ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Расчетные задания по высшей математике

Нижний Новгород 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Р.Е. Алексеева

кафедра «Высшая математика»

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Методические указания для студентов Института промышленных технологий машиностроения всех специальностей и всех форм обучения

Нижний Новгород 2008

Составители: А. В. Владыкин, М. Е. Елисеев, О. В. Лещева, С. В. Лещева

УДК 517.2

Элементы линейной алгебры и аналитической. геометрии. Расчетные задания по высшей математике: метод. указ. для студентов ИПТМ всех специальностей и всех форм обучения / Нижегород. гос. техн. ун-т; сост.: А. В. Владыкин, М. Е. Елисеев, О. В. Лещева, С. В. Лещева. Нижний Новгород, 2008 – 21 с.

Научный редактор В.М.Галкин
Редактор Э. Б. Абросимова

Подписано в печать 05.11.08. Формат 60 x 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 250 экз. Заказ 720.

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева.
Типография НГТУ. 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

Содержание

I. *Теоретические вопросы*

- Невырожденные системы линейных уравнений. Правило Крамера.
- Ранг матрицы и способы его вычисления.
- Теорема Кронекера-Капелли. Решение произвольных линейных систем.
- Скалярное произведение векторов. Длина вектора, угол между векторами, проекция вектора на ось.
- Векторное произведение векторов. Его свойства.
- Смешанное произведение. Условие компланарности трех векторов.
- Различные виды уравнений прямой и плоскости в пространстве.
- Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
- Расстояние от точки до прямой и плоскости.
- Эллипс, гипербола и парабола. Их канонические уравнения.
- Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
- Исследование формы поверхности методом сечений.
- Полярные координаты.

II. *Расчетные задания*

Задача 1. Проверить невырожденность системы линейных уравнений и решить их тремя способами: по формулам Крамера, матричным методом, методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5, \\ 3x_1-x_2+x_3=4, \\ x_1+x_2+x_3=6. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-1, \\ x_1-x_2+5x_3=9, \\ 2x_1+x_2-2x_3=3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=6, \\ x_1-x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1-7x_2+x_3=0. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4, \\ 2x_1-x_2-3x_3=5, \\ x_1+3x_2-x_3=-1. \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} 3x_1-3x_2+4x_3=7, \\ x_1+x_2-5x_3=-6, \\ 2x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 2x_1+4x_2+3x_3=3, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=13. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_2-x_3=-3. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=21, \\ 7x_1-x_2-3x_3=6. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_2-x_3=-3. \end{cases}$

1.11 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=11. \\ 3x_1-x_2+5x_3=16, \\ x_1+2x_2-4x_3=-7. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=4, \\ 5x_1+2x_2+13x_3=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3=0. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_2+3x_3=-6, \\ x_1-2x_2-x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=13. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 5x_1+8x_2-x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ x_1+2x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=2. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=8, \\ x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=2. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1-x_2=-1, \\ x_1-2x_2-x_3=-2, \\ x_2+x_3=-2. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_2+4x_3=-6, \\ x_1+x_2=1. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=-10, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=6, \\ x_1+3x_2-6x_3=12. \end{cases}$

1.21 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ 3x_1-2x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3=-6, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=-5, \\ x_1+x_2+x_3=-2. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 4x_1-x_2-3x_3=1, \\ 3x_1+6x_2+2x_3=4, \\ 2x_1+4x_2+x_3=4. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} 2x_1-x_2=0, \\ x_1+2x_2-x_3=-2, \\ x_2+x_3=-5. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2. + x_3 = 0. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2. + 3x_3 = 1. \end{cases}$

1.29 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_2. - x_3 = -1. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$

Задача 2. Исследовать систему и в случае совместности решить ее.

2.1 $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2. - 10x_3 = 0. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,. \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1,. \\ -5x_1 + x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2. - 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x_1 + x_3 + 0x_2 = 0, \\ -2x_1 + 6x_3 + 0x_2 = 0, \\ 2x_1 - 6x_3 + 0x_2 = 0. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ -5x_1 + x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 10x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 9x_1 + x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0, \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 0x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Задача 3. Найти $пр_{\vec b}\vec a$, если

3.1. $\vec a = 5\vec i - \vec j + 9\vec k,\ \ \vec b = 2\vec i + 3\vec j - 6\vec k$.

3.2. $\vec a = 5\vec i + \vec j + \vec k,\ \ \vec b = \vec i + \vec j + \vec k$

3.3. $\vec a = -5\vec i + \vec j - 9\vec k,\ \ \vec b = -2\vec i - \vec j + 6\vec k$.

3.4. $\vec a = -5\vec i - 2\vec j - 2\vec k, \vec b = -2\vec i - 3\vec j + 4\vec k$.

3.5. $\vec a = -\vec i - \vec j - \vec k,\ \ \vec b = \vec i - 2\vec j - 7\vec k$.

3.6. $\vec a = \vec i + \vec j + \vec k,\ \ \vec b = -4\vec i - 5\vec j$.

3.7. $\vec a = \vec i - 2\vec j - 2\vec k,\ \ \vec b = -3\vec i - 2\vec j - 4\vec k$.

3.8. $\vec a = 5\vec i + 3\vec j + \vec k,\ \ \vec b = 3\vec i + 3\vec j - \vec k$.

3.9. $\vec a = 5\vec i + 3\vec j + 4\vec k,\ \ \vec b = \vec i + 2\vec j - 6\vec k$.

3.10. $\vec a = -2\vec i - 2\vec j + \vec k,\ \ \vec b = -2\vec i - 7\vec k$.

3.11. $\vec a = -3\vec i - 2\vec k,\ \ \vec b = -3\vec i - 5\vec j + 4\vec k$.

3.12. $\vec a = -\vec i - 3\vec j - \vec k,\ \ \vec b = 7\vec i - \vec j + 7\vec k$.

3.13. $\vec a = 4\vec i - \vec j + \vec k,\ \ \vec b = -\vec i - 2\vec j$.

3.14. $\vec a = 3\vec i - 3\vec j - \vec k,\ \ \vec b = \vec j$.

3.15. $\vec a = \vec i - 4\vec j - 2\vec k, \vec b = 13\vec i + 10\vec j + 15\vec k$.

3.16. $\vec a = \vec i + 2\vec j + \vec k, \vec b = 6\vec i - 6\vec j + 13\vec k$.

3.17. $\vec a = \vec i - \vec j + 2\vec k,\ \ \vec b = \vec i + 2\vec j - 5\vec k$.

3.18. $\vec a = -\vec i - \vec j + 4\vec k,\ \ \vec b = 3\vec i - \vec j + 2\vec k$.

3.19. $\vec a = -5\vec i - \vec k,\ \ \vec b = 2\vec i + 3\vec k$.

3.20. $\vec a = 6\vec i + \vec k,\ \ \vec b = 3\vec i + 6\vec j - 4\vec k$.

3.21. $\vec a = -4\vec i + 4\vec j + \vec k,\ \ \vec b = 5\vec i + \vec j$.

3.22. $\vec a = 5\vec i - 9\vec j - 5\vec k,\ \ \vec b = 3\vec i - 4\vec j - 7\vec k$.

3.23. $\vec a = -2\vec i + 3\vec j - 8\vec k,\ \ \vec b = 3\vec i - \vec j + 4\vec k$.

3.24. $\vec a = 5\vec i,\ \ \vec b = \vec i - 2\vec j - 7\vec k$.

3.25. $\vec a = \vec j + \vec k,\ \ \vec b = -\vec i + 2\vec k$.

3.26. $\vec a = -\vec i + \vec j - \vec k,\ \ \vec b = -\vec i + \vec j + \vec k$.

3.27. $\vec a = -4\vec i + 2\vec j - \vec k,\ \ \vec b = \vec i - \vec j - \vec k$.

3.28. $\vec a = 6\vec i - 4\vec k,\ \ \vec b = 5\vec i + 7\vec j + 6\vec k$.

3.29. $\vec a = 2\vec i + 3\vec j - 6\vec k,\ \ \vec b = 5\vec i - \vec j + 9\vec k$.

3.30. $\vec a = 2\vec i + 3\vec j + 6\vec k,\ \ \vec b = 5\vec i - \vec j + 9\vec k$.

Задача 4. Вычислить векторное произведение.

4.1. $[\vec a - \vec b, \vec a + \vec b]$ если $\vec a = (2, 1, -1)$, $\vec b = (2, -3, -1)$.

4.2. $[2\vec a + \vec b, \vec b]$, если $\vec a = (2, 1, -1)$, $\vec b = (1, -1, 1)$.

4.3. $[2\vec a, \vec a - \vec b]$, если $\vec a = (2, 3, 4)$, $\vec b = (1, -1, -1)$.

4.4. $[-\vec a + 2\vec b, \vec a]$, если $\vec a = (3, 0, 1)$, $\vec b = (1, 2, 7)$.

4.5. $[\vec b - 2\vec a, \vec a]$, если $\vec a = (1, -1, 3)$, $\vec b = (1, -1, -4)$.

4.6. $[\vec a + \vec b, \vec b]$, если $\vec a = (2, 1, 1)$, $\vec b = (1, 1, 3)$.

4.7. $[\vec a + \vec b, \vec a]$, если $\vec a = (2, -10, 1)$, $\vec b = (1, 9, 2)$.

4.8. $[3\vec a + 2\vec b, \vec b]$, если $\vec a = (1, 1, 1)$, $\vec b = (3, 0, -1)$.

4.9. $[\vec a + \vec b, \vec a]$, если $\vec a = (2, -10, 1)$, $\vec b = (1, 9, 2)$.

4.10. $[\vec a, 2\vec a + \vec b]$, если $\vec a = (3, -4, 5)$, $\vec b = (1, 3, -4)$.

4.11. $[\vec a - \vec b, \vec b]$, если $\vec a = (2, 8, 5)$, $\vec b = (1, 5, -1)$.

4.12. $[\vec a - \vec b, \vec a]$, если $\vec a = (7, -5, -1)$, $\vec b = (1, 6, 1)$.

4.13. $[2\vec a - \vec b, \vec a]$, если $\vec a = (2, 5, 0)$, $\vec b = (1, 1, 1)$.

4.14. $[3\vec a + \vec b, \vec b]$, если $\vec a = (1, 1, -1)$, $\vec b = (2, -1, 1)$.

4.15. $[\vec a - 2\vec b, \vec a + \vec b]$, если $\vec a = (1, -3, -7)$, $\vec b = (2, 0, -1)$.

4.16. $[\vec a - 5\vec b, \vec a]$, если $\vec a = (1, -1, -1)$, $\vec b = (1, 1, -3)$.

4.17. $[\vec a - 5\vec b, \vec a]$, если $\vec a = (1, -1, -1)$, $\vec b = (1, 1\ -3)$.

4.18. $[\vec a - 3\vec b, \vec a]$, если $\vec a = (1, -1, -1)$, $\vec b = (2, 1, 1)$.

4.19. $[2\vec a - \vec b, \vec a]$, если $\vec a = (3, -1, -1)$, $\vec b = (2, 1, 4)$.

4.20. $\left[\vec{a}+\vec{b}\,, 2\vec{a}-\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(2,1,-4)$.

4.21. $\left[\vec{a}+2\vec{b}\,, \vec{a}-\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(2,1,1)$, $\vec{b}=(1,-1,-1)$.

4.22. $\left[\vec{b}+\vec{a}\,, \vec{a}-2\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$.

4.23. $\left[\vec{a}-3\vec{b}\,, \vec{a}\,\right]$, если $\vec{a}=(2,-3,1)$, $\vec{b}=(1,-1,1)$.

4.24. $\left[2\vec{a}+3\vec{b}\,, \vec{a}-\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(2,-1,-1)$, $\vec{b}=(1,2,1)$.

4.25. $\left[2\vec{a}-\vec{b}\,, \vec{b}+3\vec{a}\,\right]$, если $\vec{a}=(3,0,-4)$, $\vec{b}=(1,2,-7)$.

4.26. $\left[3\vec{b}-\vec{a}\,, \vec{a}-\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(2,-1,2)$, $\vec{b}=(0,0,1)$.

4.27. $\left[\vec{a}-\vec{b}\,, \vec{a}-2\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(5,-3,2)$, $\vec{b}=(0,1,-5)$.

4.28. $\left[\vec{a}-3\vec{b}\,, \vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(-1,3,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$.

4.29. $\left[\vec{b}\,, 2\vec{a}+\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(2,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,1)$.

4.30. $\left[\vec{a}+\vec{b}\,, \vec{a}-\vec{b}\,\right]$, если $\vec{a}=(1,1,3)$, $\vec{b}=(2,-3,-1)$.

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Требуется найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямой A_1A_4; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

5.1. $A_1(3,3,9)$, $A_2(6,9,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.

5.2. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,9,9)$, $A_4(6,4,8)$.

5.3. $A_1(2,4,3)$, $A_2(7,6,3)$, $A_3(4,9,3)$, $A_4(3,6,7)$.

5.4. $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.

5.5. $A_1(0,7,1)$, $A_2(4,1,5)$, $A_3(4,6,3)$, $A_4(3,9,8)$.

5.6. $A_1(5,5,4)$, $A_2(3,8,4)$, $A_3(3,5,10)$, $A_4(5,8,2)$.

5.7. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.

5.8. $A_1(7,5,3)$, $A_2(9,4,4)$, $A_3(4,5,7)$, $A_4(7,9,6)$.

5.9. $A_1(6,6,2)$, $A_2(5,4,7)$, $A_3(2,4,7)$, $A_4(7,3,0)$.

5.10. $A_1(1,-3,1)$, $A_2(-3,2,-3)$, $A_3(-3,-3,3)$, $A_4(-2,0,-4)$.

5.11. $A_1(-1,-1,6)$, $A_2(4,5,-2)$, $A_3(-1,3,0)$, $A_4(6,1,5)$.

5.12. $A_1(1,1,1)$, $A_2(3,4,0)$, $A_3(-1,5,6)$, $A_4(4,0,5)$.

5.13. $A_1(0,0,0)$, $A_2(5,2,0)$, $A_3(2,5,0)$, $A_4(1,2,4)$.

5.14. $A_1(7,1,2)$, $A_2(-5,3,-2)$, $A_3(3,3,5)$, $A_4(4,5,-1)$.

5.15. $A_1(-2,3,-2)$, $A_2(2,-3,2)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(1,5,5)$.

5.16. $A_1(3,1,1)$, $A_2(1,4,1)$, $A_3(1,1,7)$, $A_4(3,4,-1)$.

5.17. $A_1(4,-3,-2)$, $A_2(2,2,3)$, $A_3(2,-2,-3)$, $A_4(-1,-2,3)$.

5.18. $A_1(5,1,0)$, $A_2(7,0,1)$, $A_3(2,1,4)$, $A_4(5,5,3)$.

5.19. $A_1(4,2,-1)$, $A_2(3,0,4)$, $A_3(0,0,4)$, $A_4(5,-1,-3)$.

5.20. $A_1(0,0,2)$, $A_2(3,0,5)$, $A_3(1,1,0)$, $A_4(4,1,2)$.

5.21. $A_1(3,0,5)$, $A_2(0,0,2)$, $A_3(4,1,2)$, $A_4(1,1,0)$.

5.22. $A_1(1,1,0)$, $A_2(4,1,2)$, $A_3(0,0,2)$, $A_4(3,0,5)$.

5.23. $A_1(4,1,2)$, $A_2(1,1,0)$, $A_3(3,0,5)$, $A_4(0,0,2)$.

5.24. $A_1(0,0,0)$, $A_2(3,-2,1)$, $A_3(1,4,0)$, $A_4(5,2,3)$.

5.25. $A_1(3,1,0)$, $A_2(0,7,2)$, $A_3(-1,0,-5)$, $A_4(4,1,5)$.

5.26. $A_1(1,-1,1)$, $A_2(0,2,4)$, $A_3(1,3,3)$, $A_4(4,2,-3)$.

5.27. $A_1(1,-1,2)$, $A_2(2,1,1)$, $A_3(1,1,4)$, $A_4(0,0,0)$.

5.28. $A_1(1,-3,2)$, $A_2(5,1,-4)$, $A_3(2,0,3)$, $A_4(1,-5,2)$.

5.29. $A_1(3,5,3)$, $A_2(-2,11,-5)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(0,6,4)$.

5.30. $A_1(0,0,1)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(1,0,0)$, $A_4(3,2,1)$.

Задача 6. Построить на плоскости кривую, приведя ее уравнение к каноническому виду:

6.1. $x^2+8x+2y+20=0.$
6.2. $3x^2-4y^2+18x+15=0.$
6.3. $x^2+2y^2-2x+8y+7=0.$
6.4. $x^2+8x+y+15=0.$
6.5. $x^2+y^2+4x-10y+20=0.$
6.6. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0.$
6.7. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0.$
6.8. $9x^2-16y^2-5x-64y-127=0.$
6.9. $2x^2+8x-y+12=0.$
6.10. $x^2+4y^2-6y+3=0.$
6.11. $9x^2+4y^2-54x-32y+109=0.$
6.12. $x^2-5x-y+7=0.$
6.13. $x^2-4y^2+6x+16y-11=0.$
6.14. $4x^2+8x-y+7=0.$
6.15. $9x^2+4y^2-18x=0.$
6.16. $x+2y^2-8y+3=0.$
6.17. $x^2+4y^2-6x+8y=3.$
6.18. $x-5y^2+10y-6=0.$
6.19. $x^2-4y^2+8x-24y=24.$
6.20. $x^2+6x+5=2y.$
6.21. $9x^2+10y^2+40y-50=0.$
6.22. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0.$
6.23. $x-2y^2+12y-14=0.$
6.24. $y^2+4x+2y-11=0.$
6.25. $x^2+2y^2+2x=0.$
6.26. $3x^2-4y^2-12x+24=0.$
6.27. $2x^2-2y^2+2x=0.$
6.28. $y^2+2y-4x+9=0.$
6.29. $x^2+2x+y^2-3=0.$
6.30. $y^2+8y-x^2+4x+3=0.$

Задача 7. Построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду:

7.1. а) $z=1-x^2-y^2$, б) $z=4-x^2$.
7.2. а) $x^2+2x+2y^2+4z^2+z=0,$ б) $y^2+5y+z=4.$
7.3. а) $x^2+y^2+4z^2+6x=0,$ б) $x^2+z^2=2z.$
7.4. а) $2y^2+z^2=1-x,$ б) $xy=4.$
7.5. а) $9x^2+4y^2-8y-z^2=32,$ б) $x^2-y^2-6x=0.$
7.6. а) $x^2-2y^2+z^2+2z=0,$ б) $z^2+4z-6y-20=0.$
7.7. а) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$, б) $y^2=4x+1.$
7.8. а) $z=2+x^2+y^2$. б) $z=1-x^2.$
7.9. а) $36x^2+16y^2-9z^2+18z=9,$ б) $z^2-2z-8x-7=0.$
7.10. а) $x^2+y^2-z^2=0$, б) $y^2=4x-2.$
7.11. а) $x^2+y^2+z^2=2z,$ б) $y=x^2$.
7.12. а) $x^2+3y^2-z^2+2z=2$, б) $x=1-z^2.$
7.13. а) $2x^2-4y^2+z^2=2z$, б) $x^2+2z=2x.$
7.14. а) $z=4-x^2-y^2$, б) $x^2+y^2=2y.$
7.15. а) $x^2+2y^2-4z^2-4x+4=0,$ б) $z=(x-1)^2.$
7.16. а) $y^2-2y-z^2-x^2=0,$ б) $x=y^2.$
7.17. а) $x^2+y^2-2y=2z-1$,. б) $y^2+z^2=2z.$
7.18. а) $x^2+y^2=2z+6$, б) $x^2+z^2-6z=0.$
7.19. а) $9x^2+4y^2+8y-36z^2=32,$ б) $2x^2+5y=10.$
7.20. а) $x^2+y^2+z^2=2z$, б) $z^2=7x.$
7.21. а) $5x^2+15y^2-4z^2+8z-24=0$, б) $4x^2-y^2=8.$
7.22. а) $4z^2=x^2+2y^2+2x+3,$ б) $xy=4.$
7.23. а) $x^2-4y^2+z^2-8y=4,$ б) $x+y-3=0.$
7.24. а) $x^2+y^2+2z=0$, б) $x^2-y^2+4=0.$
7.25. а) $x^2-2x+y^2+z^2=0$, б) $x=2-y^2.$
7.26. а) $x^2-4x+2z^2=4-y$, б) $x^2-y^2+2y=2.$
7.27. а) $z^2+2y^2-x^2+2z+1=0,$ б) $x+y=9.$
7.28. а) $y^2+z^2=x^2+2x-2z$, б) $z^2=4-y.$
7.29. а) $(x-y)(x+y)=2z^2,$ б) $4y^2-z^2=8.$
7.30. а) $z^2-2z-y^2-x^2=0,$ б) $4y-x^2=0.$

Задача 8. Построить кривую в полярных координатах:

6.1 $\rho=2\cos(\varphi-\pi/4)-2.$
6.2. $\rho=\sin\varphi+\cos\varphi$.
6.3. $\rho=3\sin(4\varphi-\pi).$
6.4. $\rho=\cos(3\varphi-2\pi).$

6.5. $\rho=4\sin(\varphi-\pi)-4$.

6.6. $\rho=\sin(\varphi+\pi)-3$.

6.7. $\rho=2\cos(2\varphi-\pi/4)$.

6.8. $\rho=\sqrt{2}\sin\varphi+\sqrt{2}\cos\varphi$.

6.9. $\rho\sin\varphi=8$.

6.10. $\rho=2\cos(2\varphi-\pi/4)$.

6.11. $\rho=\varphi^2-\varphi$.

6.12. $\rho=3\cos(\varphi+\pi)+3$.

6.13. $\rho=1/2\sin\varphi+\sqrt{3}/2\cos\varphi-1$.

6.14. $2\rho=\sin(\varphi-\pi/3)-1$.

6.15. $2\rho=\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi$.

6.16. $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi$.

6.17. $3\rho=\sin(\varphi-\pi/6)-1$.

6.18. $\rho=\cos(6\varphi-\pi)$.

6.19. $\rho=2\cos(\varphi+\pi)-1$.

6.20. $\rho=\sin\varphi-2$.

6.21. $\rho=1/2\sin\varphi-\sqrt{3}/2\cos\varphi$.

6.22. $\rho=4\sin(\varphi+\pi)+1$.

6.23. $\rho\cos\varphi=3$.

6.24. $\rho=\varphi^2+\varphi+1$.

6.25. $\rho+1=(\sin\varphi+\cos\varphi)^2$.

6.26. $1-\rho=(\sin\varphi+\cos\varphi)^2$.

6.27. $\rho=\sin(6\varphi+\pi)$.

6.28. $\rho=\sin\varphi-\cos\varphi+1/\sqrt{2}$

6.29. $\rho^2=\varphi^2+2\varphi+1$.

6.30. $2\rho=\frac{1}{2}(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi)+1$

III. *Методические указания к выполнению заданий*

1.Решение систем линейных уравнений.

Задача 1. Проверить невырожденность системы линейных уравнений и решить по формулам Крамера.

Решение. Запишем матрицу системы $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$. Проверяем невырожденность системы. Для этого вычисляем определитель Δ матрицы

А разложением по третьему столбцу: $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=1(-1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0.$

По правилу Крамера система имеет единственное решение, которое находится по формулам: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$. Определители Δ_i получаются из определителя системы Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=10,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 8 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-15,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 8\\ 3 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-25.$$

Находим решение: $x_1=\frac{10}{-5}=-2,\ x_2=\frac{-15}{-5}=3,\ x_3=\frac{-25}{-5}=5.$

Ответ: $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=5$.

Задача 2. Исследовать систему и в случае совместности решить ее.

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=1;\\ x_1+3x_2+2x_3=5;\\ 5x_1+8x_2+3x_3=11;\\ x_1+x_2=1.\end{cases}$$

Решение. Используя теорему Кронекера-Капелли, проверим совместность системы.

Вычисляем методом окаймляющих миноров ранг матрицы системы

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & 8 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Среди миноров 2-го порядка есть отличные от нуля, например

$$M_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0.$$

Все окаймляющие миноры 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равны нулю. Следовательно, ранг матрицы A $r_A=2$.

Тем же методом вычисляем ранг расширенной матрицы

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получаем, что $r_{\overline{A}}=2$. Поскольку, $r_A = r_{\overline{A}} = \kappa = 2$, то система совместна. Число неизвестных $n=3>k$, поэтому система имеет бесчисленное множество решений.

Находим общее решение системы.

В качестве базисного минора можно взять любой минор порядка $\kappa=2$, отличный от нуля, например, $M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$. В этом случае базисными неизвестными окажутся x_1 и x_2, а x_3 – свободное неизвестное. Решить систему – это значит выразить x_1 и x_2 через x_3.

Записываем укороченную систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 - x_3, \\ x_1 + 3x_2 = 5 - 2x_3, \\ x_3 = c, \end{cases}$$

где c – любое действительное число.

Полученную систему решаем по правилу Крамера:

$\Delta=|M|=7$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+x_3 & 2 \\ 5-2x_2 & 3 \end{vmatrix} = 7x_3 - 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1+x_3 \\ 1 & 5-2x_3 \end{vmatrix} = -7x_3 + 14.$$

Отсюда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = x_3 - 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -x_3 + 2, \quad где\ x_3 = c \in R.$

Ответ: общее решение системы $X = \begin{pmatrix} c - 1 \\ -c + 2 \\ c \end{pmatrix}$, где $c \in R$.

2.Операции над векторами

Задача 3. Найти $пр_{\vec b}\vec a$, если $\vec a = 4\vec i + 3\vec j, \vec b = 2\vec i + 2\vec j + \vec k$.

Решение. $пр_{\vec b}\vec a = \frac{(\vec a \vec b)}{|\vec b|}$. Так как векторы $\vec a$ и $\vec b$ заданы в ортонормированном базисе, то $(\vec a\, \vec b) = x_1x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 4\cdot 2 + 3\cdot 2 + 0\cdot 1 = 14$,

$$|\vec b| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4+4+1} = 3, \quad пр_{\vec b}\vec a = \frac{14}{3}.$$

Задача 4. Вычислить векторное произведение $[\vec a - 2\vec b, \vec a + \vec b]$, если $\vec a = (1, 2, 3), \vec b = (1, -3, 2)$.

Решение. Воспользуемся свойством векторного произведения

$$[\vec a - 2\vec b, \vec a + \vec b] = [\vec a, \vec a] - 2[\vec b, \vec a] + [\vec a, \vec b] - 2[\vec b, \vec b] = 3[\vec a, \vec b] =$$

$$= 3\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec i \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec j \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 11\vec i + 5\vec j - 7\vec k.$$

Ответ: $\vec c = (11, 5, 7)$.

3. Прямые и плоскости

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0,4,-1)$. Требуется найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды;

5) уравнение прямой A_1A_4 ; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение.

1. Длину ребра A_1A_2 определяем по формулам $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

В нашем случае $\overrightarrow{A_1A_2}=(-4,5,-3)$.

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-4)^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

2. Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 определим как угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}=(-4,5,-3)$. и $\overrightarrow{A_1A_4}=(-3,3,-5)$, $\cos\varphi=\dfrac{(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4})}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

Значит, $\cos\varphi=\dfrac{(-4)(-3)+5\cdot3+(-3)(-5)}{\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=\dfrac{42}{\sqrt{50}\sqrt{43}}\approx0{,}906.$

3. Площадь грани $A_1A_2A_3$, построенной на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$,

находим по формулам: $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|$, $\overrightarrow{A_1A_2}=(-4,5,-3)$

$\overrightarrow{A_1A_3}=(-4,0,2)$

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=10\vec i+20\vec j+20\vec k;\ S=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+20^2+20^2}=\frac{30}{2}=15.$$

4. Объем пирамиды найдем по формулам:

$\overrightarrow{A_1A_2}=(-4,5,-3)$ $\quad\overrightarrow{A_1A_3}=(-4,0,2)$ $\quad\overrightarrow{A_1A_4}=(-3,3,-5)$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|,\quad V=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -3 & 3 & -5\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}(-30)\right|=5.$$

Замечание. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения векторов, на которых он построен, как на сторонах. Знак +

или – характеризует ориентацию тройки векторов в заданной системе координат.

5. Уравнение прямой A_1A_4 запишем в канонической форме

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где $\vec s=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой,

$A(x_0,y_0,z_0)$ – точка на этой прямой.

В нашем случае $\vec s=\overrightarrow{A_1A_4}=(-3,3,-5)$, A(3,1,4), следовательно,

$\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-4}{-5}$ – уравнение прямой.

6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, определяем по формуле $\left(\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right)=0$, где $M(x,y,z)$ – текущая точка плоскости, или

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2- & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-3 & y-1 & z-4\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$10(x-3)+20(y-1)+20(z-4)=0,\quad x+2y+2z-13=0.$

7. Угол между прямой и плоскостью находим по формуле

$\sin\varphi=\dfrac{(\vec s,\vec n)}{|\vec s|\cdot|\vec n|}$, где $\vec s$ – направляющий вектор прямой A_1A_4,

$\vec n$ – нормальный вектор плоскости.

В нашем случае $\vec s=(-3,3,5)$, $\vec n=(1,2,2)$.

$$\sin\varphi=\frac{(-3+6-10)}{\sqrt{43}\sqrt{9}}=\frac{7}{\sqrt{387}}\approx0{,}356.$$

8. Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, определяем как уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(0,4,-1)$ перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$, уравнение которой $x+2y+2z-13=0$. По условию перпендикулярности прямой и плоскости имеем $\vec s=\lambda\vec n$ (λ можно

положить равным 1). Следовательно, $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{2}$ – уравнение искомой высоты.

4. Кривые и поверхности второго порядка

Задача 6. Построить на плоскости кривую, приведя ее уравнение к каноническому виду: $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0.$

Решение. Так как в общем уравнении кривой отсутствуют члены, содержащие произведение xy, то это уравнение приведется к каноническому виду дополнением до полного квадрата по каждой переменной $5(x^2-6x+9)-45+9(y^2+2y+1)-9+9=0,$

или $5(x-3)^2+9(y+1)^2=45.$ Откуда $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$

Следовательно, исходное уравнение определяет эллипс с центром в точке (3,–1). Оси этого эллипса параллельны осям координат $a=3$, $b=\sqrt{5}$ (рис.1).

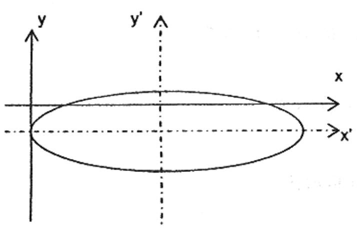

Рис.1

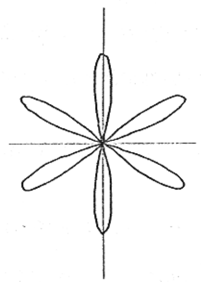

Рис. 2

Задача 7 решается аналогично.

5. Полярные координаты

Задача 8. Построить кривую в полярных координатах: $\rho=\cos(6\varphi-3\pi)$.

Решение. Построим сначала график $\rho=\cos 6\varphi$. Это 6-лепестковая роза, вписанная в единичную окружность. Найдем точки лежащие на окружности,

решая уравнение $\cos 6\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\pi k/3$, и границы лепестков, решая уравнение $\cos 6\varphi \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2}+\pi k \le 6\varphi \le \frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$.

Так как $\rho=\cos(6(\varphi-\pi/2))$, то исходная линия получается из базовой поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 2).

Библиографический список

1. **Бугров, Я.С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1980. – 176 с.
2. **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры 7-е изд., стер./ Д.В. Беклемишев. М.: Высш. шк. 1998. – 320 с.
3. **Атанасян, Л.С.** Геометрия, часть I / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев М.: Просвещение, 1986.
4. **Курош, А.Г.** Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. М.: Наука, 1971.
5. **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1. / Д. Т. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с.