменной: $\vec{V} = \text{const}$.

Дадим формулировку *первого закона Ньютона*: *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние*. Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются *инерциальными*. Инерциальной системой отсчета является такая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно другой инерциальной системы. Первый закон Ньютона называют иногда *законом инерции*.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью* тела. Мерой инертности тел является *масса*. *Масса тела* – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. Инертная и гравитационная массы равны друг другу с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения.

Чтобы описать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, введем понятие *силы*. *Сила* – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму или размеры.

Второй закон Ньютона устанавливает связь между мерой взаимодействия (силой \vec{F}), мерой инертности тел (массой m) и ускорением \vec{a} . Подчеркнем, что закон является экспериментальным и в рамках классической механики ($V \ll C = 3 \cdot 10^8$ м/с) его можно записать как

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – векторная сумма всех сил, действующих на тело.

Единица силы в системе СИ – *ньютон* (Н): 1 Н – сила, которая телу массой в 1 кг сообщает ускорение в 1 м/с^2 в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

Второй закон Ньютона называют также основным законом динамики поступательного движения.

Учитывая, что в классической механике масса материальной точки (тела) есть величина постоянная, то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Векторная величина $\vec{p} = m\vec{v}$, численно равная произведению массы тела на его скорость и имеющая направление скорости, называется *импульсом* (*количеством движения*) этого тела. Выражение

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

является более общей формулировкой второго закона Ньютона: *скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе*.

Взаимодействие между телами определяется *третьим законом Ньютона*: *силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению* (рис.3.1).

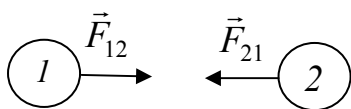


Рис. 3.1

На рис. 3.1 показано взаимодействие двух тел 1 и 2, \vec{F}_{12} – сила, действующая на первое тело со стороны второго, \vec{F}_{21} – сила, действующая на второе тело со стороны первого. Эти силы равны по величине и противоположны по направлению: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Из третьего закона Ньютона следует:

- 1) силы в природе возникают попарно;
- 2) силы взаимодействия не могут компенсировать друг друга, так как приложены к разным телам.

Третий закон Ньютона бывает справедлив не всегда. Вполне строго он выполняется в случае контактных взаимодействий, а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга покоящихся тел.

3.2. Силы в природе

В современной физике различают четыре вида взаимодействий:

- 1) гравитационное (или взаимодействие, обусловленное всемирным тяготением);
- 2) электромагнитное (осуществляемое через электрические и магнитные поля);
- 3) сильное или ядерное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре);
- 4) слабое (ответственное за многие распады элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, которые являются фундаментальными, т. е. их нельзя свести к другим, более простым, силам, а также с упругими силами и силами трения, которые определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Для этих сил можно получить лишь приближенные эмпирические формулы.

3.2.1. Упругие силы

Под действием приложенных к нему сил всякое реальное тело деформируется, т. е. изменяет свою форму и размеры. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется *упругой*.

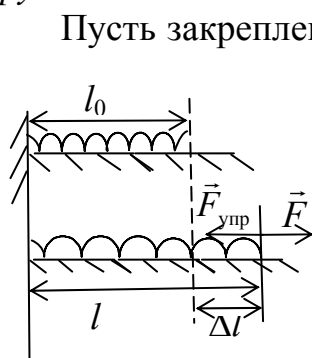


Рис. 3.2

Пусть закрепленная одним концом пружина длиной l_0 лежит свободно на гладком горизонтальном столе: при этом деформация отсутствует. К другому концу пружины приложим внешнюю силу \vec{F} , направленную горизонтально (рис.3.2). Под действием внешней силы \vec{F} пружина получает удлинение Δl , в результате чего в пружине возникает упругая сила $\vec{F}_{упр}$, уравнивающая внешнюю, т.е. $\vec{F} = -\vec{F}_{упр}$. Опыт показывает, что при

небольших деформациях удлинение пружины Δl оказывается пропорциональным действующей внешней силе $\Delta l \sim F$. Это утверждение называется *законом Гука*:

$$F_{упр} = F = k\Delta l,$$

где k – коэффициент жесткости пружины, зависящий от материала и конфигурации пружины; $\Delta l = l - l_0$ – абсолютное удлинение, l_0 – длина пружины в недеформированном состоянии, l – конечная длина пружины.

Силы упругости, возникающие в пружине, стремятся вернуть пружину в исходное (недеформированное) состояние.

3.2.2. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или частей тела друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется *внешним*; а трение между частями одного и того же сплошного тела – *внутренним*. Трение между поверхностями двух твердых тел называют *сухим*. В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытке вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется *силой трения покоя*.

Законы сухого трения:

- 1) максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел;
- 2) эти силы оказываются приблизительно пропорциональными величине силы нормального давления, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_N.$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом трения*. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей. В случае скольжения коэффициент трения является функцией скорости;

- 3) при небольших скоростях сила трения скольжения растет линейно со скоростью:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k\vec{V}$$

(знак «минус» означает, что сила трения направлена в сторону, противоположную скорости).

3.2.3. Сила тяжести и вес тела

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое принято обозначать буквой \vec{g} . Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой m действует сила, называемая *силой тяжести*:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}.$$

Когда тело покоится относительно поверхности Земли, сила тяжести уравновешивается силой реакции опоры или подвеса (рис.3.3).

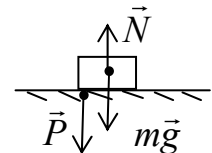


Рис. 3.3

Сила \vec{P} , с которой тело действует на опору или подвес, удерживающее тело от свободного падения, называется *весом тела*. Эта сила численно равна mg лишь в том случае, если тело и опора (подвес) неподвижны относительно Земли.

Рассмотрим пример: подвес в виде укрепленной на рамке пружины движется вместе с телом с ускорением \vec{a} (рис.3.4). Уравнение движения тела имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

По третьему закону Ньютона тело действует на пружину с силой $\vec{P} = -\vec{T}$, которая по определению представляет собой вес тела. Тогда уравнение движения принимает вид

$$m\vec{g} - \vec{P} = m\vec{a}.$$

Вес тела в общем случае будет

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Если: 1) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{g}$, то $P = m(g + a)$, что больше силы тяжести mg ;

2) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{g}$, то $P = m(g - a)$, что меньше силы тяжести mg ;

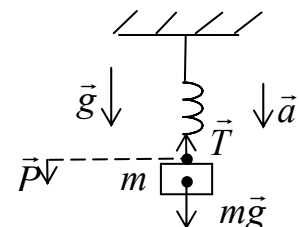


Рис. 3.4

3) $\vec{a} = 0$, то $P = mg$;

4) $\vec{a} = \vec{g}$, то $P = 0$ и наступает состояние невесомости.

Следует помнить, что сила тяжести и вес приложены к разным телам: сила тяжести к самому телу, а вес тела к опоре или подвесу. Кроме того, сила тяжести численно всегда равна mg , а вес тела зависит от ускорения, с которым движется тело.

3.3. Закон всемирного тяготения

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен И.Ньютоном и называется *законом всемирного тяготения*. Согласно этому закону, *сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна произведению масс этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Здесь $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – коэффициент пропорциональности, называемый *гравитационной постоянной*. Направлена сила вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие материальные точки (рис. 3.5):

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12},$$

где \vec{e}_{12} – единичный вектор, направленный от точки 1 к точке 2.

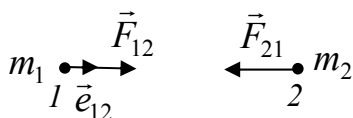


Рис. 3.5

Для определения силы взаимодействия протяженных тел их нужно разбить на точечные (элементарные) массы Δm , каждую из которых можно было бы принять за материальную точку. Рассчитать силу притяжения между попарно взятыми элементарными массами тел, а затем геометрически сложить все силы. Если тела однородны и имеют правильную геометрическую форму, вычисления значительно упрощаются.

Гравитационное поле. Гравитационное взаимодействие, обусловленное всемирным тяготением, осуществляется через гравитационное поле. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства, т.е. создает в нем гравитационное поле. Это поле проявляет себя в том, что на всякое помещенное в него тело действует гравитационная сила. Введем понятие напряженности гравитационного поля \vec{G} , по которой можно судить об «интенсивности» поля:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где \vec{F} – гравитационная сила, действующая на материальную точку массой m в данной точке поля. Размерность \vec{G} совпадает с размерностью ускорения. Вблизи

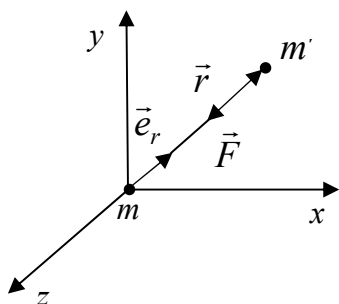


Рис. 3.6

поверхности Земли $\vec{G} = \vec{g}$, где \vec{g} – ускорение свободного падения.

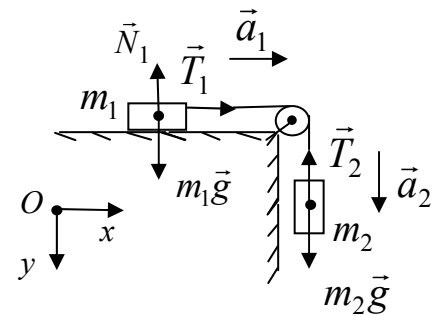
$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{e}_r$ – напряженность поля, создаваемого материальной точкой массой m , \vec{e}_r – орт радиуса-вектора, проведенного из материальной точки в данную точку поля, r – модуль этого радиуса-вектора.

Пусть гравитационное поле создается закрепленной в начале координат материальной точкой массой m . Тогда на материальную точку массой m' , находящуюся в точке с радиусом–вектором \vec{r} , будет действовать сила \vec{F} (рис.3.6):

$$\vec{F} = \vec{G}m' = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \vec{e}_r.$$

3.4. Примеры решения задач

1. На гладком столе стоит тележка массой $m_1 = 4$ кг. К тележке привязали один конец невесомого и нерастяжимого шнура, перекинутого через невесомый блок. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирию массой $m_2 = 1$ кг?



Дано

$m_1 = 4$ кг;
 $m_2 = 1$ кг;
 $g = 9,8$ м/с²

$a = ?$

Решение

Так как шнур невесомый и нерастяжимый, а масса блока $m_{\text{бл}} = 0$, то

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T, \quad |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a.$$

По условию задачи поверхность стола гладкая, следовательно, силой трения тела массой m_1 о поверхность можно пренебречь. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1, \quad (1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2. \quad (2)$$

Спроектировав их на выбранные оси, получим

оx: $m_1 a_1 = T_1,$

оу: $0 = m_1 g - N_1$ и $m_2 a_2 = m_2 g - T_2.$

С учетом приведенных ранее соотношений уравнения примут вид

$$m_1 a = T,$$

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Решив систему, получим $a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. После подстановки численных значений $a = 1,96$ м/с².

2. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\beta = 30^\circ$, начинает соскальзывать тело. Найти скорость тела в конце второй секунды движения, если коэффициент трения тела о плоскость равен $\mu = 0,2$.

Дано
 $\beta = 30^\circ$;
 $V_0 = 0$;
 $\mu = 0,2$;
 $g = 9,8 \text{ м/с}^2$;
 $t = 2 \text{ с}$

 $V = ?$

Решение

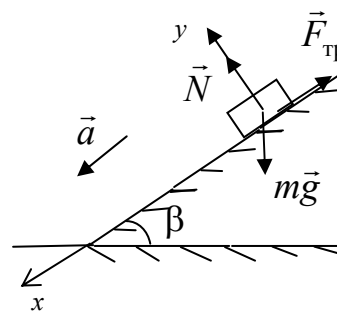
Запишем уравнение движения тела:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Спроектировав его на выбранные оси, получим

$$\text{оx: } ma = mg \sin \beta - F_{\text{тр}},$$

$$\text{оу: } 0 = N - mg \cos \beta.$$



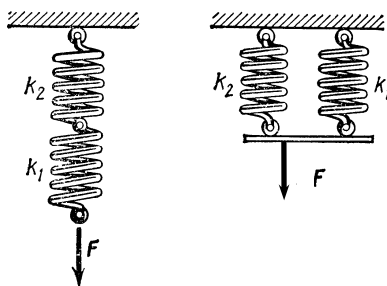
При скольжении $F_{\text{тр}} = \mu N$. Тогда получаем

$$ma = mg \sin \beta - \mu mg \cos \beta,$$

откуда $a = g(\sin \beta - \mu \cos \beta)$.

Движение тела по наклонной плоскости является прямолинейным равноускоренным ($\vec{a} = \text{const}$), тогда $V = at$, так как $V_0 = 0$. В итоге имеем $V = gt(\sin \beta - \mu \cos \beta)$. С учетом численных значений $V = 9,8 \cdot 2 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,866) \approx 6,4 \text{ (м/с)}$.

3. Определить жесткость k системы двух невесомых пружин при последовательном и параллельном их соединении. Жесткость пружин $k_1 = 2 \text{ кН/м}$ и $k_2 = 6 \text{ кН/м}$.



Дано
 $k_1 = 2 \text{ кН/м}$;
 $k_2 = 6 \text{ кН/м}$

 $k = ?$

Решение

При последовательном соединении смещение Δl у пружин будет разное, однако, согласно третьему закону Ньютона, силы упругости, возникающие в пружинах, будут равны, то есть

$$F_{\text{упр}\Sigma} = F_{\text{упр}1} = F_{\text{упр}2}, F_{\text{упр}1} = k_1 \Delta l_1, F_{\text{упр}2} = k_2 \Delta l_2.$$

При этом $F_{\text{упр}\Sigma} = k(\Delta l_1 + \Delta l_2)$.

Выразив Δl_1 и Δl_2 через силу упругости $F_{\text{упр}\Sigma}$ и подставив в выражение

для $F_{\text{упр}\Sigma}$, получим равенство $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, откуда

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}; \quad k = \frac{2 \cdot 6}{2 + 6} = 1,5 \text{ кН/м.}$$

При параллельном соединении смещение Δl у пружин одинаковое. Следовательно, $F_{\text{упр}\Sigma} = k\Delta l = F_{\text{упр}1} + F_{\text{упр}2}$. Тогда получаем $k\Delta l = k_1\Delta l + k_2\Delta l$,

откуда $k = k_1 + k_2$; $k = 2 + 6 = 8 \text{ кН/м.}$

4. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определите, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в $n = 3$ раза за счет увеличения их размеров.

Дано

$$m_1 = m_2 = m;$$

$$R_1 = R_2 = R;$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho;$$

$$M = nm,$$

$$n = 3$$

$$\frac{F_3}{F} = ?$$

Решение

Запишем уравнение для закона всемирного тяготения:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $r = 2R$. Тогда $F = \gamma \frac{m^2}{4R^2}$.

Из формулы для расчета массы через плотность и объем найдем зависимость радиуса от массы:

$$m = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

следовательно, $R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$.

$$\text{Тогда } F_3 = \gamma \frac{M^2}{4R_3^2} = \gamma \frac{n^2 m^2}{4 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3nm}{4\pi\rho}\right)^2}} = \frac{n^2}{n^{2/3}} F = n^{4/3} F.$$

Таким образом, $\frac{F_3}{F} = n^{4/3} = 4,3$.

5. Планета массой M движется по окружности вокруг Солнца со скоростью V (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Определите период обращения этой планеты вокруг Солнца.

Дано

$$M;$$

$$M_C;$$

$$V$$

$$T = ?$$

Решение

Период обращения, согласно определению, выражается по формуле

$$T = \frac{2\pi R}{V}, \text{ где } R \text{ – неизвестная величина, характеризующая}$$

радиус обращения планеты вокруг Солнца.

Для нахождения R запишем уравнение движения планеты:

$$M \frac{V^2}{R} = \gamma \frac{MM_{\text{С}}}{R^2},$$

где $M_{\text{С}}$ – масса Солнца.

Выражая из данной формулы R и подставляя в выражение для периода, получаем $T = \frac{2\pi\gamma M_{\text{С}}}{V^3}$.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

4.1. Механическая система тел

Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется *механической системой*. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются *внутренними*. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются *внешними*. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* или *изолированной*.

Для замкнутых систем оказываются неизменными (сохраняются) три физические величины: импульс, энергия и момент импульса. В соответствии с этим имеют место три закона сохранения – *закон сохранения импульса, закон сохранения энергии и закон сохранения момента импульса*.

Вывод законов сохранения осуществляется на основании законов Ньютона. Все законы сохранения являются точными законами, строго выполняющимися и в релятивистской области.

4.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N тел, массы и скорости которых соответственно равны m_1, m_2, \dots, m_N и $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_N$. Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_N$ – равнодействующие всех внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ – равнодействующие всех внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из N тел механической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1) &= \vec{f}_1 + \vec{F}_1, \\ \frac{d}{dt}(m_2\vec{V}_2) &= \vec{f}_2 + \vec{F}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_N\vec{V}_N) &= \vec{f}_N + \vec{F}_N. \end{aligned}$$

Сложим почленно все эти уравнения. Учитывая, что геометрическая сумма всех внутренних сил по третьему закону Ньютона равна нулю, получим

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots + m_N\vec{V}_N) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \text{ или}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

где $m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$ – импульс i -й материальной точки. Тогда

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Сумма импульсов частиц, образующих механическую систему, называется импульсом системы $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$. Окончательно запишем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

т.е. скорость изменения импульса механической системы равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. При отсутствии внешних сил $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Следовательно, для замкнутой системы импульс \vec{p} постоянен, т.е.

$\vec{p} = \text{const}$. Это утверждение составляет содержание закона сохранения импульса, который формулируется так: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Для незамкнутой системы импульс остается постоянным при условиях:

- 1) внешние силы в сумме дают нуль, т.е. $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$;
- 2) сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление есть нуль, тогда сохраняется составляющая импульса в этом направлении, т.е. если $\sum_{i=1}^N F_{xi} = 0$, то $p_x = \text{const}$;
- 3) внешние силы малы по сравнению с внутренними силами.

4.3. Энергия, работа, мощность

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Энергия не возникает из ничего и не исчезает бесследно. Она может только переходить из одной формы в другую. С различными формами движения материи связаны различные виды энергии: механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная и др.

Рассмотрим механическую энергию. Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественной характеристики процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике вводится понятие работы силы. Таким образом, работу A можно определить как меру изменения энергии ΔE тела или системы тел:

$$A = \Delta E = E_2 - E_1,$$

где E_1 и E_2 – энергии тела соответственно в начальном и конечном состояниях.

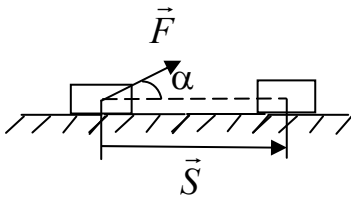


Рис. 4.1

Пусть тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила \vec{F} , направление которой составляет угол α с вектором перемещения \vec{S} (рис. 4.1). Работа A этой силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{F}\vec{S} = FS \cos \alpha.$$

В общем случае сила может меняться как по величине, так и по направлению. Если рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r}$, то силу \vec{F} можно считать постоянной, а движение точки ее приложения – прямолинейным. Элементарной работой силы \vec{F} на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr \cos \alpha = F_r dr,$$

где F_r – проекция вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$ (рис. 4.2).

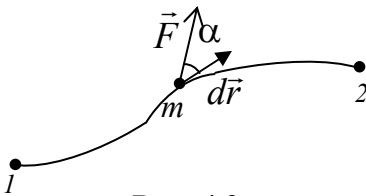


Рис. 4.2

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу:

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 Fdr \cos \alpha = \int_1^2 F_r dr.$$

Единицей работы в системе СИ является *джоуль* (Дж). 1 Дж – это работа, совершаемая силой в 1Н при перемещении на 1м вдоль направления действия силы (1Дж = 1Н·1м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, введем понятие мощности N . Различают среднюю $\langle N \rangle$ и мгновенную N мощности:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}, \quad N = \frac{dA}{dt},$$

где A – работа, совершенная за время Δt .

За время dt сила \vec{F} совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$. Тогда мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени,

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V},$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы \vec{F} на вектор скорости \vec{V} , с которой движется точка приложения этой силы.

Мощность N – скалярная величина. Единица мощности – *ватт* (Вт). 1Вт – мощность, при которой за время 1с совершается работа в 1Дж (1Вт = 1Дж/с).

4.4. Кинетическая и потенциальная энергии

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы.

Пусть на тело действует сила \vec{F} , которая, совершая работу, вызывает движение этого тела. Энергия движущегося тела возрастает на величину совершенной работы.

Тело массой m , движущееся со скоростью \vec{V} , обладает кинетической энергией T , равной

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Из формулы видно, что кинетическая энергия зависит от массы и скорости тела, т.е. является функцией состояния его движения. При выводе формулы движение тела рассматривалось в инерциальной системе отсчета. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела будет различна. Следовательно, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

Изменение кинетической энергии системы (тела) равно работе всех сил, действующих в системе:

$$A_{\text{всех сил}} = \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}.$$

Потенциальная энергия – часть общей механической энергии системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Взаимодействие между телами осуществляется, как правило, посредством силовых полей (например, поля гравитационных сил, поля упругих сил). Поле, не меняющееся во времени, называется *стационарным*. Для стационарного поля может оказаться, что работа, совершаемая над телом силами поля, не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной точек пути. Такие поля называются *потенциальными*, а силы, действующие в них, – *консервативными*.

Для консервативных сил справедливо выражение $\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0$. К ним относятся гравитационные, упругие, кулоновские силы. Таким образом, консервативные силы можно определить двумя способами:

- 1) как силы, работа которых не зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое;
- 2) как силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории, по которой тело перемещается из одной точки в другую, то такие силы называются *неконсервативными* (к ним относятся, в частности, диссипативные силы – сила трения, сила сопротивления).

Тело, находясь в потенциальном поле, обладает потенциальной энергией Π .

Работа консервативных сил равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком «минус», т.е. она совершается за счет убыли потенциальной энергии

$$A_{\text{конс. сил}} = -\Delta\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1).$$

Абсолютное значение потенциальной энергии зависит от выбора начала ее отсчета, т.е. выбора положения тела, где значение его потенциальной энергии равно нулю (нулевой уровень отсчета).

Конкретный вид функции Π зависит от характера силового поля. Например:

1) потенциальная энергия тела массой m , находящегося в однородном поле гравитационных сил (в поле силы тяжести) и поднятого на высоту h над поверхностью Земли, где его потенциальная энергия $\Pi_0 = 0$, равна

$$\Pi = mgh.$$

Начало отсчета выбирается произвольно, поэтому потенциальная энергия может принимать и отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна*);

2) потенциальная энергия упруго-деформированного тела (пружины) равна

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости (для пружины – жесткость); x – величина деформации.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия, равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi.$$

4.5. Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии – результат обобщения многих экспериментальных фактов. Идея закона принадлежит М.В. Ломоносову, а количественная формулировка закона дана немецкими учеными Ю. Майером и Г. Гельмгольцем.

Итак, *в замкнутой системе тел, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется во времени:*

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Такие системы называются *замкнутыми консервативными*. Внутри системы могут происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно, но полная (суммарная) энергия остается неизменной.

В замкнутых системах, в которых действуют неконсервативные силы (сила трения, сила сопротивления), полная механическая энергия системы не сохраняется:

$$E \neq \text{const.}$$

Изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил:

$$A_{\text{неконс.сил}} = \Delta E.$$

В этом случае закон сохранения механической энергии не справедлив. Но при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. *Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.* В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии – сущность неумираемости материи и ее движения.

4.6. Соударения тел

Рассмотрим примеры применения законов сохранения импульса и энергии на примере соударения тел. Ограничимся рассмотрением центрального удара двух однородных шаров.

Удар – изменение состояния движения тела вследствие кратковременного взаимодействия его с другим телом. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. Из соображений симметрии ясно, что после удара шары будут двигаться вдоль той же прямой. Предполагаем, что шары движутся поступательно, т.е не вращаясь.

Основные признаки удара:

- 1) кратковременность;
- 2) внутренние силы, возникающие при ударе, существенно больше внешних сил, следовательно, внешними силами можно пренебречь (по сравнению с внутренними) и считать систему замкнутой;
- 3) при ударе происходит изменение относительных скоростей тел.

Различают два предельных вида удара:

- 1) абсолютно упругий удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие немеханические виды;
- 2) абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия частично или полностью переходит в другие виды энергии, например в тепловую.

Обозначим массы шаров m_1 и m_2 , скорости шаров до удара \vec{V}_1 и \vec{V}_2 , скорости шаров после удара \vec{V}'_1 и \vec{V}'_2 .

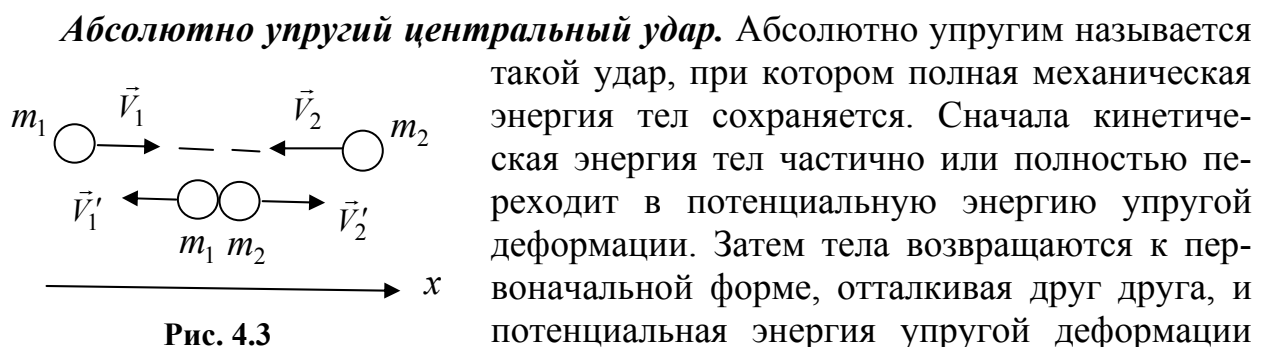


Рис. 4.3

снова переходит в кинетическую энергию тел.

Запишем законы сохранения импульса и механической энергии (рис. 4.3):

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2,$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}.$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$m_1(\vec{V}_1 - \vec{V}'_1) = m_2(\vec{V}'_2 - \vec{V}_2), \quad \frac{m_1}{2}(V_1^2 - V_1'^2) = \frac{m_2}{2}(V_2'^2 - V_2^2).$$

Учитывая равенства $V_1^2 - V_1'^2 = (\vec{V}_1 - \vec{V}'_1)(\vec{V}_1 + \vec{V}'_1)$, $V_2'^2 - V_2^2 = (\vec{V}'_2 - \vec{V}_2)(\vec{V}'_2 + \vec{V}_2)$, можно сделать вывод, что $\vec{V}_1 + \vec{V}'_1 = \vec{V}_2 + \vec{V}'_2$.

Решая полученное уравнение совместно с записанным ранее законом сохранения импульса для соударяющихся тел, найдем скорости шаров после удара:

$$\vec{V}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{V}_1 + 2m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{V}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{V}_2 + 2m_1\vec{V}_1}{m_1 + m_2}.$$

Особый интерес представляет случай, когда массы шаров одинаковы $m_1 = m_2$. При этом условии получается, что $\vec{V}'_1 = \vec{V}_2$ и $\vec{V}'_2 = \vec{V}_1$, т.е. происходит обмен скоростями. В частности, если один из шаров до соударения покоился, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально другой шар, который после удара окажется неподвижным.

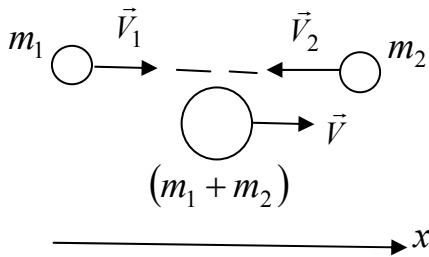


Рис. 4.4

Абсолютно неупругий центральный удар. Абсолютно неупругим называется удар, при котором потенциальная энергия упругой деформации не возникает, а кинетическая энергия тел частично или полностью переходит в немеханические виды. Тела соединяются и продолжают двигаться дальше как единое целое

или останавливаются. Скорость совместного движения находится из закона сохранения импульса (рис. 4.4):

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V},$$

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Механическая энергия системы тел при абсолютно неупругом ударе не сохраняется. Часть механической энергии ΔE тел переходит в немеханические виды, например, выделяется в виде тепла Q :

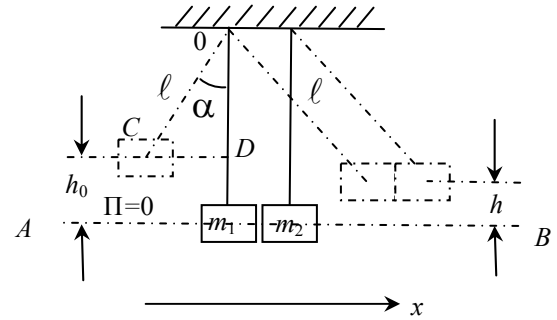
$$Q = \left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_1 - V_2)^2.$$

4.7. Примеры решения задач

1. Два тела массой m_1 и m_2 подвешены на гибких, нерастяжимых и невесомых нитях длиной l каждая, как показано на рисунке. Тело m_1 отклонили на угол α и отпустили. Считая соударение тел абсолютно неупругим, а время соударения пренебрежимо малым, определить высоту h , на которую поднимутся тела после удара.

Дано
 $m_1, m_2,$
 $l, \alpha;$
 удар неупругий
 $h = ?$

Решение
 На уровне линии AB , проходящей через центры масс тел в первоначальном состоянии, полагаем значение потенциальной энергии Π равной нулю.



После неупругого взаимодействия оба тела поднимутся на высоту h . Считаем систему тел (m_1, m_2 , Земля) замкнутой (например, отсутствуют силы трения о воздух, в подвеске и др.). После удара в системе действуют: силы тяжести, являющиеся консервативными, и силы натяжения нитей, которые работы по перемещению тел не совершают.

Закон сохранения механической энергии запишем в виде:

$$(m_1 + m_2)gh = (m_1 + m_2) \frac{V^2}{2}, \quad (1)$$

где V – скорость, приобретенная телами за период кратковременного взаимодействия. Отсюда $h = \frac{V^2}{2g}$.

Скорость V находится из закона сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}, \quad (2)$$

где $\vec{V}_2 = 0$ (тело m_2 до удара покоилось).

Тогда в проекции на ось x

$$m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V,$$

откуда

$$V = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Неизвестная величина скорости V_1 (скорость подлета тела m_1 к телу m_2) находится из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_0 = m_1 \frac{V_1^2}{2}, \quad V_1^2 = 2gh_0.$$

Величина h_0 находится из прямоугольного треугольника CDO :

$$h_0 = l - l \cos \alpha = 2l \sin^2 \alpha / 2.$$

$$\text{Искомая величина } h = \frac{V^2}{2g} = \frac{m_1^2 V_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = 2l \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \alpha / 2.$$

$$\text{При } m_1 = m_2 = m \text{ высота подъема тел } h = \frac{l}{2} \sin^2 \alpha / 2.$$

2. Допустим, что в предыдущей задаче происходит абсолютно упругое соударение. Чему в этом случае равна скорость второго тела сразу после удара и высота h , на которую оно поднимется?

Дано

$m_1, m_2,$

$l, \alpha;$

удар упругий

$h = ? V_2' = ?$

Решение

Обозначим искомую скорость V_2' . При абсолютно упругом соударении выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. Используя из предыдущей задачи обозначение скорости подлета первого тела ко второму V_1 , запишем указанные законы:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 &= m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2', \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} &= \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}, \end{aligned}$$

где $\vec{V}_2 = 0$; \vec{V}_1', \vec{V}_2' - скорости тел после соударения.

В проекции на ось x :

$$m_1 V_1 = m_1 V_1' + m_2 V_2',$$

$$m_1 V_1^2 = m_1 V_1'^2 + m_2 V_2'^2.$$

После преобразования система уравнений принимает вид

$$m_1 (V_1 - V_1') = m_2 V_2', \quad (1)$$

$$m_1 (V_1^2 - V_1'^2) = m_2 V_2'^2. \quad (2)$$

Разложив разность квадратов в уравнении (2), с учетом (1) получаем соотношение:

$$V_1' = V_2' - V_1. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), получаем

$$V_2' = \frac{2m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Значение V_1 берем из решения предыдущей задачи:

$$V_1 = \sqrt{2gh_0},$$

где $h_0 = 2l \sin^2 \alpha / 2$.

В итоге искомая величина скорости второго тела после удара равна

$$V_2' = \frac{4m_1\sqrt{gl}}{m_1 + m_2} \sin \alpha / 2.$$

Высота h , на которую поднимется тело m_2 после абсолютно упругого соударения, определяется из закона сохранения энергии:

$$m_2gh = m_2 \frac{V_2'^2}{2},$$

откуда $h = \frac{V_2'^2}{2g}$.

Окончательно имеем $h = \frac{8m_1^2 l}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \alpha / 2$.

При $m_1 = m_2 = m$ получаем $h = 2l \sin^2 \alpha / 2$.

3. Тело массой $m = 1$ кг скользит сначала по наклонной плоскости высотой $h = 1$ м и длиной склона $S_1 = 10$ м, а затем по горизонтальной поверхности. Коэффициент трения на всем пути $\mu = 0,05$. Найти: а) кинетическую энергию T тела у основания плоскости; б) скорость V тела у основания плоскости; в) расстояние S_2 , пройденное телом по горизонтальной поверхности до остановки.

Дано:

$m = 1$ кг;

$h = 1$ м;

$S_1 = 10$ м;

$\mu = 0,05$

а) $T = ?$

б) $V = ?$

в) $S_2 = ?$

Решение

По закону сохранения энергии:

$$A_{\text{неконс. сил}} = \Delta E.$$

В нашем случае в верхней точке траектории тело обладает энергией $T=0$, $\Pi=mgh$; у основания плоскости:

$$T = \frac{mV^2}{2}, \quad \Pi=0. \text{ Следовательно,}$$

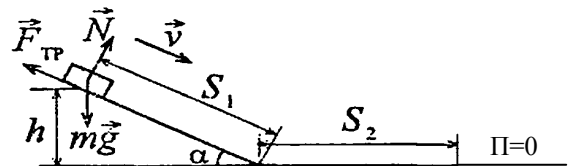
$$\frac{mV^2}{2} - mgh = A_{\text{мп}}, \quad \frac{mV^2}{2} - mgh = -F_{\text{мп}} S_1;$$

а) $T = \frac{mV^2}{2}$. С учетом того, что $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, где $\cos \alpha = \frac{\sqrt{S_1^2 - h^2}}{S_1}$, по-

лучаем $T = mg(h - \mu \sqrt{S_1^2 - h^2}) = 1 \cdot 9,8 \cdot (1,0 - 0,05 \sqrt{100 - 1}) = 4,9$ Дж;

б) $V = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,9}{1}} = 3,1$ м/с;

в) на участке S_2 по теореме об изменении кинетической энергии тела энергия, которую тело имеет у основания наклонной плоскости, идет на совершение ра-



боты против силы трения на горизонтальной поверхности, т.е.

$$T = F_{mp} S_2 = \mu mg S_2, \text{ откуда найдем } S_2 = \frac{T}{\mu mg} = \frac{4,9}{0,05 \cdot 1 \cdot 9,8} = 10 \text{ м.}$$

4. Автомобиль массой $m=2$ т равномерно движется в гору с уклоном 4 м на каждые 100 м пути. Коэффициент трения $\mu = 0,08$. Найти работу A , совершаемую двигателем автомобиля на пути $S=3$ км, и мощность N развиваемую двигателем, если известно, что путь S был пройден за время $t = 4$ мин.

Дано

$$m = 2000 \text{ кг;}$$

$$h = 4 \text{ м;}$$

$$l = 100 \text{ м;}$$

$$\mu = 0,08;$$

$$S = 3000 \text{ м;}$$

$$t = 240 \text{ с}$$

$$\text{а) } A = ?$$

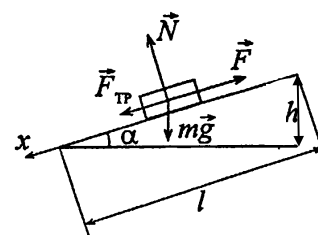
$$\text{б) } N = ?$$

Решение

В случае равномерного движения автомобиля его ускорение $a = 0$. Тогда, согласно второму закону Ньютона, в проекции на ось x сила тяги двигателя:

$$F = F_{mp} + mg \sin \alpha,$$

$$\text{или } F = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha), \text{ где } \sin \alpha = h/l, \cos \alpha = \sqrt{1 - h^2/l^2}.$$



Тогда

а) работа постоянной силы F на пути S будет определяться по формуле

$$A = FS = mgS(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = 2000 \cdot 9,8 \cdot 3000 \left(0,08 \cdot \sqrt{1 - \frac{4^2}{100^2}} + \frac{4}{100} \right) = 7 \text{ МДж;}$$

$$\text{б) мощность двигателя, согласно определению, } N = \frac{A}{t} = \frac{7 \cdot 10^6}{240} = 29,2 \text{ кВт.}$$

5. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

5.1. Момент инерции

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции. Физически момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Скалярная величина $J = mr^2$ называется *моментом инерции материальной точки m относительно оси вращения z* (r – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения). Единицей измерения момента инерции в системе СИ является *килограмм - метр в квадрате* ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Моментом инерции J системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс m_i материальных точек системы на квадраты их расстояний r_i^2 до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_m r^2 dm,$$

где интегрирование производится по всей массе тела (по всему объему).

Момент инерции сложного тела J_T равен сумме моментов инерции его составных частей (рис. 5.1):

$$J_T = J_1 + J_2 + J_3.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно другой параллельной оси определяется *теоремой Штейнера*: момент инерции тела J относительно оси вращения OO' равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m на квадрат расстояния a между осями (рис. 5.2):

$$J = J_C + ma^2.$$

Величина момента инерции тела зависит от массы тела и её распределения относительно оси вращения.

Приведем значения моментов инерции некоторых однородных тел (табл. 5.1), расчет которых представлен в п.5.6.

Таблица 5.1

Твердое тело	Положение оси вращения	Момент инерции
1. Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
2. Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его край	$\frac{ml^2}{3}$
3. Кольцо (цилиндр) с радиусами R_1 (внутренний) и R_2 (внешний)	Ось симметрии	$\frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}$
4. Сплошной цилиндр или диск радиусом R ($R_1 = 0, R_2 = R$)	Ось симметрии	$\frac{mR^2}{2}$
5. Полый тонкостенный цилиндр радиусом R , обруч ($R_1 \approx R_2 = R$)	Ось симметрии	mR^2
6. Сплошной шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2mR^2}{5}$

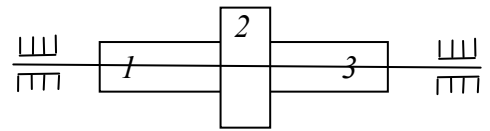


Рис. 5.1

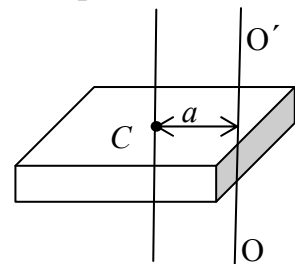


Рис. 5.2

5.2. Момент силы

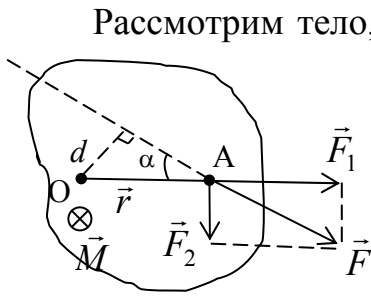


Рис. 5.3

Рассмотрим тело, которое может вращаться в горизонтальной плоскости относительно оси, проходящей через точку O (рис. 5.3). В точке A к телу приложена горизонтальная сила \vec{F} . Проведем из точки O в точку A вектор \vec{r} и разложим силу \vec{F} на две составляющие: силу \vec{F}_1 , направленную вдоль вектора \vec{r} , и силу \vec{F}_2 , направленную перпендикулярно этому вектору. Из опыта известно, что сила \vec{F}_1 не будет вызывать вращательное движение.

Вращение тела является результатом действия силы \vec{F}_2 . Характеристики вращательного движения (угловая скорость и ускорение) определяются не только величиной силы \vec{F}_2 , но и расстоянием от оси вращения до точки приложения этой силы.

Введем понятие *момента силы*. Моментом силы \vec{F} относительно неподвижной точки O (рис. 5.3) называется физическая величина \vec{M} , определяемая векторным произведением вектора \vec{r} на силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

Вектор \vec{M} лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости векторов \vec{r} и \vec{F} , а его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \vec{r} к \vec{F} (рис. 5.4). Модуль момента силы равен

$$M = rF \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} . Произведение $r \sin \alpha = d$ (рис. 5.3) называется *плечом силы* \vec{F} относительно точки O , т.е. плечо силы – это кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы. Тогда модуль момента силы можно представить как произведение силы на плечо:

$$M = Fd.$$

Единицей момента силы в системе СИ является *ньютон - метр* (Н·м).

Моментом силы \vec{F} относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси. Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z (рис. 5.5).

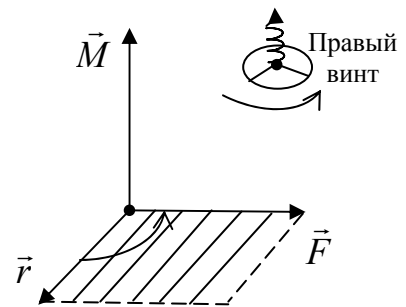


Рис. 5.4

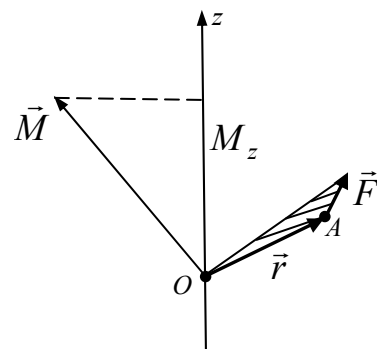


Рис. 5.5

5.3. Момент импульса

Моментом импульса (количества движения) \vec{L} материальной точки A относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{V}],$$

где \vec{r} – вектор, проведенный из точки O в точку A ; $\vec{p} = m\vec{V}$ – импульс материальной точки (рис. 5.6). Направление вектора \vec{L} совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \vec{r} к \vec{p} . Модуль момента импульса равен

$$L = rp \sin \alpha = rmV \sin \alpha = pl,$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{p} . Произведение $r \sin \alpha = l$ называется плечом вектора \vec{p} относительно точки O .

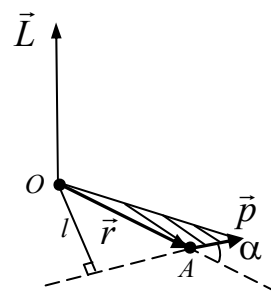


Рис. 5.6

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса \vec{L} , определенного относительно произвольной точки O данной оси (рис. 5.7). Значение момента импульса L_z не зависит от выбора положения точки O на оси z .

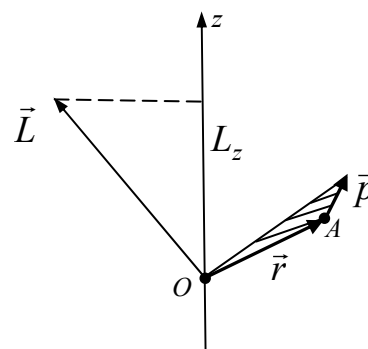


Рис. 5.7

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z , образующей правый винт с направлением его вращения, каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью V_i . Скорость частицы перпендикулярна этому радиусу, т.е. $\alpha_i = 90^\circ$ и $\sin \alpha_i = 1$. Тогда момент импульса отдельной частицы относительно оси z можно представить в виде

$$L_{iz} = m_i V_i r_i.$$

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i V_i r_i.$$

Учитывая, что $V_i = \omega r_i$, где ω – угловая скорость вращения, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z .

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость.

Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, момент импульса относительно любой точки этой оси определяется по формуле:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (5.1)$$

5.4. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Наиболее общая форма записи основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (5.2)$$

где \vec{L} – момент импульса тела относительно неподвижной точки O ; \vec{M} – суммарный момент всех сил, действующих на тело, определенный относительно той же точки O .

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z , то основное уравнение динамики вращательного движения можно записать как

$$J\varepsilon_z = M_z, \quad (5.3)$$

где J – момент инерции тела относительно оси z ; ε_z – проекция углового ускорения на ось z ; M_z – суммарный момент всех сил, действующих на тело, относительно оси z .

5.5. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращения

Согласно уравнению (5.2), момент импульса системы материальных точек (тела) может изменяться под действием момента внешних сил. Отсюда следует важный вывод – закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы частиц относительно неподвижной точки O остается постоянным во времени.*

Таким образом, если $\vec{M} = 0$, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ и } \vec{L} = \text{const}. \quad (5.4)$$

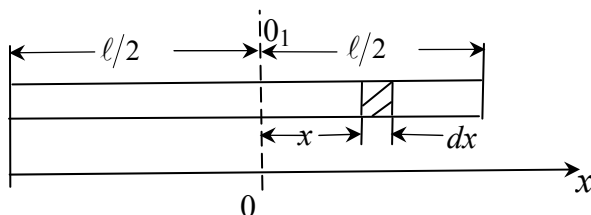
Кинетическая энергия вращательного движения определяется по формуле

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (5.5)$$

где J – момент инерции твердого тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения.

5.6. Примеры решения задач

1. Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через центр массы (середину стержня).



Дано

l ;

m

$J_{OO_1}=?$

Решение

Момент инерции рассчитываем по формуле $J = \int r^2 dm$,

где $r = x$, $dm = \frac{m}{l} dx$.

В силу симметрии $J_{OO_1} = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{2m}{l} \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{ml^2}{12}$.

2. Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через его торец.

Дано

l ;

m

$J=?$

Решение

Зная величину момента инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его центр масс $J_C = \frac{ml^2}{12}$, воспользуемся теоремой Штейнера:

$$J = J_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2;$$

$$J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

3. Вычислить момент инерции однородного прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c и массой m относительно оси z , проходящей через его центр массы.

Дано

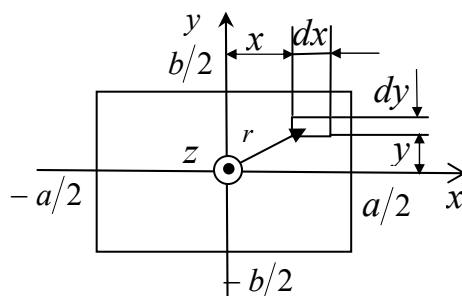
a, b, c ;

m

$J_z=?$

Решение

Найдем момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его геометрической оси, которая проходит через центр основания с длиной сторон a и b (на рисунке эта ось z перпендикулярна плоско-



сти рисунка). Пусть две другие координатные оси x и y проходят через центр основания и параллельны его сторонам.

В силу симметрии момент инерции параллелепипеда $J_z = 4J_0$, где J_0 – момент инерции 1/4 части этого параллелепипеда относительно той же оси z . Вычисления проводятся по формуле

$$J_0 = \int_m r^2 dm,$$

где по теореме Пифагора $r^2 = x^2 + y^2$, $dm = \rho dV = \rho c dx dy$ (c – высота параллелепипеда, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc}$ – плотность вещества);

$$J_0 = \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} (x^2 + y^2) \rho c dx dy, \text{ или } J_0 = \rho c \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{b/2} (x^2 + y^2) dy = x^2 y \Big|_0^{b/2} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{b/2} = \frac{b}{2} x^2 + \frac{b^3}{24}.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{a/2} \left(\frac{bx^2}{2} + \frac{b^3}{24} \right) dx = \frac{b}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{a/2} + \frac{b^3}{24} x \Big|_0^{a/2} = \frac{ba^3}{48} + \frac{ab^3}{48}.$$

В итоге $J_0 = \rho c \frac{ab(a^2 + b^2)}{48}$, $J_z = 4\rho c \frac{ab(a^2 + b^2)}{48}$.

Подставив значение ρ , получаем

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

4. Вычислить момент инерции однородного тела массой m с осевой симметрией относительно этой оси, например, момент инерции цилиндра высотой h с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 относительно оси Z .

Дано

$R_1, R_2;$

m

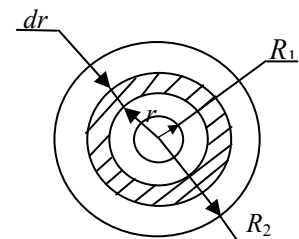
$J = ?$

Решение

В качестве малого элемента (исходя из осевой симметрии) удобно выбрать цилиндр с размерами r, dr, h .

Масса этого цилиндра

$dm = \rho dV = \rho h dS = \rho h 2\pi r dr$. Тогда момент инерции цилиндра



$$J_z = \int_{R_1}^{R_2} r^2 dm = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr.$$

Вычислив интеграл и учтя, что $m = \rho h \pi (R_2^2 - R_1^2)$, получим окончательно

$$J_z = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}.$$

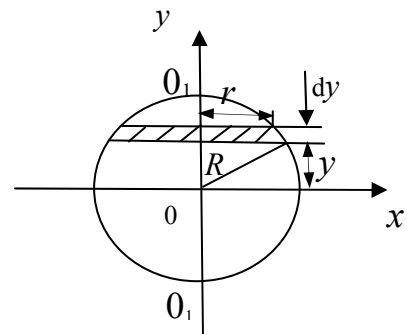
Из этой формулы легко получить момент инерции диска ($R_1 \rightarrow 0$) и бесконечно тонкого кольца ($R_1 \rightarrow R_2, R_1 \approx R_2$).

5. Вычислить момент инерции сплошного однородного шара массой m и радиусом R относительно оси вращения OO_1 , проходящей через его центр массы.

Дано
 R ;
 m
 $J_z = ?$

Решение

Разбиваем шар на «элементарные» диски с радиусами r и толщиной dy . Момент инерции однородного «элементарного» диска относительно



оси O_1O_1 $dJ = \frac{r^2 dm}{2}$. В силу симметрии рассматриваем одну половину шара, момент инерции которой,

$$J_{1/2} = \int_0^R \frac{r^2 dm}{2},$$

где $r^2 = R^2 - y^2$; $dm = \rho dV_{\text{диска}} = \frac{m}{V_{\text{шар}}} dV_{\text{диска}} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi r^2 dy = \frac{3m}{4R^3} r^2 dy$. Подставив

значения dm , r^2 и произведя вычисления, получаем $J_{1/2} = \frac{mR^2}{5}$. Тогда момент инерции шара $J = 2J_{1/2}$,

$$J = \frac{2mR^2}{5}.$$

6. Маховик в форме сплошного диска, момент инерции которого $J = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, вращаясь равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240$ об/мин до $n_1 = 120$ об/мин. Определить: а) угловое ускорение; б) момент M_z сил торможения; в) работу сил торможения A .

Дано

$$J = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с};$$

$$n_0 = 240 \text{ об/мин} = 4 \text{ об/с};$$

$$n_1 = 120 \text{ об/мин} = 2 \text{ об/с}$$

$$\varepsilon = ? \quad M_z = ? \quad A = ?$$

Решение

а. Запишем уравнение динамики вращательного движения маховика в скалярном виде:

$$J\varepsilon = M,$$

где $\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega_1}{t_1 - t_0}$ (так как движение равнозамедленное)

или $\varepsilon = \frac{2\pi(n_0 - n_1)}{t}$. Численно $\varepsilon = 0,21 \text{ рад/с}^2$.

б. Момент M_z сил торможения $M_z = J\varepsilon$. Численно $M_z = 0,31 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

в. Работа сил торможения $A = \Delta T = T_1 - T_0$, где $T_1 = \frac{J\omega_1^2}{2}$, $T_0 = \frac{J\omega_0^2}{2}$.

Угловые скорости выразим через частоты вращения: $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_0 = 2\pi n_0$. Окончательно получаем: $A = 2\pi^2 J(n_1^2 - n_0^2)$.

Численно $A = -355 \text{ Дж}$.

7. Вертикально расположенный однородный стержень массой m_1 и длиной l может без трения вращаться вокруг своего верхнего конца в вертикальной плоскости. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой $m_2 \ll m_1$. В результате этого стержень отклонился на угол α .

Дано

$$l; m_1; m_2; \alpha$$

$$V = ?$$

Найти скорость пули перед ударом.

Решение

Введем обозначения: С – центр масс стержня; $h_{1,2}$ – высота подъема соответственно центра масс стержня и пули, застрявшей в его нижнем конце; V – скорость пули на подлете к стержню; ω – угловая скорость вращения системы.

I. Запишем закон сохранения момента импульса системы тел (пуля – «стержень – пуля»):

$$L_{1z} = L_{2z} \text{ или } lm_2V = J\omega. \quad (1)$$

Момент инерции системы «стержень – пуля» относительно оси z подвеса $J = \frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2$.

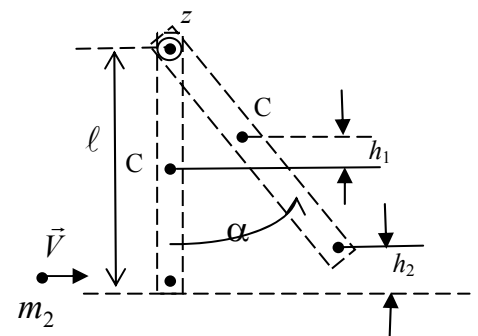
Из выражения (1) получаем значение скорости пули:

$$V = \frac{J\omega}{m_2 l}, \quad V = \frac{l}{m_2} \left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) \omega, \quad (2)$$

где ω – неизвестная величина.

II. Запишем закон сохранения механической энергии для стержня с застрявшей в нем пулей:

$$\frac{J\omega^2}{2} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2. \quad (3)$$



Из (3) находим

$$\omega^2 = \frac{2g}{J}(m_1 h_1 + m_2 h_2), \quad (4)$$

где $h_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{l}{2}(1 - \cos \alpha) = l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $h_2 = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Подставив h_1 и h_2 в (4), получаем

$$\omega^2 = \frac{2g(m_1 + 2m_2) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{l(m_1/3 + m_2)}.$$

Воспользуемся условием $m_2 \ll m_1$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

III. Скорость V подлета пули определяется выражением (2). Подставив в (2) значение ω и вновь воспользовавшись условием $m_2 \ll m_1$, получаем значение

$$V = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{2gl}{3}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

8. Через блок цилиндрической формы массой $m = 1$ кг перекинут шнур, к концам которого прикреплены грузы массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти: а) ускорение грузов; б) силы натяжения шнура F_1 и F_2 . Считать шнур невесомым и нерастяжимым. Проскальзывание шнура относительно блока и трение в оси блока отсутствуют.

Дано

$m = 1$ кг;

$m_1 = 1$ кг;

$m_2 = 2$ кг

$a = ?$ $F_1 = ?$ $F_2 = ?$

Решение

Так как нить нерастяжима, путь, пройденный грузом m_1 , равен пути, пройденному грузом m_2 .

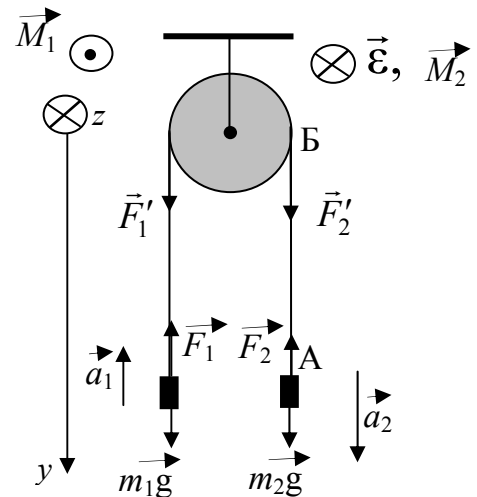
Из этого следует, что ускорения грузов одинаковы по

величине $a_1 = a_2 = a$.

Рассмотрим участок нити АБ между грузом m_2 и блоком. Уравнение движения этого участка в проекции на ось y с учетом 3-го закона Ньютона имеет вид $m_{AB} a = F_2 - F_2'$.

Из условия невесомости нити ($m_{AB} = 0$) следует, что $F_2' = F_2$. Аналогично доказывается, что $F_1' = F_1$.

Линейная скорость всех отрезков нити в произвольный момент времени t равна V , линейная скорость точек, принадлежащих ободу блока $V_{\text{бл}}$.



Отсутствие скольжения означает, что в любой момент времени $V = V_{\text{бл}}$. Из этого, в свою очередь, следует, что $a = a_{\tau} = \varepsilon R$, где R – радиус блока. Тогда $\varepsilon = a/R$.

Система уравнений движения материальных тел в векторной форме:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{F}_1,$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{F}_2,$$

$$J\varepsilon = \vec{M}_{F'_2} + \vec{M}_{F'_1}.$$

Запишем уравнения движения обоих грузов в проекции на ось y , а уравнение движения блока в проекции на ось z :

$$Oy: -m_1 a_1 = m_1 g - F_1; \quad m_2 a_2 = m_2 g - F_2;$$

$$Oz: J\varepsilon = M_z = R(F'_2 - F'_1).$$

Учитывая приведенное ранее обсуждение условий задачи, а также то, что момент инерции цилиндрического блока $J = \frac{mR^2}{2}$, полученную систему уравнений можно привести к виду

$$-m_1 a = m_1 g - F_1; \quad m_2 a = m_2 g - F_2; \quad \frac{ma}{2} = F_2 - F_1.$$

Решая эту систему относительно искомых величин и подставляя численные значения, получим:

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2} = 2,8 \text{ м/с}^2;$$

$$F_1 = m_1(g + a) = 12,6 \text{ Н};$$

$$F_2 = m_2(g - a) = 14,0 \text{ Н}.$$

9. При горизонтальном положении стержня в руках человека скамья Жуковского и человек вращались с угловой скоростью $\omega_1 = 1,5$ рад/с. Момент инерции человека и скамьи Жуковского равен $I_{\text{чел.+скам}} = 5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, длина стержня $l_{\text{стерж}} = 2$ м, масса стержня $m_{\text{стерж}} = 6$ кг. Человек повернул стержень в вертикальное положение, совпадающее с осью вращения. Найти угловую скорость вращения. В первом положении ось вращения проходит через центр масс стержня.

Дано

$$\omega_1 = 1,5 \text{ рад/с},$$

$$I_{\text{чел.+скам}} = 5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$l_{\text{стерж}} = 2 \text{ м},$$

$$m_{\text{стерж}} = 6 \text{ кг}$$

$$\omega_2 = ?$$

Решение

Согласно условию задачи, момент внешних сил (сил тяжести) относительно оси вращения Z , совпадающей с осью скамьи Жуковского, равен нулю. Следовательно, момент импульса системы «человек+скамья+стержень» относительно этой оси остается постоянным:

$$I_{1\text{сис}}\omega_1 = I_{2\text{сис}}\omega_2. \quad (1)$$

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы. Поэтому момент инерции системы «платформа + человек + +стержень» в первом положении стержня равен

$$I_{1\text{сис}} = I_{\text{чел+скам}} + ml^2 / 12,$$

момент инерции системы «платформа+человек+стержень» во втором положении стержня

$$I_{2\text{сис}} = I_{\text{чел+скам}}.$$

Подставим в формулу (1) выражения моментов инерции:

$$(I_{\text{чел+скам}} + ml^2 / 12)\omega_1 = I_{\text{чел+скам}}\omega_2,$$

Откуда

$$\omega_2 = (I_{\text{чел+скам}} + ml^2 / 12)\omega_1 / I_{\text{чел+скам}}.$$

Произведем вычисления:

$$\omega_2 = (5 + 6 \cdot 2^2 / 12) \cdot 1,5 / 5 = 2,1 \text{ рад/с}.$$

6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Жидкость – агрегатное состояние вещества, промежуточное между газообразным и твердым. Из опыта известно, что плотность жидкостей мало зависит от давления, поэтому во многих случаях используют понятие несжимаемой жидкости.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент ΔS с силами ΔF , которые независимо от того, как пластинка ориентирована будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением* P жидкости:

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Единица давления – *паскаль* (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м² (1 Па = 1 Н/м²).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется *закону Паскаля*: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлени-

ям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

При поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес $F_d = \rho g S h$, а давление на нижнее основание:

$$P = \frac{F_d}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h,$$

т. е. давление изменяется линейно с высотой. При равновесии давление жидкости по горизонтали всегда одинаково. Давление $\rho g h$ называется гидростатическим давлением.

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая законом Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости:

$$F_A = \rho g V.$$

6.1. Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется *течением*, а совокупность частиц движущейся жидкости – *потоком*. Графически движение жидкостей изображается с помощью *линий тока*, касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости. Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризующая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока*. Течение жидкости называется *установившимся* (или *стационарным*), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются. (рис. 6.1).

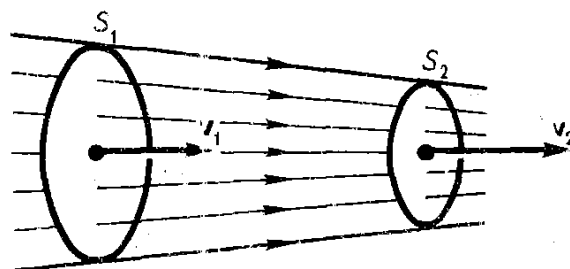


Рис. 6.1

Плотность потока – количество жидкости, проходящее через единичную площадку в единицу времени:

$$\vec{j} = \rho \vec{V}.$$

Так как жидкость считаем несжимаемой, то через сечения S_1 и S_2 за одинаковое время Δt пройдут одинаковые объемы жидкости (считаем, что скорость жидкости постоянна), тогда:

$$j_1 S_1 = j_2 S_2,$$

С учетом формулы для плотности жидкости и условия несжимаемости жидкости $\rho = \text{const}$, получаем:

$$V_1 S_1 = V_2 S_2.$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока:

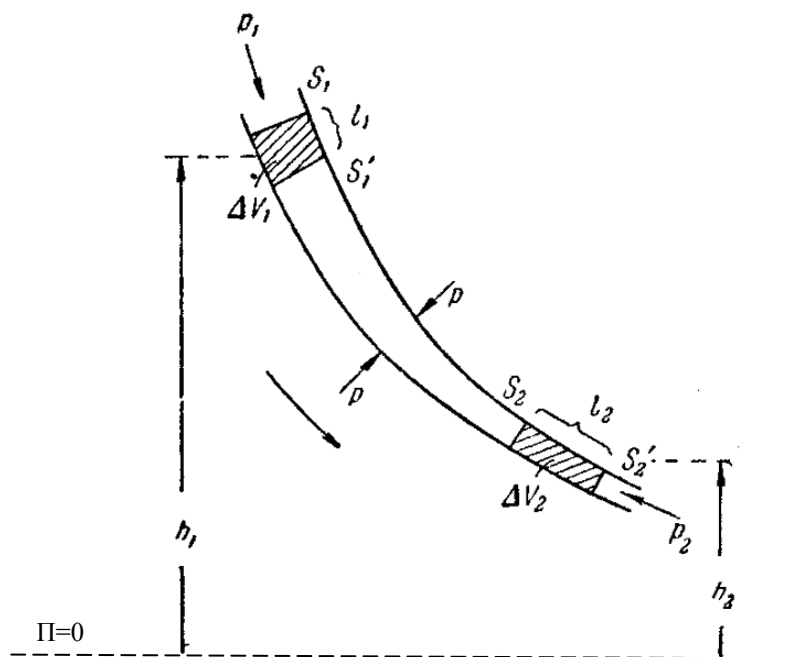


Рис. 6.2

$$VS = \text{const} \tag{6.1}$$

Соотношение (6.1) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

6.2. Уравнение Бернулли

Рассмотрим стационарный поток идеальной жидкости, в которой отсутствует внутреннее трение. Пусть в месте сечения S известна скорость течения V , давление P , высота центра масс рассматриваемых сечений над уровнем, принятым за нулевой, h (рис. 6.2).

За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечений S_1 и S_2 к сечениям S'_1 и S'_2 , на расстояния $l_1 = V_1 \Delta t$ и $l_2 = V_2 \Delta t$.

Согласно закону сохранения энергии:

$$E_2 - E_1 = A, \tag{6.2}$$

где E_1 и E_2 – полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 , соответственно, которые складываются из потенциальной (mgh) и кинетической ($\frac{mV^2}{2}$) составляющих; A – работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между рассматриваемыми сечениями, за малый промежуток времени Δt . Тогда выражение для работы с учетом закона Паскаля примет вид:

$$A = Fl = PSl = PSV\Delta t.$$

Подставляя выражения для работы и полной энергии в формулу (6.2), получим:

$$\frac{mV_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mV_1^2}{2} - mgh_1 = P_1 S_1 V_1 \Delta t - P_2 S_2 V_2 \Delta t. \quad (6.3)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (6.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1 V_1 \Delta t = S_2 V_2 \Delta t.$$

Разделив уравнение (6.3) на ΔV , получим:

$$\frac{\rho V_2^2}{2} + \rho gh_2 + P_2 = \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho gh_1 + P_1,$$

где ρ – плотность жидкости. Для произвольного сечения получим выражение, которое называется *уравнением Бернулли*:

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho gh + P = \text{const}. \quad (6.4)$$

Уравнение Бернулли хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико. Величина P в формуле (6.4) называется *статическим давлением* (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина $\frac{\rho V^2}{2}$ – *динамическим давлением*. Как уже отмечалось ранее, величина ρgh представляет собой *гидростатическое давление*.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение (6.4) примет вид:

$$\frac{\rho V^2}{2} + P = \text{const},$$

где величина $\frac{\rho V^2}{2} + P$ называется *полным давлением*.

6.3. Вязкость (внутреннее трение).

Ламинарный и турбулентный режимы течения

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Модуль силы внутреннего трения:

$$F = \eta \left| \frac{\Delta V}{\Delta x} \right| S,$$

где η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы жидкости, называется *динамической вязкостью*; $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ – величина, которая показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев, и называется *градиентом скорости*.

Существуют два режима течения жидкостей. *Ламинарное*, при котором линии тока сохраняются вдоль всего потока, каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними. *Турбулентное*, при котором вдоль потока происходит взаимное перемешивание слоев жидкости и вихреобразование.

6.4. Примеры решения задач

1. Пренебрегая вязкостью жидкости, определите скорость истечения жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием составляет 1,5 м.

Дано

$$h = 1,5 \text{ м}$$

$$V_2 = ?$$

Решение

Рассмотрим два сечения трубки тока: на уровне h_1 свободной поверхности и h_2 выхода

из отверстия. Скорость воды на выходе из отверстия обозначим V_2 . Считая воду идеальной жидкостью, запишем для рассматриваемых сечений уравнение Бернулли, с учетом того, что статические давления на обоих уровнях одинаковы $P_1 = P_2$:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2. \quad (1)$$

Из уравнения неразрывности:

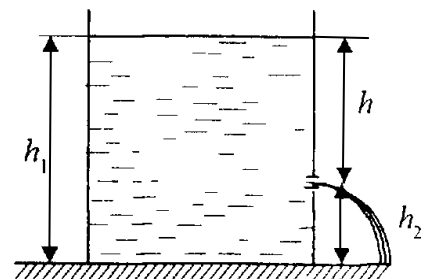
$$V_1 S_1 = V_2 S_2,$$

следует, что

$$V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1},$$

где S_1, S_2 - площади поперечных сечений бака и отверстия соответственно. Согласно условию задачи, отверстие маленькое, т.е. $S_1 \gg S_2$, поэтому $V_1 \ll V_2$ и членом $V_1^2/2$ в (1) можно пренебречь по сравнению с $V_2^2/2$. Тогда

$$\rho g h_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2$$



и

$$V_2^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh.$$

Таким образом, скорость истечения жидкости из сосуда:

$$V_2 = \sqrt{2gh},$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5} = 5,42 \text{ м/с}.$$

2. Пренебрегая вязкостью, определите, на какую высоту h поднимется вода в вертикальной трубке, впаянной в узкую часть горизонтальной трубы диаметром $d_2 = 3$ см, если в широкой части трубы диаметром $d_1 = 9$ см скорость воды $V = 25$ см/с.

Дано

$$d_1 = 9 \text{ см} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$d_2 = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$V_1 = 25 \text{ см/с} = 0,25 \text{ м/с}$$

$$h = ?$$

Решение

Рассмотрим два сечения трубки тока с диаметрами d_1 и d_2 . Из уравнения неразрывности:

$$V_1 S_1 = V_2 S_2$$

с учетом того, что $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$, $S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$, получаем

$$V_2 = V_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}. \quad (1)$$

Заметим, что гидростатические давления в рассматриваемых сечениях одинаковы $\rho g h_1 = \rho g h_2$, где h_1, h_2 – высоты центра масс рассматриваемых сечений над уровнем, принятым за нулевой. Тогда, считая воду идеальной жидкостью, запишем для рассматриваемых сечений уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + P_2.$$

С учетом формулы (1) перепишем выражение в виде:

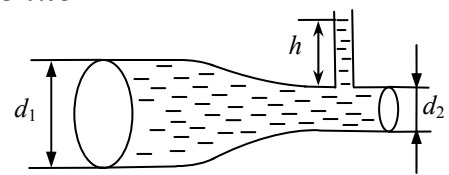
$$P_1 - P_2 = \frac{\rho V_1^2}{2} \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right). \quad (2)$$

При этом разница статических давлений будет соответствовать гидростатическому давлению столба воды высотой h в трубке

$$P_1 - P_2 = \rho g h.$$

С учетом формулы (2) получаем выражение для определения высоты столба воды в трубке:

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g} \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right),$$
$$h = \frac{0,25^2}{2 \cdot 9,81} \left(\frac{(9 \cdot 10^{-2})^4}{(3 \cdot 10^{-2})^4} - 1 \right) = 0,25 \text{ м}.$$



7. МОЛЕКУЛЯРНО - КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

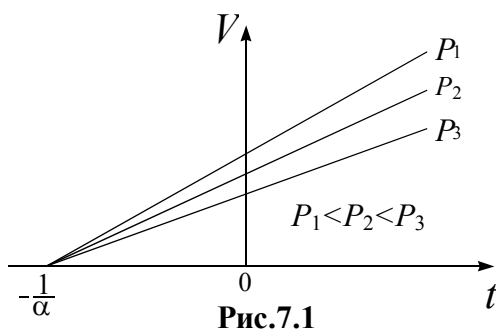
Молекулярная физика – раздел курса общей физики, в котором изучаются строение и свойства вещества, исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

7.1. Опытные законы идеального газа

Газ, находящийся в некотором замкнутом объеме, можно считать *идеальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- собственный объем молекул газа много меньше объема сосуда;
- между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Многие реальные газы (например, водород, гелий, неон, азот, кислород, воздух и др.) в условиях, близких к нормальным, близки по своим свойствам к идеальному газу. За нормальные условия принято считать давление $P=1,013 \cdot 10^5$ Па, что соответствует 1 атм или 762 мм ртутного столба, и температуру окружающей среды $t=0^0\text{C}$.



Кроме того, если внести поправки на объем молекул и межмолекулярные силы взаимодействия, от теории идеального газа можно перейти к теории реального газа.

Опытным путем до создания молекулярно-кинетической теории был открыт целый ряд законов, которым удовлетворяет идеальный газ.

Закон Гей-Люссака: объем данной массы газа ($m = \text{const}$) при постоянном давлении ($P = \text{const}$) изменяется линейно с температурой t , измеряемой в градусах Цельсия:

$$V = V_0(1 + \alpha t),$$

где V_0 – объем газа при нулевой температуре ($t = 0^0\text{C}$), а $\alpha = \frac{1}{273,15^0\text{C}}$.

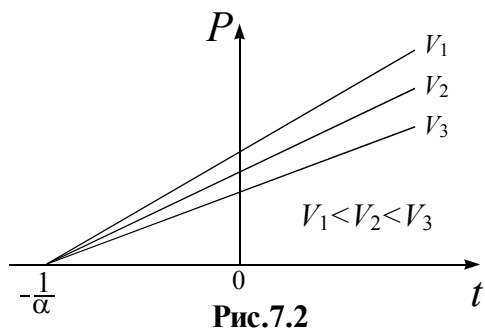
Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изобарическим* (изобарным). На диаграмме в координатах (V, t) (рис.7.1) этот процесс изображается прямой, называемой *изобарой*.

Закон Шарля: давление данной массы газа ($m = \text{const}$) при постоянном объеме ($V = \text{const}$) изменяется линейно с температурой:

$$P = P_0(1 + \alpha t),$$

где P_0 – давление при $t = 0^0\text{C}$.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорическим* (изохорным). На диаграмме в координатах (P, t) (рис.7.2) он изображается прямой, называемой *изохорой*.



С введением термодинамической температуры T , выраженной в кельвинах (К),

$$T = t + \frac{1}{\alpha},$$

законы Гей-Люссака и Шарля можно переписать в виде

$$V = V_0 \alpha T \text{ при } P = \text{const}, m = \text{const}$$

и

$$P = P_0 \alpha T \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const},$$

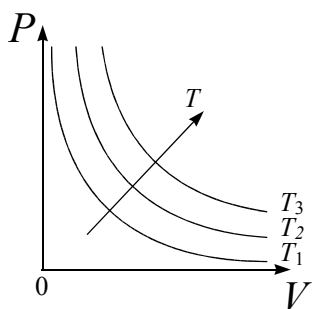
или

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ (} P = \text{const}, m = \text{const)},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ (} V = \text{const}, m = \text{const)}.$$

Закон Бойля – Мариотта: для данной массы газа ($m = \text{const}$) при постоянной температуре ($T = \text{const}$) произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$PV = \text{const}.$$



Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется *изотермическим*. Кривая, изображающая зависимость $P(V)$ при изотермическом процессе, называется *изотермой*. Изотермы в координатах (P, V) представляют собой гиперболы (рис.7.3), удаляющиеся от координатных осей с увеличением температуры, при которой происходит процесс.

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковой температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем составляет $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль} = 22,41 \text{ л/моль}$.

Моль – единица количества вещества в СИ. В одном моле содержится столько атомов (молекул, ионов), сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода с атомным весом 12.

Из изложенного ранее следует, что в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, которое называется *числом Авогадро*: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

Таким образом, суть закона Авогадро заключается в том, что одинаковое число молекул различных газов при одинаковых условиях занимает один и тот же объем.

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i.$$

Парциальное давление (P_i) – давление, которое производил бы i -й газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

7.2. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Основное уравнение молекулярно - кинетической теории идеальных газов

Поскольку состояние с фиксированной массой газа определяется тремя параметрами (P, V, T), можно составить уравнение, устанавливающее связь между этими параметрами.

Для некоторой массы идеального газа, используя законы Гей – Люссака и Шарля, можно получить уравнение:

$$\frac{PV}{T} = \text{const} = B. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) называется *уравнением Клапейрона*, где B – газовая постоянная, различная для различных газов.

Поскольку при одинаковых P и T моли различных газов занимают один и тот же объем V_m , уравнение (7.1) можно переписать в виде

$$\frac{PV_m}{T} = R, \quad (7.2)$$

где $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – одинаковая для всех газов величина, называемая *универсальной газовой постоянной*.

Уравнение (7.2) является уравнением состояния идеального газа, называемым также *уравнением Менделеева – Клапейрона*.

Если при некоторых P и T моль газа занимает объем V_m , то при тех же условиях масса газа m займет объем

$$V = \frac{m}{M} V_m,$$

где M – масса моля газа (*молярная масса*). Тогда уравнение (7.2) запишется в виде

$$PV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (7.3)$$

где величина $\nu = \frac{m}{M}$ называется *количеством вещества* (число молей). Размерность количества вещества: $[\nu] = \text{моль}$. Величину ν можно представить:

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число молекул, содержащихся в массе газа m , N_A – число Авогадро.

Уравнение Менделеева – Клапейрона (7.3) можно представить в виде:

$$P = RT/V_m = kN_A T/V_m = nkT, \quad (7.4)$$

где $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – *постоянная Больцмана*, $n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N}{V}$ – *концентрация* молекул (число молекул в единице объема).

Из (7.4) следует, что давление идеального газа при фиксированной температуре пропорционально концентрации его молекул.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов связывает параметры состояния газа (P , V , T) с характеристиками движения его молекул.

Рассматривая модель одноатомного идеального газа, находящегося в объеме V и содержащего N молекул, каждая из которых массой m_0 движется хаотически со скоростью V_i , получим уравнение

$$PV = \frac{2}{3} E, \quad (7.5)$$

где $E = \frac{1}{2} N m_0 \langle V_{\text{кв}} \rangle^2$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул идеального газа.

Уравнение (7.5) представляет собой основное уравнение молекулярно – кинетической теории идеальных газов.

Теоретически было установлено, что средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle V_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа вычислится как

$$\langle E_0 \rangle = \frac{m_0 \langle V_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (7.6)$$

Из формулы (7.6) следует, что средняя кинетическая энергия одной молекулы идеального газа прямо пропорциональна термодинамической температуре и определяется только ей. При $T = 0$ прекращается поступательное движение молекул ($\langle E_0 \rangle = 0$). Следовательно, при $T = 0$ молекулы перестают действовать на стенки сосуда и $P = 0$. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.

В газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом. На рис. 7.4 представлен график функции распределения молекул по скоростям, описывающей закон Максвелла.

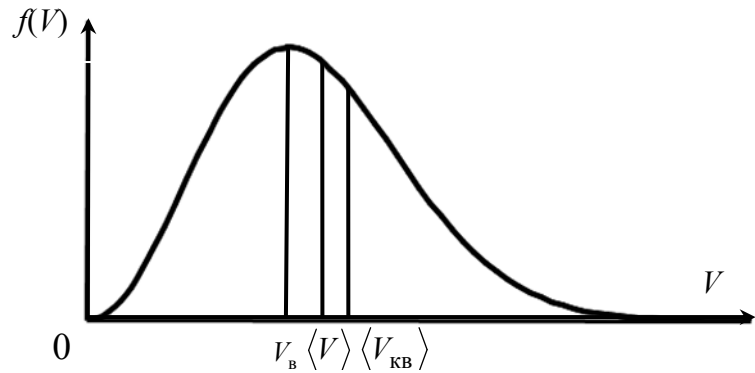


Рис. 7.4

Конкретный вид этого распределения зависит от рода газа, от массы молекул и от температуры T . Функция $f(V)$ определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от V до $V+dV$. На графике (рис 7.4) также отмечены скорости молекул, характеризующие состояние газа: наиболее вероятная скорость

$$V_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \text{ средняя скорость } \langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \text{ средняя квадратичная скорость } \langle V_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

7.3. Термодинамика

Термодинамика занимается рассмотрением соотношений между различными характеристиками вещества, не углубляясь в изучение внутреннего его строения.

Термодинамика ведет свое начало от работ инженера Сади Карно, который занимался тепловыми машинами. Поглощая тепло, они превращают его в работу (в паровой машине тепло идет на образование пара, который, толкая поршень, совершает работу). Процессы, происходящие в тепловых машинах, описываются законами термодинамики.

Будем рассматривать макроскопические системы, которые находятся в состоянии равновесия и описываются некоторым числом измеряемых макроскопических величин, называемых параметрами состояния. Ими могут быть объем V , давление P , термодинамическая температура T , плотность ρ и т.д.

Состояние термодинамической системы называют *стационарным*, если оно не изменяется во времени. Стационарное состояние называется *равновесным*, если неизменность системы во времени не обусловлена внешним воздействием.

Термодинамическое равновесие двух систем (или двух частей одной системы) характеризуется тем, что обе системы (части системы) имеют одинаковую температуру.

Равновесное состояние термодинамической системы описывается уравнением, связывающим параметры состояния. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – параметры состояния, тогда уравнение $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ будет описывать равновесное состояние системы. Примером такого уравнения является уравнение Менделеева – Клапейрона: $PV - \nu RT = 0$.

7.4. Число степеней свободы молекул

Число независимых координат, полностью определяющих положение молекулы в пространстве, называется числом *степеней свободы молекулы*.

В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис.7.5, а) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения (молекула может двигаться произвольно по трем пространственным координатам).

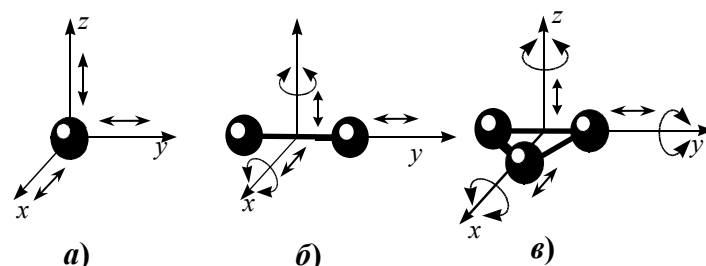


Рис. 7.5

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис.7.5, б). Эта система, кроме трех степеней свободы поступательного движения, имеет еще две степени свободы вращательного движения (вокруг осей x и z). Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы. Трехатомная (рис.7.5, в) и многоатомная молекулы с жесткой связью между атомами имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных (при этом предполагается, что атомы в молекуле не лежат на одной прямой).

Если связь между атомами в молекуле не жесткая, то атомы могут совершать колебательное движение. При этом необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

В классической статистической физике выводится закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная kT .

Таким образом, средняя кинетическая энергия одной молекулы

$$\langle E_{\text{молек}} \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

7.5. Внутренняя энергия

Важной характеристикой термодинамической системы является её внутренняя энергия U – энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов и т.д.) и энергия взаимодействия этих частиц. К внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешнем поле. Так как в идеальном газе потенциальная энергия взаимодействия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия произвольной массы m газа будет равна сумме кинетических энергий N молекул:

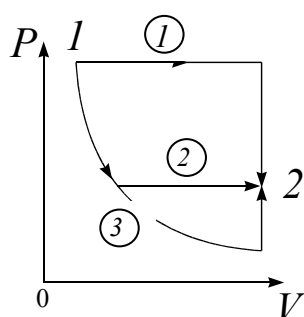


Рис. 7.6

$$U = \langle E_{\text{молек}} \rangle N = \frac{i}{2} kTN = \frac{i}{2} kTN_A \nu = \frac{i}{2} \nu RT.$$

Внутренняя энергия – это однозначная функция термодинамического состояния системы, т.е. значение внутренней энергии в любом состоянии не зависит от того, с помощью какого процесса система перешла в данное состояние. Так, например, из состояния 1 с параметрами P_1, V_1, T_1 (рис.7.6) в состояние 2 с параметрами P_2, V_2, T_2 термодинамическая система может перейти различными способами. В первом состоянии внутренняя энергия системы

$$U_1 = \frac{i}{2} \nu RT_1,$$

во втором состоянии

$$U_2 = \frac{i}{2} \nu RT_2.$$

Внутренняя энергия системы при переходе из состояния 1 в состояние 2 изменилась на величину

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} \nu R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2} \nu R \Delta T, \quad (7.7)$$

и это изменение, очевидно, не зависит от способа перехода системы из первого состояния во второе.

7.6. Теплота и работа

Обмен энергией между термодинамической системой и внешними телами может происходить двумя способами:

- 1) при совершении работы;
- 2) с помощью теплообмена.

Количество энергии, переданное системе внешними телами при силовом взаимодействии между ними, называется *работой*, совершенной над системой.

Количество энергии, переданное системе внешними телами путем теплообмена, называется *количеством теплоты*, сообщенной системе.

В отсутствии внешних силовых полей обмен энергией между неподвижной системой и внешней средой с помощью совершения работы может происходить лишь при изменении объема и формы системы. Работой расширения называется работа, которую система производит против внешнего давления:

$$\delta A = P_{\text{внеш}} dV, \quad (7.8)$$

где $P_{\text{внеш}}$ – равномерно распределенное внешнее давление на систему. Если процесс расширения является равновесным (квазистатическим), то $P_{\text{внеш}} = P$, где P – давление в системе.

Полную работу A , совершаемую газом при изменении его объема от V_1 до V_2 , можно найти по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (7.9)$$

В зависимости от вида взаимодействия термодинамической системы с внешней средой выделяют следующие типы термодинамических систем.

Открытой системой называется термодинамическая система, которая может взаимодействовать с внешней средой.

Изолированной системой называется термодинамическая система, которая не может обмениваться с внешней средой ни энергией, ни веществом.

Замкнутой системой называется термодинамическая система, не способная к обмену энергией с внешней средой путем совершения работы.

Термодинамическая система называется *адиабатической*, если не происходит теплообмена между системой и внешней средой. При этом система может совершать работу против внешних сил или внешние силы могут совершать работу над ней.

7.7. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики представляет собой, по сути, обобщенный закон сохранения энергии для тепловых процессов. Оно формулируется следующим образом: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил

$$Q = \Delta U + A. \quad (7.10)$$

В (7.10) ΔU – изменение внутренней энергии системы; Q – подводимое к системе тепло; A – работа, совершаемая системой против внешних сил. Если

$A > 0$, то работу совершает система, если $A < 0$, то работа совершается над системой.

В дифференциальной форме записи первое начало термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где dU – элементарное (бесконечно малое) изменение внутренней энергии системы; δQ – элементарное подводимое к системе тепло (бесконечно малое количество теплоты); δA – элементарная работа, совершаемая системой.

Из первого начала термодинамики следует, что если $\Delta U = 0$, то

$$Q = A,$$

т.е. все количество теплоты, передаваемое системе, идет на совершение ею работы против внешних сил. Отсюда следует невозможность реализации вечного двигателя первого рода, который совершал бы работу бóльшую, чем сообщенная ему извне энергия.

7.8. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Термодинамический процесс называется *равновесным* (квазистатическим), если система бесконечно медленно проходит непрерывный ряд бесконечно близких (термодинамически) равновесных состояний.

Изопроцессы – это равновесные процессы, идущие в системе с постоянной массой при каком-либо одном постоянном параметре состояния.

Изотермический процесс: $T = \text{const}$.

Исходя из формулы (7.7), приходим к тому, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе $\Delta U = 0$ и, согласно (7.10),

$$Q = A.$$

Таким образом, все тепло, подводимое к системе, идет на совершение этой системой работы против внешних сил.

Изохорный процесс: $V = \text{const}$.

Исходя из формулы (7.8), имеем то, что работа газа при изохорном процессе $A = 0$ и, согласно (7.10),

$$Q = \Delta U,$$

т.е. все тепло, подводимое к системе, идет на изменение ее внутренней энергии.

Изобарный процесс: $P = \text{const}$.

Первое начало термодинамики при изобарном процессе имеет вид

$$Q = \Delta U + A,$$

где $A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P(V_2 - V_1)$.

7.9. Теплоемкость

Одним из основных тепловых параметров тел в термодинамике является теплоемкость. *Теплоемкостью* какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин:

$$C^* = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Удельная теплоемкость – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}. \quad (7.11)$$

Размерность удельной теплоемкости: $[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Молярная теплоемкость – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT}. \quad (7.12)$$

Размерность молярной теплоемкости: $[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Согласно (7.11) и (7.12), удельная теплоемкость c связана с молярной C соотношением

$$C = cM,$$

где M – молярная масса вещества.

Между молярными теплоемкостями газа при изобарном процессе C_p и изохорном процессе C_V существует зависимость:

$$C_p = C_V + R. \quad (7.13)$$

Выражение (7.13) называется *уравнением Майера*.

Теплоемкость газа при изохорном процессе $C_V = \frac{i}{2}R$, при изобарном процессе $C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2}R$.

7.10. Адиабатический процесс

Адиабатическим называется процесс, происходящий без теплообмена с внешней средой ($\delta Q = 0$). К адиабатическим можно отнести все быстротекающие процессы.

Этот процесс описывается уравнением

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (7.14)$$

которое называется *уравнением Пуассона*.

Фигурирующая в уравнении Пуассона безразмерная величина

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

называется *показателем адиабаты*.

Работу, совершаемую газом при адиабатическом процессе, можно вычислить двумя способами:

1) исходя из определения работы:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right);$$

2) исходя из первого начала термодинамики для адиабатического процесса $\delta A = -dU$:

$$A = -\int dU = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} C_V dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

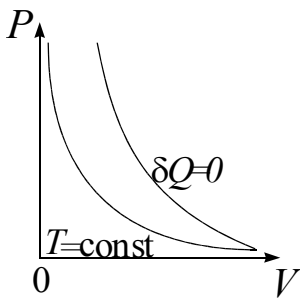


Рис. 7.7

Линия, изображающая адиабатный процесс, называется *адиабатой*. На рис.7.7 в координатах (P, V) приведены для сравнения адиабата и изотерма. Для любого идеального газа $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{2} = 1 + \frac{i}{2} > 1$, поэтому в координатах (P, V) адиабата идет круче изотермы: в частности,

при адиабатическом сжатии увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.

7.11. Тепловые двигатели и холодильные машины, их КПД. Цикл Карно

Принцип действия теплового двигателя приведен на рис. 7.8, а. От термостата с более высокой температурой T_1 , называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты Q_1 , а термостату с более низкой температурой T_2 , называемому холодильником, за цикл передается количество теплоты Q_2 . При этом машина совершает полезную работу $A = Q_1 - Q_2$. Термиче-

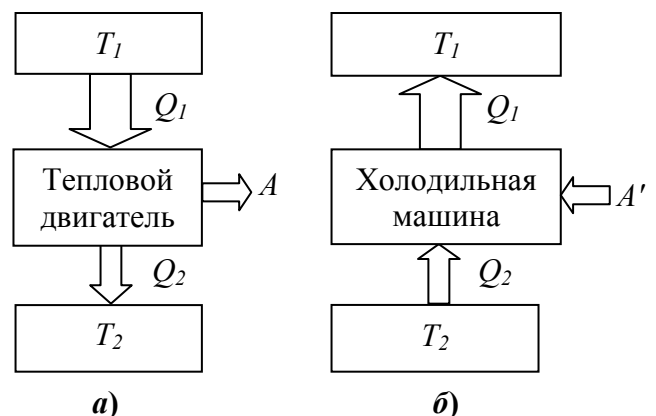


Рис. 7.8

ский коэффициент полезного действия (КПД) теплового двигателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \cdot 100\%.$$

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине, принцип действия которой представлен на рис. 7.8, б. Системой за цикл от термостата с более низкой температурой T_2 отнимается количество теплоты Q_2 и отдается термостату с более высокой температурой T_1 количество теплоты Q_1 . КПД в этом случае определяется, как

$$\eta = \frac{Q_2}{A'} \cdot 100\%,$$

где A' – работа внешних сил, совершаемая над тепловой машиной.

Согласно теореме Карно, из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины; при этом КПД обратимых машин при одинаковых температурах нагревателей и холодильников равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела.

Наиболее экономичным обратимым циклом является цикл Карно. Рассмотрим прямой цикл Карно (рис 7.9), в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем. Он состоит из двух изотерм ($1-2$ и $3-4$) и двух адиабат ($2-3$ и $4-1$).

Работа, совершаемая газом при переходе из состояния 1 в состояние 2 (изотермическое расширение), равна количеству теплоты Q_1 , полученному газом от нагревателя:

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1.$$

При адиабатическом расширении $2-3$ теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения совершается за счет внутренней энергии:

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

Количество теплоты Q_2 , отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии, равно работе сжатия A_{34} :

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2.$$

Работа адиабатического сжатия

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

Работа, совершаемая в результате кругового процесса,

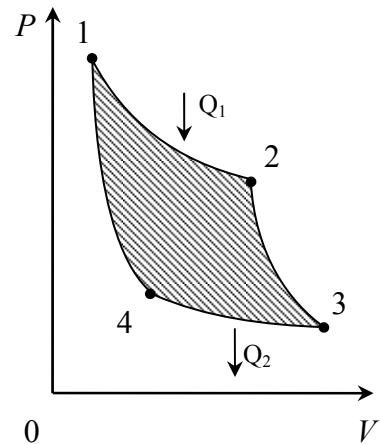


Рис. 7.9

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2$$

и определяется площадью заштрихованной фигуры на рис 7.9.

Можно показать, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$, тогда термический КПД цикла Карно равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. КПД всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше вычисленного для цикла Карно.

Обратный цикл Карно лежит в основе действия тепловых насосов. В отличие от холодильных машин тепловые насосы должны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например, системе отопления. Часть этой энергии отбирается от окружающей среды с более низкой температурой, а часть – получается за счет механической работы, производимой, например, компрессором.

7.12. Примеры решения задач

1. Сосуд объемом $V = 2,5$ л содержит азот при нормальных условиях. Молярная масса азота $M = 28$ г/моль. Найти:

- количество вещества ν газа;
- массу m_0 молекулы газа;
- число N молекул газа в сосуде;
- концентрацию n молекул газа;
- плотность ρ газа.

Дано

$$V = 2,5 \text{ л} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$M = 28 \text{ г/моль} = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\nu = ?$$

$$m_0 = ?$$

$$N = ?$$

$$n = ?$$

$$\rho = ?$$

Решение

а. Так как азот находится при нормальных условиях, его молярный объем (объем моля газа) $V_m = 22,41 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$. Тогда количество вещества ν найдем по формуле

$$\nu = \frac{V}{V_m},$$

$$\nu = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{22,41 \cdot 10^{-3}} \approx 0,112 \text{ (моль)};$$

б. В одном моле газа содержится N_A молекул. Если молярная масса газа M , то масса молекулы газа:

$$m_0 = \frac{M}{N_A};$$

$$m_0 = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ (кг)}.$$

в. Число N молекул газа в сосуде найдем как произведение количества вещества ν на постоянную Авогадро N_A :

$$N = \nu N_A,$$

$$N = 0,112 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \approx 6,7 \cdot 10^{22} \text{ (молекул)}.$$

г. Концентрация n молекул газа есть число молекул газа в единице его объема:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_m}.$$

Следовательно, концентрация молекул азота, находящегося при нормальных условиях, равна

$$n = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,41 \cdot 10^{-3}} \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

д. Плотность газа:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m};$$

$$\rho = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{22,41 \cdot 10^{-3}} \approx 1,25 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

2. Средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна 300 м/с, масса газа 32 г, а объем 0,64 л. Найти:

а) давление газа на стенки сосуда;

б) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы газа;

в) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы газа;

г) внутреннюю энергию газа.

Дано

$$\langle V_{\text{кв}} \rangle = 300 \text{ м/с};$$

$$m = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг};$$

$$V = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$M = 32 \text{ кг/кмоль}$$

$$P = ?$$

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = ?$$

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = ?$$

$$U = ?$$

Решение

Воспользуемся основным уравнением молекулярно-кинетической теории:

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{Nm_0}{V} \langle V_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{1}{3} \frac{m}{V} \langle V_{\text{кв}} \rangle^2,$$

$$P = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot (300)^2}{3 \cdot 6,4 \cdot 10^{-4}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Найдем величину температуры T из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT; T = \frac{PVM}{mR};$$

$$T = \frac{1,5 \cdot 10^6 \cdot 6,4 \cdot 10^{-4} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31} = 115,5 \text{ К};$$

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = \frac{2}{2}kT;$$

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 115,5 = 1,6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж};$$

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2}kT;$$

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 115,5}{2} = 2,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия газа:

$$U = (\langle E_{\text{пост}} \rangle + \langle E_{\text{вращ}} \rangle) \frac{mN_A}{M};$$

$$U = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot (2,4 + 1,6) \cdot 10^{-21}}{32 \cdot 10^{-3}} = 2,4 \text{ кДж}.$$

3. Идеальный одноатомный газ совершает цикл, показанный на рисунке. Определить КПД цикла, если $P_2 = nP_1$, $V_2 = mV_1$.

Дано

$$P_2 = nP_1;$$

$$V_2 = mV_1$$

$$\eta = ?$$

Решение

Для определения КПД цикла воспользуемся формулой:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Так как работа A численно равна площади фигуры, ограниченной процессами цикла в координатах $P - V$, то, как следует из рисунка,

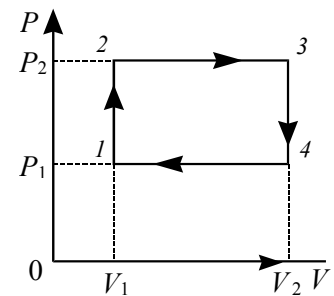
$$A = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1) = P_1V_1(n-1)(m-1).$$

Из первого начала термодинамики следует, что газ получает тепло от нагревателя на участках 1-2 и 2-3. Используя уравнения Менделеева – Клапейрона $P_1V_1 = \nu RT_1$, $P_2V_1 = \nu RT_2$, $P_2V_2 = \nu RT_3$ и учитывая, что молярные теп-

лоемкости газа $C_V = \frac{i}{2}R$, $C_P = \frac{i+2}{2}R$, можно получить для изохорного процесса 1-2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu \frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \frac{i}{2}(P_2V_1 - P_1V_1) =$$

$$\frac{i}{2}(nP_1V_1 - nP_1V_1) = \frac{i}{2}P_1V_1(n-1),$$



для изобарного процесса 2-3:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A = \nu C_p (T_3 - T_2) = \nu \frac{i+2}{2} R (T_3 - T_2) = \frac{i+2}{2} (\nu R T_3 - \nu R T_2) =$$

$$= \frac{i+2}{2} (P_2 V_2 - P_2 V_1) = \frac{i+2}{2} (n P_1 m V_1 - n P_1 V_1) = \frac{i+2}{2} P_1 V_1 n (m-1).$$

Следовательно, $Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{i}{2} P_1 V_1 (n-1) + \frac{i+2}{2} P_1 V_1 n (m-1)$ и

$$\eta = \frac{2(n-1)(m-1)}{i(n-1) + (i+2)n(m-1)},$$

где $i = 3$ – количество степеней свободы молекул газа.

4. Мощность идеальной тепловой машины Карно $N = 10^4$ Вт. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника – $T_2 = 300$ К. Определить количество теплоты Q_2 , отдаваемое холодильнику, за $\tau = 10$ с работы машины.

Дано	Решение
$N = 10^4$ Вт;	КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, можно вычислить по формуле
$T_1 = 500$ К;	
$T_2 = 300$ К;	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$
$\tau = 10$ с	или
$Q_2 = ?$	
	$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$

где T_1, T_2 – температуры нагревателя и холодильника; Q_1, Q_2 – количество теплоты, получаемой от нагревателя и отдаваемой холодильнику за один цикл работы. Следовательно,

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

откуда находим

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1.$$

Так как за время τ была совершена работа $A = N\tau$, то из закона сохранения энергии следует:

$$Q_1 - Q_2 = A.$$

Следовательно,

$$Q_2 = (Q_2 + A) \frac{T_2}{T_1}$$

или

$$Q_2 = \frac{N\tau T_2}{T_1 - T_2} = \frac{10^4 \cdot 10 \cdot 300}{500 - 300} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Раздел второй

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

8. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

8.1. Электрическое поле

Электрический заряд. Электрический заряд q частицы является одной из основных её характеристик. Ему присущи следующие свойства:

- 1) в природе существуют два типа электрических зарядов: положительные и отрицательные;
- 2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется; это утверждение выражает *закон сохранения электрического заряда*;
- 3) величина электрического заряда не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

Единица измерения заряда – *кулон*, (Кл).

Экспериментально показано, что электрический заряд дискретен, то есть заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного заряда

$$q = \pm Ne, \quad (8.1)$$

где q – суммарный заряд тела; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд; N – целое число.

Элементарный положительный заряд несут протон, однозарядный ион, позитрон; элементарный отрицательный заряд несет электрон.

Закон Кулона. Сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{r}_{12}, \quad (8.2)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; k – коэффициент пропорциональности, в практической системе измерений СИ

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – электрическая постоянная; \vec{r}_{12} –

радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 (рис. 8.1), $r = |\vec{r}_{12}|$.

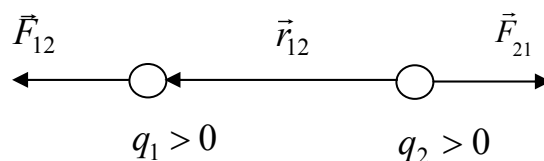


Рис. 8.1

Электрическое поле. Всякий электрический заряд q изменяет свойства окружающего его пространства – создает *электрическое поле*. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, пробный, заряд испытывает действие силы. Взаимодействие между зарядами осуществляется через поле.

Опыт показывает, что сила \vec{F} , действующая на неподвижный точечный пробный заряд q' , всегда может быть представлена как

$$\vec{F} = q'\vec{E}, \quad (8.3)$$

где векторную величину \vec{E} называют *напряженностью* электрического поля в данной точке пространства. Таким образом, напряженность \vec{E} есть физическая величина, численно равная силе, действующей на пробный единичный положительный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}$$

Как следует из формул (8.2) и (8.3), величина напряженности поля точечного заряда в вакууме на расстоянии r от него равна

$$E = k \frac{q}{r^2}. \quad (8.4)$$

Электрическое поле, созданное системой неподвижных электрических зарядов, называется *электростатическим*.

Единица напряженности – *вольт на метр* (В/м).

Принцип суперпозиции. Напряженность \vec{E} поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей \vec{E}_i полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (8.5)$$

Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля любой системы зарядов, разбив протяженные заряды на достаточно малые доли («точечные» заряды dq) и сложив поля, создаваемые этими зарядами.

Графическое изображение полей. Графически электрическое поле изображают с помощью силовых линий (линии напряженности, или линий вектора \vec{E}).

Силовой линией электрического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке направлена вдоль вектора \vec{E} (рис. 8.2).

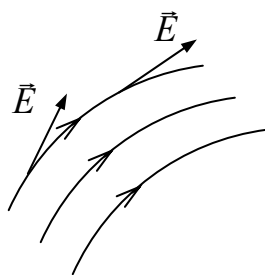


Рис. 8.2

Линии напряженности \vec{E} электростатического поля начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность.

По густоте силовых линий можно судить о величине напряженности электрического поля (в той части пространства, где линии расположены гуще, поле сильнее).

Линии вектора \vec{E} поля точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда (если он положительный) в бесконечность или к заряду (если он отрицательный) из бесконечности (рис. 8.3).

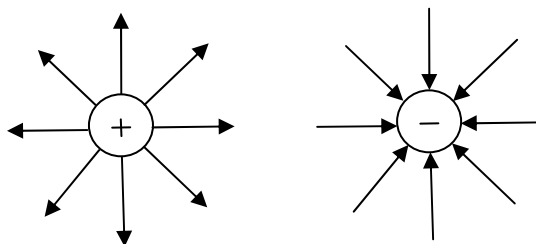


Рис. 8.3

8.2. Теорема Остроградского – Гаусса

Поток вектора \vec{E} . Число линий вектора \vec{E} , пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль \vec{n} к которой составляет угол α с вектором \vec{E} (рис. 8.4), определяется как $E dS \cos \alpha$. Эта величина называется *поток* $d\Phi$ вектора \vec{E} через площадку dS . В компактной форме

$$d\Phi = E dS \cos \alpha = E_n dS = \vec{E} d\vec{S},$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке dS ; $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$.

Если имеется некоторая произвольная поверхность S , то поток вектора \vec{E} через неё

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (8.6)$$

В случае замкнутой поверхности под \vec{n} понимают внешнюю нормаль.

Поток вектора \vec{E} через поверхность S численно равен количеству силовых линий, пронизывающих эту поверхность.

Единица измерения потока вектора \vec{E} – *вольт умножить на метр* (В·м).

Теорема Остроградского - Гаусса (далее просто теорема Гаусса). Поток вектора \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (8.7)$$

Теорема Гаусса применима для расчета напряженности электростатических полей, обладающих симметрией, например, сферической (или радиальной), плоскостной и др.

В общем случае источниками электростатического поля могут быть не только отдельно взятые точечные электрические заряды, но и заряды распределенные по объему пространства (объемные заряды) с объемной плотностью

$\rho = \frac{dq}{dV}$, по какой-либо поверхности (поверхностные) с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{dq}{dS}$ или вдоль тонкой нити (линейные) с линейной плотностью $\tau = \frac{dq}{dl}$.

Здесь dq – заряд, находящийся в объеме dV , на участке поверхности площадью dS или участке нити длиной dl соответственно.

Тогда теорему Гаусса можно записать в виде

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_i q_i + \int_V \rho dV + \int_S \sigma dS + \int_L \tau dl \right). \quad (8.8)$$

В случае равномерного распределения зарядов ($\rho = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$, $\tau = \text{const}$) их плотности определяются как $\rho = \frac{q}{V}$, $\sigma = \frac{q}{S}$, $\tau = \frac{q}{L}$, где V – заряженный объем; S – площадь заряженной поверхности; L – длина заряженной нити.

Воспользовавшись теоремой Гаусса, рассчитаем напряженность электростатического поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).

Бесконечный цилиндр радиусом R (рис. 8.5) заряжен равномерно с линейной плотностью τ . Из соображений симметрии следует, что поле имеет радиальный характер. Следовательно, в качестве замкнутой поверхности надо взять коаксиальный цилиндр радиусом r и длиной l (рис. 8.5). Тогда поток вектора \vec{E} через торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность равен $E \cdot 2\pi r l$. По теореме Гаусса (8.7) вне цилиндра ($r \geq R$) $2\pi r l E = \tau \frac{l}{\epsilon_0}$, откуда

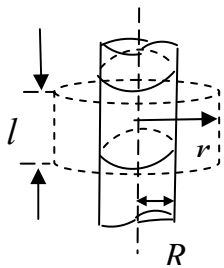


Рис. 8.5

$$E_{\text{внеш}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (8.9)$$

Внутри цилиндра ($r < R$) напряженность $E_{\text{внутр}} = 0$, так как внутри цилиндра заряды отсутствуют.

8.3. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал электростатического поля

Электростатическим называется поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами.

Электростатическое поле является потенциальным. Тогда работа сил этого поля по переносу единичного положительного заряда на замкнутом участке пути равна нулю, т.е.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (8.10)$$

Иными словами, циркуляция вектора \vec{E} в электростатическом поле равна нулю. Это выражение называется *теоремой о циркуляции* вектора \vec{E} .

Электростатическое поле обладает двумя характеристиками: силовой, которой является векторная величина \vec{E} – напряженность поля, и энергетической, которой является скалярная величина φ – потенциал поля.

Потенциал – это физическая величина, численно равная потенциальной энергии W , которой обладал бы в данной точке поля пробный единичный положительный заряд $q' = +1$ Кл:

$$\varphi = \frac{W}{q'}. \quad (8.11)$$

Потенциал поля точечного заряда q в вакууме определяется следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (8.12)$$

где r – расстояние от заряда до рассматриваемой точки поля. При этом имеется в виду, что потенциал на бесконечности равен нулю.

Для потенциала справедлив принцип суперпозиции, согласно которому потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов φ_i полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (8.13)$$

Разность потенциалов двух точек 1 и 2 поля определяется формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (8.14)$$

Разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ есть работа сил электростатического поля по переносу единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2 поля. Элементарная работа dA по переносу заряда q' на расстояние $d\vec{l}$ равна $dA = q' \vec{E} d\vec{l}$, где $q' \vec{E}$ – сила, с которой поле действует на заряд q' . Положим, что величина заряда q' равна единице. Тогда $dA = \vec{E} d\vec{l}$. Консервативные силы совершают работу за счет убыли потенциальной энергии $dA = -dW$, тогда

$$\vec{E} d\vec{l} = -d\varphi, \quad (8.15)$$

откуда следует формула (8.14).

Единица измерения потенциала – *вольт* (В). Можно сказать, что 1В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1Дж (1В=1Дж/1Кл).

8.4. Связь между напряженностью и потенциалом

Соотношение

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad (8.16)$$

устанавливает связь между напряженностью \vec{E} и потенциалом φ электростатического поля: вектор \vec{E} равен с обратным знаком градиенту потенциала. В декартовой системе координат выражение (8.16) записывается в виде

$$\vec{E} = -\left(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \quad (8.17)$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ – частные производные функции φ по соответствующим координатам; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей x, y, z . В одномерном случае, когда потенциал зависит только от одной пространственной координаты, например, координаты x , $\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Зная зависимость потенциала от координаты x , можно найти напряженность поля \vec{E} как функцию координаты x .

8.5. Электрический диполь. Поляризация диэлектриков

Электрическим диполем называют систему, состоящую из двух равных по величине, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расположенных на расстоянии l друг от друга (рис. 8.6). Основной характеристикой диполя является его *дипольный момент*:

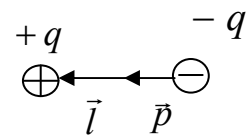


Рис. 8.6

$$\vec{p} = |q| \cdot \vec{l}, \quad (8.18)$$

где плечо \vec{l} диполя есть вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному.

Диэлектриками называют вещества, практически не проводящие электрический ток.

Диэлектрик состоит из атомов и молекул. При внесении любого вещества в электрическое поле происходит смещение положительных и отрицательных зарядов (ядер и электронов), что, в свою очередь, приводит к частичному разделению этих зарядов. Молекулы приобретают дипольные моменты.

Таким образом, внесение диэлектрика во внешнее электрическое поле \vec{E}_0 приводит к возникновению отличного от нуля результирующего дипольного момента диэлектрика – происходит *поляризация* диэлектрика.

Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной – *поляризованностью*, определяемой как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / V, \quad (8.19)$$

где \vec{p}_i – дипольный момент одной молекулы. Единицей поляризованности является *кулон на метр в квадрате* (Кл/м²).

Из опыта следует, что при малых величинах напряженности поля \vec{E} внутри диэлектрика его поляризованность \vec{P} линейно зависит от \vec{E} :

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (8.20)$$

где χ – *диэлектрическая восприимчивость* вещества; χ – величина безразмерная.

При поляризации диэлектрика на одной его поверхности (границе) появляются положительные заряды, а на другой – отрицательные. Эти электрические заряды называют *связанными*, так как они принадлежат молекулам диэлектрика и не могут перемещаться в отрыве от молекул.

Появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного поля \vec{E}' , которое направлено против внешнего поля \vec{E}_0 и ослабляет его. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (8.21)$$

Величина суммарного поля в диэлектрике

$$E = E_0 / \varepsilon, \quad (8.22)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (8.23)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* среды.

Диэлектрическая проницаемость ε является основной электрической характеристикой диэлектрика. Она показывает во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике по сравнению с полем в вакууме. Для всех веществ $\varepsilon > 1$, для вакуума $\varepsilon = 1$. Значения ε зависят от природы диэлектрика, они могут как мало отличаться от единицы (газы), так и достигать сотен и даже тысяч. Например, для воды $\varepsilon = 81$.

8.6. Электрическое смещение. Теорема Остроградского – Гаусса для поля вектора \vec{D} в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

При решении задач, связанных с расчетом электрического поля в диэлектрике, в ряде случаев оказывается удобным учитывать только поле *свободных (сторонних)* зарядов. Для этого вводится вспомогательный вектор электрического смещения:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (8.24)$$

Используя формулы (8.20), (8.23) и (8.24), вектор электрического смещения можно записать в виде

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (8.25)$$

Единица электрического смещения – *кулон на метр в квадрате* (Кл/м²).

Поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i. \quad (8.26)$$

Это выражение называется *теоремой Гаусса для поля вектора \vec{D}* . Используя теорему Гаусса для вектора \vec{D} (8.26), можно показать, что на границе раздела двух однородных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 8.7) при отсутствии на этой границе свободных (сторонних) зарядов нормальные компоненты вектора \vec{D} непрерывны, т.е.

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (8.27)$$

В общем случае при наличии по поверхности раздела диэлектриков свободных электрических зарядов выражение (8.27) принимает вид

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

где σ – поверхностная плотность зарядов.

С помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{E} (8.10) доказывается, что тангенциальные компоненты вектора \vec{E} также непрерывны, т.е.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (8.28)$$

В (8.27) и (8.28) D_{1n} и D_{2n} – проекции вектора \vec{D} на нормаль \vec{n} к границе раздела двух диэлектриков, $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – проекции вектора \vec{E} на направление касательной $\vec{\tau}$ к границе раздела сред (рис. 8.7).

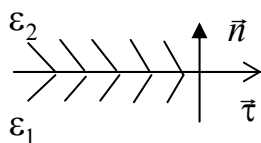


Рис. 8.7

8.7. Проводники в электростатическом поле

Если проводник поместить в электростатическое поле, то в нем произойдет перераспределение свободных электронов. Перемещение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль. При этом весь объем проводника становится эквипотенциальным объемом.

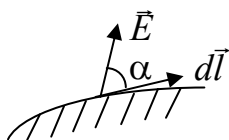


Рис. 8.8

Силовые линии электростатического поля перпендикулярны к поверхностям одинакового потенциала (эквипотенциальным поверхностям).

Рассмотрим в качестве эквипотенциальной поверхности металлическую поверхность (рис. 8.8), находящуюся во внешнем электростатическом поле.

Элементарная работа поля \vec{E} по перемещению единичного положительного заряда, находящегося на поверхности, на расстояние $d\vec{l}$, определяется формулой (8.15):

$$\vec{E}d\vec{l} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = 0$, так как на поверхности металла потенциал имеет одну и ту же величину. Тогда и скалярное произведение двух векторных величин \vec{E} и $d\vec{l}$ равно нулю. Отсюда следует, что косинус угла α между ними равен нулю. Это означает, что $\alpha = 90^\circ$. Следовательно, силовые линии электростатического поля всегда перпендикулярны к поверхностям проводников.

Электростатическая защита. Если проводнику сообщить некоторый заряд, то uncompensated charges располагаются только на поверхности проводника. Поэтому удаление внутренней части металлического проводника не должно повлиять на размещение зарядов на его поверхности. На рис. 8.9, а, б изображены одинаковые по форме сплошной и полый проводники, находящиеся в одинаковых электрических полях.

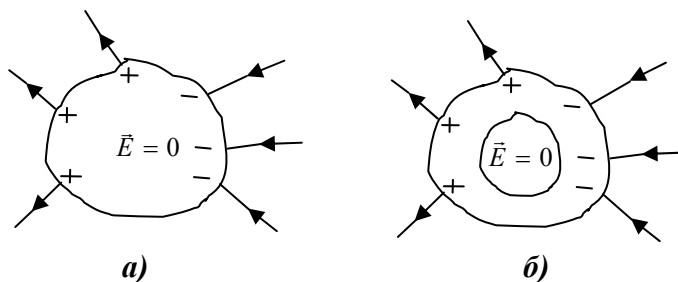


Рис. 8.9

Из рис. 8.9 следует, что проводник экранирует внутреннее пространство от внешних электростатических полей. Эту особенность проводников используют при электростатической защите.

8.8. Ёмкость. Конденсаторы

Опыт показывает, что между зарядом q уединенного проводника и его потенциалом φ существует прямая пропорциональная зависимость $q \sim \varphi$. Следовательно, отношение q/φ не зависит от величины заряда и для каждого уединенного проводника имеет свое значение. Величину $C = q/\varphi$ называют *ёмкостью* уединенного проводника (сокращенно *ёмкостью*). Можно сказать, что ёмкость проводника – это величина заряда, необходимая для изменения потенциала на один Вольт.

Величина ёмкости зависит от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости диэлектрика, окружающего проводник.

Ёмкость уединенной сферы радиусом R , находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε , равна

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \quad (8.29)$$

Устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших потенциалах накапливать значительные по величине заряды, получили название *конденсаторов*.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. Заряды на обкладках должны быть равны по величине и противоположны по знаку.

Под *емкостью* C конденсатора понимается физическая величина, равная отношению заряда q , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ между его обкладками:

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (8.30)$$

Единицей емкости служит *фарад* (Ф), $\Phi = \text{Кл/В}$.

На практике применяют более мелкие единицы емкости: 1 микрофарад (мкФ) = 10^{-6} Ф и пикофарад (пФ) = 10^{-12} Ф.

По форме обкладок различают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы. Ёмкость плоского конденсатора, у которого металлические пластины каждой площадью S размещены параллельно друг другу на расстоянии d , а пространство между пластинами заполнено однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε , равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (8.31)$$

Ёмкость цилиндрического конденсатора, представляющего собой две соосно расположенные цилиндрические обкладки длиной L и радиусами R_1 и R_2 , ($R_2 > R_1$), пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , равна

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (8.32)$$

Ёмкость сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических (имеющих общий центр) металлических сфер радиусами R_1 и R_2 , ($R_2 > R_1$), пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , равно

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (8.33)$$

Для того чтобы, располагая определенными конденсаторами, получить желаемую емкость при нужном рабочем напряжении, конденсаторы соединяют в батарее (рис. 8.10).

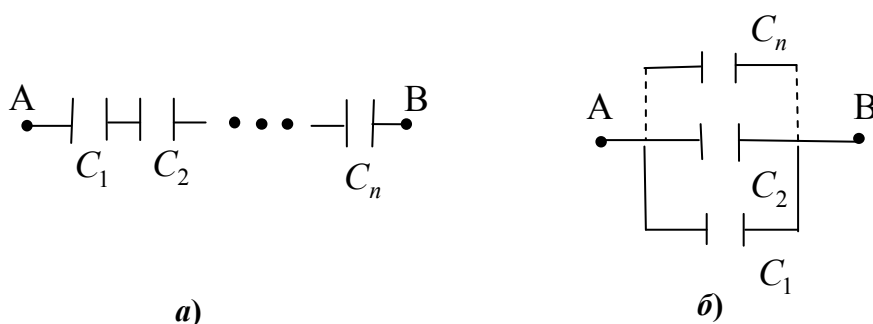


Рис. 8.10

На рис. 8.10, *а* изображено последовательное соединение конденсаторов. В этом случае заряды всех конденсаторов одинаковы, напряжение на батарее равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах, т.е.

$$U = \sum_i U_i = q \sum_i \left(\frac{1}{C_i} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \sum_i \left(\frac{1}{C_i} \right). \quad (8.34)$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям.

На рис. 8.10, *б* показано параллельное соединение конденсаторов.

В этом случае напряжение на всех конденсаторах одинаковое, суммарный заряд батареи равен

$$q = \sum_i q_i = U \sum_i C_i,$$

и поэтому емкость батареи

$$C = \frac{q}{U} = \sum_i C_i, \quad (8.35)$$

т.е. при параллельном соединении конденсаторов полная емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

Энергия электрического поля. Электрическое поле конденсатора обладает энергией

$$W = CU^2/2 = q^2/2C = qU/2. \quad (8.36)$$

Электрическая энергия плоского конденсатора, выраженная через напряженность поля конденсатора, определяется формулой

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \quad (8.37)$$

где V – объем конденсатора; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками. Величина $w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$ называется *объемной плотностью энергии* электрического поля.

8.9. Примеры решения задач

1. Два одинаковых шарика с массами $m = 10$ г и зарядами $q = 1 \cdot 10^{-7}$ Кл каждый подвешены в одной точке на тонких нитях одинаковой длины. Расстояние между шариками $r = 10$ см. Найти: а) угол α отклонения нити каждого шарика от вертикали, б) силу N натяжения нити.

Дано

$$m = 10 \text{ г} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ кг},$$

$$q = 1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл},$$

$$r = 10 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$

$$\alpha = ?$$

$$N = ?$$

Решение

На каждый шарик, находящийся в отклоненном от вертикали положении, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Кулона \vec{F}_K и сила натяжения нити \vec{N} .

Запишем в векторной форме условие равновесия одного из шариков:

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_K.$$

Проецируя (1) на координатные оси x и y , получаем

$$x: \quad N \sin \alpha = F_K, \quad (2)$$

$$y: \quad N \cos \alpha = mg. \quad (3)$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg}, \quad (4)$$

где $F_K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$.

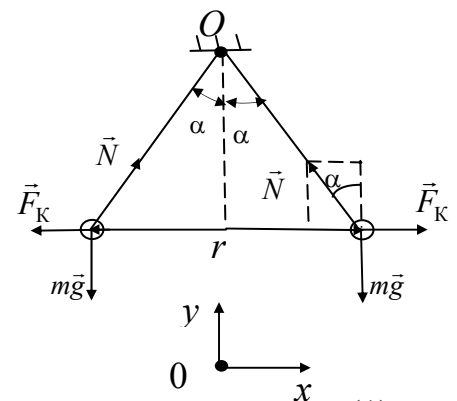
Подставив в (4) численные значения, получаем $\operatorname{tg} \alpha = 0,0917$ и $\alpha = 5,2^\circ$.

Из уравнения (3) находим

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Подставив численные значения, получаем $N = 99 \cdot 10^{-3}$ Н.

2. Линейная плотность положительного электрического заряда, равномерно распределенного по длине тонкого полубесконечного стержня, равна τ . Найти модуль и направление напряженности \vec{E} электрического поля в точке, которая отстоит от стержня на расстоянии a и находится на перпендикуляре к стержню, проходящем через его конец, если $\tau = 1$ нКл/м, $a = 50$ см.



Дано

$$\tau = 1 \text{ нКл/м} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м},$$

$$a = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$$

$$E_x = ?$$

$$E_y = ?$$

$$E = ?$$

Решение

Задача сводится к нахождению проекций E_x и E_y вектора напряженности \vec{E} электрического поля. Элементарный заряд $dq = \tau dx$, находящийся на участке AB стержня, создает в точке наблюдения M электрическое поле напряженностью $d\vec{E}$. Компонента dE_x вектора $d\vec{E}$:

$$dE_x = dE \sin \alpha, \quad (1)$$

где по закону Кулона

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{r^2}.$$

Выразим параметры r и dx через угол α , который изменяется в пределах от нуля (для точки O) до $\pi/2$ (для бесконечно удаленного от точки O конца стержня). Из треугольника AOM находим $\cos \alpha = \frac{a}{r}$,

откуда

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

С другой стороны, из треугольника ACB , где сторона AC перпендикулярна BC , находим:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{dx}. \quad (3)$$

Отрезок AC находим из прямоугольного треугольника ACM : $\sin(d\alpha) = \frac{AC}{r}$

или, в силу малости угла $d\alpha$, $d\alpha \approx \frac{AC}{r}$, откуда $AC \approx r d\alpha$.

Последнее соотношение совместно с (3) дает $\cos \alpha = \frac{r d\alpha}{dx}$, откуда

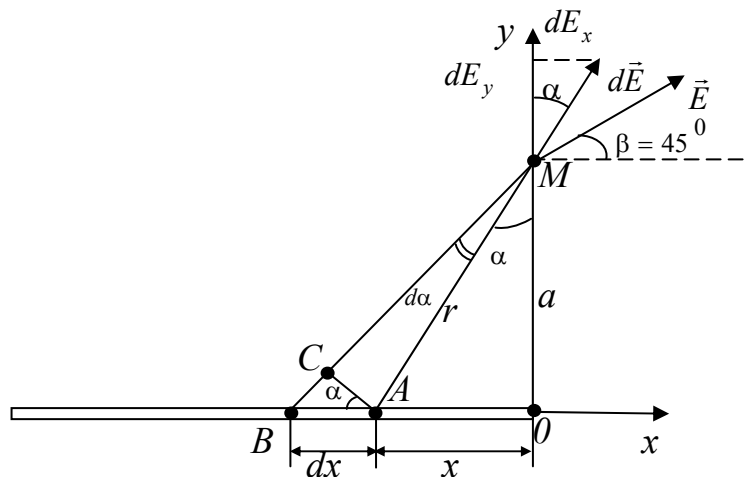
$$dx = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}. \quad (4)$$

Подставив соотношения (2) и (4) в (1), получаем

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \sin \alpha d\alpha}{a}. \quad (5)$$

Величину E_x находим, проинтегрировав соотношение (5):

$$E_x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \sin \alpha}{a} d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (6)$$



Аналогично определяем

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (7)$$

Величину напряженности электрического поля E находим из выражения:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}, \quad (8)$$

откуда

$$E = \frac{\tau\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (9)$$

Сравнивая компоненты E_x и E_y полного поля \vec{E} , приходим к выводу, что вектор \vec{E} направлен под углом 45° к горизонту.

Подставив численные значения, получаем $E=25,4$ В/м.

3. Рассчитать напряженность электрического поля равномерно заряженной тонкой бесконечной плоскости в вакууме. Поверхностная плотность заряда на плоскости σ ($\sigma > 0$).

Дано

$$\epsilon=1,$$

$$\sigma > 0$$

$$E = ?$$

Решение

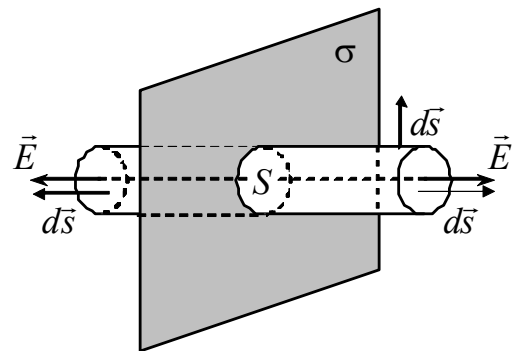
Из симметрии задачи очевидно, что линии напряженности \vec{E} перпендикулярны заряженной плоскости и направлены от нее в обе стороны (при $\sigma < 0$ силовые линии будут направлены к плоскости). Кроме того, ясно, что в симметричных относительно этой плоскости точках вектор \vec{E} одинаков по модулю и противоположен по направлению.

Для расчета напряженности поля воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса.

В качестве произвольной замкнутой поверхности выберем прямой круговой цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости и располагаются симметрично относительно нее. Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, то поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как $\int_{S_{бок}} \vec{E} d\vec{s} = \int_{S_{бок}} |\vec{E}| |d\vec{s}| \cos 90^\circ = 0$, а полный

поток N через всю поверхность цилиндра равен сумме потоков через его основания. В пределах каждого из оснований $E_n = E = \text{const}$, площади оснований равны S , тогда $N = \oint_S E_n ds = 2ES$. Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен σS . Согласно теореме Остроградского – Гаусса (8.7), $2ES = \sigma S / \epsilon_0$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1)$$



Из формулы (1) следует, что E не зависит от длины цилиндра, т.е. напряженность поля на любых расстояниях от плоскости одинакова по модулю, иными словами, поле равномерно заряженной бесконечной плоскости однородно.

4. Рассчитать напряженность E и потенциал φ электростатического поля цилиндрического конденсатора как функции расстояния r от оси системы до точки наблюдения (рис.1). Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны a и b , цилиндры заряжены равномерно по поверхности так, что на единицу их длины приходится заряды $+\tau$ и $-\tau$ соответственно. Потенциал внешнего цилиндра принять равным нулю ($\varphi(b) = 0$). Искажениями поля на торцах конденсатора пренебречь.

Дано

$a, b;$
 $+\tau; -\tau;$
 $\varphi(b) = 0$
 $E(r) = ?$
 $\varphi(r) = ?$

Решение

Из соображений симметрии (рис.1) следует, что поле цилиндрического конденсатора имеет радиальный характер, т.е. вектор \vec{E} в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора \vec{E} зависит только от расстояния r от оси цилиндра до

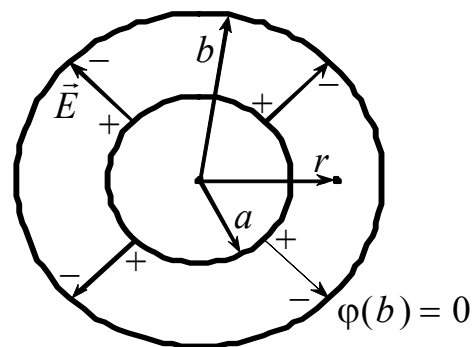


Рис.1

точки наблюдения.

В качестве произвольной замкнутой поверхности выберем коаксиальный с обкладками конденсатора прямой круговой цилиндр радиусом r и высотой l (рис.2).

Если $0 \leq r < a$, то рассматриваемая замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому, согласно теореме Остроградского – Гаусса (8.7), в этой области $E = 0$ независимо от r .

Если $r > b$, то воображаемая замкнутая поверхность будет содержать внутри себя две реальные заряженные поверхности, суммарный заряд которых $Q = \tau l + (-\tau)l = 0$. Тогда, в соответствии с (8.7), $E(r > b) = 0$.

Таким образом, за пределами цилиндрического конденсатора поле отсутствует.

Найдем поле внутри конденсатора (в пространстве между его обкладками). Для этого рассмотрим замкнутую цилиндрическую поверхность радиусом $a \leq r \leq b$. Поток вектора \vec{E} через торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность $E_r 2\pi r l$, где E_r – проекция вектора \vec{E} на орт \vec{e}_r радиального направления, совпадающий по направлению с

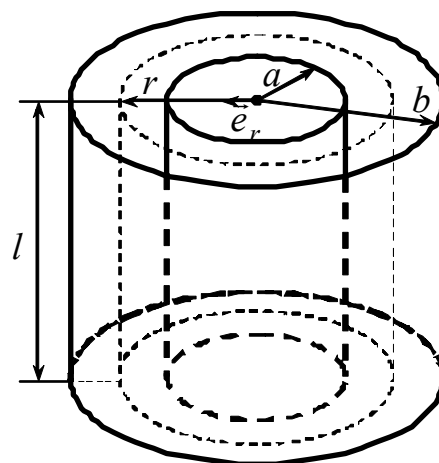


Рис. 2

внешней нормалью \vec{n} к боковой поверхности выбранного цилиндра. Заряд, заключенный внутри рассматриваемой поверхности, равен τl . По теореме Остроградского – Гаусса (8.7), $E_r 2\pi r l = \tau l / \epsilon_0$, откуда

$$E_r(a \leq r \leq b) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1)$$

Заметим, что в нашем случае $E_r = |\vec{E}| = E$, так как $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{e}_r$.

Для нахождения зависимости потенциала поля φ от расстояния r в области между обкладками конденсатора ($a \leq r \leq b$) воспользуемся соотношением (8.16), записанным в цилиндрической системе координат с учетом того, что вектор \vec{E} имеет только радиальную составляющую: $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{e}_r$ или $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$, откуда

$$\varphi = -\int E_r dr. \quad (2)$$

Подставив в (2) зависимость $E_r(r)$, определяемую соотношением (1), имеем

$$\varphi(a \leq r \leq b) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C,$$

где произвольная постоянная C находится из граничного условия $\varphi(r=b) = 0$:

$$C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln b. \text{ Тогда}$$

$$\varphi(a \leq r \leq b) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right). \quad (3)$$

Очевидно, что $\varphi(0 \leq r < a) = \varphi(r=a) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = U$, где U – напряжение на конденсаторе; $\varphi(r > b) = \varphi(r=b) = 0$.

5. Положительный заряд q распределен равномерно по поверхности сферы радиусом R . Полагая всюду $\epsilon = 1$, определить напряженность электростатического поля E как функцию расстояния r от центра сферы до точки наблюдения. Построить примерный график зависимости $E(r)$.

Дано

$q > 0, R;$

$\epsilon = 1$

$E(r) = ?$

Решение

Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности, поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией: направление вектора \vec{E} в любой точке проходит через центр сферы (рис.1), а модуль вектора \vec{E} должен зависеть только от расстояния r от центра сферы до точки наблюдения. Восполь-

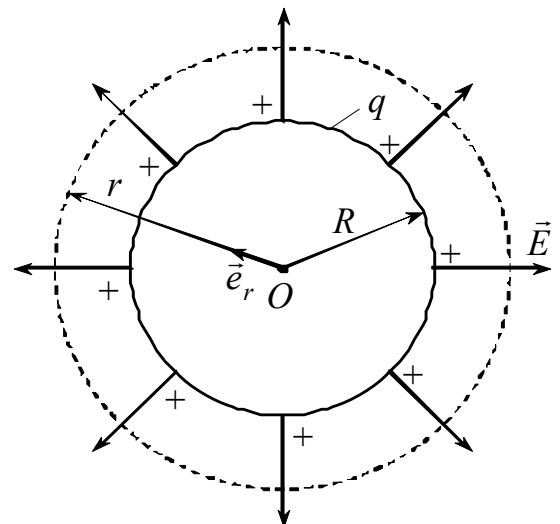


Рис.1

зуюемся теоремой Остроградского – Гаусса (8.7). В качестве произвольной замкнутой поверхности выберем сферу радиусом r , имеющую общий центр с заряженной сферой (рис.1).

Поток вектора \vec{E} через рассматриваемую поверхность $\oint_S E_n ds = E_r 4\pi r^2$,

где E_r – проекция вектора \vec{E} на орт радиального направления \vec{e}_r , совпадающего по направлению с внешней нормалью \vec{n} к поверхности в каждой ее точке ($\vec{E} = E_r \vec{e}_r$; $E = |\vec{E}| = |E_r|$).

Если $0 \leq r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому, согласно теореме Остроградского – Гаусса, в этой области всюду $E = 0$, т.е. внутри равномерно заряженной сферы электрическое поле отсутствует.

Если $r \geq R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд q , создающий исследуемое поле, и, по теореме Остроградского – Гаусса, $E_r 4\pi r^2 = q / \epsilon_0$, откуда

$$E_r(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как по условию задачи $q > 0$, то

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R; \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

График зависимости E от r приведен на рис.2.

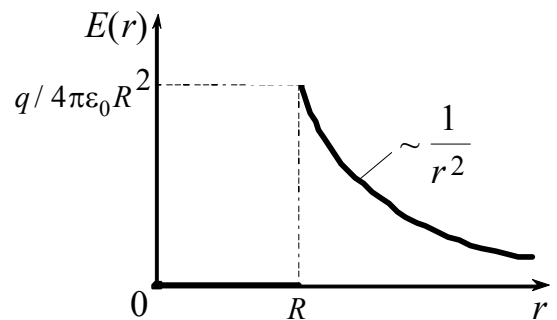


Рис.2

6. Положительный заряд q распределен равномерно по объему шара радиусом R . Считая, что система зарядов находится в вакууме, определить зависимость $E(r)$ и построить примерный график этой зависимости.

Дано

$q > 0, R;$

$\epsilon = 1$

$E(r) = ?$

Решение

Электростатическое поле равномерно заряженного по объему шара, очевидно, также обладает сферической симметрией (рис.1): $\vec{E}(r) = E_r(r) \vec{e}_r$,

где r – расстояние от центра

шара до точки наблюдения, \vec{e}_r – орт радиального направления, поэтому и здесь для нахождения поля следует в качестве замкнутой поверхности взять сферу радиусом r , центр которой совпадает с центром шара. Поток вектора \vec{E} через рассматриваемую поверхность будет равен $E_r 4\pi r^2$.

Нетрудно сообразить, что для поля вне шара (при $r \geq R$) получится выражение

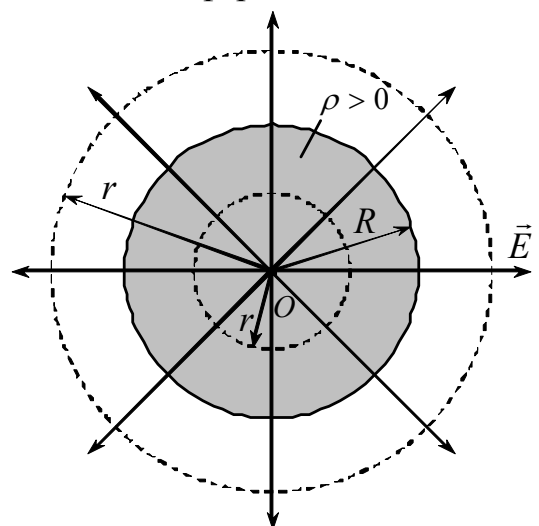


Рис.1

$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (1). Найдем $E(r)$ внутри шара. Сфера радиусом $0 \leq r < R$ охватывает заряд $Q = \int_{V_{\text{сф}}} \rho dV$, где ρ – объемная плотность заряда, $V_{\text{сф}}$ – объем, заключенный внутри замкнутой поверхности. Так как заряд распределен по объему шара равномерно, то $\rho = q/V_{\text{шара}} = q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \text{const}$, тогда

$$Q = \rho \int_{V_{\text{сф}}} dV = \rho V_{\text{сф}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = q \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Поэтому, согласно теореме Остроградского – Гаусса (8.8),

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

откуда

$$E_r (0 \leq r < R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (2)$$

при условии, что $q > 0$, т.е. внутри равномерно заряженного по объему шара напряженность растет линейно с расстоянием r от его центра.

Таким образом,

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & 0 \leq r < R; \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

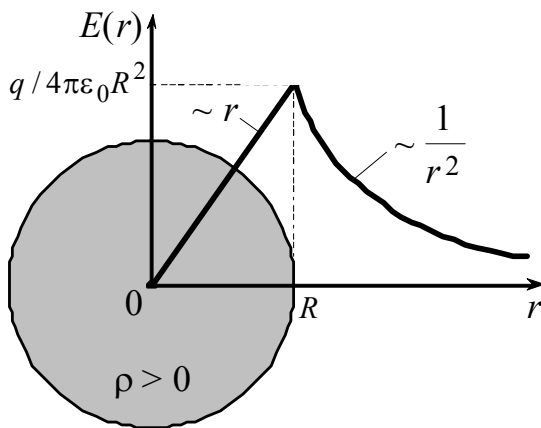


Рис.2

График зависимости E от r приведен на рис.2.

7. Пренебрегая краевыми эффектами, определить величину электрической емкости цилиндрического конденсатора длиной L с радиусами внутренней и внешней обкладок a и b , если пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ .

Дано

$a, b;$

$L;$

ϵ

$C = ?$

Решение

Согласно определению, электроемкостью (сокращенно емкостью) конденсатора называется величина

$$C = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2}, \quad (1)$$

где q – заряд конденсатора; $(\Phi_1 - \Phi_2)$ – разность потенциалов между его обкладками (эту разность также называют напряжением на конденсаторе U).

Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора при наличии диэлектрика между ними вычислим по формуле (3) задачи 4:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(r = a) - \varphi(r = b) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (2)$$

В (2) учли, что $\tau = \frac{q}{L}$.

Подставив (2) в (1), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln(b/a)}.$$

8. Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ, предварительно заряженный до напряжения $U_0 = 300$ В, подключили параллельно к незаряженному конденсатору емкостью $C_2 = 2$ мкФ. Найти к моменту установления равновесия:

- 1) напряжение на конденсаторах;
- 2) заряды на конденсаторах;
- 3) количество тепла, выделившееся на соединительных проводах.

Дано	Решение
$C_1 = 1$ мкФ = $1 \cdot 10^{-6}$ Ф;	Найдем заряд на первом конденсаторе до соединения его со вторым:
$C_2 = 2$ мкФ = $2 \cdot 10^{-6}$ Ф;	
$U_0 = 300$ В	$q_0 = C_1 U_0, q_0 = 300 \cdot 10^{-6} = 300$ мкКл.
$q_1 = ?$	После соединения конденсаторов заряд с первого будет переходить на второй конденсатор до тех пор, пока напряжения на них не будут равны: $U_1 = U_2 = U$. Воспользуемся законом сохранения заряда:
$q_2 = ?$	
$U_1 = ?$	
$U_2 = ?$	
$Q = ?$	

$$q_0 = q_1 + q_2,$$

$$q_0 = C_1 U + C_2 U.$$

Найдем установившееся напряжение:

$$U = \frac{q_0}{C_1 + C_2},$$

$$U = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}(1 + 2)} = 100 \text{ В}.$$

Заряды на конденсаторах к моменту установления равновесия

$$q_1 = C_1 U = 100 \text{ мкКл},$$

$$q_2 = C_2 U = 200 \text{ мкКл}.$$

Количество тепла, выделившееся на проводах, равно разности энергий конденсаторов:

$$Q = W_0 - (W_1 + W_2),$$

где

$$W_0 = \frac{C_1 U_0^2}{2} = 45 \text{ мДж},$$

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = 5 \text{ мДж},$$

$$W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = 10 \text{ мДж}.$$

$$Q = 30 \text{ мДж}.$$

9. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

9.1. Электрический ток. Сила и плотность тока

Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит *сила тока* I – скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение однородного проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (9.1)$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется *постоянным*. Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}. \quad (9.2)$$

Единица силы тока – *ампер* (А).

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется *плотностью тока*:

$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (9.3)$$

Единица плотности тока – *ампер на метр в квадрате* (А/м²).

Сила тока через произвольную поверхность S определяется как поток вектора \vec{j} , т.е.

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (9.4)$$

где \vec{j} – плотность тока – вектор, ориентированный по направлению тока; $d\vec{S} = dS\vec{n}$; \vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS .

9.2. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Для того чтобы постоянный ток протекал по проводнику, необходимо на его концах поддерживать разность потенциалов. Это осуществляется *источником тока*. Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источника тока, называются *сторонними*. Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный ток.

Сторонние силы могут быть обусловлены химическими процессами, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями, и т.д.

Электродвижущей силой (ЭДС) источника тока называют величину ε , равную отношению работы $A_{\text{ст}}$, совершаемой сторонними силами при перемещении заряда q по всей цепи, к заряду:

$$\varepsilon = A_{\text{ст}} / q. \quad (9.5)$$

Сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд, определяет напряженность поля сторонних сил:

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \vec{F}_{\text{ст}} / q. \quad (9.6)$$

Величина ЭДС, действующей на участке цепи 1-2, определяется как

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (9.7)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется *однородным*. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется *неоднородным*.

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 цепи в точку 2, называется *напряжением* на данном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (9.8)$$

Для однородного участка цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (9.9)$$

т.е. для однородного проводника напряжение совпадает с разностью потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на его концах.

9.3. Закон Ома. Сопротивление проводников

Сила тока I , текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению U на концах проводника:

$$I = U / R, \quad (9.10)$$

где R – электрическое сопротивление проводника. Уравнение (9.10) выражает *закон Ома* для участка цепи, не содержащего источника ЭДС.

Единица сопротивления – Ом.

Для однородного цилиндрического проводника сопротивление R прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (9.11)$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, характеризующий электрическую проводимость материала проводника. Он называется *удельным электрическим сопротивлением*. Единица удельного сопротивления – *ом-метр* (Ом·м).

При последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются:

$$R_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (9.12)$$

При параллельном соединении резисторов складываются величины, обратные их сопротивлениям:

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}. \quad (9.13)$$

9.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Через каждое сечение участка цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение U , за время t проходит заряд $q = It$. Это равносильно тому, что заряд It переносится за время t из одного конца проводника в другой. При этом силы электростатического поля и сторонние силы, действующие на данном участке цепи, совершают работу

$$A = qU = IUt. \quad (9.14)$$

Мощность, развиваемая указанными силами, определяется как

$$P = \frac{A}{t}.$$

Тогда

$$P = IU = I^2 R = U^2 / R. \quad (9.15)$$

Если проводник неподвижен и в нем не совершаются химические превращения, то работа тока затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника. В этом случае в проводнике выделяется тепло

$$Q = A = IUt,$$

или

$$Q = RI^2 t. \quad (9.16)$$

Это соотношение называется *законом Джоуля – Ленца*. Закон Джоуля – Ленца был установлен авторами экспериментально.

9.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Работа электростатических и сторонних сил, совершаемая при перемещении заряда q на участке цепи 1-2 за время t , определяется в соответствии с (9.14) как

$$A_{12} = qU_{12},$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$;

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}. \quad (9.17)$$

Полагаем, что за указанное время в проводнике выделяется теплота

$$Q = RI^2t = qIR, \quad (9.18)$$

равная работе всех сил, действующих в проводнике. Тогда $A_{12} = Q$, откуда получаем выражение для тока I в цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}. \quad (9.19)$$

Соотношение (9.19) выражает закон Ома для неоднородного участка цепи. Здесь R – суммарное сопротивление всей цепи. В общем случае $R = R_{\text{внеш}} + r$, где $R_{\text{внеш}}$ – сопротивление внешней цепи; r – внутреннее сопротивление источника ЭДС.

В (9.19) ток I считается положительным, если он течет от точки 1 к точке 2, и отрицательным – в противном случае. ЭДС ε_{12} берется с положительным знаком, если она способствует движению положительных зарядов от точки 1 к точке 2, и с отрицательным знаком – если она препятствует движению положительных зарядов в данном направлении.

Для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда ток I в цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (9.20)$$

где ε – алгебраическая сумма отдельных ЭДС, действующих в данной цепи.

Закон Ома для однородного изотропного проводника в дифференциальной форме записывается в виде:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (9.21)$$

где \vec{j} – плотность тока в некоторой точке проводника; \vec{E} – напряженность электрического поля в той же точке; $\sigma = 1/\rho$ – удельная электрическая проводимость вещества проводника. Единицей σ является сименс на метр (См/м), См – величина, обратная Ом (1 См=1/Ом).

Проводник называется *изотропным*, если в нем направления векторов \vec{j} и \vec{E} совпадают.

Закон Ома для проводника, в котором действуют одновременно электростатическое поле \vec{E} и поле сторонних сил $\vec{E}_{\text{ст}}$, имеет вид

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (9.22)$$

9.6. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Закон Ома в форме (9.19) записан для участка цепи. На практике часто возникает потребность расчета токов в разветвленных цепях.

Узлом цепи называется точка, в которой сходится не менее трех проводников с током.

Первое правило Кирхгофа формулируется применительно к узлам: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_i I_i = 0. \quad (9.23)$$

Это правило вытекает из закона сохранения электрического заряда – в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется.

Уравнение (9.23) можно записать для каждого из N узлов цепи. Однако независимыми являются только $(N-1)$ уравнений.

Принято считать $I_i > 0$, если ток направлен к узлу, и $I_i < 0$, если ток направлен от узла.

Второе правило Кирхгофа применяют к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Это правило является обобщением закона Ома на разветвленные электрические цепи и формулируется следующим образом: алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре, равна сумме падений напряжений на всех участках этого контура:

$$\sum_k \varepsilon_k = \sum_i I_i R_i. \quad (9.24)$$

Ток I_i и произведение $I_i R_i$ положительны, если направление тока совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура. ЭДС ε_k считается положительной, если она повышает потенциал в направлении обхода контура.

Число уравнений, составленных по второму правилу Кирхгофа, должно быть равно числу независимых контуров цепи.

Контур является *независимым*, если он содержит хотя бы один новый элемент по сравнению с предыдущими контурами.

Число независимых уравнений, составленных в соответствии с первым и вторым правилами Кирхгофа, должно быть равно числу токов, текущих в разветвленной цепи.

При решении задач рекомендуется следующий порядок расчета сложной цепи на постоянном токе:

а) произвольно выбрать и обозначить на схеме электрической цепи направление токов на всех участках цепи;

б) подсчитать число N узлов в цепи и записать для каждого из $(N-1)$ узлов первое правило Кирхгофа;

в) выделить произвольные замкнутые контуры в цепи и, выбрав направления обхода, записать уравнения для независимых контуров в соответствии со вторым правилом Кирхгофа.

Число независимых контуров определяется, как $(P-N+1)$, где P – число ветвей цепи, т.е. участков цепи между узлами, или другими словами, число токов, текущих в цепи; N – число узлов.

9.7. Примеры решения задач

1. Для нагревания воды объемом $V = 1$ л до кипения в течение времени $T = 5$ мин использован кипятильник, нагреватель которого изготовлен из нихромовой проволоки сечением $S = 0,1$ мм². Начальная температура воды составляет $t_1 = 20^0$ С. Напряжение в сети $U = 220$ В, КПД кипятильника $\eta = 90\%$. Найти: а) сопротивление кипятильника R , б) длину l нихромовой проволоки. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1,1$ мкОм·м. Удельная теплоёмкость воды

$$c = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Дано

$$V = 1 \text{ л}, t_1 = 20^0 \text{ С};$$

$$t_2 = 100^0 \text{ С}, T = 5 \text{ мин} = 300 \text{ с};$$

$$U = 220 \text{ В}, \eta = 90\%;$$

$$\rho = 1,1 \text{ мкОм} \cdot \text{м} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м};$$

$$S = 0,1 \text{ мм}^2 = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$c = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$R = ? \quad l = ?$$

Решение

а. В объеме $V = 1$ л находится масса воды $m = 1$ кг. Для нагревания ей необходимо сообщить количество теплоты

$$Q = cm(t_2 - t_1). \quad (1)$$

Расход электроэнергии для нагревания составляет:

$$W = \frac{Q}{\eta}. \quad (2)$$

Мощность нагревателя:

$$N = \frac{W}{T} = \frac{Q}{\eta T}. \quad (3)$$

С другой стороны, по закону Джоуля – Ленца количество теплоты, выделяемое спиралью кипятильника за время T , определяется выражением:

$$Q = I^2 RT = \frac{U^2}{R} T. \quad (4)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (4), получаем:

$$R = \frac{U^2 \eta T}{cm(t_2 - t_1)}. \quad (5)$$

Подставив в (5) численные значения, имеем:

$$R = \frac{220^2 \cdot 0,9 \cdot 300}{4200 \cdot 1 \cdot (373 - 293)} = 39 \text{ (Ом)}.$$

б. Сопротивление однородной цилиндрической проволоки

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (6)$$

Отсюда длина проволоки

$$l = \frac{RS}{\rho}. \quad (7)$$

После подстановки численных значений получим:

$$l = \frac{39 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}{1,1 \cdot 10^{-6}} = 3,5 \text{ (м)}.$$

2. Сколько тепла выделится на сопротивлении $R = 75 \text{ Ом}$ при прохождении через него количества электричества $q = 100 \text{ Кл}$, если ток в сопротивлении равномерно убывал до нуля в течение времени $\Delta t = 50 \text{ с}$?

Дано

$$R = 75 \text{ Ом};$$

$$q = 100 \text{ Кл};$$

$$I_2 = 0;$$

$$\Delta t = 50 \text{ с}$$

$$Q = ?$$

Решение

Так как ток равномерно (линейно) убывал, его зависимость от времени можно представить в виде $I = I_1 - \alpha t$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ сила тока $I = I_1$, в момент времени $\Delta t = 50 \text{ с}$ сила тока $I = 0$. Отсюда следует:

$$\alpha = \frac{I_1}{\Delta t}, \quad I = I_1 - \frac{I_1}{\Delta t} t.$$

Найдем значение начального тока I_1 . Заряд, прошедший через поперечное сечение проводника, равен

$$q = \int_0^{\Delta t} \left(I_1 - \frac{I_1}{\Delta t} t \right) dt = \frac{I_1 \Delta t}{2}, \quad I_1 = \frac{2q}{\Delta t}, \quad I_1 = \frac{2 \cdot 100}{50} = 4 \text{ А}.$$

Подставим значение I_1 в формулу для силы тока $I = 4 - 0,08t$. Найдем количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R :

$$Q = \int_0^{\Delta t} \left(I_1 - \frac{I_1 t}{\Delta t} \right)^2 R dt = RI_1^2 \int_0^{\Delta t} \left(1 - \frac{t}{\Delta t} \right)^2 dt = \frac{RI_1^2 \Delta t}{3};$$

$$Q = \frac{75 \cdot 16 \cdot 50}{3} = 20 \text{ кДж}.$$

3. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме, если $\varepsilon_1 = 1,5 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 3,7 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$ и $R = 5,0 \text{ Ом}$. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Дано

$$\varepsilon_1 = 1,5 \text{ В}, \quad \varepsilon_2 = 3,7 \text{ В};$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad R_2 = 20 \text{ Ом};$$

$$R = 5,0 \text{ Ом};$$

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$J_R = ?$$

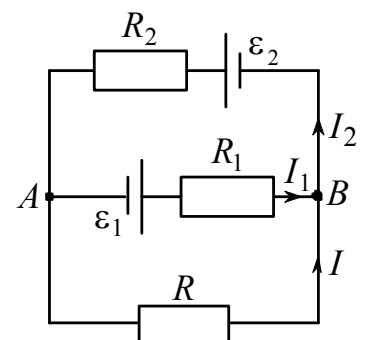
Решение

Обозначим стрелками предположительные направления неизвестных токов I , I_1 и I_2 в цепи.

Запишем первое правило Кирхгофа для узла B и второе правило Кирхгофа для контуров BR_2AR_1B и BR_1ARB , выбрав направление обхода последних против часовой стрелки:

$$I + I_1 - I_2 = 0, \tag{1}$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{2}$$



$$IR - I_1 R_1 = -\varepsilon_1. \quad (3)$$

Уравнения (1) – (3) составляют систему относительно неизвестных I , I_1 и I_2 , решая которую, находим

$$I = \frac{R_1 \varepsilon_2 - R_2 \varepsilon_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = 0,02 \text{ А.}$$

Поскольку $I > 0$, то в действительности искомый ток направлен так, как указано на рисунке.

4. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора C схемы, если $\varepsilon_1 = 4,0 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 1,0 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

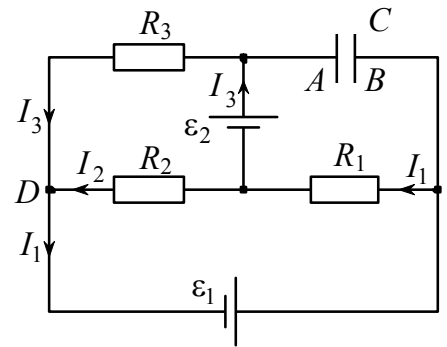
Дано

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 4,0 \text{ В}, \quad \varepsilon_2 = 1,0 \text{ В}; \\ R_1 &= 10 \text{ Ом}, \quad R_2 = 20 \text{ Ом}; \\ R_3 &= 30 \text{ Ом}; \\ r_1 &= r_2 = 0 \end{aligned}$$

$$(\varphi_A - \varphi_B) = ?$$

Решение

В установившемся режиме ток через конденсатор $I_C = 0$, и в цепи текут три неизвестных тока I_1 , I_2 , I_3 , предположительные направления которых указаны на



рисунке.

Применим первое правило Кирхгофа к узлу D и второе правило Кирхгофа к контурам $DR_2\varepsilon_2R_3D$ и $D\varepsilon_1R_1R_2D$:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (1)$$

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2, \quad (2)$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), находим ток I_1 :

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2 R_2}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}. \quad (4)$$

Для определения разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ применим обобщенный закон Ома к участку $A\varepsilon_2R_1B$:

$$-I_1 R_1 = (\varphi_A - \varphi_B) - \varepsilon_2,$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_2 - I_1 R_1. \quad (5)$$

Подстановка (4) в (5) дает

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\varepsilon_2 R_3 (R_1 + R_2) - \varepsilon_1 R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} = -1,0 \text{ В.}$$

10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электрическое поле, так и в пространстве, окружающем электрические токи (движущиеся электрические заряды) и постоянные магниты, возникает силовое поле, которое называется *магнитным*.

10.1. Магнитный момент. Магнитная индукция

Опыт показывает, что на пробную рамку (контур) с током в магнитном поле действует момент сил \vec{M} , зависящий как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки, в частности, от её ориентации.

Максимальное значение M_{\max} момента сил прямо пропорционально силе тока в контуре и площади S , охватываемой контуром, т.е.

$$M_{\max} \sim IS. \quad (10.1)$$

Величину

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} \quad (10.2)$$

называют вектором *магнитного момента* контура с током, где \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности контура, направление которого связано правилом правого винта с направлением тока, текущего в рамке.

Единица магнитного момента – *ампер умножить на квадратный метр* ($A \cdot m^2$).

Зависимость (10.1) используют для введения силовой характеристики магнитного поля – *магнитной индукции* \vec{B} .

Магнитная индукция в некоторой точке поля равна отношению максимального момента сил, действующих на рамку с током, помещенную в данную точку, к магнитному моменту рамки:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}. \quad (10.3)$$

Единицей магнитной индукции является *тесла* (Тл), $Tл = H/(A \cdot m)$.

Магнитное поле графически изображают с помощью линий магнитной индукции, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{B} . Линии вектора \vec{B} всегда замкнуты и охватывают проводники с током. Подобные поля называют *вихревыми*.

На рис. 10.1 для линейного тока показана структура магнитного поля в виде замкнутых concentрических окружностей, лежащих в плоскости рисунка. Знаком \otimes обозначено направление линейного тока – тока в тонком бесконечно длинном прямолинейном проводнике.

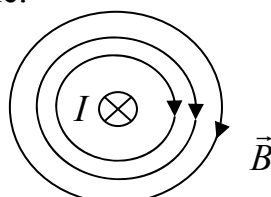


Рис. 10.1

10.2. Закон Ампера

Одним из главных проявлений магнитного поля является его силовое действие на движущиеся электрические заряды и токи.

Ампер установил, что сила $d\vec{F}_A$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $d\vec{l}$ с током, находящегося в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и векторному произведению элемента проводника $d\vec{l}$ на магнитную индукцию \vec{B} :

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (10.4)$$

Здесь $d\vec{l}$ – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током.

Направление вектора $d\vec{F}_A$ находится по правилу векторного произведения (рис. 10.2). Его также можно найти по правилу «левой руки», которое является следствием правила векторного произведения: если расположить левую руку так, чтобы вектор магнитной индукции \vec{B} входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца совпали с направлением тока, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на проводник.

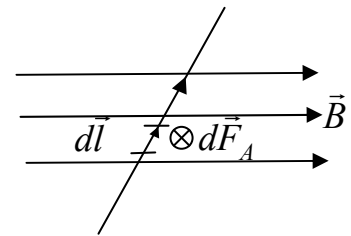


Рис. 10.2

Модуль силы Ампера

$$dF_A = IdlB \sin \alpha, \quad (10.5)$$

где α – угол между направлениями векторов $d\vec{l}$ и \vec{B} .

10.3. Сила Лоренца

Опыт показывает, что магнитное поле действует и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле, с силой, называемой *силой Лоренца*, которая выражается формулой

$$\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}], \quad (10.6)$$

где \vec{B} – индукция магнитного поля, в котором заряд q движется со скоростью \vec{V} . Иногда эту силу называют *магнитной силой*.

Направление силы Лоренца \vec{F}_L для положительного заряда можно найти по правилу «левой руки». Различие состоит лишь в том, что четыре вытянутых пальца следует расположить по направлению вектора скорости \vec{V} . В случае отрицательного заряда пальцы следует расположить противоположно вектору скорости \vec{V} (рис. 10.3).

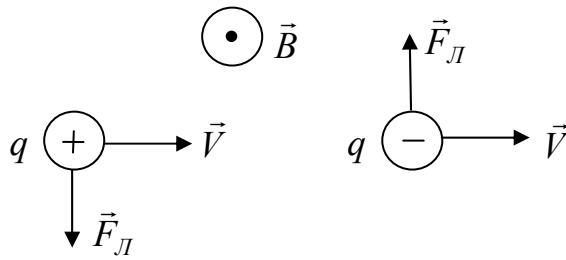


Рис. 10.3

Модуль силы Лоренца

$$F_L = qVB \sin \alpha, \quad (10.7)$$

где α – угол между векторами \vec{V} и \vec{B} .

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью \vec{V} , перпендикулярной вектору \vec{B} , то её траекторией является окружность.

Если скорость \vec{V} заряженной частицы направлена под углом α к вектору \vec{B} , то она будет двигаться по спирали, ось которой параллельна магнитному полю.

Магнитная сила всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому работы над зарядом не совершает.

В случае нахождения заряда одновременно в электрическом и магнитном полях на него будет действовать электромагнитная сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V}\vec{B}]. \quad (10.8)$$

Это выражение справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей.

10.4. Напряженность магнитного поля.

Закон Био – Савара – Лапласа

Магнитные свойства вещества характеризуются магнитной проницаемостью μ .

Если все пространство заполнено изотропным веществом с магнитной проницаемостью μ_1 , то в точке A (рис. 10.4) проводник с током I будет создавать магнитную индукцию \vec{B}_1 . При заполнении всего пространства другим веществом с магнитной проницаемостью μ_2 магнитная индукция в точке A станет \vec{B}_2 . Опыт показывает, что

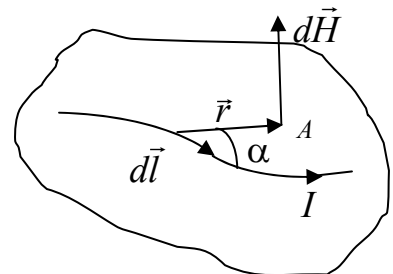


Рис. 10.4

$$\frac{\vec{B}_1}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} = \dots = \frac{\vec{B}}{\mu}. \quad (10.9)$$

Величину

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad (10.10)$$

называют *напряженностью* магнитного поля. В (10.10) μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ (генри на метр).

Для проводника с током I , элемент которого $d\vec{l}$ создает в некоторой точке A (рис. 10.3) магнитное поле, напряженность $d\vec{H}$ записывается в виде

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (10.11)$$

где $d\vec{l}$ – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ в точку A .

Формула (10.11) есть *закон Био - Савара - Лапласа* для вектора \vec{H} .

В вакууме для вектора \vec{B} этот закон записывается в виде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (10.12)$$

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции. Магнитная индукция \vec{B} результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций \vec{B}_i складываемых полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (10.13)$$

10.5. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме.

Теорема Гаусса для поля \vec{B}

Циркуляция вектора \vec{B} по произвольному замкнутому контуру L в вакууме равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k. \quad (10.14)$$

Утверждение (10.14) называется *законом полного тока для магнитного поля в вакууме*, или *теоремой о циркуляции вектора \vec{B}* .

Ток I_k в (10.14) считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

Потоком вектора магнитной индукции через площадку dS называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S}, \quad (10.15)$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \vec{n} к площадке.

Теорема Гаусса для поля \vec{B} определяет, что поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \quad (10.16)$$

Эта теорема отражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

10.6. Примеры решения задач

1. Тонкое кольцо массой $m=10,0$ г и радиусом $R=8,0$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau=10$ нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой $\nu=15$ с⁻¹ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить: а) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого кольцом; б) отношение магнитного момента к моменту импульса L кольца.

Дано

$$m = 10,0 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг};$$

$$R = 8,0 \text{ см} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\tau = 10 \text{ нКл/м} = 10^{-8} \text{ Кл/м};$$

$$\nu = 15 \text{ с}^{-1}$$

$$p_m = ? \quad \frac{p_m}{L} = ?$$

Решение

а. Вектор магнитного момента контура с током

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (1)$$

где \vec{n} – единый вектор нормали к поверхности контура, который совпадает с осью вращения; площадь контура $S = \pi R^2$.

Величину тока найдем, используя определение тока $I = \frac{dq}{dt}$. При равномерном вращении контура последнее выражение можем записать в виде

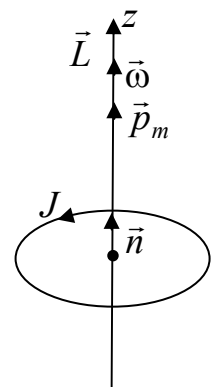
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (2)$$

или в единицу времени

$$I = \frac{q}{t}. \quad (3)$$

Весь заряд, равномерно распределенный по контуру, определяется как $q = \tau 2\pi R$, а время $t = T$, где $T = \frac{1}{\nu}$ – период вращения. Величина тока равна $I = 2\pi R\tau\nu$. Тогда магнитный момент кольца определяется в виде

$$p_m = 2\pi^2 R^3 \tau \nu. \quad (4)$$



б. Момент импульса кольца

$$L = J\omega, \quad (5)$$

где $J = mR^2$ – момент инерции кольца относительно оси вращения, $\omega = 2\pi\nu$.

Искомое отношение

$$\frac{p_m}{L} = \frac{2\pi^2 R^3 \tau \nu}{2\pi R^2 m \nu} = \frac{2\pi R \tau}{2m} = \frac{q}{2m}. \quad (6)$$

Подставив численные значения, получаем $p_m = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ А} \cdot \text{м}^2$;

$$\frac{p_m}{L} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/кг}.$$

2. По двум одинаковым плоским квадратным контурам со стороной $a = 20 \text{ см}$ текут токи $I = 10,0 \text{ А}$ в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответствующими сторонами контуров равно 2 мм .

Дано

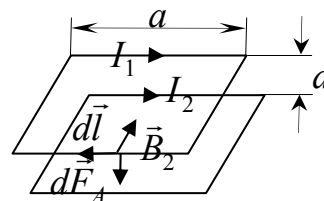
$$a = 20 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ м},$$

$$I = 10,0 \text{ А};$$

$$d = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F = ?$$

Решение



Так как $a \gg d$, то каждую сторону обоих квадратов будем рассматривать как длинные проводники с токами I . Будем считать, что контуры расположены друг над другом. Сила взаимодействия определяется законом Ампера, который для элементарного участка $d\vec{l}$ проводника с током I_1 запишется в виде

$$d\vec{F}_A = I_1 [d\vec{l} \vec{B}_2], \quad (1)$$

где \vec{B}_2 – величина индукции магнитного поля, создаваемого ближайшим параллельным проводником с током I_2 .

Используя закон полного тока для магнитного поля в вакууме, получаем

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}. \quad (2)$$

Учитывая, что $d\vec{l} \perp \vec{B}_2$, выражение (1) совместно с (2) принимает вид

$$dF_A = I_1 dl \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}, \quad (3)$$

где $I_1 = I_2 = I$ по условию задачи.

Тогда выражение (3) записывается в виде

$$dF_A = \frac{\mu_0 I^2 dl}{2\pi d}. \quad (4)$$

Сила взаимодействия каждой пары сторон квадратов равна

$$F_A = \int_0^a \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} dl = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi d}. \quad (5)$$

Общая сила взаимодействия сторон квадратов равна $F = 4F_A$, или $F = \frac{2\mu_0 I^2 a}{\pi d}$. Подставив численные значения, получаем

$$F = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

3. В круговом витке радиусом $R=100$ мм, изготовленном из тонкого провода, циркулирует ток $I=1,0$ А. Найти магнитную индукцию на оси витка в точке, отстоящей от центра на расстоянии $a=100$ мм.

Дано

$$R=100 \text{ мм}=1 \cdot 10^{-1} \text{ м};$$

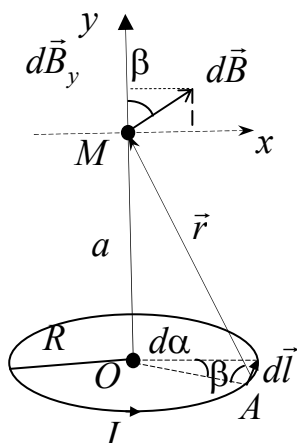
$$I=1,0 \text{ А};$$

$$a=100 \text{ мм}=1 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$

$$B=?$$

Решение

Величину магнитной индукции будем искать, используя закон Био-Савара-Лапласа для элементарного участка $d\vec{l}$ витка с током I :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (1)$$

где r – расстояние от dl до точки наблюдения M . В точке M вектор $d\vec{B} \perp \vec{r}$ и $d\vec{l}$. Так как $\vec{r} \perp d\vec{l}$, то (1) запишется в виде

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}, \quad (2)$$

где $dl \approx R d\alpha$, $r^2 = a^2 + R^2$ (из прямоугольного треугольника MOA).

Проекция вектора $d\vec{B}$ на ось витка будет

$$dB_y = dB \cos \beta, \quad (3)$$

где $\cos \beta$ находим из треугольника MOA : $\cos \beta = \frac{R}{r}$, или $\cos \beta = \frac{R}{(a^2 + R^2)^{1/2}}$,

$\beta = \angle MAO$.

Окончательно выражение (3) принимает вид

$$dB_y = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(a^2 + R^2)^{3/2}} d\alpha. \quad (4)$$

Величина dB_y находится путем интегрирования (4) по углу α от 0 до 2π :

$$B_y = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(a^2 + R^2)^{3/2}} d\alpha. \quad (5)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Подставив численные значения, получаем

$$B_y = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot (10^{-1})^2}{2[(10^{-1})^2 + (10^{-1})^2]^{3/2}} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

В силу симметрии системы $dB_x = 0$ и вектор \vec{B} направлен вдоль оси y .

4. Круговой виток радиусом $R=15,0$ см расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. При этом нормаль \vec{n} к плоскости витка направлена точно на провод. Сила тока в проводе $I_1=1,0$ А, сила тока в витке $I_2=5,0$ А. Расстояние от точки O (центра витка) до провода $d=20,0$ см. Определить магнитную индукцию в центре витка.

Дано

$$R=15 \text{ см}=0,15 \text{ м};$$

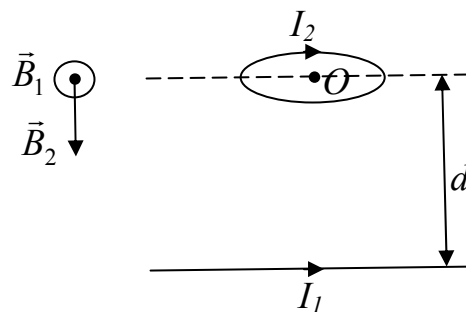
$$I_1=1,0 \text{ А};$$

$$I_2=5,0 \text{ А};$$

$$d=20,0 \text{ см}=0,2 \text{ м}$$

$$B_0=?$$

Решение



В точке O магнитная индукция определяется вектором \vec{B}_1 магнитной индукции, создаваемой током I_1 , протекающим по длинному тонкому проводу, и вектором \vec{B}_2 магнитной индукции, создаваемой током I_2 в центре кругового витка. Общая индукция в точке O определяется по принципу суперпозиции

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (1)$$

или по модулю

$$B_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad (2)$$

так как $\vec{B}_1 \perp \vec{B}_2$.

Величину B_1 находим, используя закон полного тока для магнитного поля в вакууме

$$\oint_L \vec{B}_1 d\vec{l} = \mu_0 I_1, \quad (3)$$

откуда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \quad (4)$$

Величину B_2 в центре кругового тока найдем из решения предыдущей задачи 5, положив в формуле (6) $a=0$:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R}. \quad (5)$$

Общая индукция в точке O составит

$$B_0 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2R}\right)^2} = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\left(\frac{I_1}{\pi d}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{R}\right)^2}.$$

Подставив численные значения, получаем

$$B_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \sqrt{\frac{1}{(\pi \cdot 0,2)^2} + \left(\frac{5}{0,15}\right)^2} = 21,0 \cdot 10^{-6} \text{Тл.}$$

11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

11.1. Основной закон электромагнитной индукции

Рассмотрим контур, помещенный в магнитное поле с индукцией \vec{B} (рис. 11.1). При всяком изменении магнитного потока Φ через площадь S поверхности, ограниченной контуром, в последнем возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (11.1)$$

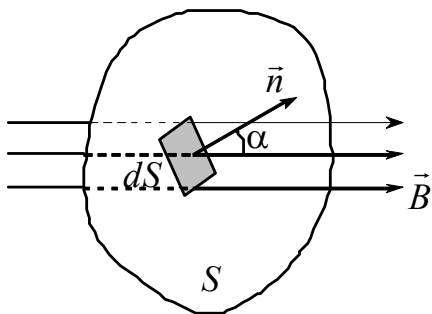


Рис.11.1

где магнитный поток $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS$;
 $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к площадке dS ; α – угол между векторами \vec{B} и \vec{n} .

Соотношение (11.1) называется *основным законом электромагнитной индукции*.

Если контур образуется N витками проводника, вводится понятие *потокосцепления* $\Psi = N\Phi$, тогда (11.1) можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (11.2)$$

Единицей магнитного потока является *вебер* (Вб). При скорости изменения магнитного потока 1 Вб за 1 с в контуре индуцируется ЭДС, равная 1В.

Если контур замкнутый, то в нем возникает электрический ток, называемый *индукционным*.

Используя закон Ома для полной цепи и основной закон электромагнитной индукции (11.1), можно получить выражение для индукционного тока:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (11.3)$$

В соответствии с правилом Ленца индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. В этом смысле индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающему ЭДС индукции.

Возникновение индукционного тока в замкнутом контуре свидетельствует о том, что изменяющееся во времени магнитное поле вызывает в контуре появление сторонних сил. Такие силы обусловлены возникающим в проводе вихревым электрическим полем \vec{E} . Именно это поле и ответственно за появление ЭДС индукции в неподвижном контуре при изменении во времени магнитного поля. Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля независимо от проводящего контура. Последний лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование этого электрического поля.

В отличие от кулоновского поля обозначим это поле $\vec{E}_{\text{ст}}$. Циркуляция вектора $\vec{E}_{\text{ст}}$ по любому неподвижному контуру определяется как

$$\oint_L \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (11.4)$$

В общем виде закон электромагнитной индукции запишется следующим образом:

$$\oint_L \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (11.5)$$

где L – контур, ограничивающий площадку S .

11.2. Самоиндукция. Индуктивность

Самоиндукцией называют возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении силы тока в нем.

При отсутствии вблизи контура с током ферромагнетиков полный магнитный поток Φ через контур пропорционален силе тока I :

$$\Phi = LI, \quad (11.6)$$

где L – коэффициент, называемый *индуктивностью* контура. Индуктивность L зависит от размеров и формы контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Единицей индуктивности является *генри* (Гн).

При изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС самоиндукции ε_S :

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Если при этом индуктивность L не изменяется, то

$$\varepsilon_S = -L \frac{dI}{dt}. \quad (11.7)$$

11.3. Взаимная индукция

Взаимной индукцией называют возникновение ЭДС индукции в одном контуре при изменении силы тока, протекающего по другому контуру.

Рассмотрим два неподвижных друг относительно друга контура (рис.11.2), по одному из которых течет ток I_1 , создающий магнитное поле \vec{B}_1 . Согласно (10.12), $B_1 \sim I_1$, поэтому величина магнитного потока, созданного током I_1 и пронизывающего площадку контура 2 $\Phi_{21} \sim I_1$. Тогда можно записать:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad (11.8)$$

где коэффициент пропорциональности L_{21} называют *взаимной индуктивностью* контуров. Взаимная индуктивность зависит от формы и размеров обоих контуров, их взаимного расположения, магнитной проницаемости окружающей среды и измеряется, как и индуктивность, в *генри* (Гн).

Задав ток I_2 в контуре 2 и проведя аналогичные рассуждения для потока Φ_{12} , созданного током I_2 и пронизывающего площадку контура 1, запишем:

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2. \quad (11.9)$$

При отсутствии ферромагнетиков коэффициенты L_{12} и L_{21} равны между собой ($L_{12} = L_{21}$).

Если сила тока в одном из контуров будет изменяться, то в другом контуре возникнет ЭДС индукции:

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

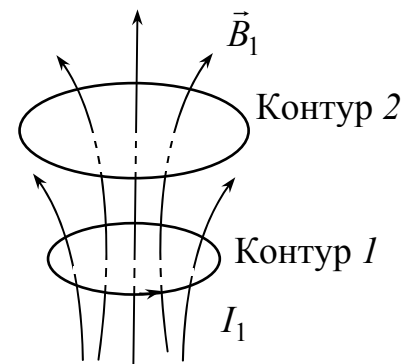


Рис. 11.2

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

11.4. Энергия магнитного поля

При отсутствии ферромагнетиков, т.е. при наличии линейной зависимости между магнитной индукцией \vec{B} и напряженностью магнитного поля \vec{H} ($\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$), энергия магнитного поля выражается формулой

$$W = \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV, \quad (11.10)$$

где величина $w = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}$ называется *объемной плотностью энергии магнитного поля*.

Объемную плотность энергии w можно записать в виде

$$w = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (11.11)$$

Контур с индуктивностью L , по которому течет ток I , в отсутствие ферромагнетиков обладает энергией

$$W = \frac{1}{2} LI^2, \quad (11.12)$$

которая называется *магнитной энергией тока*.

11.5. Теория Максвелла для электромагнитного поля

Из закона Фарадея следует, что любое изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако ЭДС в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы — силы неэлектростатического происхождения. Поэтому встает вопрос о природе сторонних сил в данном случае.

Опыт показывает, что эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре; их возникновение также нельзя

объяснить силами Лоренца, так как они на неподвижные заряды не действуют. Д. Максвелл высказал гипотезу, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется ЭДС, играет второстепенную роль, являясь своего рода лишь «прибором», обнаруживающим это поле. Но должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля. Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый *ток смещения*, способный создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Следует отметить, что название «ток смещения» является условным, а точнее — исторически сложившимся, так как ток смещения по своей сути — это изменяющееся со временем электрическое поле. Ток смещения поэтому существует не только в вакууме или диэлектриках, но и внутри проводников, по которым проходит переменный ток. Однако в данном случае он пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости. Наличие токов смещения подтверждено экспериментально А. Эйхенвальдом, изучавшим магнитное поле тока поляризации, который является частью тока смещения.

Введение Максвеллом понятия тока смещения привело его к завершению созданной им макроскопической теории электромагнитного поля. В основе теории Максвелла лежат уравнения, объединенные в так называемую систему уравнений Максвелла. Полная система уравнений Максвелла приведена в приложении.

Теория Максвелла, являясь обобщением основных законов электрических и магнитных явлений, не только смогла объяснить уже известные экспериментальные факты, что также является важным ее следствием, но и спрогнозировать новые явления. Одним из важных выводов этой теории явилось существование магнитного поля токов смещения, что позволило Максвеллу предсказать существование электромагнитных волн — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. В дальнейшем было доказано, что скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) в вакууме равна скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Этот вывод и теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны. Электромагнитные волны на опыте были получены немецким физиком Г. Герцем, доказавшим, что законы их возбуждения и распространения полностью описываются уравнениями Максвелла. Таким образом, теория Максвелла была экспериментально подтверждена.

Теория Максвелла и ее экспериментальное подтверждение приводят к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, базирующейся на представлении об электромагнитном поле.

Уравнения Максвелла

Полная система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме приведена в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Интегральная форма	Дифференциальная форма
$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$	$\text{div} \vec{D} = \rho$
$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div} \vec{B} = 0$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми, и между ними в случае изотропных сред существует следующая связь:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — соответственно относительные диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; σ — удельная проводимость среды.

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная и дифференциальная — эквивалентны. Однако если имеются поверхности разрыва — поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют граничными условиями, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$$

(первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет свободных электрических зарядов, ни токов проводимости).

Интегральная форма уравнений Максвелла содержит эти условия.

11.6. Примеры решения задач

1. В однородном магнитном поле ($B = 200$ мТл) равномерно с частотой $\nu = 600$ мин⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную ЭДС, индуцируемую в рамке.

Дано

$$B=200\text{мТл}=2\cdot 10^{-1}\text{Тл};$$

$$\nu=600\text{мин}^{-1}=10\text{с}^{-1};$$

$$N=1200;$$

$$S=100\text{см}^2=1\cdot 10^{-2}\text{м}^2$$

$$\varepsilon_{i\text{max}}=?$$

Решение

Согласно закону электромагнитной индукции,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (1)$$

где потокосцепление $\Psi = N\Phi$; $\Phi = \int_S B_n dS = \int B dS \cos \alpha$

– магнитный поток через один виток; B_n – проекция

вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к плоскости рамки; α – угол между векторами \vec{B} и \vec{n} .

Пусть $\alpha(t=0) = 0$, тогда в произвольный момент времени t угол $\alpha = \omega t$,

где $\omega = 2\pi\nu$ – угловая скорость вращения рамки. Так

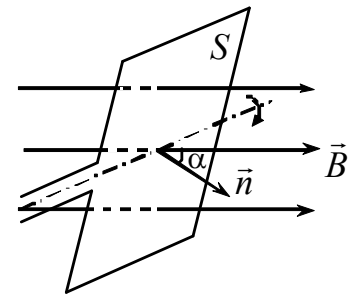
как магнитное поле, в котором находится рамка, однородно, то

$$\Psi = N \int_S B dS \cos \alpha = NB \cos \alpha \int_S dS = NBS \cos(2\pi\nu t). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем $\varepsilon_i = 2\pi\nu NBS \sin(2\pi\nu t)$,

откуда максимальное значение ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i\text{max}} = 2\pi\nu NBS = 151 \text{ В}.$$



2. Внутри длинного соленоида находится катушка из N витков с площадью поперечного сечения S . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO' (рис.1), совпадающей с ее диаметром и перпендикулярной оси соленоида. Найти ЭДС индукции в катушке, если индукция магнитного поля в соленоиде меняется во времени как $B = B_0 \sin \omega t$ и в момент $t = 0$ ось катушки совпадала с осью соленоида.

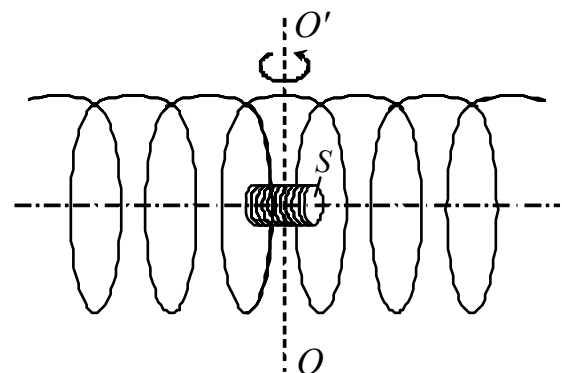


Рис. 1

Дано

$$N; S; \omega = \text{const};$$

$$B = B_0 \sin \omega t$$

$$\varepsilon_i=?$$

Решение

Согласно закону электромагнитной индукции,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\Psi = N\Phi$ – полный магнитный поток сквозь катушку

(потокосцепление); $\Phi = \int_S B_n dS = \int B dS \cos \alpha$ –

магнитный поток через один виток катушки;

B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к

плоскости витка (рис.2); $\alpha = \omega t$ – угол между

векторами \vec{B} и \vec{n} (здесь учли, что в момент

времени $t = 0$ ось катушки совпадала с

осью соленоида, т.е. $\alpha(t = 0) = 0$).

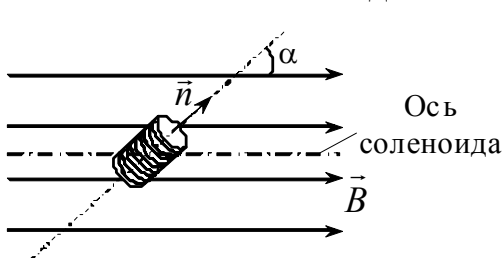


Рис.2

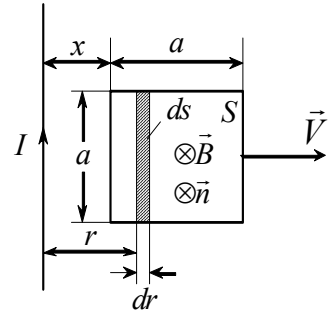
Так как поле внутри длинного соленоида однородно, то

$$\Psi = NB \cos \alpha \int_S dS = NBS \cos \omega t = NB_0 S \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t.$$

Тогда ЭДС индукции в катушке

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{2} NB_0 S \cdot 2\omega \cos 2\omega t = -NB_0 S \omega \cos 2\omega t.$$

3. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости (рисунок). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью V . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x .



Дано

$$\begin{array}{l} a; I; \\ V = \text{const} \\ \hline \varepsilon_i(x) = ? \end{array}$$

Решение

Для определения ЭДС индукции в рамке воспользуемся законом электромагнитной индукции, согласно которому

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

где $\Phi = \int_S B_n dS$ – магнитный поток, пронизывающий рамку; B_n – проекция вектора индукции \vec{B} магнитного поля, создаваемого проводом с током I , на нормаль \vec{n} к плоскости рамки; dS – элементарная площадка поверхности S , ограниченной рамкой.

Величина индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным длинным проводом с током I в вакууме на расстоянии r от него, определяется выражением

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2)$$

Направление линий вектора \vec{B} в пределах поверхности S указано на рисунке.

Направим нормаль \vec{n} к плоскости рамки за чертеж («от нас»), тогда в каждой точке поверхности S векторы \vec{B} и \vec{n} будут параллельны и $B_n = B$.

Так как магнитное поле в пределах рамки является неоднородным и $B = B(r)$, то при вычислении магнитного потока Φ в качестве элементарной площадки dS выберем полоску, параллельную проводу с током, находящуюся от него на расстоянии r , шириной dr . Величина магнитной индукции B в пределах элементарного участка dS будет определяться формулой (2). Тогда

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S B dS = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right). \quad (3)$$

В (3) учли, что $dS = a dr$.

Согласно (3), $\Phi = \Phi(x)$, где $x = x(t)$. Следовательно, выражение (1) можно переписать в виде

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (4)$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = V$, после подстановки (3) в (4) получаем

$$\varepsilon_i = - \frac{\mu_0 I a V}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \left(- \frac{a}{x^2} \right) = \frac{\mu_0 I a^2 V}{2\pi x(x+a)}.$$

4. Проводящая рамка со сторонами a и b и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости. Расстояние от стороны OO' до проводника равно c , сопротивление рамки R . Найти:

- 1) поток вектора магнитной индукции, создаваемый током I через поверхность, ограниченную рамкой;
- 2) ЭДС индукции и индукционный ток в рамке, если ток в проводнике меняется по закону $I = \alpha - \beta t$, где α, β – постоянные величины;
- 3) количество электричества, протекающего в рамке, за время уменьшения тока до нуля.

Дано

$a, b, c;$

$R;$

$I = \alpha - \beta t$

$\Phi = ? \quad E_i = ?$

$I_i = ? \quad q = ?$

Решение

Поле, создаваемое бесконечным проводником с током, зависит от расстояния r до проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Для вычисления потока вектора магнитной индукции разобьем поверхность рамки на узкие полоски площадью $dS = bdr$. Элементарный поток через поверхность dS равен

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr.$$

Поток вектора \vec{B} через всю поверхность рамки:

$$\Phi = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}.$$

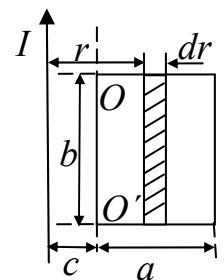
Если ток в проводнике зависит от времени, то и поток является функцией времени:

$$\Phi = \frac{\mu_0 b(\alpha - \beta t)}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}.$$

Следовательно, в рамке возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 b\beta}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c},$$

и начинает протекать индукционный ток:



$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}; \quad I_i = \frac{\mu_0 b \beta}{2\pi R} \ln \frac{c+a}{c}.$$

Количество электричества q , протекшее в рамке, за промежуток времени от t_1 до t_2 равно

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R},$$

где $\Phi_1 = \frac{\mu_0 b \alpha}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}$ – поток в начальный момент времени $t_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ – поток в момент времени t_2 , когда $I = 0$. Следовательно,

$$q = \frac{\mu_0 b \alpha}{2\pi R} \ln \frac{c+a}{c}.$$

5. Квадратный проволочный контур со стороной a , находящийся в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленном перпендикулярно плоскости контура, согнули, как показано на рисунке. Определить заряд, который протечет при этом по контуру. Сопротивление единицы длины контура ρ .

Дано

a ;

\vec{B} ;

ρ

$q=?$

Решение

Поток вектора магнитной индукции в первом случае $\Phi_1 = Ba^2$. После сгибания витка поток стал $\Phi_2 = 0$, поскольку потоки через две части контура, имеющие одинаковые площади, равны по величине, но противоположны по знаку.

Обозначим время, за которое произвели перегиб контура, через Δt . Тогда в контуре возникает ЭДС индукции величиной

$$|\varepsilon| = \Delta\Phi / \Delta t = Ba^2 / \Delta t.$$

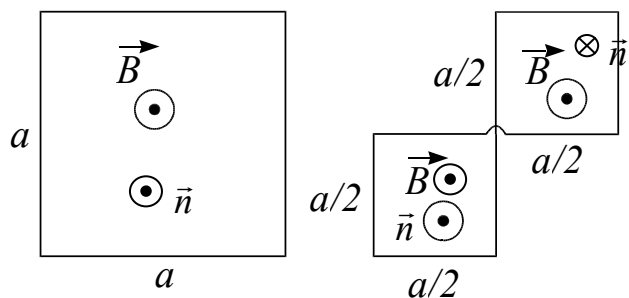
Следовательно, индукционный ток равен

$$I = \varepsilon / R,$$

где $R = 4a\rho$ – сопротивление контура.

Из определения силы тока $I = q / \Delta t$ находим заряд, протекающий за время Δt по контуру

$$q = I\Delta t = Ba^2 / 4a\rho = Ba / 4\rho.$$



6. Катушка индуктивности L и сопротивления R подключена к источнику постоянной ЭДС ε (рис.1). Параллельно катушке включено сопротивление R_0 . Найти зависимость тока I в катушке от времени t после размыкания ключа K . Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

Дано

$L; R; \varepsilon;$

$R_0, r=0$

$I(t)=?$

Решение

После размыкания ключа K в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

где I – ток, текущий в контуре, образованном катушкой и сопротивлением R_0 , которые теперь оказываются соединенными последовательно. Запишем для этого контура закон Ома:

$$I(R + R_0) = \varepsilon_s. \quad (2)$$

Подставив (1) в (2), имеем

$$I(R + R_0) = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3)$$

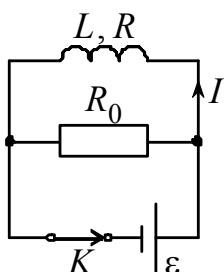


Рис.1

После разделения переменных уравнение (3) примет вид

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R + R_0}{L} dt. \quad (4)$$

Интегрируя (4), получаем

$$\ln I = -\frac{R + R_0}{L} t + \ln C,$$

или

$$I = C \exp\left(-\frac{R + R_0}{L} t\right), \quad (5)$$

где C – неизвестная постоянная интегрирования.

Для определения постоянной C воспользуемся начальным условием: в момент размыкания ключа ($t = 0$) в катушке течет установившийся ток $I_0 = \varepsilon / R$ (значение установившегося тока I_0 можно найти, воспользовавшись вторым правилом Кирхгофа для контура, состоящего из катушки и источника ЭДС, при условии, что сопротивление источника пренебрежимо мало), т.е. $I(t = 0) = I_0 = \varepsilon / R$.

Тогда

$$C = \varepsilon / R. \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) дает

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{R + R_0}{L} t\right).$$

График зависимости I от t приведен на рис.2.

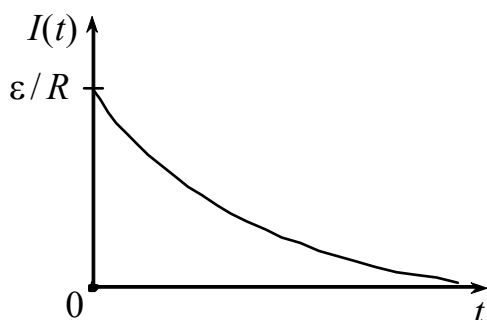


Рис.2

12. КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. п.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, акустические и т. д.

Колебания широко распространены в природе и технике. В ряде случаев они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, вибрации крыльев самолета — все это процессы, которые могут привести к катастрофическим последствиям. В подобных случаях задача заключается в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или воспрепятствовать тому, чтобы колебания достигли опасных размеров.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в самой основе различных отраслей техники. Так, например, на колебательных процессах основаны некоторые разделы радиотехники.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными или собственными называются такие колебания, которые совершаются при отсутствии внешних воздействий за счет первоначально сообщенной колеблющейся системе энергии.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой — система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в те моменты, когда маятник проходит через среднее положение.

При *параметрических колебаниях* за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длина нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

12.1. Механические колебания

Простейшим видом колебаний являются *гармонические колебания*. При таких колебаниях колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Рассмотрение этого вида колебаний особенно важно по следующим причинам: *во-первых*, колеба-

ния в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим, и, во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

12.1.1. Гармонические колебания

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массой m , подвешенного на пружине (рис. 12.1). В состоянии равновесия сила тяжести уравновешивается упругой силой:

$$mg = k\Delta l_0. \quad (12.1)$$

Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x , причем ось x направим по вертикали вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика.

Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние, равное x (x — алгебраическая величина), то удлинение пружины станет равным $(\Delta l_0 + x)$ и проекция результирующей силы на ось x примет значение

$$F_x = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Учитывая условие равновесия (12.1), получим, что

$$F_x = -kx. \quad (12.2)$$

Знак «—» в формуле (12.2) показывает, что смещение и сила имеют противоположные направления: если шарик смещен из положения равновесия вниз ($x > 0$), сила направлена вверх ($F_x < 0$), при смещении шарика вверх ($x < 0$) сила направлена вниз ($F_x > 0$). Таким образом, сила \vec{F} обладает следующими свойствами: 1) она пропорциональна смещению шарика из положения равновесия, 2) она всегда направлена к положению равновесия.

В сущности, сила \vec{F} по своей природе упругая. Если сила иного происхождения обнаруживает те же свойства, т. е. оказывается равной $F_x = -kx$, где k — постоянная положительная величина, то её принято называть *квазиупругой*, независимо от её природы.

Для того чтобы сообщить системе смещение x , нужно совершить против квазиупругой силы работу

$$A = \int_0^x (-F) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Эта работа идет на создание запаса потенциальной энергии системы. Следовательно, система, в которой действует квазиупругая сила, при смещении из положения равновесия на расстояние x обладает потенциальной энергией

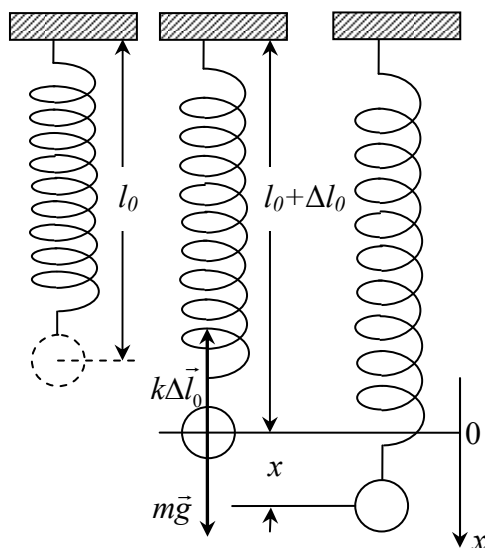


Рис. 12.1

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

(потенциальную энергию в положении равновесия полагаем равной нулю).

Сообщим шарiku (рис. 12.1) смещение $x = x_0$, после чего предоставим систему самой себе. Под действием силы $F = -kx$ шарик будет двигаться к положению равновесия со все возрастающей скоростью $V = \dot{x}$. При этом потенциальная энергия системы будет убывать и появится все возрастающая кинетическая энергия $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ (массой пружины пренебрегаем). Пройдя положение равновесия, шарик продолжает двигаться. Это движение будет замедленным и прекратится тогда, когда кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную, т. е. когда смещение шарика станет равным $-x_0$. Аналогичный процесс будет протекать при движении шарика в обратном направлении. Если трение в системе отсутствует, энергия системы должна сохраняться, и шарик будет перемещаться в пределах от $x = x_0$ до $x = -x_0$ неограниченно долго.

Уравнение второго закона Ньютона для шарика в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (12.3)$$

Введём обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (12.4)$$

где ω_0^2 — вещественная величина.

С учетом (12.4) уравнение (12.3) примет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (12.5)$$

Общим решением уравнения (12.5), называемого уравнением гармонического осциллятора, является

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (12.6)$$

где x_0 и α — произвольные постоянные.

Получили, что движение системы, находящейся под действием упругой силы вида (12.2), представляет собой гармоническое колебание. График гармонического колебания, то есть график функции (12.6), показан на рис. 12.2, где по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной оси — смещение x .

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебания. Амплитуда x_0 — постоянная положительная величина. Ее значение определяется величиной первоначального отклонения или толчка, которым система была выведена из положения равновесия.

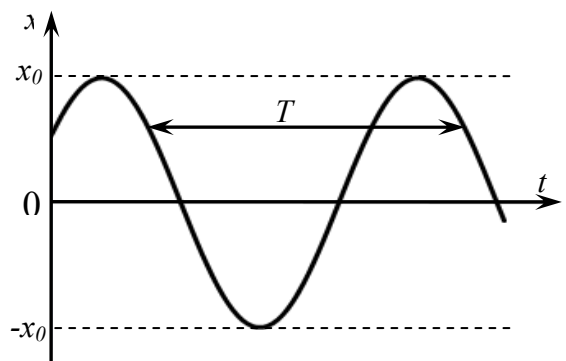


Рис. 12.2

Величина $(\omega_0 t + \alpha)$, стоящая под знаком косинуса, называется *фазой колебания*. Постоянная α представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется *начальной фазой колебания*.

Поскольку косинус — периодическая функция с периодом 2π , различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени T , за который фаза колебания получает приращение, равное 2π (рис. 12.2). Этот промежуток времени T называется *периодом* колебания. Он может быть определен из следующего условия:

$$[\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (12.7)$$

Число колебаний в единицу времени называется *частотой* колебания ν . Очевидно, что частота ν связана с продолжительностью одного колебания T следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 с. Эту единицу называют *герцем* (Гц).

Из (12.7) следует, что

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (12.8)$$

Таким образом, ω_0 дает число колебаний за 2π секунд. Величину ω_0 называют *круговой или циклической частотой*. Она связана с частотой ν соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (12.9)$$

Продифференцировав (12.6) по времени, получим выражение для скорости

$$V = \dot{x} = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (12.10)$$

Как видно из (12.10), скорость также изменяется по гармоническому закону, причем величина амплитуды скорости равна $x_0\omega_0$. Из сравнения (12.6) и (12.10) следует, что скорость V опережает смещение x по фазе на $\pi/2$.

Продифференцировав (12.10) по времени, найдем выражение для ускорения

$$a = \ddot{x} = -x_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = x_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (12.11)$$

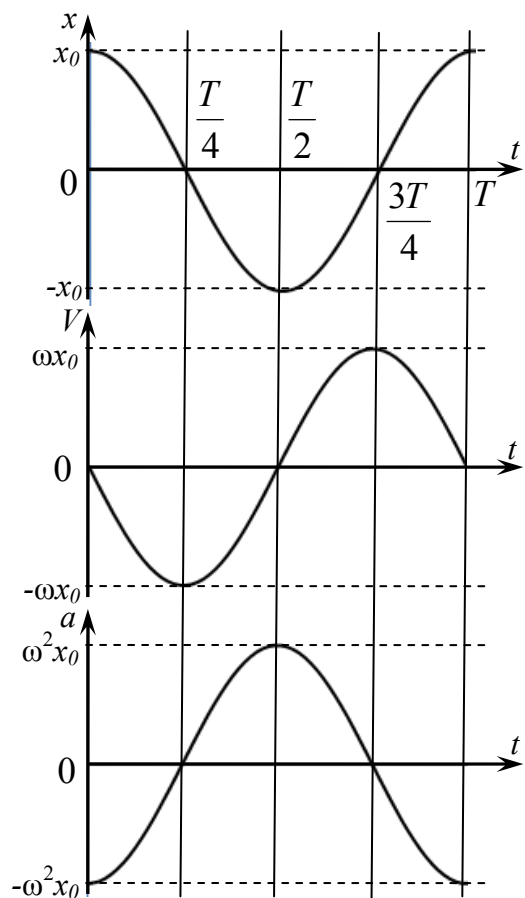


Рис. 12.3

Как следует из (12.11), ускорение a и смещение x изменяются в противофазе. Это означает, что в тот момент времени, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения, и наоборот.

На рис. 12.3 представлены зависимости от времени смещения, скорости и ускорения при $\alpha = 0$.

12.1.2. Энергия гармонических колебаний

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. В процессе колебаний, как мы выяснили ранее, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и обратно. В моменты наибольшего отклонения из положения равновесия полная энергия E состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения Π_{\max} :

$$E = \Pi_{\max} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (12.12)$$

При прохождении системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения T_{\max} :

$$E = T_{\max} = \frac{mV_{\max}^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega_0^2}{2}. \quad (12.13)$$

Выясним, как изменяется со временем кинетическая T и потенциальная Π энергия гармонического колебания. Кинетическая энергия с учетом выражения (12.10) равна

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (12.14)$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (12.15)$$

Складывая (12.14) и (12.15), с учетом соотношения (12.4), получим:

$$E = T + \Pi = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega_0^2}{2}.$$

Отсюда следует, что величина полной энергии гармонического колебания оказывается постоянной.

12.1.3. Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ , образованным нитью с вертикалью (рис. 12.4). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент M , равный по величине $mgl \sin \varphi$ (где m — масса шарика, а l — длина подвески). Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, как и квазиупругая сила (12.2). Поэтому так же, как смещению и квазиупругой силе, моменту M и угловому смещению φ нужно приписывать противоположные знаки. Следовательно, выражение для вращательного момента имеет вид

$$M = -mgl \sin \varphi \quad (12.16)$$

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через $\ddot{\varphi}$ и учитывая, что момент инерции маятника равен ml^2 , получаем:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. Введя обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad (12.17)$$

получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (12.18)$$

которое идентично с уравнением (12.5) для шарика, подвешенного на пружине. Решение уравнения (12.18) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Таким образом, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

Как следует из (12.17), частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и от ускорения силы тяжести и не зависит от массы маятника. В соответствии с (12.8) и учетом (12.17) получим выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (12.19)$$

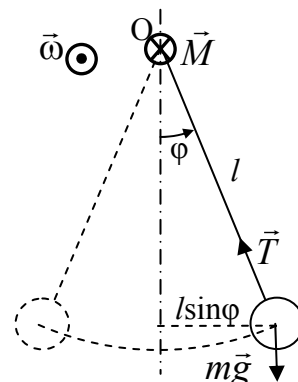


Рис. 12.4

12.1.4. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. В положении равновесия центр масс маятника C находится ниже точки подвеса маятника O (рис. 12.5). При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$M = -mgl \sin \varphi,$$

где m — масса маятника, а l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника. Знак «—» имеет то же значение, что и в случае формулы (12.16).

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой J , уравнение динамики вращательного движения запишем в виде

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (12.20)$$

В случае малых колебаний (12.20) переходит в уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (12.21)$$

где ω_0^2 обозначена величина:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}. \quad (12.22)$$

Из уравнений (12.21) и (12.22) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром масс маятника. В соответствии с (12.22) период колебания физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (12.23)$$

Из сопоставления формул (12.19) и (12.23) получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} \quad (12.24)$$

будет иметь такой период колебаний, как и физический маятник. Величину (12.24) называют *приведенной длиной физического маятника*. Таким образом, приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом физического маятника.

Точка O' , находящаяся на прямой OC и отстоящая от точки O на расстоянии приведенной длины $l_{\text{пр}}$ (рис.12.5), называется *центром качаний физи-*

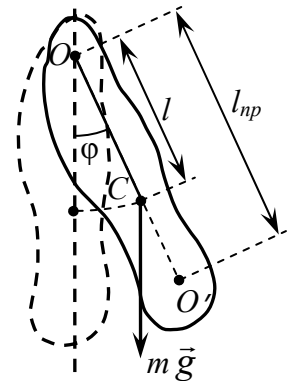


Рис. 12.5

ческого маятника. Если ось вращения маятника будет проходить через точку O' , то период колебаний этого маятника не изменится.

12.2. Электрические колебания

12.2.1. Собственные незатухающие колебания

В цепи (рис. 12.6), содержащей катушку индуктивности L , конденсатор емкости C и сопротивление R , могут возникнуть электрические колебания. Такая цепь называется *колебательным контуром*.

Пусть вначале нижняя обкладка конденсатора заряжена положительно, а верхняя – отрицательно. При этом вся энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора. Замкнем ключ K . Конденсатор начнет разряжаться, через катушку и сопротивление потечет ток I . Энергия электрического поля конденсатора начнет превращаться в энергию магнитного поля катушки и джоулево тепло в сопротивлении.

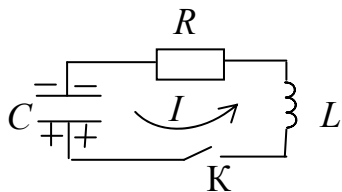


Рис.12.6

Для контура, изображенного на рис. 12.6, запишем закон Ома:

$$IR + U_c = \varepsilon_s,$$

где $U_c = \frac{q}{C}$, $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$, $I = \frac{dq}{dt}$.

После преобразований получаем уравнение:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0, \quad (12.25)$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Это есть *уравнение колебательного контура* – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнение колебательного контура можно записать в ином виде:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2q = 0, \quad (12.26)$$

где введены обозначения:

$$2\delta = R/L; \quad \omega_0^2 = 1/LC.$$

Величина ω_0 называется *собственной частотой* контура (частотой свободных незатухающих колебаний контура), δ – *коэффициентом затухания*. При отсутствии в контуре потерь на джоулево тепло и на излучение ($R=0$) колебания будут незатухающими, при наличии потерь ($R \neq 0$) – затухающими.

В отсутствие потерь уравнение (12.26) принимает вид

$$\dot{q} + \omega_0^2q = 0.$$

Решением этого уравнения является функция:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где q_0 - амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора; φ - начальная фаза колебаний. Значение ω_0 определяется только параметрами самого контура. Значения q_0 и φ определяются начальными условиями, например, значениями заряда q и тока $I = \dot{q}$ в момент $t = 0$.

Период свободных незатухающих колебаний определяется по формуле

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (12.27)$$

Формула (12.27) называется *формулой Томсона*.

12.2.2. Собственные затухающие колебания. Вынужденные колебания

В реальном контуре свободные колебания всегда являются затухающими и описываются уравнением (12.26). При достаточно малых потерях ($\delta < \omega_0$) решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (12.28)$$

где ω - частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (12.29)$$

Функция (12.28) определяет затухающие колебания. Множитель $q_0 e^{-\delta t}$ в (12.28) называется *амплитудой затухающих колебаний*. Промежуток времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, называется *временем релаксации*.

Величина $T = 2\pi/\omega$ называется *периодом затухающих колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}},$$

где T_0 - период свободных незатухающих колебаний.

График функции (12.28) показан на рис. 12.7.

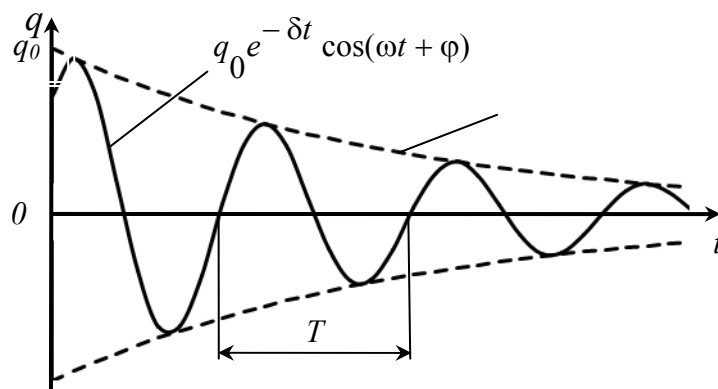


Рис. 12.7

Характеристиками затухающих колебаний являются так же *декремент затухания* – отношение амплитуды колебания в момент времени t к амплитуде через период:

$$\frac{q(t)}{q(t+T)} = e^{\delta T}$$

и *логарифмический декремент затухания*

$$\theta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где N_e число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

Для определения соотношения между запасенной и теряемой в контуре энергией вводится понятие *добротности*, которая при малых значениях логарифмического декремента затухания равна

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (12.30)$$

При увеличении коэффициента затухания δ период затухающих колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, то есть процесс перестает быть периодическим. Он называется *апериодическим*. Сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называется *критическим*:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

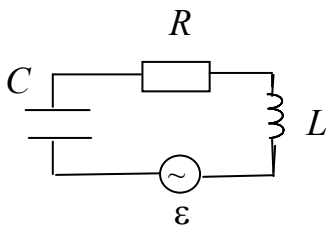


Рис. 12.8

Для поддержания в контуре незатухающих колебаний необходимо скомпенсировать потери энергии. Компенсация возможна с помощью периодически действующей внешней силы (рис. 12.8), изменяющейся по периодическому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

Колебания, совершающиеся при воздействии внешней периодической силы, называются *вынужденными*.

В этом случае уравнение (12.25) принимает вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \cos \omega t,$$

или

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = \left(\frac{\varepsilon_0}{L} \right) \cos \omega t. \quad (12.31)$$

Общее решение уравнения (12.31), как известно из математики, представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (12.26) и частного решения неоднородного уравнения (12.31).

Нас будут интересовать только установившиеся колебания, то есть частное решение уравнения (12.31) (общее решение однородного уравнения (12.26))

экспоненциально затухает, и по прошествии некоторого времени оно практически исчезает, обращается в нуль). Это решение имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t - \alpha),$$

где

$$q_m = \frac{\left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (12.32)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\delta\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (12.33)$$

Продифференцировав $q = q_m \cos(\omega t - \alpha)$ по t , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t - \alpha + \pi/2) = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (12.34)$$

где $I_m = \omega q_m = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, $\varphi = \alpha - \pi/2$ — сдвиг по фазе между током и

приложенным напряжением. В соответствии с выражением (12.33)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (12.35)$$

Из формулы (12.35) следует, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > 1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < 1/(\omega C)$.

12.2.3. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс

Амплитуда смещения заряда q_m (12.32) имеет максимум на частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (12.36)$$

Эта частота называется *резонансной*, а явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (ω) к частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется *резонансом*. При $\delta^2 \ll \omega_0^2$ значение $\omega_{\text{рез}}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы. Амплитуда смещения заряда на резонансной частоте, определяемой выражением (12.32),

$$q_{рез} = \frac{\left(\varepsilon_0 / L\right)}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (12.37)$$

На рис. 12.9 приведены зависимости амплитуды вынужденных колебаний заряда на конденсаторе (12.32) от частоты при различных значениях δ . Из (12.36) и (12.37) вытекает, что чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если $\omega \rightarrow 0$, то все кривые достигают одного и того же, отличного от нуля, предельного значения $q_{ст} = \varepsilon_0 / (L\omega_0^2) = \varepsilon_0 C$, которое называют *статическим отклонением*. Если $\omega \rightarrow \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная совокупность кривых называется *резонансными кривыми* (амплитудно-частотными характеристиками).

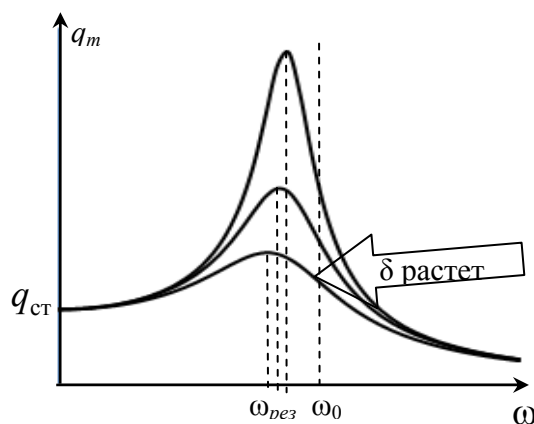


Рис. 12.9

Зависимость α от ω при разных коэффициентах δ графически представлена на рис. 12.10, из которого следует, что при изменении ω изменяется и сдвиг фаз α . Из формулы (12.33) вытекает, что при $\omega=0$ $\alpha=0$, а при $\omega=\omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания $\alpha = \pi/2$, т. е. приложенное напряжение ε опережает по фазе колебания заряда на $\pi/2$. При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $\omega \gg \omega_0$ $\alpha \rightarrow \pi$, т. е. фаза колебаний заряда почти противоположна фазе приложенного переменного напряжения. Семейство кривых, изображенных на рис. 12.10, называется *фазовыми резонансными кривыми* (фазово-частотными характеристиками).

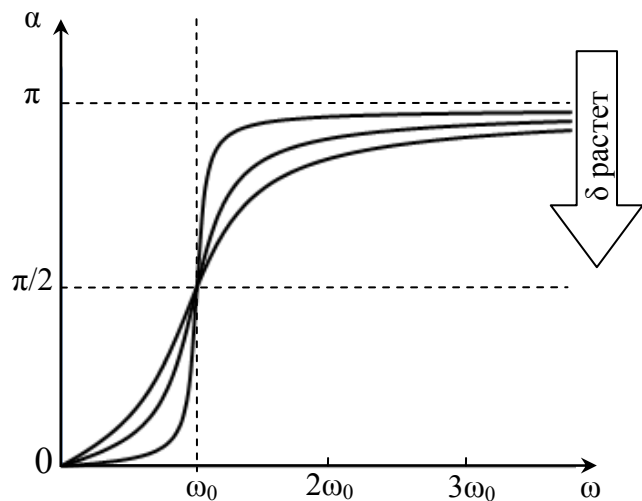


Рис. 12.10

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных

внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьёзные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с собственной частотой колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

12.2.4. Резонанс напряжений

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (рис. 12.8),

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением (12.35) обращается в нуль ($\varphi=0$), т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Этому условию удовлетворяет частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (12.38)$$

В данном случае полное сопротивление цепи становится минимальным, равным активному сопротивлению R цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном ε_0) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ($U_R=U$), а падения напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется *резонансом напряжений (последовательным резонансом)*, а частота (12.38) — *резонансной частотой*.

В случае резонанса напряжений с учетом значений резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим

$$(U_L)_{\text{рез}} = (U_C)_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \varepsilon_0 = Q \varepsilon_0, \quad (12.39)$$

где Q — добротность контура, определяемая выражением (13.30). Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой, большей амплитуды внешней периодической силы в Q раз. Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, например, в радиоприемнике настроиться на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учиты-

вать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

12.2.5. Резонанс токов

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 12.11). Будем считать, что активное сопротивление обеих ветвей R настолько мало, что им можно пренебречь. Если приложенное напряжение изменяется по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t,$$

то, согласно формуле (12.34), в ветви 1- C -2 течет ток

$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

амплитуда которого при условии $R=0$ и $L=0$:

$$I_{m1} = \frac{\varepsilon_0}{1/(\omega C)}.$$

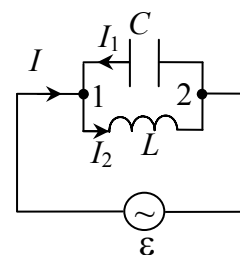


Рис. 12.11

Отставание по фазе φ_1 этого тока от приложенного напряжения по формуле (12.35) определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\infty, \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}. \quad (12.40)$$

Аналогично, сила тока в ветви 1- L -2

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2),$$

амплитуда которого при условии $R=0$ и $C=\infty$ (условие отсутствия емкости в цепи):

$$I_{m2} = \frac{\varepsilon_0}{(\omega L)}.$$

Отставание по фазе φ_2 для этого тока (12.35)

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = +\infty, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (12.41)$$

Из сравнения выражений (12.40) и (12.41) вытекает, что разность фаз токов в ветвях 1- L -2 и 1- C -2 равна $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = \varepsilon_0 |\omega C - 1/(\omega L)|.$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и $I_m = 0$. Явление резкого уменьшения

амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты ω приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется *резонансом токов (параллельным резонансом)*. В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений.

Амплитуда силы тока I_m оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление R , то раз-

ность фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$) не будет равна π , поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока I_m будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи I_1 и I_2 компенсируются и сила тока I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через сопротивление R . При резонансе токов силы токов I_1 и I_2 могут значительно превышать силу тока I .

Рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной. Поэтому это свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы. Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится вихревыми токами. В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

12.3. Сложение гармонических колебаний одного направления

Пусть в некоторой точке пространства возбуждены два гармонических колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ a_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (12.42)$$

Тогда общее колебание $a = a_1 + a_2$ можно представить в виде

$$a = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (12.43)$$

Для нахождения амплитуды и фазы результирующего колебания используется наглядный метод, когда каждое гармоническое колебание (12.42) представляется в виде векторной величины $\vec{A}_{1,2}$ с фазовым сдвигом $\varphi_{1,2}$ (рис. 12.12).

Производится векторное сложение векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 . Из построения видно, что угол $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$, а угол β между вектором \vec{A}_1 и вектором \vec{A}_2 равен

$$\beta = \pi - \alpha = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1).$$

По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\beta, \text{ или } A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (12.44)$$

Для наглядности положим равными амплитуды колебаний $A_1 = A_2 = A_0$. Тогда в зависимости от величины $(\varphi_2 - \varphi_1)$ амплитуда общего колебания A меняется от $2A_0$ при $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ до нуля при $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$.

Фазовый сдвиг φ находится по формуле

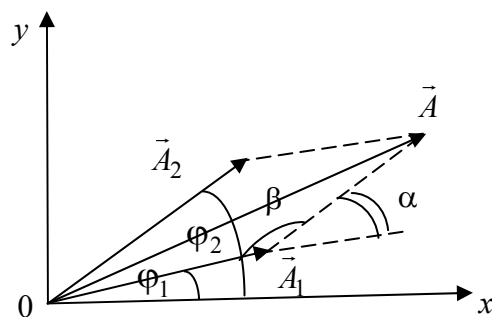


Рис.12.12

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

12.4. Сложение взаимно ортогональных гармонических колебаний

Рассмотрим два гармонических колебания с одинаковой частотой, совершающихся во взаимно ортогональных направлениях (вдоль осей x и y):

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (12.45)$$

где A и B – амплитуды колебаний, φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний.

Конец вектора, изображающего результирующее колебание, движется по траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих складываемых колебаний и соотношения их амплитуд.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (12.46)$$

где φ – разность фаз обоих колебаний.

Выражение (12.46) представляет собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется материальная точка, участвующая в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в системе координат (x, y) , нужно исключить из уравнений (12.45) параметр t . Для этого первое и второе уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos \omega t, \\ \frac{y}{B} &= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi. \end{aligned} \quad (12.47)$$

С учетом соотношения $\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ второе уравнение запишется в виде

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi,$$

или

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi = \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат и учтя тригонометрическое соотношение $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, в окончательном виде получаем уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y :

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi. \quad (12.48)$$

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз φ равна нулю. В этом случае уравнение (12.48) принимает вид

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (12.49)$$

Результирующее движение точки является гармоническим колебанием, происходящим вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 12.13).

2. Разность фаз φ равна $\pm\pi$. Уравнение (12.49) принимает вид

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (12.50)$$

Результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 12.14).

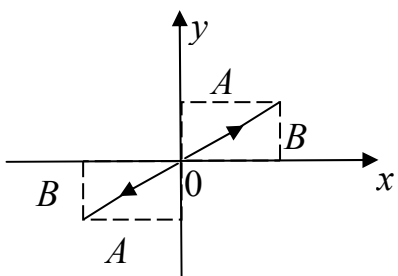


Рис. 12.13

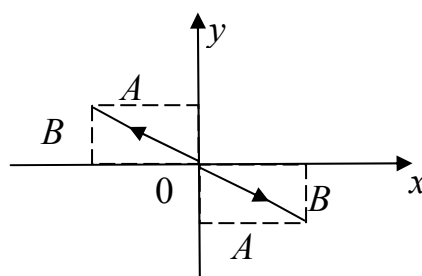


Рис. 12.14

3. При $\varphi = \pm\pi/2$ уравнение (12.48) переходит в

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (12.51)$$

т.е. в уравнение эллипса, оси которого совпадают с координатными осями, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд A и B эллипс вырождается в окружность.

12.5. Примеры решения задач

1. Некоторая точка движется вдоль оси x по закону $x = A \sin^2(\omega t - \pi/4)$.

Найти:

- а) амплитуду и период колебаний; изобразить график $x(t)$;
- б) проекцию скорости V_x как функцию координаты x ; изобразить график $V_x(x)$.

Дано	Решение
$x = A \sin^2(\omega t - \pi/4)$	Преобразуем функцию $x(t)$:
а) график $x(t)$;	$x = A \sin^2(\omega t - \pi/4) = A \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2(\omega t - \pi/4)}{2} \right) =$
б) график $V_x(x)$.	$= \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cos(2\omega t - \pi/2) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \sin 2\omega t.$

Откуда амплитуда колебаний $x_0 = \frac{A}{2}$, период колебаний $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$.

Найдем проекцию скорости V_x как функцию времени t :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cos 2\omega t.$$

Тогда

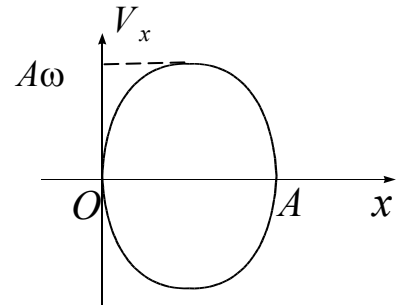
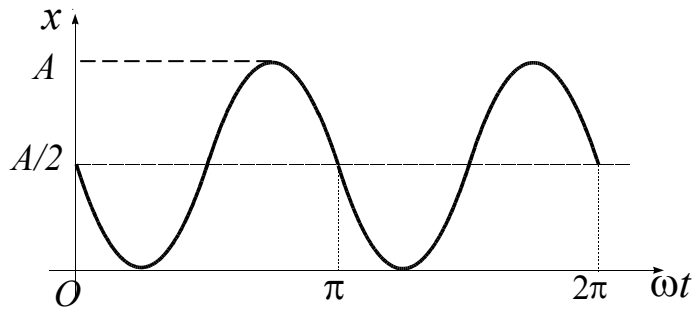
$$V_x^2 = (A\omega)^2 \cos^2 2\omega t = (A\omega)^2 [1 - \sin^2 2\omega t].$$

Учитывая, что $\sin(2\omega t) = 1 - \frac{x}{A/2}$, получаем:

$$\left(1 - \frac{x}{A/2} \right)^2 + \frac{V_x^2}{(A\omega)^2} = 1$$

– уравнение эллипса на плоскости (x, V_x) .

Графики $x(t)$ и $V_x(x)$ приведены на рисунках.



2. Материальная точка массой $m = 1$ г совершает колебания вдоль оси x по закону $x = A \sin \omega_0 t$. Амплитуда колебаний $A = 10$ см, период колебаний $T = 4$ с. В момент времени $t = 1$ с найти:

- силу F , действующую на данную точку;
- кинетическую энергию T точки.

Дано

$$m = 1 \text{ г} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг};$$

$$x = A \sin \omega_0 t;$$

$$A = 10 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-1} \text{ м};$$

$$T = 4 \text{ с};$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$F(t) = ?$$

$$T(t) = ?$$

Решение

Согласно второму закону Ньютона, записанному в проекции на ось X , вдоль которой материальная точка массой m совершает гармонические колебания,

$$F_x = ma_x,$$

где F_x – проекция на ось X силы, действующей на данную точку, a_x – проекция ускорения точки:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin \omega_0 t.$$

Тогда

$$F_x = -mA\omega_0^2 \sin \omega_0 t.$$

Следовательно, величина силы, действующей на точку,

$$F = |F_x| = mA\omega_0^2 |\sin \omega_0 t|.$$

Здесь круговая частота колебаний $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \text{ с}^{-1}$.

Кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

$$T = \frac{mV_x^2}{2},$$

где $V_x = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos \omega_0 t$ – скорость точки. Таким образом,

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

В момент времени $t = 1$ с

$$F = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \approx 0,25 \text{ мН};$$

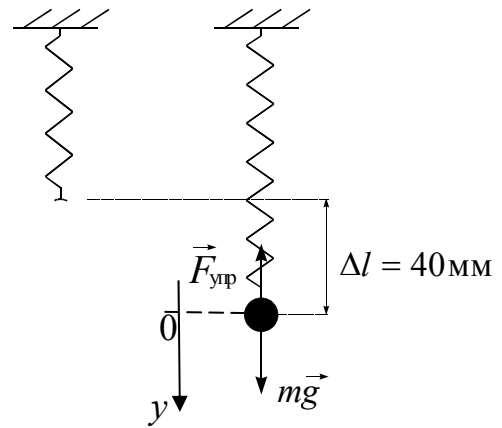
$$T = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1^2 \cdot (\pi/2)^2}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = 0 \text{ Дж.}$$

3. Неподвижное тело, подвешенное на пружинке, увеличивает ее длину на $\Delta l = 40$ мм. Найти период малых вертикальных колебаний тела.

Дано

$\Delta l = 40 \text{ мм} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
$T = ?$

Решение



В положении равновесия сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, действующая на тело со стороны растянутой на $\Delta l = 40$ мм пружины, уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$, где m – масса тела, поэтому

$$\kappa \Delta l = mg, \tag{1}$$

где κ – коэффициент жесткости пружины. Откуда

$$\kappa = \frac{mg}{\Delta l}. \tag{2}$$

Выведем тело из положения равновесия и отпустим. Будучи освобожденным, тело начнет совершать вертикальные колебания относительно положения равновесия. Смещение тела из положения равновесия обозначим y . Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y , направленную вниз:

$$ma_y = -\kappa(y + \Delta l) + mg, \tag{3}$$

где $a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$.

С учетом (1) уравнение (3) примет вид

$$\ddot{y} + \frac{\kappa}{m} y = 0. \tag{4}$$

Подставляя (2) в (4), получаем:

$$\ddot{y} + \frac{g}{\Delta l} y = 0, \quad (5)$$

Уравнение (5) является уравнением гармонического осциллятора, где $\frac{g}{\Delta l} = \omega_0^2$. Круговая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$, тогда период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{0,04}{9,8}} = 0,4 \text{ (с)}.$$

4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $L = 25$ мГн, конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ и резистора. Определить сопротивление резистора, если известно, что амплитуда тока в контуре уменьшилась в e раз за 16 полных колебаний.

<p>Дано $L = 25 \text{ мГн} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$ $C = 10 \text{ мкФ} = 10^{-5} \text{ Ф};$ $N_e = 16$ $R = ?$</p>

Решение
 Число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T},$$

где $\tau = \frac{1}{\delta}$ – время релаксации; $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ – период затухающих колебаний,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебательного контура; $\delta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания.

Подставив эти выражения, получим

$$N_e = \frac{\frac{2L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1},$$

отсюда искомое сопротивление

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C(1 + 4\pi^2 N_e^2)}}.$$

Подставив численные значения, получим

$$R = 2 \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}(1 + 4\pi^2 16^2)}} = 0,995 \text{ Ом}.$$

5. При неизменной амплитуде вынуждающей периодической силы амплитуда вынужденных колебаний величины заряда на обкладках конденсатора при частотах $\omega_1 = 100$ рад/с и $\omega_2 = 300$ рад/с одинакова. Найти резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$.

Дано
 $\omega_1 = 100 \text{ рад/с};$
 $\omega_2 = 300 \text{ рад/с};$
 $q_m(\omega_1) = q_m(\omega_2)$
 $\omega_{\text{рез}} = ?$

Решение

Резонансная частота рассчитывается по формуле $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\delta = \frac{R}{2L}$. Резонансную частоту можно определить, как $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.

Амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора, как функция частоты ω вынуждающих колебаний имеет вид

$$q_m = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Используя условие задачи $q_m(\omega_1) = q_m(\omega_2)$, приходим к выражению

$$\omega_1^2 \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \omega_2^2 \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}.$$

Возведя левую и правую части полученного уравнения в квадрат, раскрыв скобки и выполнив очевидные сокращения, получим:

$$\omega_1^2 R^2 + \omega_1^4 L^2 - 2\omega_1^2 \frac{L}{C} = \omega_2^2 R^2 + \omega_2^4 L^2 - 2\omega_2^2 \frac{L}{C}.$$

Сгруппировав слагаемые следующим образом $(\omega_1^4 - \omega_2^4)L^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(2\frac{L}{C} - R^2)$

с учетом равенства $(\omega_1^4 - \omega_2^4) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ получим:

$$\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой квадрат резонансной частоты. Таким образом,

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = 224 \text{ рад/с}.$$

6. Найти амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении двух колебаний, происходящих в одном направлении $a_1(t) = 3 \cos(\omega t + \pi/3)$, см и $a_2(t) = 8 \sin(\omega t + \pi/6)$, см.

Дано
 $a_1(t) = 3 \cos(\omega t + \pi/3)$, см;
 $a_2(t) = 8 \sin(\omega t + \pi/6)$, см
 $A = ?$

Решение

Введем обозначения: амплитуда первого колебания $A_1 = 3,0$ см; второго $A_2 = 8,0$ см. При сложении двух гармонических колебаний одного направления амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

где $\varphi_1 = \pi/3$.

При этом второе колебание необходимо описать, используя функцию косинуса, как и первое колебание. Тогда

$$\sin(\omega t + \pi/6) = \cos(\omega t + \pi/6 - \pi/2) = \cos(\omega t + 5\pi/3)$$

и $\varphi_2 = 5\pi/3$.

Подставив численные значения, получаем:

$$A = \sqrt{9 + 64 + 48 \cos(5\pi/3 - \pi/3)} = 7 \text{ см.}$$

7. Точка участвует в двух взаимно ортогональных колебаниях $x = \sin(\pi t + \pi)$ и $y = \sin \pi t$. Найти траекторию результирующего движения точки.

Дано	и
$x = \sin(\pi t + \pi);$	
$y = \sin \pi t$	
$y=y(x) = ?$	

Решение

Из уравнений колебаний

$$x = \sin(\pi t + \pi) \tag{1}$$

$$y = \sin \pi t \tag{2}$$

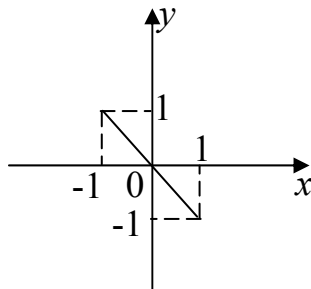
исключаем время t . Для этого преобразуем уравнение (1):

$$x = \sin(\pi t + \pi) = -\sin \pi t. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем

$$y = -x. \tag{4}$$

Таким образом, траекторией движения точки является прямая.



Раздел третий

ВОЛНЫ. ОПТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

13. ВОЛНЫ

13.1. Упругие волны

Процесс распространения колебаний в сплошной среде, периодический во времени и пространстве, называется *волновым процессом*. Физически волны можно представить как изменения состояния среды (возмущения), распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию. Наиболее часто встречающиеся виды волн: упругие волны, возникающие в упругой (твердой, жидкой или газообразной) среде, волны на поверхности жидкости и электромагнитные волны. *Упругие волны* – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Частным случаем упругих волн являются звуковые волны и сейсмические волны.

Основное свойство всех волн, независимо от их природы, состоит в том, что в волнах осуществляется перенос энергии без переноса вещества (последнее может иметь место лишь как побочное явление).

Волны могут различаться по тому, как возмущения ориентированы относительно направления их распространения. Если частицы среды колеблются в направлении распространения волны, то волна называется *продольной* (рис. 13.1). Примером продольных волн являются звуковые волны в газах.

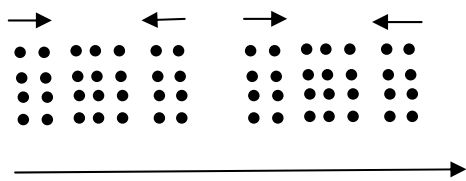


Рис 13.1

При распространении волны вдоль натянутой струны смещение точек струны происходит в направлении, перпендикулярном струне (рис.13.2). Волны такого типа называют *поперечными*.

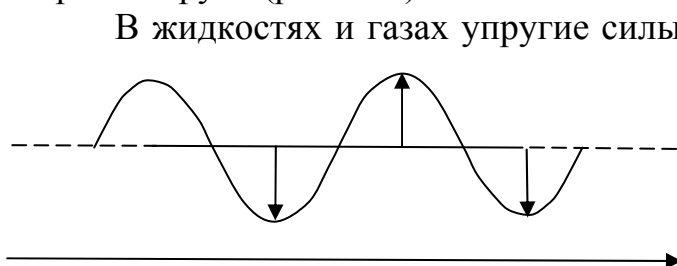


Рис. 13.2

В жидкостях и газах упругие силы возникают только при сжатии (разряжении) и не возникают при сдвиге. Поэтому упругие деформации в жидкостях и газах могут распространяться только в виде продольных волн («волны сжатия»).

В твердых телах, в которых упругие силы возникают также при сдвиге, упругие деформации могут распространяться не только в виде продольных волн, но и в виде поперечных («волны сдвига»).

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *фронтом волны*. Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинако-

вой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один. Волновые поверхности остаются неподвижными, волновой фронт все время перемещается. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости, цилиндра или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется *плоской*, *цилиндрической* или *сферической*. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне – множество концентрических сфер.

Волна, в отличие от колебания, описывается функцией, зависящей от времени и от координаты пространства. В случае плоских волн, распространяющихся вдоль оси z , эта функция имеет вид:

$$\xi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (13.1)$$

где A – амплитуда волны, ω – круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число (постоянная распространения), λ – длина волны, φ – начальная фаза колебаний.

Знак «минус» перед kz в (13.1) означает, что волна распространяется от источника колебаний. Величина ξ представляет собой отклонение колеблющихся частиц среды от положения равновесия. Из (13.1) видно, что положение частиц изменяется по гармоническому закону и во времени (при фиксированной координате) и в пространстве (в фиксированный момент времени).

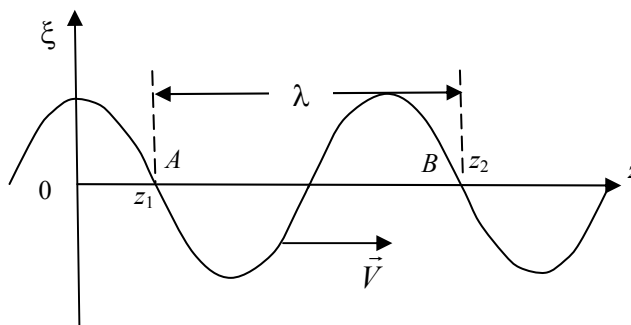


Рис. 13.3

Если для двух точек A и B (рис. 13.3) выполняется условие $\xi(z_1, t) = \xi(z_2, t)$, то в силу цикличности тригонометрических функций разность аргументов

$$(\omega t - kz_1 + \varphi) - (\omega t - kz_2 + \varphi) = 2\pi.$$

Отсюда

$$z_2 - z_1 = 2\pi/k = \lambda. \quad (13.2)$$

Таким образом, длина волны λ есть минимальное расстояние между двумя точками пространства, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π .

Иначе понятие длины волны можно ввести следующим образом: расстояние, на которое распространяется определенное значение фазы за период колебания. Следовательно,

$$\lambda = VT, \quad (13.3)$$

где V – фазовая скорость распространения волны.

График, представленный на рис. 13.3, будет выглядеть одинаково как для продольной, так и для поперечной распространяющейся (бегущей) волны.

Для гармонических колебаний (волн)

$$T = 2\pi/\omega, \quad (13.4)$$

где $\omega = 2\pi\nu$, ν – частота колебаний источника.

Из (13.3) и (13.4) получаем выражение для фазовой скорости:

$$V = \lambda\nu. \quad (13.5)$$

13.2. Стоячие волны

Если в среде распространяются одновременно несколько волн, то эти волны могут накладываться одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом *суперпозиции* (наложения) волн.

В случае, когда волны имеют постоянную во времени разность фаз, они называются *когерентными*. При сложении когерентных волн возникает явление *интерференции*, заключающееся в том, что колебания в одних точках пространства усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Интересный вариант интерференции наблюдается при наложении двух встречных волн с одинаковыми частотами и амплитудами. Возникающий в результате колебательный процесс называется *стоячей волной*. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, накладываясь друг на друга, создают стоячую волну.

Напишем уравнения двух волн, распространяющихся вдоль оси z в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kz + \varphi_1), \quad \xi_2 = A\cos(\omega t + kz + \varphi_2).$$

Сложив вместе эти уравнения и преобразовав результат по формуле сложения косинусов, получаем

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (13.6)$$

Выражение (13.6) есть уравнение стоячей волны. Для проведения анализа этого явления упростим его. Для этого выберем начало отсчета z так, чтобы разность $(\varphi_2 - \varphi_1)$ стала равной нулю, а начало отсчета времени t так, чтобы оказалась равной нулю сумма $(\varphi_1 + \varphi_2)$. С учетом того, что волновое число $k = 2\pi/\lambda$, уравнение (13.6) примет вид

$$\xi = \left(2A\cos 2\pi\frac{z}{\lambda}\right)\cos \omega t, \quad (13.7)$$

где амплитуда стоячей волны есть $\left|2A\cos 2\pi\frac{z}{\lambda}\right|$. В точках пространства, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{z}{\lambda} = \pm n\pi, \quad (n=0,1,2\dots), \quad (13.8)$$

амплитуда достигает максимального значения. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны.

Из (13.8) получаем значения координат пучностей:

$$z_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (13.9)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{z}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (n=0,1,2\dots), \quad (13.10)$$

амплитуда волны обращается в нуль. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Координаты узлов имеют значения

$$z_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad (n=0,1,2\dots). \quad (13.11)$$

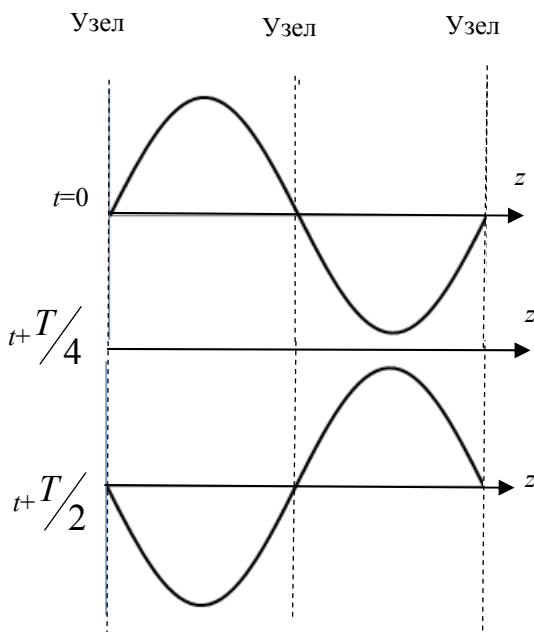


Рис. 13.4

Из формул (13.9) и (13.11) видно, что расстояние между соседними пучностями так же, как и расстояние между соседними узлами, равно $\lambda/2$. Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

На рис. 13.4 дан ряд «моментальных фотографий» отклонений точек среды, в которой установилась стоячая волна, от положения равновесия.

Необходимо отметить, что стоячие волны энергию не переносят. Средний по времени поток энергии через любое сечение волны равен нулю.

13.3. Электромагнитные волны

Переменное электрическое поле порождает магнитное, которое тоже оказывается переменным. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся электрических зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем пространстве возникает последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс представляет собой волну. Уравнения плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x , записываются в виде:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где E_0 и H_0 - соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей; ω – круговая частота волны; k – волновое число; φ – начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

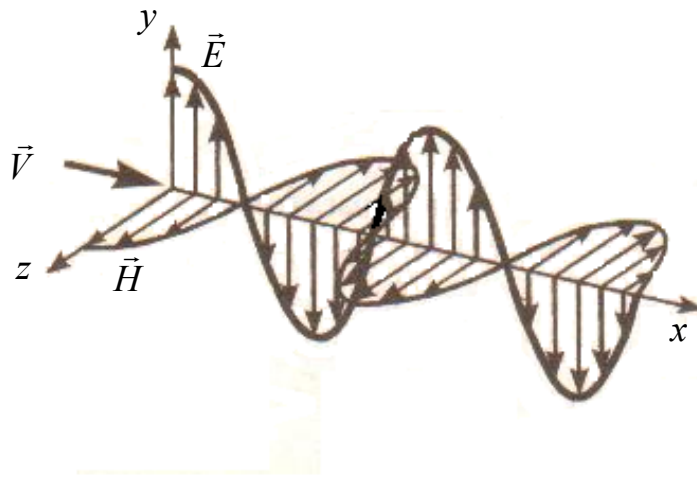


Рис. 13.5

В электромагнитных волнах направления колебаний электрических и магнитных полей почти всегда (за исключением анизотропных сред и распространения в несвободном пространстве) взаимно перпендикулярны (на рис.13.5 показана моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны) и перпендикулярны вектору скорости \vec{V} электромагнитной волны. Электромагнитные волны в свободном пространстве – поперечные. Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{V} образуют правовинтовую систему. Кроме того, в электромагнитной волне векторы \vec{E} и \vec{H} всегда колеблются в *одинаковых фазах* (рис.13.5), причем мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H.$$

Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

В вакууме скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В веществе скорость распространения электромагнитных волн всегда меньше, чем в вакууме.

14. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференция – перераспределение интенсивности при наложении световых волн, созданных дискретными источниками, в результате чего в одних точках пространства происходит усиление, а в других – ослабление интенсивности света. Это распределение устойчиво в пространстве.

Необходимым условием интерференции волн является их когерентность. Когерентными называются волны, создающие в рассматриваемой точке пространства колебания, разность фаз которых остается постоянной во времени. Этому условию удовлетворяют только монохроматические волны одинаковой частоты.

Однако в силу поперечности электромагнитных волн этих условий еще не достаточно для получения интерференционной картины. Необходимо, кроме того, чтобы колебания векторов \vec{E} интерферирующих волн совершались вдоль одного направления, то есть чтобы интерферирующие волны были поляризованы в одной плоскости.

Используя электромагнитное представление света, возьмем две волны:

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - kS_1 + \varphi_1); E_2 = E_{20} \cos(\omega t - kS_2 + \varphi_2), \quad (14.1)$$

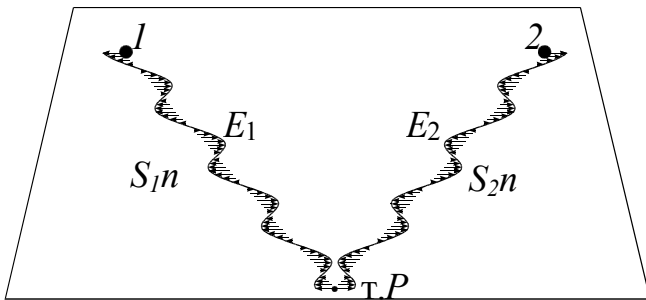


Рис.14.1

имеющие одинаковые частоты, рис. 14.1. Здесь S_1, S_2 – расстояния от источников до точки наблюдения; φ_1 и φ_2 – начальные фазы; $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число.

Накладываясь друг на друга, волны в точке наблюдения создают поле (при условии однонаправленности коле-

баний)

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} \cos(\omega t - kS_1 + \varphi_1) + E_{02} \cos(\omega t - kS_2 + \varphi_2). \quad (14.2)$$

Используя метод векторных диаграмм, получаем

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \delta, \quad (14.3)$$

$$\text{где } \delta = k(S_2 - S_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) = k\Delta S + \Delta\varphi - \quad (14.4)$$

– разность фаз колебаний, создаваемых волнами в точке наблюдения P .

Введем понятие интенсивности электромагнитной волны: – это физическая величина I , численно равная энергии, которую переносит волна за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны. Доказывается, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды $I \sim E_0^2$, тогда

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (14.5)$$

где третье слагаемое – интерференционный член.

В случае некогерентных волн $\delta = \delta(t)$, то есть δ непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего среднее значение $\cos \delta = 0$. Тогда

$$I = I_1 + I_2, \quad (14.6)$$

Из формулы (14.5) видно, что при условии $\cos \delta > 0$ в точке наблюдения имеется усиление интенсивности света по сравнению с (14.6), а при условии $\cos \delta < 0$ – ослабление.

Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение интенсивности светового потока в пространстве. Особенно эффектно оно проявляется при условии $I_1 = I_2$. В этом случае наблюдается чередование максимальной интенсивности света, равной $4I_1$, с её полным отсутствием $I = 0$.

14.1. Условия минимума и максимума интерференционной картины

Когерентные световые волны можно получить, разделив световой поток одного источника. Разделение может быть произведено с помощью диафрагм, явлений отражения и преломления.

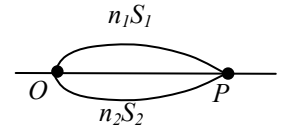


Рис. 14.2

Допустим, разделение происходит в точке O . До точки наблюдения P волны распространяются в различных средах с показателями преломления n_1 и n_2 и проходят пути S_1 и S_2 , соответственно. Разность фаз складываемых в точке P колебаний запишется как

$$\delta = k_2 S_2 - k_1 S_1 = \frac{\omega}{V_2} S_2 - \frac{\omega}{V_1} S_1 = \frac{\omega}{c} (n_2 S_2 - n_1 S_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L, \quad (14.7)$$

где $\Delta L = S_2 n_2 - S_1 n_1 = L_2 - L_1$, L_1 , L_2 – оптические пути, ΔL – оптическая разность хода волн; λ_0 – длина волны в вакууме.

Интерференционные максимумы наблюдаются когда $\cos \delta = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \delta &= 2\pi m, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ откуда} \\ \Delta L &= \lambda_0 m = \frac{\lambda_0}{2} 2m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (14.8)$$

Когда оптическая разность хода двух волн в точке наблюдения равна четному числу длин полуволн в вакууме, то в точке наблюдения будет наблюдаться максимум интенсивности – условие интерференционных максимумов.

Интерференционные минимумы наблюдаются когда $\cos \delta = -1$, тогда

$$\begin{aligned} \delta &= \pi(2m + 1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ откуда} \\ \Delta L &= \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (14.9)$$

Когда оптическая разность хода волн в точке наблюдения равна нечётному числу длин полуволн в вакууме, то в точке наблюдения будет наблюдаться минимум интенсивности – условие интерференционных минимумов.

Параметр V , характеризующий наблюдаемость интерференционной картины, называется *видностью* интерференционной картины

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad 0 \leq V \leq 1.$$

Видность интерференционной картины самая лучшая, когда $V = 1$. Это возможно тогда, когда $I_1 = I_2$, при этом $I_{\min} = 0$, $I_{\max} = 4I_1$.

14.2. Интерференция волн, создаваемых двухщелевой диафрагмой (опыт Юнга)

Яркий пучок света монохроматического света ($\lambda = \text{const}$) от точечного источника падает на экран с малым отверстием S (рис.14.3). Дифрагированный свет идет ко второму экрану с двумя узкими отверстиями или щелями S_1, S_2 . Ввиду общности происхождения пучки света от щелей S_1, S_2 – когерентны. Таким образом, части одной и той же волны, вышедшей из щели в первом экране и прошедшие через разные щели во втором экране, перекрываются. На экране в месте перекрытия пучков наблюдаются параллельные интерференционные полосы. В настоящее время при использовании лазеров, генерирующих практически параллельные пучки лучей, щель S в опыте Юнга уже не нужна.

Введём систему координат таким образом, чтобы ось x лежала в плоскости экрана (рис. 14.4). На экране выберем произвольную точку наблюдения с координатой x . Расстояние между источниками S_1 и S_2 обозначим через d . Предполагается, что расстояние d мало по сравнению с расстоянием l . Через l_1, l_2 обозначим расстояния, которые проходят волны от источников S_1 и S_2 до точки наблюдения. Тогда из геометрии задачи следует:

$$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Из второго уравнения вычитаем первое и после преобразований получаем

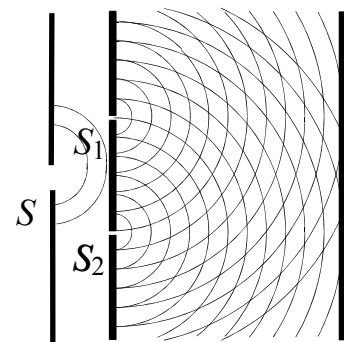
$$(l_1 + l_2)(l_2 - l_1) = 2xd.$$


Рис. 14.3

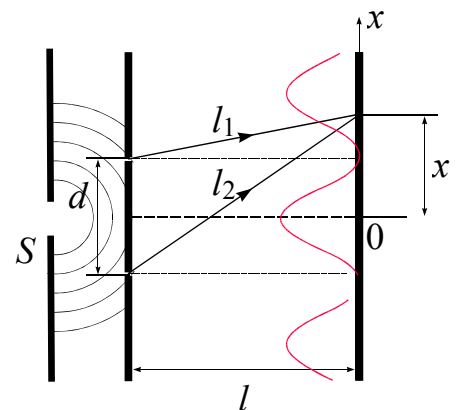


Рис. 14.4

Если $d \ll l$, то $l_1 + l_2 \approx 2l$ и

$$l_2 - l_1 = \frac{2xd}{2l},$$

где $l_2 - l_1 = \Delta l$ – геометрическая разность хода между двумя волнами, которые пришли в точку встречи.

Умножим обе части последнего уравнения на n – показатель преломления среды, в которой распространяются волны:

$$n \cdot \Delta l = \frac{nx d}{l},$$

$$\Delta L = \frac{nx d}{l}.$$

1. Когда оптическая разность хода $\Delta L = \lambda_0 m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в этих точках наблюдается максимум интерференционной картины:

$$x_{\max} = \frac{\lambda_0 l m}{n d}. \quad (14.10)$$

Условие (14.10) определяет положение максимумов интерференционной картины в опыте Юнга.

2. Если оптическая разность хода $\Delta L = \frac{\lambda_0}{2}(2m + 1)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то в этих точках наблюдается минимум интерференционной картины:

$$x_{\min} = \frac{\lambda_0 l}{2 n d} (2m + 1). \quad (14.11)$$

Условие (14.11) определяет положение минимумов интерференционной картины в опыте Юнга.

Расстояние между двумя соседними светлыми полосами будет определяться:

$$x_{\max}^{(m+1)} - x_{\max}^{(m)} = \frac{\lambda l}{d},$$

где $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, а ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x_m = x_{\min}^{(m+1)} - x_{\min}^{(m)} = \frac{\lambda l}{d}. \quad (14.12)$$

Из формулы (14.12) видно, что ширина интерференционных полос не зависит от номера m .

14.3. Интерференция в тонких пленках (пластинах)

Рассмотрим параллельный пучок монохроматического света, падающего под углом θ_1 на поверхность плоскопараллельной пластинки (пленки) с оптическим показателем преломления n (рис.14.5). Произвольно выбранный луч I , падая на поверхность пластинки (точка A), преломляется (под углом θ_2) в пластинку. Преломленный луч доходит до нижней поверхности пластинки и отра-

жается от нее (точка B). Отраженный луч идет в обратном направлении и, достигнув верхней поверхности пластинки, преломляется (точка C) и выходит из нее под углом θ_1 в виде луча I' . Вкладом лучей, многократно отразившихся от пластины, пренебрегаем. Луч 2 отражается в точке C .

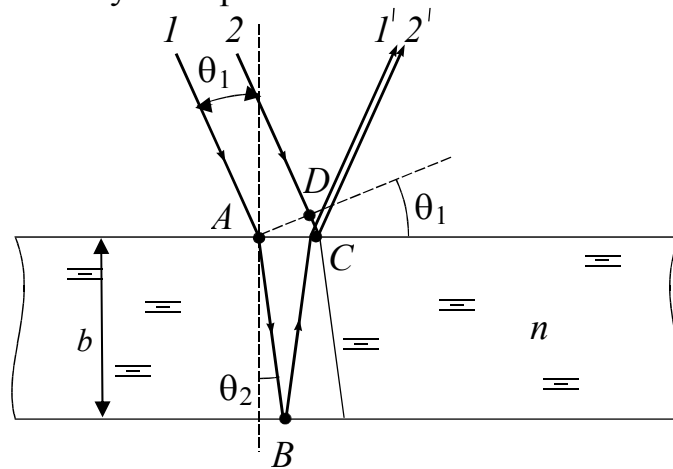


Рис. 14.5

В зависимости от разности хода лучей I и 2 они будут либо усиливать, либо гасить друг друга. Оптическая разность хода между лучами I и 2 :

$$\Delta L = 2ABn - DC = \frac{2bn}{\cos\theta_2} - 2btg\theta_2 \sin\theta_1 = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}.$$

Здесь учтено, что $n \sin\theta_2 = \sin\theta_1$.

Учитывая, что луч 2 отражается от среды оптически более плотной, т.е. в момент отражения меняет скачком фазу на π (что соответствует разности хода $\lambda_0/2$), оптическая разность хода между лучами I и 2 :

$$\Delta L = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (14.13)$$

Таким образом, разность хода между лучами зависит от толщины пластинки, ее показателя преломления и от угла падения света θ_1 .

Если оптическая разность хода удовлетворяет условию максимума $\Delta L = 2m \frac{\lambda_0}{2}$, то лучи I' и $2'$ будут складываться в фазе и усиливать друг друга.

Если оптическая разность хода удовлетворяет условию минимума $\Delta L = \frac{\lambda_0}{2}(2m + 1)$, то лучи I' и $2'$ будут складываться в противофазе и гасить друг друга.

14.4. Интерференция на клине

Пусть стеклянная пластинка имеет форму клина с углом раствора $\alpha \ll 1$, и на нее падает плоская монохроматическая световая волна (рис. 14.6). Отраженные от поверхности клина световые волны будут распространяться не в одном направлении, а под некоторым углом. Область перекрытия когерентных

частей отраженных волн локализована в основном вблизи поверхности клина и становится все более узкой по мере перемещения в сторону утолщения клина, постепенно исчезая совсем. В точках $Q_1, Q_2 \dots$ пересекаются заведомо когерентные лучи. Эти лучи получаются из одного луча, отраженного от разных поверхностей клина. В точках $P_1, P_2 \dots$ пересекаются разные лучи.

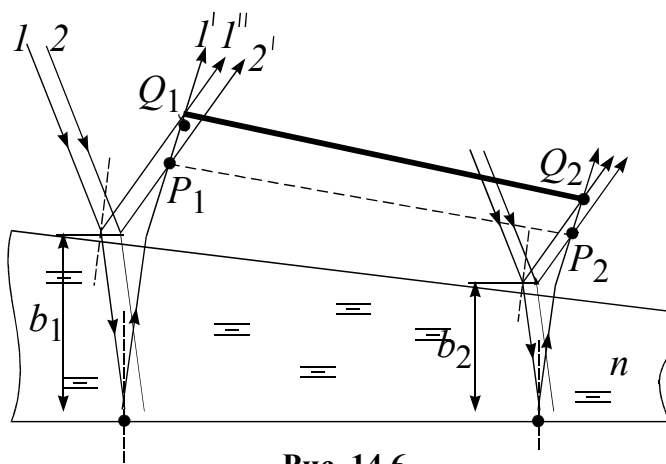


Рис. 14.6

В точках $Q_1, Q_2 \dots$ располагаем экран. На экране, проходящем через точки Q_1 и Q_2 , всегда будет наблюдаться интерференционная картина, поскольку в этих точках пересекаются заведомо когерентные лучи.

Поскольку разность хода лучей, отразившихся от различных участков клина, неодинакова, в области локализации интерференции появятся светлые и темные полосы, параллельные ребру клина. Каждая из таких полос возникает в результате отражений от участков клина с одинаковой толщиной, поэтому их называют *полосами равной толщины*.

14.5. Интерференция при наблюдении колец Ньютона

Кольца Ньютона – это кольцевые полосы равной толщины, наблюдаемые при отражении света от поверхностей зазора между плоской стеклянной пластинкой и плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны (рис.14.7). В данном случае роль диэлектрического слоя переменной толщины, от поверхностей которого отражаются волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой. Волна, отраженная от верхней поверхности линзы, в силу небольшой длины когерентности обычных источников света, некогерентна с волнами, отраженными от поверхностей зазора, и участия в образовании интерференционной картины не принимает.

Пусть свет с длиной волны λ нормально падает на систему линза-пластинка. Так как радиус кривизны линзы большой, а падение нормальное, то отраженный луч будет

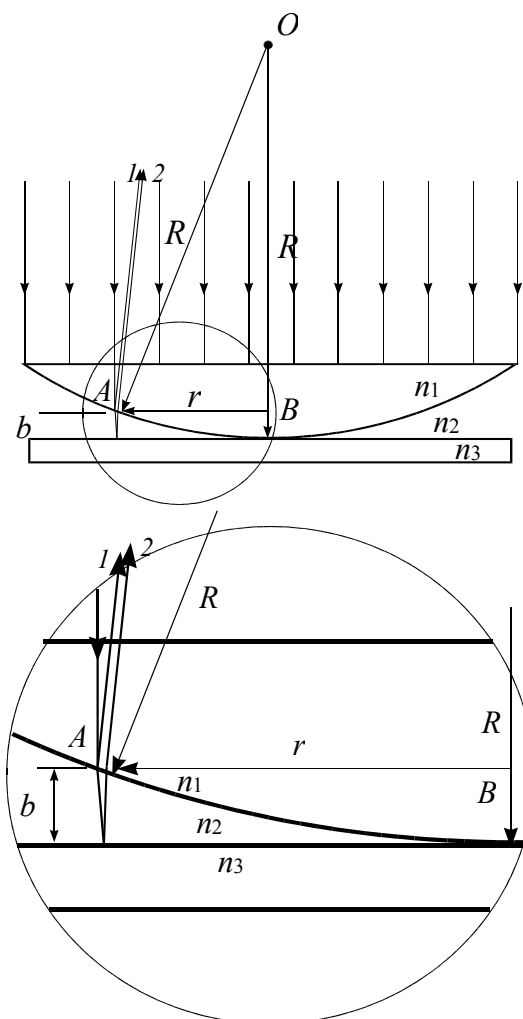


Рис. 14.7

распространяться практически в обратном направлении.

Тогда оптическая разность хода между лучами 1 и 2

$$\Delta L = 2bn_2 + \frac{\lambda_0}{2}, \quad (14.14)$$

где n_2 – показатель преломления среды, заполняющий пространство между пластинкой и линзой.

В зависимости от соотношения показателей преломления n_1, n_2, n_3 в оптической разности хода либо присутствует слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$, либо нет. В зависимости от оптической разности хода лучи 1 и 2 будут складываться либо в фазе, либо в противофазе. В результате будем наблюдать картину кольцевых полос равной толщины.

Из геометрии задачи (из прямоугольного треугольника OAB)

$$R^2 = r^2 + (R - b)^2,$$

$$r^2 = 2Rb - b^2.$$

Так как линза имеет большой радиус кривизны, то есть $b \ll R$, получим, что

$$r \approx \sqrt{2Rb}.$$

Если среда, заполняющая пространство между линзой и пластинкой, воздух ($n_2 \approx 1$), то оптическая разность хода между лучами 1 и 2:

$$\Delta L = 2b + \frac{\lambda_0}{2}.$$

1. *Условие максимума.* Светлые кольца возникают там, где оптическая разность хода волн, отраженных от обеих поверхностей зазора, равна четному числу длин полуволен:

$$\Delta L = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad 2b + \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad b = \frac{\lambda_0}{4} (2m - 1).$$

Из последнего уравнения и (14.14) следует, что радиус светлых колец Ньютона, соответствующих максимуму интерференции,

$$r_{\text{светл}} = \sqrt{\frac{R\lambda_0}{2} (2m - 1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (14.15)$$

2. *Условие минимума.* Темные кольца возникают там, где оптическая разность хода волн, отраженных от обеих поверхностей зазора, равна нечетному числу длин полуволен:

$$\Delta L = \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1), \quad 2b + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1), \quad b = \frac{\lambda_0 m}{2}.$$

Из последнего уравнения и (14.14) следует, что радиус темных колец Ньютона, соответствующих минимуму интерференции,

$$r_{\text{тёмн}} = \sqrt{R\lambda_0 m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14.16)$$

14.6. Примеры решения задач

1. Радиус кривизны линзы на установке для наблюдения колец Ньютона равен 14 м. Каков радиус пятого темного кольца Ньютона, если наблюдение ведется в отраженном монохроматическом свете с $\lambda = 0,54$ мкм и вся установка опущена в глицерин с коэффициентом преломления $n_2=1,47$. Для стекла $n_1=1,5$.

Дано

$$R=14 \text{ м,}$$

$$\lambda = 0,54 \text{ мкм,}$$

$$n_1=1,5 \text{ (стекло),}$$

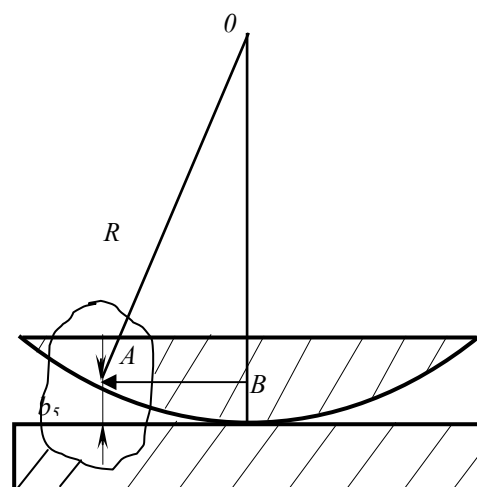
$$n_2=1,47 \text{ (глицерин),}$$

$m_{\min}=5$; темный

$$r_5 = ?$$

Решение

Данная установка для получения колец Ньютона отличается от большинства лабораторных установок тем, что зазор между линзой и пластинкой заполнен глицерином. Когерентные пучки 1 и 2, образованные в результате отражения света от верхней и нижней границ клина, будут практически параллельны друг другу и падающему лучу. Темные кольца образуются там, где толщине зазора b соответствует разность хода двух лучей:



$$2bn_2 + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ добавляется к оптическому пути второго луча, так как при отражении от нижней границы клина, как от оптически более плотной среды ($n_1 > n_2$), фаза его изменяется на π . Подставляя в (1) $m=5$, получим толщину воздушного зазора в том месте, где наблюдается пятое темное кольцо:

$$b_5 = \frac{5\lambda}{2n_2}. \quad (2)$$

Используя формулу (14.16)

$$r_5^2 = 2Rb_5, \quad (3)$$

получаем $r_5 = \sqrt{\frac{5\lambda R}{n_2}}$. Численно $r_5 = 5,07 \cdot 10^{-3}$ м.

2. На толстую стеклянную пластину, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления n_2 вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 0,6$ мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину d пленки.

Дано

$$n_2 = 1,4;$$

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм}$$

$$d = ?$$

Решение

Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA . Для наглядности ход этого пучка показан на рисунке для общего случая, когда угол падения α отличен от нуля.

В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 па-

дают на собирающую линзу, пересекаются в ее фокусе F и интерферируют.

Так как показатель преломления воздуха ($n_1 = 1,0$) меньше показателя преломления вещества пленки ($n_2 = 1,4$), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла ($n_3 = 1,5$), то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, по сравнению со средой, в которой идет падающая волна. По-

этому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π и точно так же на π изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B . Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе F линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого пучка не было.

Как известно, условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода ΔL интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволен.

Оптическая разность хода

$$\Delta L = n_2 l_2 - n_1 l_1 = (AB + BC) n_2 - AD n_1.$$

Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид

$$(AB + BC) n_2 - AD n_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

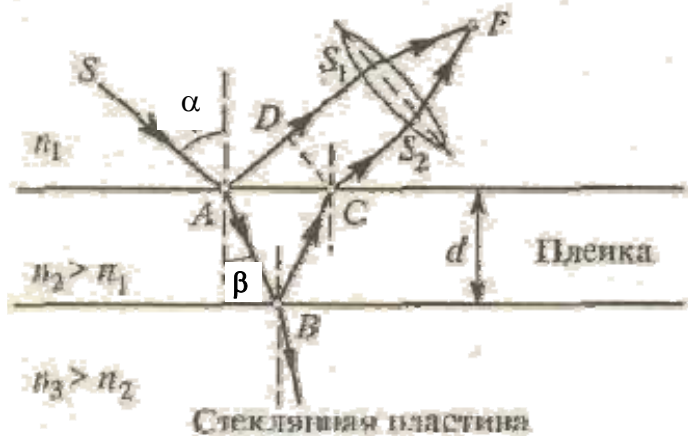
В пределе при $\alpha = 0$ будем иметь

$$\Delta L = 2d n_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

откуда искомая толщина пленки

$$d = \frac{(2k + 1)\lambda}{4n_2}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим ряд возможных значений толщины пленки:



$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1,4} = 0,11 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,11 \text{ мкм};$$

$$d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = \frac{3 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1,4} = 3d_0 = 0,33 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,33 \text{ мкм}.$$

15. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями (например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия и т.п.) и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени.

Дифракция – перераспределение интенсивности светового потока, возникающее из-за наложения волн, возбуждаемых непрерывно распределенными когерентными источниками.

Явление дифракции может быть объяснено с помощью *принципа Гюйгенса-Френеля*. Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка волновой поверхности является источником вторичных сферических волн, а огибающая этих вторичных волн дает положение фронта волны в следующий момент времени (рис. 15.1). Этот принцип объясняет проникновение световых волн в область геометрической тени, однако не дает сведений об амплитуде (интенсивности) волн, распространяющихся в различных направлениях.

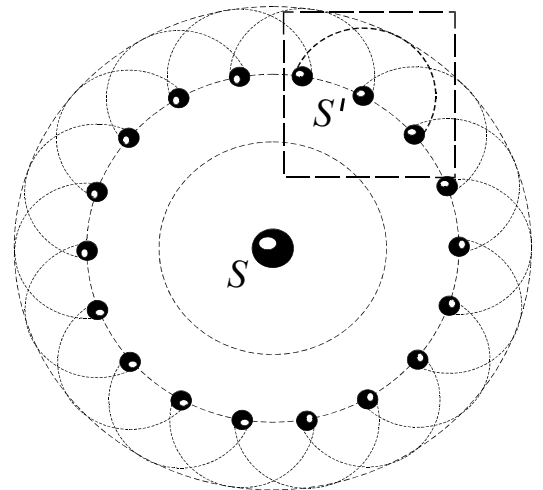


Рис.15.1

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства. Амплитуда вторичной сферической волны пропорциональна величине элемента ds волновой поверхности и убывает при удалении от этой поверхности по закону $1/r$ (рис. 15.2).

Аналитическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля имеет вид

$$E(r, t) = \int_s K(\varphi) \frac{E_0}{r} \cos(\omega t - kr) dS, \quad (15.1)$$

где $E(r, t)$ – результирующее колебание в некоторой точке наблюдения (P); r – расстояние от вторичного источника на волновой поверхности до точки наблюдения; E_0 – амплитуда колебания в точке нахождения элемента dS ; $K(\varphi)$ – коэффициент, зависящий от угла φ между первоначальным направлением световой волны и направлением на точку наблюдения (рис. 15.2). Коэффициент

$K(\varphi)$ монотонно убывает с ростом угла φ от 1 при $\varphi = 0$ до 0 при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Он обеспечивает отсутствие обратного излучения. Таким образом, суть принципа Гюйгенса-Френеля заключается в следующем: при вычислении амплитуды колебания в точке P , порождаемого световой волной, распространяющейся от реального источника, можно заменить этот источник совокупностью вторичных источников, расположенных на волновой поверхности.

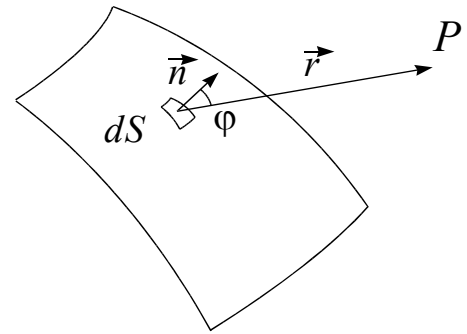


Рис. 15.2

15.1. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера

Существует количественный критерий, различающий эти два вида дифракции.

Дифракцию Фраунгофера наблюдают тогда, когда взаимное расположение источника света, точки наблюдения и препятствия на пути света удовлетворяют неравенствам:

$$l_1, l_2 \gg \frac{4a^2}{\lambda}, \quad (15.2)$$

где l_1 – расстояние от источника до препятствия; l_2 – расстояние от препятствия до точки наблюдения; a – линейный размер препятствия; λ – длина волны света (рис.15.3).

При данном условии лучи, идущие до препятствия, и лучи, идущие от препятствия до точки наблюдения, практически параллельны, поэтому такая дифракция называется дифракцией в параллельных лучах.

Если хотя бы одно отмеченное выше условие не выполняется, то дифракция называется *дифракцией Френеля* или дифракцией в сходящихся лучах.

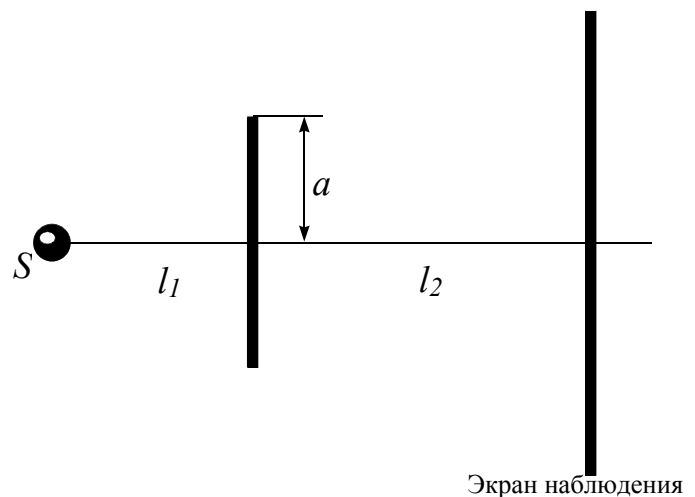


Рис. 15.3

15.2. Зоны Френеля. Метод зон Френеля

Как показал Френель, в случаях, отличающихся симметрией, нахождение амплитуды результирующего поля в точке P может быть осуществлено простым алгебраическим или геометрическим суммированием (волновая поверхность симметрична относительно прямой SP).

Разбиваем волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от соответствующих краев соседних зон до точки P отличаются на $\frac{\lambda}{2}$. Таким образом, колебания, приходящие от крайних границ соседних зон, находятся в противофазе. Эти зоны называются зонами Френеля (рис.15.4,а). Окончательный результат получается сложением действий каждой зоны Френеля в точке P .

Так как интенсивность света зависит от площади излучаемой поверхности, найдём площади соответствующих зон Френеля. Площадь m -й зоны Френеля:

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

где S_m и S_{m-1} – площади сферических сегментов, ограниченных внешними границами соответствующих зон Френеля; r_m – радиус зон Френеля; h_m – высота сфер сегмента.

Из геометрии задачи (см. прямоугольные треугольники SHM_m и PHM_m рис.15.4,б) следует:

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2;$$

$$h_m = \frac{b\lambda m + m^2 \frac{\lambda^2}{4}}{2(a + b)}.$$

Учитывая, что $b \gg \lambda$, для небольших номеров m зон Френеля

$$h_m \approx \frac{b\lambda m}{2(a + b)}; S_m = 2\pi a h_m \approx \frac{\pi a b \lambda m}{(a + b)};$$

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi a b \lambda}{(a + b)}.$$

Таким образом, для небольших значений m площади зон Френеля приблизительно одинаковые. Радиус внешней границы m -й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a + b} m \lambda}. \quad (15.3)$$

Поскольку действие зоны уменьшается с увеличением угла между нормалью к поверхности зоны и направлением на точку наблюдения, а разность хода волн, идущих от соседних зон Френеля, удовлетворяет следующему условию: $b_m - b_{m-1} > 0$, то амплитуды колебаний, создаваемые первой, второй и т.д. зонами в точке наблюдения, связаны неравенствами $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$

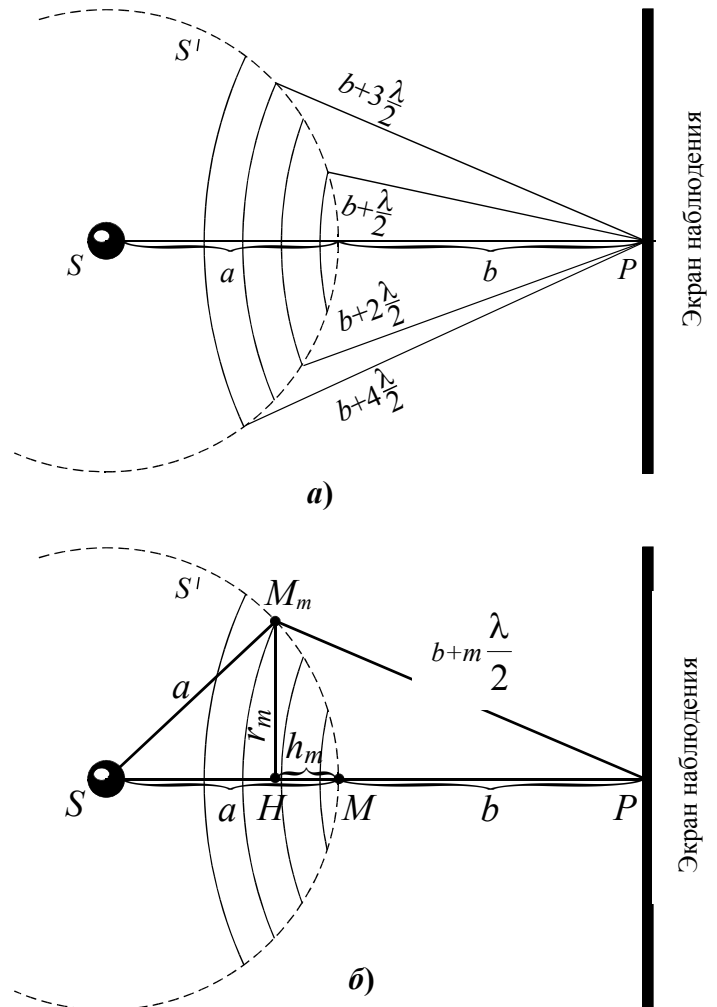


Рис. 15.4

Учитывая, что фазы волн, приходящих от соседних зон, отличаются на π , амплитуда результирующего колебания в точке P запишется

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_{m-1} - A_m$$

или

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots$$

Так как амплитуды соседних зон близки, можно считать, что

$$A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$$

и все выражения в скобках равны нулю. Тогда амплитуда результирующего колебания в точке P будет определяться половиной амплитуды колебания, создаваемого первой зоной Френеля: $A \approx \frac{A_1}{2}$ (соответственно интенсивность $I = \frac{I_1}{4}$).

Из изложенного можно сделать вывод, что если на пути сферической волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой лишь центральную зону Френеля, то амплитуда электромагнитного излучения в точке P возрастает в два раза, а интенсивность светового потока соответственно в четыре раза.

Для увеличения интенсивности света в точке наблюдения используют *зонные пластинки*. *Зонной пластинкой* называется экран, состоящий из чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, радиусы которых совпадают с радиусами зон Френеля для определенных значений a , b и λ .

Если поместить зонную пластинку на расстоянии a от точечного источника и на расстоянии b от точки наблюдения P , то пластинка заслонит все четные зоны Френеля и оставит открытыми все нечетные. При этом амплитуда результирующего колебания в точке наблюдения $A = A_1 + A_3 + A_5 + \dots$, т. е. при наличии зонной пластинки интенсивность света в точке P оказывается больше, чем при ее отсутствии.

15.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Рассмотрим падение сферической волны, распространяющейся в изотропной однородной среде от точечного источника S , на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 (диафрагмой). Точка наблюдения P расположена против центра отверстия. Обозначим через a расстояние от источника S до волновой поверхности, b – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения (рис.15.5,а).

Открытую для точки наблюдения часть волновой поверхности разобьем на зоны Френеля.

Выражение для определения радиуса внешней границы m -й зоны Френеля было получено в (15.2):

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda.$$

Определим число открытых зон Френеля из условия $r_0 = r_m$:

$$m = \frac{r_0^2 (a+b)}{ab\lambda}.$$

Таким образом, при заданных длине световой волны, размерах отверстия и расстояниях от источника до точки наблюдения можно определить число зон Френеля, создающих колебания в точке P , при этом амплитуда результирующего колебания будет определяться по формуле:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_m,$$

где «знак плюс» соответствует нечётному значению m , «знак минус» – чётному.

1. При чётном значении m последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-1}}{2} - A_m \right).$$

Приближённо полагая слагаемые в скобках равными нулю, получаем, что результирующее колебание в точке наблюдения: $A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_{m-1}}{2} - A_m \right)$, где m – целое чётное число.

2. При нечётном значении m амплитуду колебаний в точке P можно записать в следующем виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2}.$$

Приближённо полагая слагаемые в скобках равными нулю, получаем, что результирующее колебание в точке наблюдения имеет амплитуду

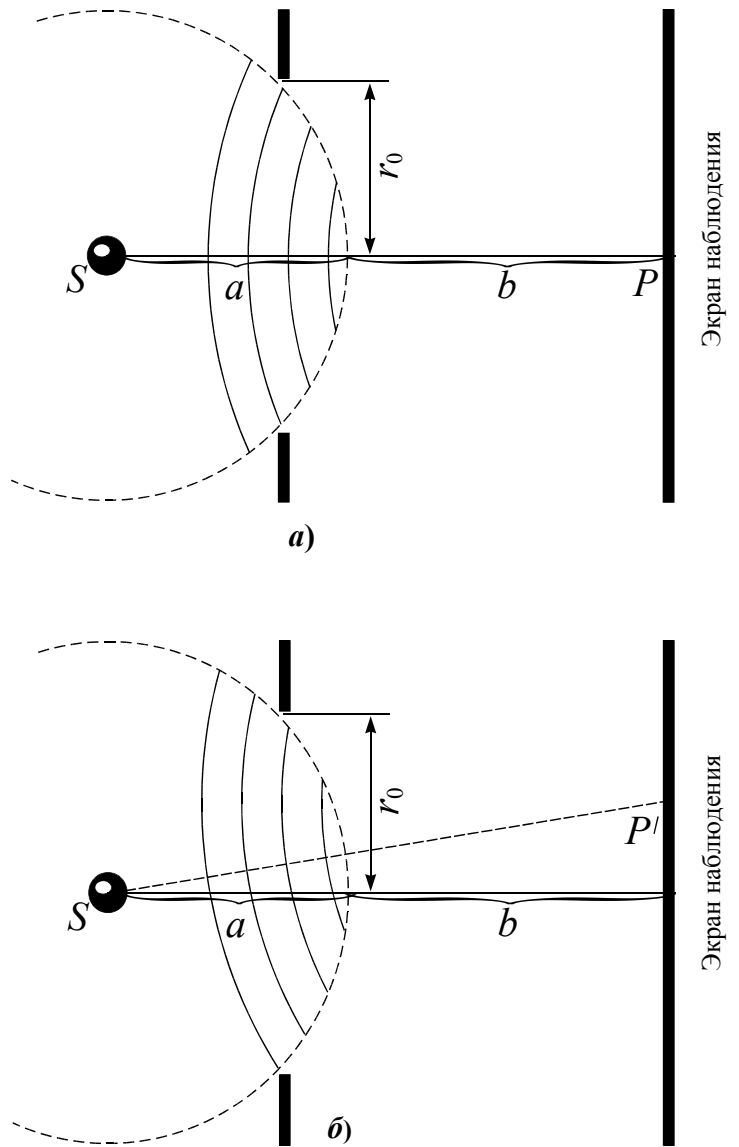


Рис. 15.5

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2},$$

где m – целое нечётное число.

Поскольку амплитуды полей, излучаемых соседними зонами Френеля, практически одинаковые, в общем случае результирующее колебание в точке P можно записать в виде

$$A = \frac{A_1}{2} \mp \frac{A_m}{2}, \quad (15.4)$$

где «минус» соответствует случаю, когда открытым является чётное число зон Френеля, «плюс» – нечётное.

Поскольку при малых значениях m амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке P соседними зонами Френеля, практически одинаковые и равны $A_m \approx A_1$, то результирующее колебание в точке P , согласно (15.4),

$$A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_1}{2} = 0$$

при m чётном,

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_1}{2} = A_1$$

при m нечётном.

Таким образом, при нечётном m диафрагма увеличивает интенсивность света в точке наблюдения в четыре раза по сравнению со случаем, когда диафрагма отсутствует, при чётном – интенсивность приблизительно равна нулю.

Интенсивность световой волны на экране в зависимости от положения точки наблюдения можно качественно определить, пользуясь методом зон Френеля. Рассмотрим сферическую волну, падающую на непрозрачный экран, в котором имеется отверстие, открывающее для точки наблюдения P m зон Френеля, число которых нечетное (рис.15.5,б). Для точки P' , расположенной несимметрично, «сверху» закрывается часть последней m -й зоны Френеля (которая создает колебание в точке P' в фазе с колебанием, создаваемым в точке P' первой зоной) и открывается «снизу» часть $m+1$ зоны Френеля (которая создает колебания в точке P' в противофазе с первой зоной). В результате, интенсивность в точке P' меньше по сравнению с интенсивностью в точке P . Интенсивность будет уменьшаться до тех пор, пока m -я зона для точки P' не закроется полностью и не откроется $m+1$ зона. При дальнейшем смещении точки P' «сверху» закрывается часть $m-1$ зоны, а «снизу» открывается часть $m+2$ зоны. Колебание, которое создает в точке P' $m+2$ зона, находится в фазе с первой зоной и интенсивность в точке P' увеличивается и т.д.

Таким образом, при перемещении точки в радиальном направлении мы проходим последовательность максимумов и минимумов интенсивности. Дифракционная картина представляет собой чередование светлых и тёмных колец на экране. При нечётном m в центре картины находится светлое пятно, при чётном – тёмное. Если отверстие в экране открывает лишь часть первой зоны Френеля, то на экране получается размытое светлое пятно. Если отверстие откры-

вает большое число зон Френеля, то чередование светлых и тёмных колец наблюдается только в узкой области, прилегающей к границе геометрической тени.

15.4. Дифракция Фраунгофера

Дифракция Фраунгофера соответствует случаю, когда источник света и точка наблюдения удалены от препятствия на бесконечность. Таким образом, полагаем, что на препятствие падает плоская световая волна. Практически осуществить это можно, поместив точечный источник в фокус собирающей линзы и наблюдая дифракционную картину в фокальной области собирающей линзы. Вторая линза необходима, так как параллельные лучи, вышедшие из препятствия, пересекаются и дают изображение на бесконечности.

15.4.1. Дифракция Фраунгофера на щели

Пусть на щель ширины a падает плоская монохроматическая световая волна, причём фронт волны совпадает с той плоскостью, в которой находится щель (рис.15.6).

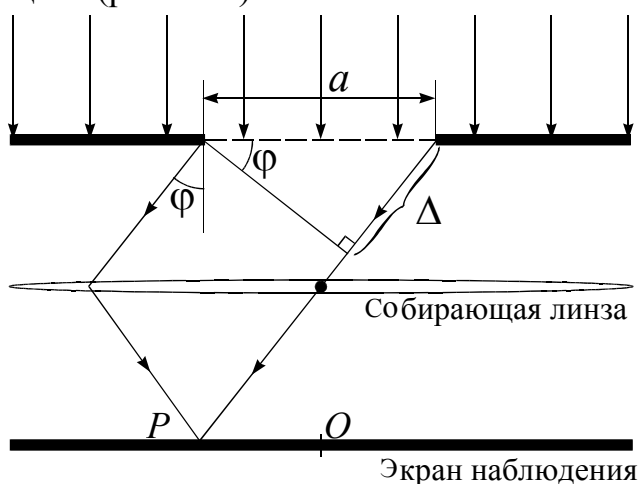


Рис. 15.6

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, на открытой части волновой поверхности образуются точечные источники вторичных волн. Выберем произвольное направление излучения вторичных источников. Угол φ называется углом дифракции. Собирающую линзу подбирают таким образом, чтобы она не вносила дополнительной разности хода для параллельного пучка лучей. Оптическая разность хода между лучами, идущими от краёв щели,

$$\Delta = a \sin \varphi. \quad (15.5)$$

Щель разбиваем на зоны излучения в виде полос, параллельных краям щели таким образом, чтобы разность хода от соответствующих краёв соседних полос составляла $\frac{\lambda}{2}$. Тогда число зон, укладываемых на ширине щели, равно

$$m^* = \frac{\Delta}{\lambda/2}. \quad (15.6)$$

Так как свет на щель падает нормально, то во всех точках волнового фронта, расположенных в плоскости щели, поле будет синфазным. Поскольку площади зон излучения одинаковые, то амплитуды вторичных волн будут также равными. Из (15.5) и (15.6) следует, что количество зон излучения

$m^* = \frac{a \sin \varphi}{\lambda/2}$ зависит от угла дифракции. Также от числа зон зависит результат наложения волн от вторичных источников, т.е. результирующее поле в точке наблюдения. Поскольку волны, приходящие от соседних зон, находятся в противофазе, то они гасят друг друга, в результате чего, если число зон чётное, то в точке наблюдения будет наблюдаться минимум интенсивности, если нечётное – максимум.

Таким образом, если

$$a \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{2} 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (15.7)$$

то в точке наблюдения находится минимум интенсивности, если

$$a \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{2} (2m - 1), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (15.8)$$

то в точке наблюдения находится максимум интенсивности.

Условия (15.7), (15.8) называются соответственно условиями минимума и максимума для дифракции света на щели.

Зависимость интенсивностей максимумов дифракционной картины при дифракции Фраунгофера на щели выражается формулой:

$$I_{\max} = I_0 \left(\frac{2}{\pi(2m+1)} \right)^2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

I_0 – интенсивность максимума нулевого порядка при нулевом угле дифракции.

Решение в строгом виде задачи дифракции световой волны на щели дает зависимость амплитуды интенсивности на экране наблюдения от угла дифракции:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi} \right)^2. \quad (15.9)$$

График зависимости, соответствующий (15.9), представлен на рис.15.7.

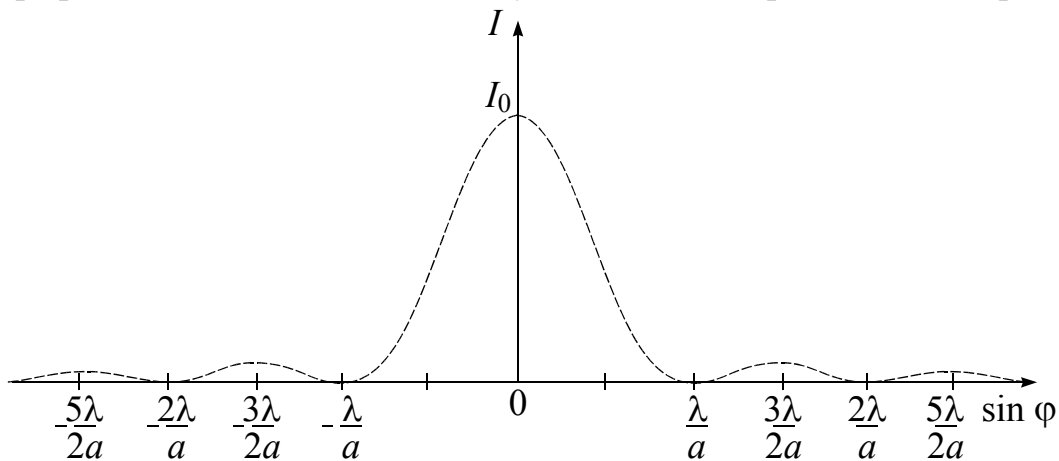


Рис. 15.7

Сужение щели приводит к тому, что центральный максимум расплывается, при этом яркость максимума будет уменьшаться. Аналогично будут вести себя и другие максимумы. При ширине щели, много большей длины волны, в центре экрана получается резкое изображение источника. В этом случае имеет место прямолинейное распространение света (т.е. довольно точно выполняется приближение геометрической оптики).

Положение дифракционных максимумов и минимумов зависит от длины волны падающего света (15.7), (15.8), поэтому рассмотренное ранее имеет место лишь в монохроматическом свете. В белом свете будет наблюдаться совокупность дифракционных картин разных цветов, сдвинутых друг относительно друга. Центральный максимум при $\varphi = 0$ будет общим, и в центре экрана будет наблюдаться белое пятно. Последующие максимумы будут располагаться таким образом, что коротковолновые максимумы будут лежать ближе к центру.

15.4.2. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решётке

Одномерная дифракционная решётка представляет собой систему параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделённых равными по величине непрозрачными промежутками (рис. 15.8).

Величина d называется *периодом дифракционной решётки*.

Рассмотрим падение на дифракционную решётку плоской монохроматической световой волны, волновой фронт которой совпадает с плоскостью решётки.

По принципу Гюйгенса-Френеля каждая щель – часть волновой поверхности – излучает вторичные волны в сторону экрана наблюдения. Фаза волн в плоскости решетки для всех щелей одинакова. Интенсивность в произвольной точке P на экране будет результатом наложения волн, идущих от всех щелей.

Интенсивность света на экране наблюдения определяется квадратом амплитуды результирующего колебания:

$$I = |\bar{A}|^2 = I_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi} \right)^2}_{F_1(\sin \varphi)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi N d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)} \right)^2}_{F_2(\sin \varphi)}. \quad (15.10)$$

Интенсивность дифракционного поля можно получить из исследования последней формулы, т.е. зависимости интенсивности от угла дифракции.

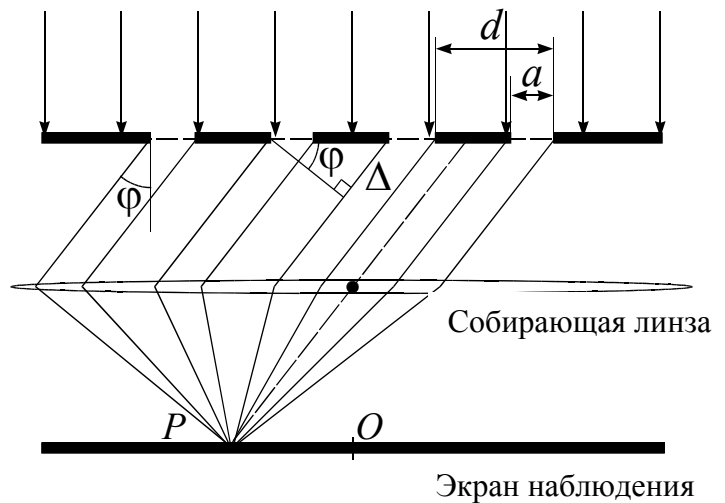


Рис. 15.8

1. Из формулы видно, что интенсивность обращается в ноль при условии

$$a \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (15.11)$$

Полученное условие называется условием главных минимумов для дифракционной решетки и соответствует условию минимума при дифракции от одной щели. Таким образом, минимум для щели является также минимумом для решетки.

2. Интенсивность также обращается в ноль, если

$$d \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{N} p, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad p \neq N, 2N, 3N, \dots \quad (15.12)$$

N – количество щелей дифракционной решетки.

Выражение является условием минимума для дифракционной решетки и определяет положение вторичных минимумов интенсивности.

3. В случае, когда

$$d \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (15.13)$$

функция (15.10) будет принимать максимальное значение.

Третье условие определяет положение главных максимумов при дифракции на дифракционной решетке и называется условием главных максимумов.

Из приведенных условий следует, что между двумя соседними главными максимумами располагается $(N - 1)$ дополнительных минимумов и соответственно $(N - 2)$ дополнительных максимумов. Интенсивность дополнительных максимумов незначительна, они лишь создают некоторый фон на экране.

Таким образом, распределение интенсивности и дифракционная картина, получающиеся от решетки, имеют вид, представленный на рис.15.9. Пунктирная кривая, проходящая через вершины главных максимумов, изображает интенсивность от одной щели, умноженную на N^2 . При указанных на графике параметрах решетки главные максимумы 2-го, 4-го и т.д. порядков пропадают, так как они накладываются на минимумы от одной щели. При наблюдении в монохроматическом свете на экране виден ряд ярких полос, разделенных темными промежутками.

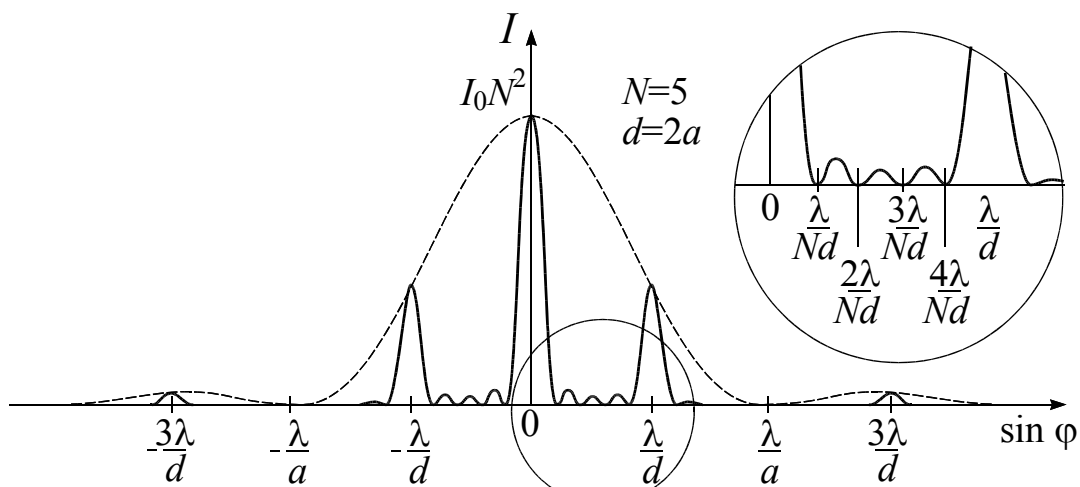


Рис. 15.9

При изменении параметров дифракционной решетки получающиеся распределение интенсивности и дифракционная картина будут меняться (рис.15.10).

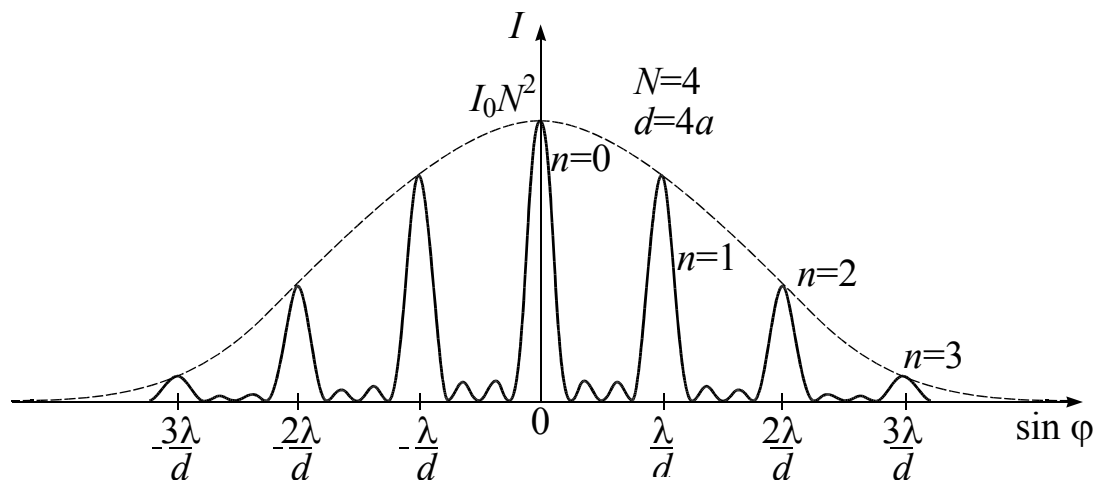


Рис. 15.10

15.4.3. Дифракционная решётка как спектральный прибор

Ранее мы рассматривали дифракцию в случае монохроматического излучения. Когда на решетку падает свет сложного спектрального состава, то на экране на месте главных максимумов (кроме центрального) наблюдаются спектры соответственно 1-го, 2-го и т.д. порядков. При этом фиолетовые лучи в каждом спектре отклоняются меньше, чем красные ($\lambda_k > \lambda_\phi$). Это определяется зависимостью угла дифракции, для которого наблюдается главный максимум, от длины волны.

Пусть на дифракционную решетку падает плоская световая волна, представляющая собой суперпозицию трех световых пучков с длинами волн $\lambda_k > \lambda_3 > \lambda_c$.

На экране спектры различных порядков разделены темными промежутками, но иногда могут накладываться друг на друга. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор.

Основными характеристиками любого спектрального прибора являются дисперсия и разрешающая способность.

Дисперсия определяет линейное или угловое расстояние, на которое будут разведены диспергирующим элементом два пучка света, отличающиеся по длине волны на единицу (например, на 1 нм).

Угловой дисперсией называется величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (15.14)$$

где $d\varphi$ – угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $d\lambda$.

Положение главных максимумов для дифракционной решетки определяется из условия $d \sin \varphi = n\lambda$. Продифференцировав последнее равенство по длине волны, получаем

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{n}{d \cos \varphi}.$$

При небольших углах дифракции $\varphi \rightarrow 0$ ($\cos \varphi \approx 1$) и

$$D = \frac{n}{d}. \quad (15.15)$$

Из (15.15) следует, что чем выше порядок спектра, тем больше дисперсия. Дисперсия также больше при наблюдении спектра с помощью дифракционной решетки с меньшим периодом.

Разрешающая способность определяет минимальную разность длин волн $\delta\lambda$, при которой линии спектра воспринимаются раздельно:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}. \quad (15.16)$$

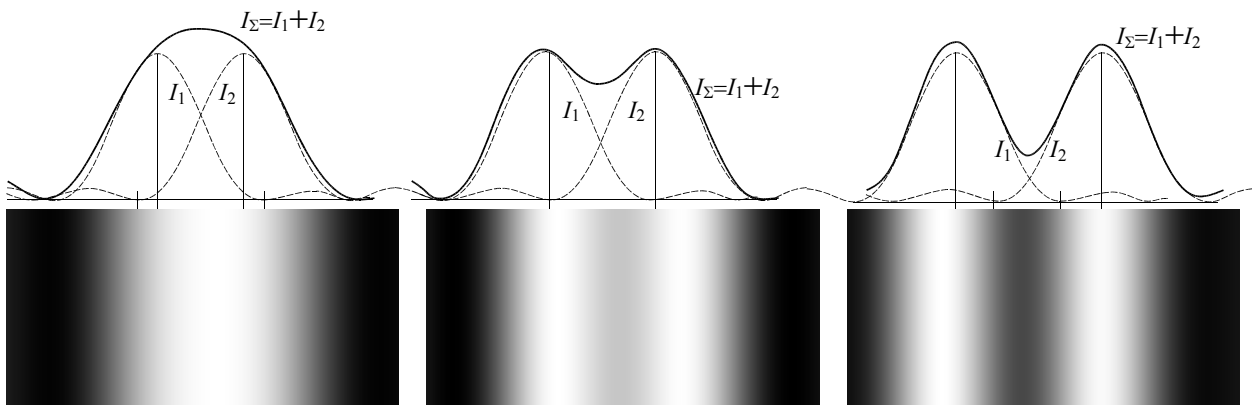


Рис. 15.11

Согласно критерию Релея, спектральные линии считаются полностью разрешёнными, если середина одного максимума совпадает с краем другого максимума (рис.15.11). В этом случае минимум между линиями составляет 80% от максимумов.

Пусть на дифракционную решётку падают две волны: λ и $\lambda + \delta\lambda$. В спектре порядка n максимумы этих двух волн будут разрешены по критерию Релея, если максимум одной волны совпадает с краем максимума другой.

Запишем условие максимума для излучения с длиной волны $(\lambda + \delta\lambda)$:

$$d \sin \varphi_{\max} = n(\lambda + \delta\lambda),$$

для излучения с длиной волны λ – условие дополнительного минимума:

$$d \sin \varphi_{\min} = n\lambda + \frac{\lambda}{N}.$$

Так как $\varphi_{\max} = \varphi_{\min}$, то $n\lambda + n\delta\lambda = n\lambda + \frac{\lambda}{N}$. Из последнего выражения получаем

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = nN, \quad (15.17)$$

где n – порядок спектра; N – число щелей решетки.

Из (15.17) следует, что лучше разрешаются линии в спектрах более высоких порядков и большей разрешающей способностью обладают решетки с большим числом щелей.

Из условия максимума для дифракционной решетки $d \sin \varphi = n\lambda$ следует, что при угле дифракции $\varphi \rightarrow 90^\circ$ $d \sin 90^\circ = n_{\max} \lambda$ и максимальный порядок спектра решетки $n_{\max} = \frac{d}{\lambda}$. Отсюда можно получить, что максимальная разрешающая способность решетки

$$R_{\max} = Nn_{\max} = \frac{Nd}{\lambda} = \frac{l_{\text{реш}}}{\lambda}, \quad (15.18)$$

где $l_{\text{реш}}$ – длина дифракционной решетки.

15.5. Примеры решения задач

1. На щель шириной $a = 0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1$ м.

Дано

$\lambda = 0,6$ мкм;

$L = 1$ м;

$a = 0,1$ мм

$l = ?$

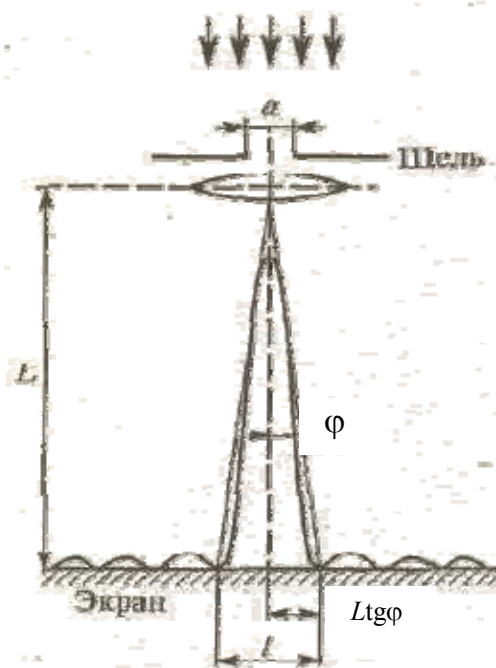
Решение

Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности.

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ , определяемыми условием

$$a \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad (1)$$

где m — порядок минимума. В нашем случае он равен единице.



Расстояние между двумя минимумами на экране определим непосредственно по чертежу $l = 2L \operatorname{tg} \varphi$. Заметив, что при малых углах $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, перепишем эту формулу в виде

$$l = 2L \sin \varphi. \quad (2)$$

Выразим $\sin \varphi$ из формулы (1) и подставим его в равенство (2):

$$l = \frac{2Lm\lambda}{a}. \quad (3)$$

Произведя вычисления по формуле (3), получим

$$l = 1,2 \text{ см.}$$

2. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1 \text{ м}$. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно $20,2 \text{ см}$. Определить: а) постоянную d дифракционной решетки; б) число k штрихов на 1 см ; в) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; г) максимальный угол отклонения лучей.

Дано

$\lambda = 0,5 \text{ мкм}$;
 $L = 1 \text{ м}$;
 $l = 20,2 \text{ см}$

Решение

а. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий n -му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad (1)$$

где n - порядок спектра или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае $n = 1$, $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$. Так как $l/2 \ll L$, то $\operatorname{tg} \varphi = (l/2)/L$. С учетом последних трех равенств соотноше-

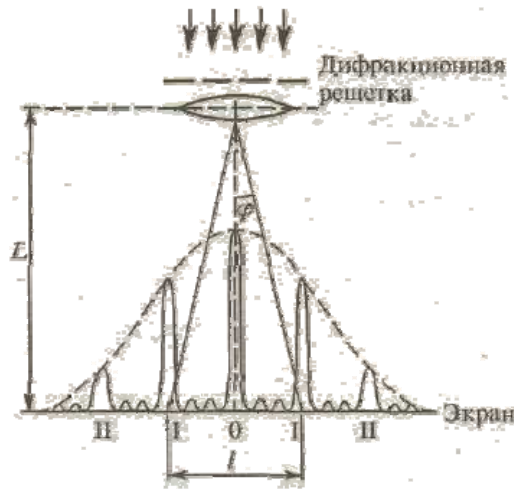
$d = ?$,

$n = ?$,

$N = ?$,

$\varphi_{\max} = ?$

ние (1) примет вид $d \frac{l}{2L} = \lambda$, откуда постоянная решетки $d = \frac{2L\lambda}{l}$. Подставляя численные данные, получим $d = 4,95$ мкм.



б. Число штрихов на 1 см найдем из формулы $k = \frac{1}{d}$. После подстановки числовых значений получим $k = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$.

в. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение n_{max} , исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° .

Из формулы (1) запишем

$$n_{\text{max}} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi. \quad (2)$$

Подставляя сюда значения величин, получим $n_{\text{max}} = 9,9$. Число n обязательно должно быть целым. Следовательно, $n_{\text{max}} = 9$.

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному n_{max} , т.е. всего $2n_{\text{max}}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов:

$$N = 2n_{\text{max}} + 1.$$

Подставляя значение n_{max} , найдем

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

г. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения (2) синус этого угла:

$$\sin \varphi_{\text{max}} = \frac{n_{\text{max}} \lambda}{d}.$$

Отсюда

$$\varphi_{\text{max}} = \arcsin \left(\frac{n_{\text{max}} \lambda}{d} \right).$$

Подставив сюда значения величин λ , d , n_{\max} и произведя вычисления, получим $\varphi_{\max} = 65,4^\circ$.

3. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. При повороте трубы гониометра на угол φ в поле зрения видна линия с длиной волны $\lambda_1 = 440$ нм в спектре третьего порядка. Будут ли видны под этим углом другие спектральные линии, соответствующие длинам волн в пределах видимого спектра (от 400 нм до 700 нм)?

Дано	Решение
$\lambda_1 = 440$ нм; $n=3$; $\varphi_{\lambda_1} = \varphi_{\lambda_2}$ $\lambda_2 = ?$	Положение максимумов интенсивности определяется условием
	$d \sin \varphi = \pm n\lambda$, (1)
	где $n=0,1,2,\dots$; d – период решетки. Максимум нулевого порядка только один, максимумов первого, второго и т.д. порядков имеется по два (они расположены симметрично относительно максимума нулевого порядка). Соотношение (1) можем записать в виде

$$d \sin \varphi = n\lambda. \quad (2)$$

По условию задачи $\lambda = \lambda_1$, $n=3$. Тогда имеем $d \sin \varphi = 3\lambda_1$, откуда

$$\sin \varphi = 3\lambda_1 / d. \quad (3)$$

Для спектральной линии λ_2 получаем

$$\sin \varphi = n\lambda_2 / d. \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) дают $3\lambda_1 = n\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = (3/n)\lambda_1$. Поскольку n – целые числа, то возьмем $n=1$. При этом получается $\lambda_2 = 3\lambda_1$, или $\lambda_2 = 1320$ нм, которая не соответствует видимому спектру. Возьмем $n=2$. При этом $\lambda_2 = 3\lambda_1/2$, $\lambda_2 = 660$ нм соответствует видимому спектру. При $n=3$ получаем $\lambda_2 = \lambda_1$. При $n=4$ длина волны $\lambda_2 = 3\lambda_1/4$, $\lambda_2 = 330$ нм находится вне видимого спектра.

Таким образом, искомая длина волны $\lambda_2 = 660$ нм находится в спектре второго порядка.

4. Период дифракционной решетки $d = 5 \cdot 10^{-6}$ м. Найти угловую дисперсию $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ решетки в спектре первого порядка для $\lambda = 668$ нм.

Дано	Решение
$d = 5 \cdot 10^{-6}$ м; $n=1$; $\lambda = 668$ нм $\frac{d\varphi}{d\lambda} = ?$	Продифференцировав соотношение
	$d \sin \varphi = n\lambda$, (1)
	получим $d \cos \varphi d\varphi = n d\lambda$, откуда
	$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{n}{d \cos \varphi}$. (2)

Подставив в (1) численные значения, получаем

$$\sin \varphi = \frac{1 \cdot 668 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}}, \varphi \approx 7,7^\circ. \text{ Тогда } \cos \varphi = 0,991, \frac{d\varphi}{d\lambda} = 2,02 \cdot 10^5 \text{ рад/м.}$$

16. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

16.1. Естественный и поляризованный свет

Свет, как известно, представляет собой сложное явление: в одних случаях он ведет себя как электромагнитная волна, в других – как поток особых частиц (фотонов).

Следуя волновой трактовке, свет можно представить как поперечные электромагнитные волны, у которых векторы электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны и колеблются в плоскости, перпендикулярной по отношению к вектору скорости распространения электромагнитной волны.

Излучение источника света (светящегося тела) складывается из волн, испускаемых атомами тела. Излучение отдельного атома продолжается около 10^{-8} с. За это время успевает образоваться последовательность «горбов и впадин», называемая цугом волн. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно «вспыхивает» большое количество атомов. Возбуждаемые ими цуги волн, накладываясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для каждого цуга ориентирована случайным образом, а сами колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Свет со всевозможными равновероятными ориентации электрического поля называется естественным (неполяризованным) светом. Свет, в котором направления колебаний упорядочены, называется *поляризованным*.

Во всех процессах взаимодействия света с веществом основную роль играет электрический вектор \vec{E} , поэтому его называют световым вектором. Плоскость, проходящая через световой вектор \vec{E} и луч, называется *плоскостью поляризации*.

Если при распространении плоской электромагнитной волны световой вектор сохраняет свою ориентацию, то такую волну называют *линейно-поляризованной* или *плоско-поляризованной*.

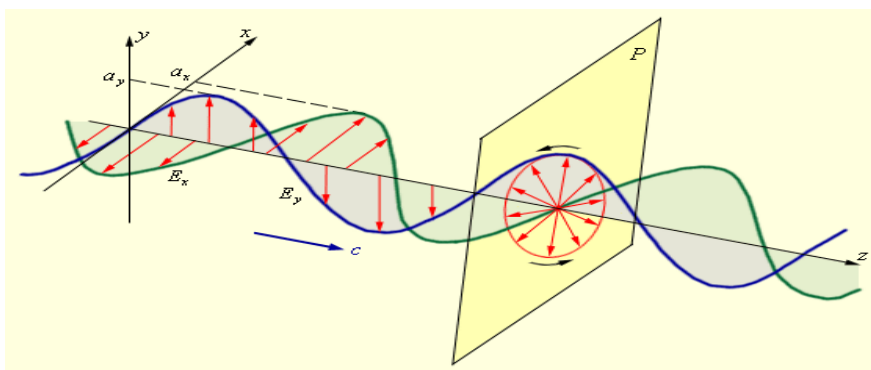


Рис. 16.1

Если вдоль одного и того же направления распространяются две монохроматические волны, поляризованные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то в результате их сложения в общем случае возникает эллипти-

чески-поляризованная волна (рис. 16.1).

В эллиптически-поляризованной волне в любой плоскости P , перпендикулярной направлению распространения волны, конец результирующего вектора \vec{E} за один период светового колебания описывает эллипс, который называется *эллипсом поляризации*. Форма и размер эллипса поляризации определяются амплитудами a_x и a_y линейно-поляризованных волн и фазовым сдвигом $\Delta\varphi$ между ними. Частным случаем эллиптически-поляризованной волны является волна с круговой поляризацией ($a_x = a_y$, $\Delta\varphi = \pm \pi/2$).

Свет, представляющий собой суперпозицию естественного и линейно-поляризованного света, называется *частично поляризованным*.

Степенью поляризации света называется величина

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

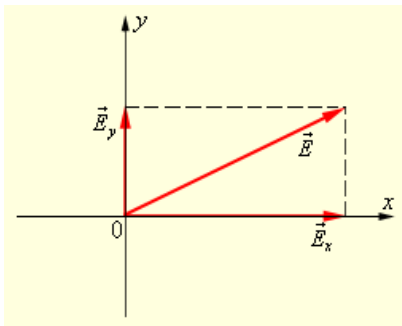


Рис. 16.2

где I_{\max} , I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивность света, проходящего через анализатор.

Для плоско-поляризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$; для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$.

В каждый момент времени вектор \vec{E} может быть спроектирован на две взаимно перпендикулярные оси (рис. 16.2). Это означает, что любую волну (поляризованную и неполяризованную) можно представить как суперпозицию двух линейно-

поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях волн: $\vec{E}(t) = \vec{E}_x(t) + \vec{E}_y(t)$. Но в поляризованной волне обе составляющие $\vec{E}_x(t)$ и $\vec{E}_y(t)$ когерентны, а в неполяризованной – некогерентны, т. е. в первом случае разность фаз между $\vec{E}_x(t)$ и $\vec{E}_y(t)$ постоянна, а во втором она является случайной функцией времени.

16.2. Явление двойного лучепреломления. Закон Малюса. Закон Брюстера

Все прозрачные кристаллы (кроме кристаллов кубической системы, которые оптически изотропны) при падении на них света обнаруживают двойное лучепреломление. Это явление объясняется особенностями распространения света в анизотропных средах.

Если, например, на толстый кристалл исландского шпата направить узкий пучок света, из кристалла выйдут два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу и падающему лучу, (рис. 16.3). Двойное лучепреломление наблюдается в том случае, когда первичный луч падает на кристалл нормально (рис. 16.4). Вторичный луч, сохраняющий направление первичного называется обыкновенным,

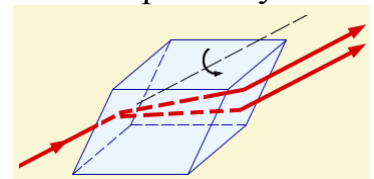


Рис. 16.3

несохраняющим – необыкновенным.

Вышедшие из кристалла лучи являются плоскополяризованными во взаимно ортогональных направлениях, как показано на рис. 16.4. Неодинаковое поведение обыкновенного и необыкновенного лучей связано с их различной поляризацией.

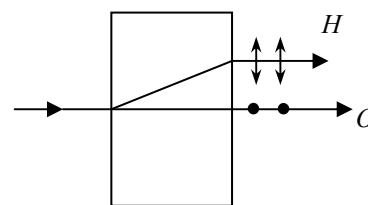


Рис. 16.4

Было обнаружено, что все двоякопреломляющие кристаллы в той или иной степени поглощают свет. Поглощение в кристаллах анизотропно: коэффициент поглощения зависит от ориентации электрического вектора световой волны, то есть не одинаков для обыкновенного и необыкновенного лучей и зависит от направления распространения света в кристалле. Это явление называется *дихроизмом*.

Примерами сильно дихроичного естественного кристалла являются:

1) турмалин (пластинка толщиной в 1 мм полностью поглощает обыкновенный луч, так что свет, проходящий сквозь нее оказывается линейно поляризованным);

2) кристаллы герпатита, которые поглощают обыкновенный луч при толщине порядка 0,1 мм.

Рассмотрим прохождение естественного света через две последовательно расположенных пластинки турмалина Π_1 и Π_2 , плоскости пропускания которых повернуты друг относительно друга на некоторый угол φ (рис. 16.5). Первая пластинка играет роль поляризатора. Она превращает естественный свет в линейно-поляризованный с интенсивностью $I_1 = \frac{I_0}{2}$. Вторая пластинка служит для анализа падающего на нее света. Интенсивность линейно-поляризованной волны на выходе второй пластинки будет определяться из закона Малюса:

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{I_0}{2} \cos^2 \varphi.$$

Поляризованный свет можно получить при отражении естественного света от границы раздела двух диэлектриков. При падении естественного света под углом Брюстера

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Б}} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 , n_2 – показатели преломления диэлектрических сред, отраженный свет будет полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения волны.

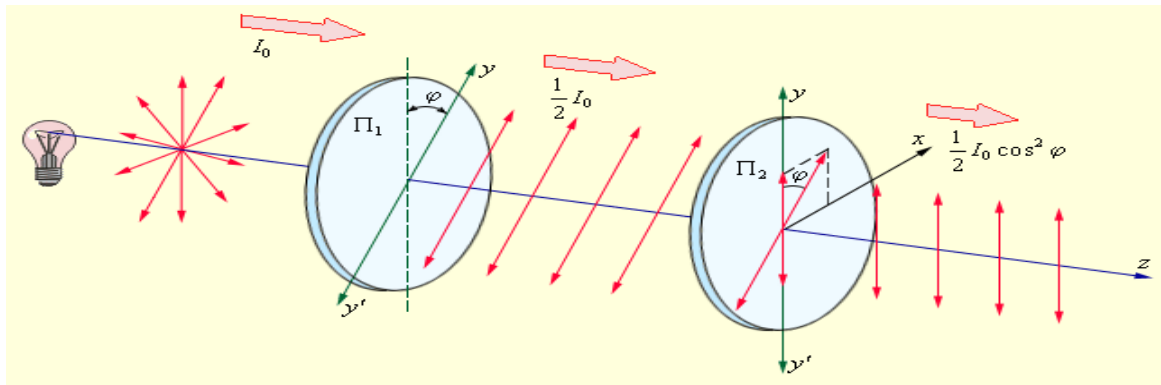


Рис. 16.5

16.3. Вращение плоскости поляризации

При прохождении плоско-поляризованного света через некоторые вещества наблюдается вращение плоскости поляризации световой волны. Такие вещества называются *оптически активными*. К их числу относятся кристаллические вещества (например, кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты и др.)

Угол поворота φ плоскости поляризации оптически активными веществами определяется соотношениями:

а) в твердых телах

$$\varphi = \alpha d,$$

где α – постоянная вращения; d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) в чистых жидкостях

$$\varphi = [\alpha] \rho d,$$

где $[\alpha]$ – удельное вращение, ρ – плотность жидкости;

в) в растворах

$$\varphi = [\alpha] C d,$$

где C – концентрация оптически активного вещества в растворе.

Постоянная вращения зависит от длины волны (дисперсия вращательной способности).

16.4. Примеры решения задач

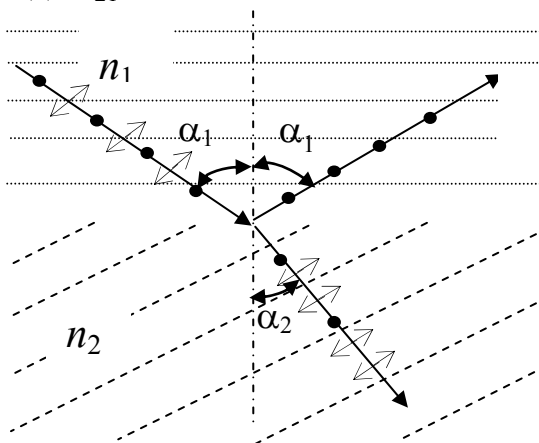
1. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим пучком. Определить показатель преломления жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

Дано
 $\varphi = 97^\circ$;
 $n_2 = 1,5$
 $n_1 = ?$

Решение
 Согласно закону Брюстера, свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Б}} = n_{21},$$

где n_{21} – относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

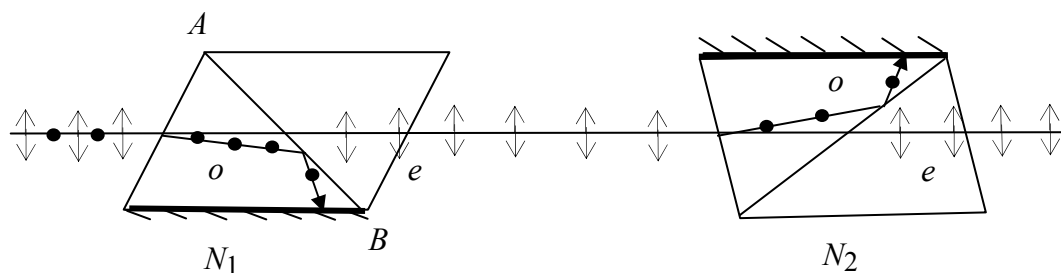


Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления этих сред. Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha_{\text{Б}} = n_2/n_1$. Согласно условию задачи, отраженный луч повернут на угол φ относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то $\alpha_{\text{Б}} = \varphi/2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi/2) = n_2/n_1$, откуда $n_1 = n_2/\operatorname{tg}(\varphi/2)$. Сделав подстановку численных значений, получаем $n_1 = 1,33$.

2. На систему, состоящую из двух николей N_1 и N_2 , расположенных так, что угол α между их плоскостями пропускания равен 60° , падает естественный свет. Определить: а) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николю N_1 ; б) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через оба николя? При прохождении каждого из николей потери на отражение и поглощение света составляют 5%.

Дано
 $\alpha = 60^\circ$;
 $k = 0,05$
 $I_1 = ?$;
 $I_2 = ?$

Решение
 Николь, или призма Николя, является поляризатором, представляющим собой призму из исландского шпата, разрезанную по диагонали и склеенную канадским бальзамом, показатель преломления которого лежит между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле.



Пучок естественного света, падая на грань николя N_1 , разделяется вслед-

ствие двойного лучепреломления на две волны: обыкновенную (o) и необыкновенную (e). Эти волны поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяются внутри кристалла в разных направлениях и с разными скоростями. Вектор напряженности электрического поля в необыкновенном луче совершает колебания в плоскости рисунка (плоскость главного сечения кристалла). Плоскость, в которой совершает колебания вектор напряженности электрического поля в обыкновенном луче, перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный луч вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный луч проходит через николю. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе николя. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николю N_1 , равна $I_1 = \frac{1}{2} I_0(1 - k)$, где $k = 0,05$ – относительная потеря интенсивности света в николе; I_0 – интенсивность естественного света, падающего на николю N_1 .

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{\frac{1}{2} I_0(1 - k)} = \frac{2}{1 - k}. \quad (1)$$

Подставив численные значения, найдем $I_0/I_1 = 2,1$. Таким образом, интенсивность света при прохождении через николю N_1 уменьшается в 2,1 раза.

Пучок плоско-поляризованного света интенсивности I_1 падает на николю N_2 и также разделяется в кристалле на обыкновенный и необыкновенный лучи. Обыкновенный луч полностью поглощается в николе, а интенсивность необыкновенного луча света, вышедшего из николя, определяется законом Малюса (без учета поглощения в этом николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где α – угол между плоскостями пропускания николей N_1 и N_2 .

Учитывая потери интенсивности во втором николе, получим

$$I_2 = I_1(1 - k) \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего через систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1 - k) \cos^2 \alpha}.$$

Заменив I_0/I_1 его выражением по формуле (1), получим

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставив данные, произведем вычисления:

$$I_0/I_2 = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

3. Пучок частично-поляризованного света пропускают через николю. Пер-

воначально николю установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При повороте николя на угол $\varphi = 60^\circ$ интенсивность пропускаемого им света уменьшилась в $k = 2$ раза. Определить отношение I_e/I_n – интенсивностей естественного и линейно-поляризованного света, составляющих данный частично-поляризованный свет, а также степень поляризации P пучка света.

Дано

$\varphi = 60^\circ$;
 $k = 2$

$I_e/I_n = ?$
 $P = ?$

Решение

Отношение интенсивности I_e естественного света к интенсивности I_n поляризованного света найдем из следующих соображений. При первоначальном положении николя он полностью пропустит линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света.

Общая интенсивность пропущенного при этом света равна $I_1 = I_n + \frac{1}{2}I_e$. При втором положении николя интенсивность пропущенного поляризованного света определится по закону Малюса, а интенсивность естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на николю. Общая интенсивность во втором случае

$$I_2 = I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}I_e.$$

В соответствии с условием задачи $I_1 = kI_2$, или

$$I_n + \frac{1}{2}I_e = k(I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}I_e).$$

Подставив сюда значение угла φ , k и произведя вычисления, получим

$$I_e/I_n = 1 \text{ или } I_e = I_n,$$

то есть интенсивности естественного и поляризованного света в заданном пучке равны между собой.

Степень поляризации частично-поляризованного света определяется соотношением

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}), \quad (1)$$

где $I_{\max} = I_n + \frac{1}{2}I_e = \frac{3}{2}I_n$, $I_{\min} = \frac{1}{2}I_e = \frac{1}{2}I_n$.

Подставив найденные выражения I_{\max} и I_{\min} в формулу (1), получим

$$P = \frac{\frac{3}{2}I_n - \frac{1}{2}I_n}{\frac{3}{2}I_n + \frac{1}{2}I_n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, степень поляризации пучка света $P = 1/2$.

4. При падении естественного света на поляризатор проходит $\eta_1 = 30\%$ светового потока, а через два таких поляризатора проходит $\eta_2 = 13,5\%$ потока. Найти угол φ между плоскостями пропускания этих поляризаторов.

Дано

$\eta_1 = 30\%$;
 $\eta_2 = 13,5\%$
 $\varphi = ?$

Решение

В соответствии с рисунком предыдущей задачи введем обозначения: I_0 – интенсивность падающего естественного света, I_1 – интенсивность света, прошедшего через первый поляри-

затр, I_2 – интенсивность света после прохождения через второй поляризатор.

Если бы поляризаторы были идеальными, то при падении естественного света на первый поляризатор через него прошло бы 50% светового потока. Значение $\eta_1 = 30\%$ свидетельствует о наличии в поляризаторе потерь, связанных с отражением и поглощением. Введем коэффициент поглощения k .

Тогда интенсивность проходящего светового потока запишется в виде

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 k,$$

$$I_2 = I_1 k \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 k^2 \cos^2 \varphi.$$

Неизвестный коэффициент k определим из условия задачи $\eta_1 = 30\%$:

$$\eta_1 = \frac{I_1}{I_0} 100\%, \text{ или } 0,3 = \frac{\frac{1}{2} I_0 k}{I_0}, \text{ откуда } k=0,6.$$

Для нахождения угла φ воспользуемся вторым условием задачи $\eta_2 = 13,5\% = 0,135$, где

$$\eta_2 = \frac{I_2}{I_0},$$

$\eta_2 = \frac{\frac{1}{2} I_0 k^2 \cos^2 \varphi}{I_0}$, откуда получаем $\cos^2 \varphi = \frac{2\eta_2}{k^2}$. Подставив численные значения, получаем $\cos^2 \varphi = 0,75$. Угол $\varphi = 30^\circ$.

5. Плоско-поляризованный пучок света падает на поляроид и полностью им гасится ($I_1 = 0$). Когда на пути пучка поместили кварцевую пластинку, то интенсивность I_2 пучка после выхода из поляроида стала равна половине интенсивности пучка, падающего на поляроид. Определить минимальную толщину кварцевой пластины. Постоянная вращения кварца $\alpha = 48,9$ град/мм.

Дано

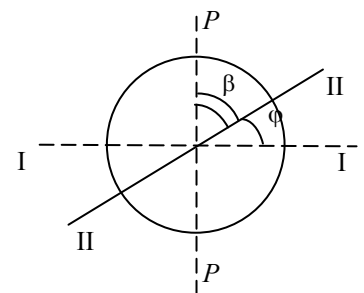
$$I_2 = 1/2 I_1;$$

$$\alpha = 48,9 \text{ град/мм}$$

$$d = ?$$

Решение

На рисунке введены обозначения: ($P-P$) – плоскость пропускания поляроида; ($I-I$) – первое положение плоскости поляризации света, ($II-II$) – второе положение



плоскости поляризации света.

Полное гашение света поляроидом означает, что плоскость пропускания поляроида ($P-P$) перпендикулярна плоскости поляризации света ($I-I$). Этот вывод вытекает из закона Малюса:

$$I_1 = I_0 \cos^2(\pi/2) = 0.$$

Введение кварцевой пластины приводит к повороту плоскости ($II-II$) поляризации света на угол φ , определяемый соотношением

$$\varphi = \alpha d, \tag{1}$$

где α – постоянная вращения кварца, d – толщина кварцевой пластины.

Зная, во сколько раз уменьшается интенсивность света после выхода из поляроида, определим угол β между плоскостью пропускания поляроида (P - P) и «новой» плоскостью поляризации света (Π - Π):

$$I = I_0 \cos^2 \beta.$$

Так как $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то $I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$, или

$$I = I_0 \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Подставив в (2) соотношение (1), получаем $I = I_0 \sin^2(\alpha d)$. Отсюда находим $\alpha d = \arcsin \sqrt{\frac{I}{I_0}}$. Толщина пластины определяется равенством

$$d = \frac{1}{\alpha} \arcsin \sqrt{\frac{I}{I_0}}.$$

Подставив численные значения и учтя, что 1 радиан $\approx 57^\circ$, получаем $d = \frac{1}{48,9 \text{ Град/мм}} \arcsin \sqrt{0,5} = 0,92 \text{ мм}$.

6. Пластина кварца толщиной $d_1 = 1 \text{ мм}$, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 20^\circ$. Определить, какова должна быть толщина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью погашен.

Дано

$\varphi_1 = 20^\circ$;
 $d_1 = 1 \text{ мм}$

$d_2 = ?$

Решение

Угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой определяется соотношением $\varphi = \alpha d$.

Пользуясь этой формулой, выразим искомую толщину d_2 пластинки:

$$d_2 = \varphi_2 / \alpha,$$

где φ_2 – угол поворота плоскости поляризации, при котором свет будет полностью погашен ($\varphi_2 = 90^\circ$). Постоянную вращения α для кварца найдем также из формулы $\varphi = \alpha d$, подставив в нее заданные в условии задачи значения d_1 и φ_1 :

$$\alpha = \varphi_1 / d_1.$$

Подставив выражение α в предыдущую формулу, получим

$$d_2 = (\varphi_2 / \varphi_1) d_1.$$

Численно $d_2 = 4,5 \text{ мм}$.

17. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

17.1. Тепловое излучение

Рассмотренные ранее явления (интерференция, дифракция, поляризация света) свидетельствуют о волновой природе света. В то же время закономерности теплового излучения, фотоэлектрического эффекта, эффекта Комптона можно адекватно истолковать только на основе квантовых представлений о свете как о потоке дискретных частиц, несущих энергию, фотонов.

Излучение телами электромагнитных волн (свечение тел) может осуществляться за счет различных видов энергии. Самым распространенным является тепловое излучение, т.е. испускание электромагнитных волн за счет внутренней энергии тел. Все остальные виды свечения, возбуждаемые за счет любого вида энергии, кроме внутренней (тепловой), объединяются под общим названием «люминесценция».

В отличие от люминесценции, тепловое излучение может находиться в состоянии термодинамического равновесия с излучающими телами.

Если в замкнутую полость с зеркально отражающими стенками, из которой удален воздух, поместить несколько тел, нагретых до различных температур, то, как показывает опыт, такая система с течением времени приходит в состояние теплового равновесия, при котором все тела приобретают одинаковую температуру. Тела обмениваются энергией только путем испускания и поглощения лучистой энергии. В состоянии равновесия процессы испускания и поглощения энергии каждым телом в среднем компенсируют друг друга и в пространстве между телами плотность энергии излучения достигает определенного значения, зависящего только от установившейся температуры тел. Это излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с телами, имеющими определенную температуру, называется *равновесным* или *черным излучением*. Плотность энергии равновесного излучения и его спектральный состав зависят только от температуры.

Пусть одно из тел в полости обладает свойством поглощать всю падающую на его поверхность лучистую энергию любого спектрального состава. Такое тело называют *абсолютно черным*. Абсолютно черных тел в природе не бывает. Хорошей моделью такого тела является небольшое отверстие в замкнутой полости (рис. 17.1). Свет, падающий через отверстие внутрь полости, после многочисленных отражений будет практически полностью поглощен стенками, и отверстие снаружи будет казаться совершенно черным.

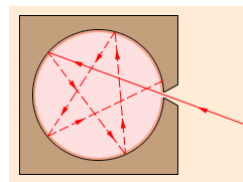


Рис. 17.1

Распределение энергии по длинам волн в излучении тел при заданной температуре T характеризуется излучательной способностью $r(\lambda, T)$, равной мощности излучения с единицы поверхности тела в единичном интервале длин волн. Произведение $r(\lambda, T)\Delta\lambda$ равно мощности излучения, испускаемого единичной площадкой поверхности по всем направлениям в интервале длин волн

$\Delta\lambda$. Аналогично можно ввести распределение энергии по частотам $r(\nu, T)$. Функцию $r(\lambda, T)$ или $r(\nu, T)$ часто называют *спектральной плотностью энергетической светимости*, а полный поток $R(T)$ излучения всех длин волн, равный

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} r(\nu, T) d\nu,$$

называют *энергетической светимостью тела*.

Поглощательной способностью $a(\nu, T)$ называется отношение поглощенной мощности излучения к падающей на единицу поверхности тела мощности, обусловленной электромагнитными волнами, частоты которых заключены в единичном интервале.

Кирхгоф установил, что отношение спектральной плотности энергетической светимости к поглощательной способности не зависит от природы тела и является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры (*закон Кирхгофа*):

$$\frac{r(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T).$$

Для абсолютно черного тела $a(\nu, T) = 1$, тогда $r(\nu, T) = f(\nu, T)$, т.е. универсальная функция Кирхгофа является спектральной плотностью энергетической светимости абсолютно черного тела.

Й. Стефаном и А. Больцманом было установлено, что энергетическая светимость $R(T)$ абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры T (*закон Стефана – Больцмана*):

$$R(T) = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ – постоянная Стефана-Больцмана.

Экспериментальные измерения спектрального распределения излучения абсолютно черного тела показали, что при каждом значении температуры T зависимость $r(\lambda, T)$ имеет ярко выраженный максимум (рис. 17.2). С увеличением температуры максимум смещается в область коротких длин волн, причем произведение температуры T на длину волны λ_m , соответствующую максимуму, остается постоянным:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина.

Это соотношение, полученное Вином, выражает так называемый *закон смещения Вина*: длина волны

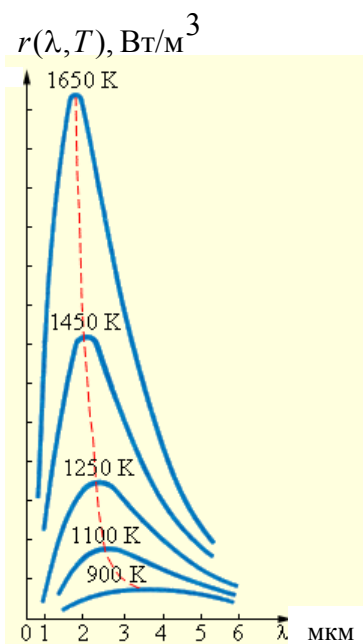


Рис.17.2

λ_m , на которую приходится максимум излучательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре T .

Успехи термодинамики, позволившие теоретически вывести законы Стефана–Больцмана и Вина, вселяли надежду, что из термодинамических соображений удастся получить всю кривую спектрального распределения излучения черного тела $r(\lambda, T)$. В 1900 году эту проблему пытался решить знаменитый английский физик Д. Релей, который в основу своих рассуждений положил теорему классической статистической физики о равномерном распределении энергии по степеням свободы в состоянии термодинамического равновесия. Эта теорема была применена Релеем к равновесному излучению в полости. Несколько позже эту идею подробно развил Джинс. Таким путем удалось получить зависимость излучательной способности абсолютно черного тела от длины волны λ и температуры T :

$$r(\lambda, T) = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана.

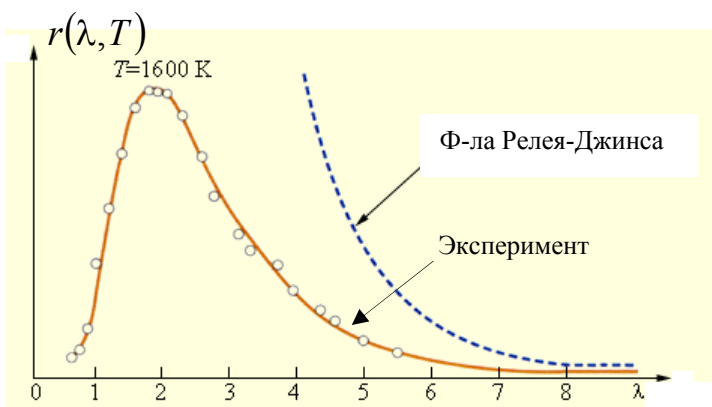


Рис. 17.3

Это соотношение называют *формулой Релея–Джинса*. Она согласуется с экспериментальными данными только в области достаточно длинных волн (рис. 17.3). Кроме того, из нее следует абсурдный вывод о том, что энергетическая светимость $R(T)$ абсолютно черного тела должна обращаться в бесконечность, а, следовательно, равновесие между

нагретым телом и излучением в замкнутой полости может установиться только при абсолютном нуле температуры.

Таким образом, безупречный с точки зрения классической физики вывод приводит к формуле, которая находится в резком противоречии с опытом. Стало ясно, что решить задачу о спектральном распределении излучения абсолютно черного тела в рамках существующих теорий невозможно. Эта задача была успешно решена М. Планком на основе новой идеи, чуждой классической физике.

М. Планк предположил, что в состоянии равновесия распределение колебаний по значениям энергии должно подчиняться закону Больцмана, а не закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Кроме этого, он сделал предположение о том, что электромагнитная энергия излучается и поглощается телами не непрерывно, как это предполагалось в классической физике, а дискретными порциями, равными целому числу элементарных порций – квантов энергии ε :

$$\varepsilon = h\nu,$$

где $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

При этих условиях испускательная способность абсолютно черного тела оказалась равной:

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \text{ или } r(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Эта формула Планка, результаты расчета испускательной способности по которой хорошо согласуются с экспериментальными данными во всем диапазоне частот. Данная формула строго описывает равновесное тепловое излучение.

17.2. Фотоэлектрический эффект. Фотон

Внешний фотоэффект состоит в вырывании электронов с поверхности металлов под действием падающего на них электромагнитного излучения (света).

Схема экспериментальной установки для исследования фотоэффекта изображена на рис. 17.4.

В экспериментах использовался стеклянный вакуумный баллон с двумя металлическими электродами, поверхность которых была тщательно очищена. К электродам прикладывалось некоторое напряжение U , полярность которого можно было изменять с помощью двойного ключа. Один из электродов (катод K) через кварцевое окошко освещался монохроматическим светом некоторой длины волны λ , и при неизменном световом потоке снималась зависимость силы фототока I от приложенного напряжения. На рис. 17.5 изображены типичные кривые такой зависимости, полученные при двух значениях интенсивности светового потока, падающего на катод.

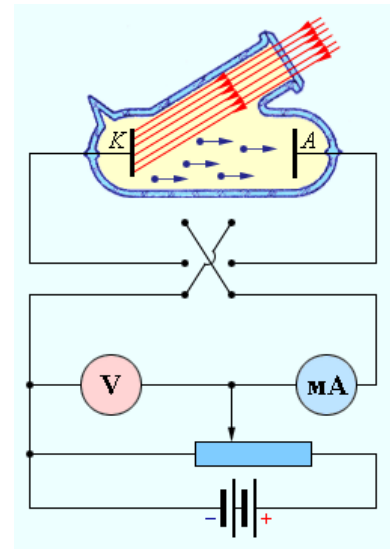


Рис. 17.4

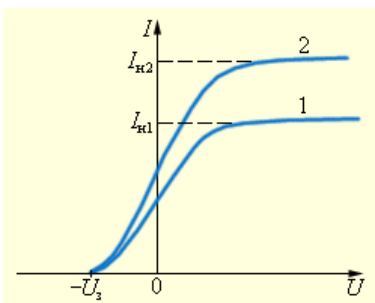


Рис. 17.5

Кривые показывают, что при достаточно больших положительных напряжениях на аноде A фототок достигает насыщения, так как все электроны, вырванные светом из катода, достигают анода. Тщательные измерения показали, что ток насыщения I_n прямо пропорционален интенсивности падающего света.

Когда напряжение на аноде отрицательно, электрическое поле между катодом и анодом тормозит электроны. Анода могут достичь только те электроны, кинетическая энергия которых превышает $|eU|$, где e – величина заряда электрона. Если напряжение на аноде меньше, чем $-U_s$, фототок

прекращается. Измеряя U_3 , можно определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов:

$$\frac{mV_{\max}^2}{2} = eU_3.$$

Экспериментально были установлены следующие основные законы фотоэффекта:

1. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с увеличением частоты света ν и не зависит от его интенсивности.
2. Для каждого вещества существует так называемая «красная граница» фотоэффекта, т. е. наименьшая частота ν_0 , при которой еще возможен внешний фотоэффект.
3. При фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырванных из катода за 1 с, прямо пропорционально интенсивности света.
4. Фотоэффект практически безынерционен, фототок возникает мгновенно после начала освещения катода при условии, что частота света $\nu > \nu_0$.

Теоретическое объяснение наблюдаемых закономерностей фотоэффекта было дано А. Эйнштейном на основе гипотезы М. Планка о том, что свет излучается и поглощается определенными порциями, причем энергия каждой такой порции определяется формулой $\varepsilon = h\nu$, где h – постоянная Планка. Эйнштейн пришел к выводу, что свет распространяется в виде дискретных частиц – квантов, впоследствии названных фотонами.

При взаимодействии со связанным электроном вещества фотон передает всю свою энергию $h\nu$ электрону (абсолютно неупругое соударение частиц). Часть полученной энергии электрон затрачивает на совершение работы выхода A (преодоление потенциального барьера на границе металл–вакуум). Работа выхода зависит от материала катода. Остальная часть полученной энергии – это кинетическая энергия, с которой электрон покидает поверхность катода. Согласно теории Эйнштейна,

$$h\nu = A + \left(\frac{mV^2}{2} \right)_{\max}.$$

Из этой формулы следует, что для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия:

$$h\nu \geq A, \quad \nu \geq \nu_0 = \frac{A}{h},$$

где ν_0 – красная граница фотоэффекта. При этом энергии фотона хватает только на совершение работы выхода.

С помощью уравнения Эйнштейна можно объяснить все закономерности внешнего фотоэффекта. Из уравнения Эйнштейна следуют линейная зависимость максимальной кинетической энергии от частоты и независимость от ин-

тенсивности света, существование красной границы. Общее число фотоэлектронов, покидающих за 1 с поверхность катода, должно быть пропорционально числу фотонов, падающих за то же время на поверхность. Из этого следует, что ток насыщения должен быть прямо пропорционален интенсивности светового потока.

17.3. Эффект Комптона

Концепция фотонов, предложенная А. Эйнштейном в 1905 г. для объяснения фотоэффекта, получила экспериментальное подтверждение в опытах американского физика А. Комптона (1922 г.). Комpton исследовал упругое рассеяние коротковолнового рентгеновского излучения с длиной волны λ_0 на свободных (слабо связанных с атомами) электронах вещества. Опыт показал, что в рассеянном излучении наряду со спектральной линией с длиной волны λ_0 наблюдается также спектральная линия с большей длиной волны λ . Величина $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ оказалась за-

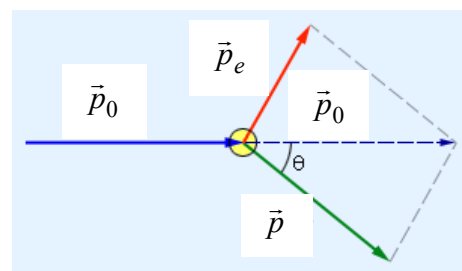


Рис. 17.6

висящей только от угла рассеяния θ . Соотношение интенсивностей смещенной (λ) и несмещенной (λ_0) линий зависит от рода рассеивающего вещества.

Эффект увеличения длины волны рассеянного излучения, названный впоследствии эффектом Комптона, не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны излучения не должна изменяться при рассеянии. Согласно волновой теории, электрон под действием периодического поля световой волны совершает вынужденные колебания на частоте волны и поэтому излучает рассеянные волны той же частоты.

Объяснение эффекта Комптона было дано в 1923 году А. Комптоном и П. Дебаем на основе квантовых представлений о природе излучения. Если принять, что излучение представляет собой поток фотонов, то эффект Комптона есть результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. У легких атомов рассеивающих веществ электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому их можно считать свободными. В процессе столкновения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами сохранения.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц – налетающего фотона, обладающего энергией $\varepsilon_0 = h\nu_0$ и импульсом $p_0 = \frac{h\nu_0}{c}$, с покоящимся электроном, энергия покоя которого равна $E_0 = m_0c^2$ (рис. 17.6). Фотон, столкнувшись с электроном, изменяет направление движения (рассеивается). Импульс фотона после рассеяния становится равным $p = \frac{h\nu}{c}$, а его энергия $\varepsilon = h\nu$. Энергия электрона после столкновения в соответствии с релятивистской формулой ста-

новится равной $E = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$, где p_e – приобретенный импульс электрона. Закон сохранения энергии записывается в виде

$$h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Закон сохранения импульса $\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e$ можно переписать в скалярной форме, если воспользоваться теоремой косинусов (рис. 17.6):

$$p_e^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu_0\nu}{c^2}\cos\theta.$$

Из двух соотношений, выражающих законы сохранения энергии и импульса, после несложных преобразований и исключения величины p_e можно получить

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = 2\frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Не зависящая от свойств рассеивающего вещества величина $\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \cdot 10^{-3}$ нм называется комptonовской длиной волны электрона.

17.4. Давление света

Из наличия у фотона импульса вытекает, что свет, падающий на поверхность тела, действует на это тело с какой – то силой.

Сила светового давления F на поверхность равна произведению светового давления P на площадь S поверхности:

$$F = P S.$$

Световое давление – это давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность, которое выражается соотношением

$$P = \frac{E_e}{c}(1+r) \text{ или } P = w(1+r),$$

где E_e – плотность потока энергии излучения, падающего на поверхность (энергетическая освещенность поверхности), c – скорость света в вакууме, $w = \frac{E_e}{c}$ – объемная плотность энергии излучения, r – коэффициент отражения.

Если свет падает на поверхность под углом α к нормали, то давление, производимое светом на поверхность, выражается соотношением

$$P = \frac{E_e}{c}(1+r)\cos\alpha.$$

Для идеально отражающей (зеркальной) поверхности $r = 1$, для идеально

поглощающей поверхности (абсолютно черное тело) $r = 0$.

Энергетическая освещенность поверхности E_e – это величина, численно равная мощности излучения, падающей на единичную площадку:

$$E_e = \frac{\Phi_e}{S},$$

где Φ_e – поток энергии (мощность) излучения, падающего на поверхность S .

17.5. Примеры решения задач

1. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны $\lambda_{\max} = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить:

а) энергетическую светимость Солнца $R(T)$, б) поток мощности, излучаемый Солнцем Φ_e , в) массу m электромагнитных волн, излучаемых Солнцем за время $t = 1$ с.

Дано

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= 500 \text{ нм}; \\ m_C &= 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}; \\ R_C &= 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}; \\ t &= 1 \text{ с} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_e &= ?, \\ \Phi_e &= ?, \\ m &= ? \end{aligned}$$

Решение

а. Энергетическая светимость черного тела выражается формулой Стефана–Больцмана $R(T) = \sigma T^4$.

Температура излучающей поверхности может быть

определена из закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Выразив отсюда температуру T и подставив в закон Стефана–Больцмана, получим $R(T) = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4$. Произведя вычисления, найдем $R(T) = 6,4 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$.

б. Поток мощности Φ_e , излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости тела на площадь его поверхности:

$$\Phi_e = R(T) S = R(T) 4\pi r^2,$$

где $r = 7 \cdot 10^8$ м – радиус Солнца.

$$\Phi_e = 4 \cdot 3,14 \cdot (7 \cdot 10^8)^2 \cdot 6,4 \cdot 10^7 = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

в. Массу электромагнитных волн всех длин, излучаемых Солнцем за время $t = 1$ с, определим, применив закон взаимосвязи массы и энергии:

$$E = m c^2.$$

С другой стороны, энергия излучаемых электромагнитных волн равна произведению потока энергии на время излучения:

$$E = \Phi_e t.$$

Приравняв выражения для энергии, получим, что

$$m = \frac{\Phi_e t}{c^2}.$$

Подставив числовые значения, получим $m = 4 \cdot 10^9$ кг.

2. Определить максимальную кинетическую энергию и скорость фотоэлектронов, выбитых с поверхности натрия светом с длиной волны λ для двух случаев: а) $\lambda_1 = 410$ нм, б) $\lambda_2 = 550$ нм.

Дано	Решение
$A_{\text{ВЫХ}} = 2,28 \text{ эВ};$ $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$ $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг};$ $\lambda_1 = 410 \text{ нм};$ $\lambda_2 = 550 \text{ нм};$ $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	<p>а. Длина волны падающего света $\lambda_1 = 410$ нм. Энергия фотона вычисляется по формуле</p> $h\nu = \frac{hc}{\lambda_1}.$ <p>Подставив числовые значения, получим $h\nu = 4,85 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 3,03 \text{ эВ}.$</p> <p>Из уравнения Эйнштейна находим</p> $E_{\text{кин}} = \frac{mV_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{ВЫХ}} = 3,03 \text{ эВ} - 2,28 \text{ эВ} = 0,75 \text{ эВ}.$
$E_{\text{кин}} = ?,$ $V = ?$	

Полученная энергия фотоэлектрона (0,75 эВ) много меньше энергии покоя электрона (0,5 МэВ). Следовательно, для данного случая максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона может быть вычислена по классической формуле $E_{\text{кин}} = \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}$. $E_{\text{кин}} = 0,75 \text{ эВ} = 1,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$

Скорость фотоэлектрона, выбитого с поверхности натрия, найдем по формуле $V = \sqrt{\frac{2E_{\text{кин}}}{m_e}}$. Выполнив вычисления, получим $V = 5,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$

б. Длина волны падающего света $\lambda_2 = 550$ нм. Энергия падающего фотона

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_2}.$$

Подставив числовые значения, получим $h\nu = 3,61 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,26 \text{ эВ}.$ Полученное значение меньше работы выхода фотоэлектрона с поверхности натрия, поэтому фотоэффект при падении света с $\lambda_2 = 550$ нм наблюдаться не будет.

3. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна $\lambda_0 = 550$ нм. Определить: а) работу выхода $A_{\text{ВЫХ}}$ фотоэлектронов из этого металла; б) максимальную скорость фотоэлектронов, вырывааемых с поверхности металла светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм.

Дано	Решение
$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$ $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг};$ $\lambda_0 = 550 \text{ нм};$ $\lambda = 400 \text{ нм};$ $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	<p>а. Из определения «красной границы» фотоэффекта</p> $v_0 = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{h} \text{ или } \lambda_0 = \frac{c}{v_0} = \frac{hc}{A_{\text{ВЫХ}}}$ <p>получаем формулу для расчета работы выхода</p> $A_{\text{ВЫХ}} = \frac{hc}{\lambda_0}.$
$A_{\text{ВЫХ}} = ?,$ $V = ?$	

Подставив числовые значения, получим $A_{\text{ВЫХ}} = 3,61 \cdot 10^{-19}$ Дж = 2,26 эВ.

б. Для вычисления максимальной скорости фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла светом, воспользуемся уравнением Эйнштейна в виде

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{m_e V_{\text{max}}^2}{2}.$$

Из него получим

$$V = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)}.$$

Выполнив вычисления, получим $V = 5,45 \cdot 10^5$ м/с.

4. Задерживающее напряжение U_3 для платиновой пластинки составляет 3,7 В. При тех же условиях для другой пластинки задерживающее напряжение равно 5,3 В. Определить работу выхода фотоэлектронов из второй пластинки, если для платины $A_{\text{ВЫХ1}} = 6,3$ эВ.

Дано

$$\begin{aligned} A_{\text{ВЫХ1}} &= 6,3 \text{ эВ}; \\ e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}; \\ U_{31} &= 3,7 \text{ В}; \\ U_{32} &= 5,3 \text{ В}; \\ 1 \text{ эВ} &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \end{aligned}$$

$$A_{\text{ВЫХ2}} = ?$$

Решение

Зная задерживающее напряжение U_3 , можно определить максимальное значение кинетической энергии фотоэлектронов:

$$eU_3 = \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}.$$

Уравнение Эйнштейна тогда примет вид

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}} + eU_3.$$

Запишем его для каждой пластинки:

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ1}} + eU_{31},$$

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ2}} + eU_{32}.$$

Выражая из них работу выхода фотоэлектронов из второй пластинки $A_{\text{ВЫХ2}}$, получим

$$A_{\text{ВЫХ2}} = A_{\text{ВЫХ1}} + e(U_{31} - U_{32}).$$

Подставив числовые значения, найдем $A_{\text{ВЫХ2}} = 4,7$ эВ.

5. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $P = 10$ мкПа. Определить:

а) концентрацию n фотонов в потоке; б) число фотонов N , падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с .

Дано

$\lambda = 500 \text{ нм};$
 $P = 10 \text{ мкПа};$
 $S = 1 \text{ м}^2;$
 $t = 1 \text{ с}$

$n = ?,$
 $N = ?$

Решение

a. Концентрация n фотонов в пучке может быть найдена как

$$n = \frac{w}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ – энергия одного фотона; w – объемная плотность энергии излучения. Из формулы $P = w(1+r)$, определяющей давление света, выражаем

$$w = \frac{P}{1+r}.$$

Тогда искомая концентрация фотонов равна

$$n = \frac{P\lambda}{(1+r)hc}.$$

Коэффициент отражения r для зачерненной поверхности принимаем равным нулю. Подставив числовые значения, получим $n = 2,52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$.

б. Число фотонов N , падающих на поверхность единичной площади в единицу времени, равно

$$N = \frac{E_e}{\varepsilon},$$

где $E_e = wc$. Подставив соответствующие выражения, имеем

$$N = \frac{P\lambda}{(1+r)h} = nc.$$

Выполнив вычисления, получим $N = 7,56 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимова, Т.И.** Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2008.
2. **Детлаф, А.А.** Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2005.
3. **Савельев, И.В.** Курс общей физики: в 3 т. Т. 1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008.
4. **Савельев, И.В.** Курс общей физики: в 3 т. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2007.
5. **Иродов, И.Е.** Механика. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2007.
6. **Иродов, И.Е.** Физика макросистем. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
7. **Иродов, И.Е.** Электромагнетизм. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
8. **Иродов, И.Е.** Волновые процессы. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
9. **Иродов, И.Е.** Квантовая физика. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
10. **Калашников, С.Г.** Электричество / С.Г. Калашников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Астрономические величины

Радиус Земли	$R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$M_3 = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$R_c = 6,95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$M_c = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$R_{л} = 1,74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$M_{л} = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$r_3 = 1,49 \cdot 10^{11}$ м
Средний радиус лунной орбиты	$r_{л} = 3,84 \cdot 10^8$ м

2. Физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная $\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$
Ускорение свободного падения	$g = 9,81$ м/с ²
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Постоянная Больцмана	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31$ Дж/(моль · К)
Стандартный объем моля газа (при $t^0 = 0^0\text{C}$ и $p = 1,01 \cdot 10^5$ Па) $\text{м}^3 / \text{моль}$	$V_m = 22,4 \cdot 10^{-3}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд (величина заряда электрона)	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Связь между скоростью света в вакууме и постоянными ϵ_0 и μ_0	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
Постоянная Планка	$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Вина	$b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² · К ⁴)
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м
Электронвольт	$1\text{эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж

3. Молярные массы

Азот N ₂	28 · 10 ⁻³ кг/моль
Кислород O ₂	32 · 10 ⁻³ кг/моль
Углекислый газ CO ₂	44 · 10 ⁻³ кг/моль
Воздух	29 · 10 ⁻³ кг/моль

4. Формулы алгебры и тригонометрии

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Некоторые тригонометрические формулы:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

5. Плотность твердых тел

Твердое тело	Плотность, кг/м ³	Твердое тело	Плотность, кг/м ³
Алюминий	2,70 · 10 ³	Медь	8,93 · 10 ³
Барий	3,50 · 10 ³	Никель	8,90 · 10 ³
Ванадий	6,02 · 10 ³	Свинец	11,3 · 10 ³
Висмут	9,80 · 10 ³	Серебро	10,5 · 10 ³
Железо	7,88 · 10 ³	Цезий	1,90 · 10 ³
Литий	0,53 · 10 ³	Цинк	7,15 · 10 ³

6. Плотность жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м ³	Жидкость	Плотность, кг/м ³
Вода (при 4 ⁰ С)	1,00 · 10 ³	Сероуглерод	1,26 · 10 ³
Глицерин	1,26 · 10 ³	Спирт	0,80 · 10 ³
Ртуть	13,6 · 10 ³		

7. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность, кг/м ³	Газ	Плотность, кг/м ³
Водород	0,09	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43

8. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Вода	81	Парафин	2,0

Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0
------------------------	-----	--------	-----

9. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$

10. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

11. Работа выхода электрона

Металл	A , Дж	A , эВ
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

12. Масса и энергия некоторых частиц

Частица	m_0		F_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733

13. Некоторые десятичные приставки к названиям единиц

Г	гига (10^9)
М	мега (10^6)
к	кило (10^3)
м	милли (10^{-3})
мк	микро (10^{-6})
н	нано (10^{-9})
п	пико (10^{-12})

14. Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arctctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^{nx}	ne^{nx}	\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
a^x	$a^x \ln a$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$		

15. Таблица интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

**Вдовиченко Ирина Анатольевна
Кожевникова Татьяна Вадимовна
Кузикова Наталья Игоревна
Назаров Андрей Викторович
Новоселова Наталия Анатольевна
Попов Евгений Александрович
Прончатова-Рубцова Татьяна Олеговна
Рудоясова Людмила Григорьевна
Шишков Глеб Иванович**

ФИЗИКА

Издание второе, переработанное и дополненное

**Научный редактор Г.И. Шишков
Редактор Е.В. Комарова
Компьютерный набор и верстка: Н.А. Новоселова, Н.И. Кузикова**

Подписано в печать 27.06.2012г. Формат 60x84 ¹/₁₆ .
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0
Уч.-изд. л. 11,0 Тираж 200 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24.