ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова, М.Л.Мухина

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: бакалавров и магистров «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» и дипломированных специалистов «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Нижний Новгород 2007

УДК 514.18
ББК 22.151.1
С925

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор кафедры
«Начертательная геометрия,
машинная графика и САПР» НГАСУ *М.В. Лагунова,*
доцент, кандидат технических наук, зав. кафедрой
«Начертательная геометрия и графика» ВГАВТ *А.Ю. Логинов*

Скобелева И.Ю., Ширшова И.А., Мухина М.Л.
С925 **Сборник задач по начертательной геометрии**: учеб. пособие / И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова, М.Л. Мухина; НГТУ. Нижний Новгород, 2007. – 81 с.
ISBN 978-5-93272-507-8

Приведены краткие сведения по начертательной геометрии, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения студентами.

Сборник задач может быть использован студентами заочной и дистанционной форм обучения.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей.

Рис. 199. Табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 514.18
ББК 22.151.1

ISBN 978-5-93272-507-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Геометрические знаки

Ф – геометрическая фигура;

A, B, C, D, E, F… – точки в пространстве (прописные буквы латинского алфавита);
a, b, c, d, e, f… – прямые и кривые линии в пространстве (строчные буквы латинского алфавита);
(*AB*) – прямая неограниченной длины, проходящая через точки *A* и *B*;
[*AB*) – луч с началом в точке *A*;
[*AB*] – отрезок прямой, ограниченный точками *A* и *B*;
/*AB*/ – расстояние от точки *A* до точки *B*;
/*A*, *a*/ – расстояние от точки *A* до прямой *a*;
/*A*, α/ – расстояние от точки *A* до плоскости α;
α, β, δ, γ, λ, ψ… – плоскости и углы (буквы греческого алфавита).

Знаки, выражающие отношения между геометрическими образами

= – равенство, совпадение;
$\rightarrow$ – отображение;
$\Rightarrow$ – следовательно;
$\Leftrightarrow$ – если (в том только случае), эквивалентность;
$\times$ – пересечение в случае, когда результатом пересечения является точка;
$\cap$ – пересечение в случае, когда результатом пересечения является множество точек: $a = \alpha \cap \beta$;
$\in$ – принадлежность: $A \in a$;
$\subset$ – включение: $a \subset \alpha$;
$\cup$ – объединение: $ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$;
Π_1 – горизонтальная плоскость проекций;
Π_2 – фронтальная плоскость проекций;
Π_3 – профильная плоскость проекций;
// – параллельность;
$\perp$ – перпендикулярность.

1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ

Трехкартинный комплексный чертеж получается методом ортогонального проецирования каждой точки оригинала на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций – горизонтальную Π_1, фронтальную Π_2 и профильную Π_3 (рис. 1).

Для получения плоского чертежа точки A необходимо повернуть плоскость Π_1 вокруг оси x по часовой стрелке, а плоскость Π_3 – вокруг оси z до совмещения с Π_2.

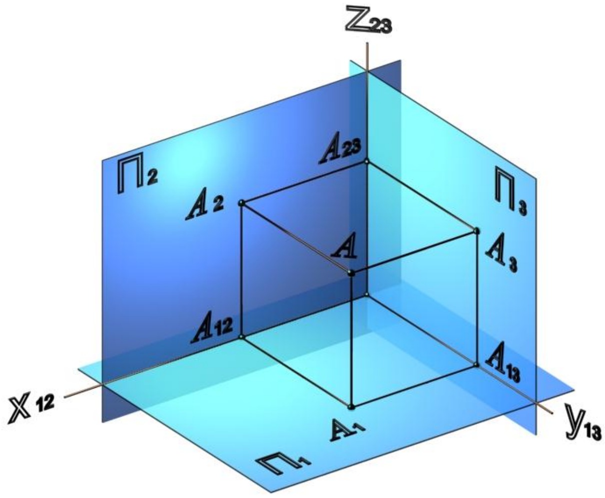


Рис. 1

Чертеж трех совмещенных плоскостей проекций называется трехкартинным комплексным чертежом (рис. 2).

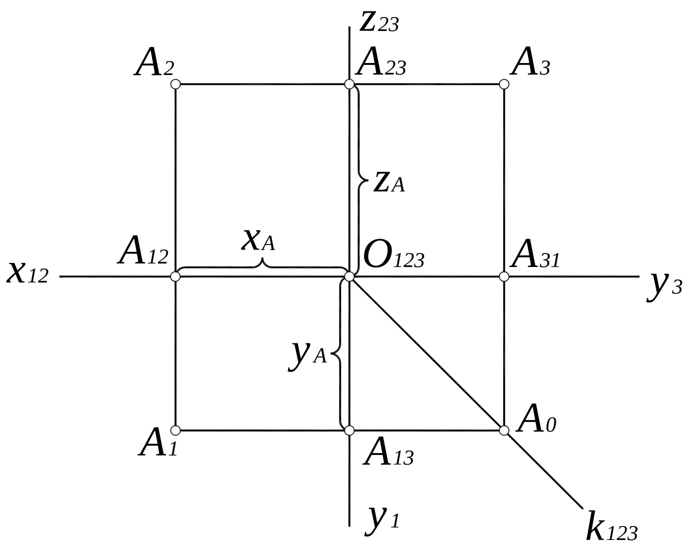


Рис. 2

На рис. 2 $A_1A_{13} = O_{123}A_{12} = A_2A_{23} = x$ – широта точки A;

$A_1A_{12} = O_{123}A_{13} = A_{23}A_3 = y$ – глубина точки A;

$A_2A_{12} = O_{123}A_{23} = A_{31}A_3 = z$ – высота точки A.

1.1. Основные свойства комплексного чертежа

1. Горизонтальная и фронтальная проекции точки A лежат на вертикальной линии связи $A_1A_2 \perp x_{12}$

2. Фронтальная и профильная проекции точки A лежат на горизонтальной линии связи $A_2A_3 \perp z_{23}$

3. Горизонтальная и профильная проекции точки A лежат на ломаной линии связи $A_1A_3 = A_1A_0 + A_0A_3$, вершина которой находится на постоянной прямой комплексного чертежа k_{123}.

1.2. Комплексный чертеж точки

1. Построить трехкартинные комплексные чертежи точек:

A(5,10,15), ***B***(20,0,25), ***C***(0,20,15), ***D***(20,15,0).

2. По заданному комплексному чертежу (рис. 3) ответить на следующие вопросы.

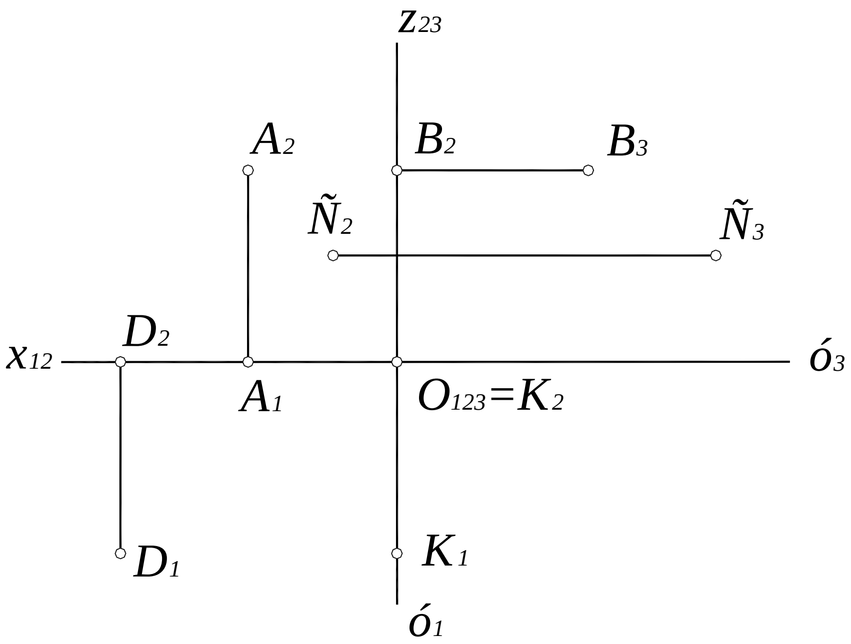


Рис. 3

- Какая из точек расположена в плоскости $\mathbf{П_3}$?
- Где расположена точка ***K***?
- От какой из плоскостей проекций дальше всего расположена точка ***C***?
- Какая из координат точки ***A*** равна 0?
- Какая из точек расположена дальше всего от плоскости $\mathbf{П_3}$?
- Какие точки имеют равные координаты ***z***?

3. На чертеже без указания осей построить недостающую проекцию точки, если даны две ее проекции и постоянная прямая комплексного чертежа (рис. 4).

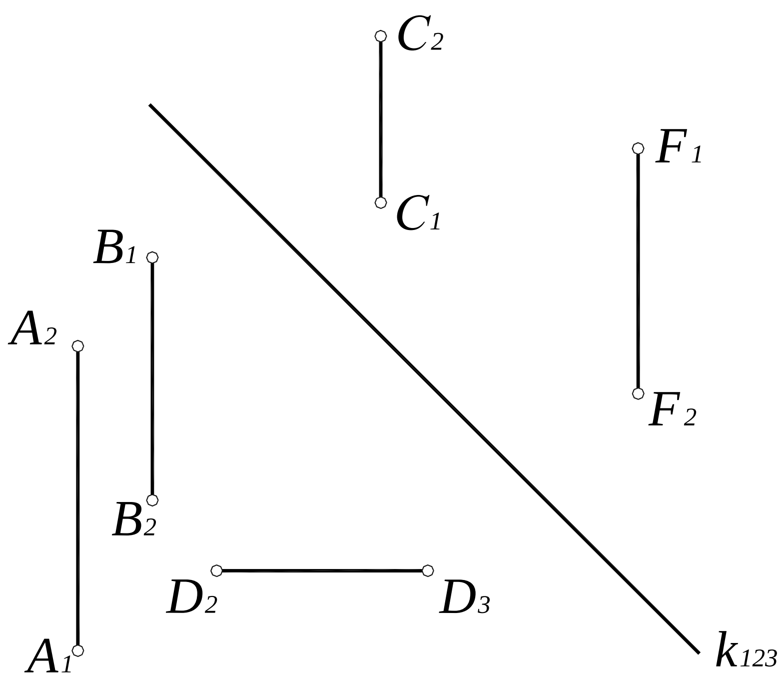


Рис. 4

4. На чертеже без указания осей построить недостающую проекцию точки, если даны две ее проекции и три проекции точки ***A*** (рис. 5).

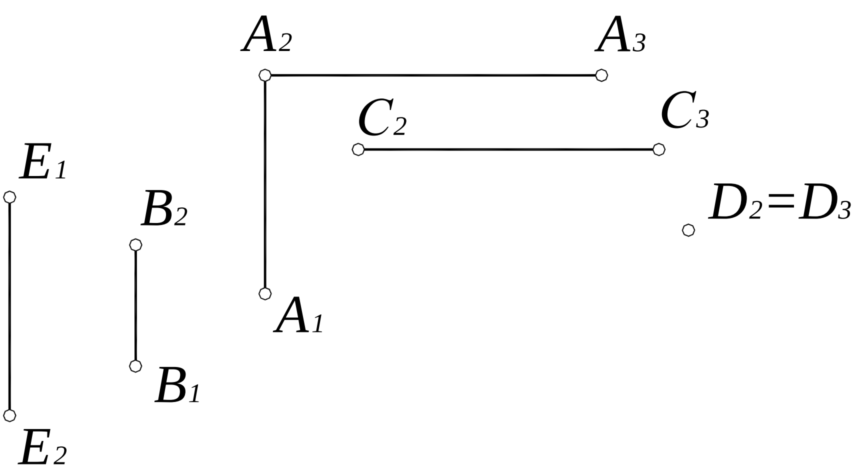


Рис. 5

5. Построить трехкартинный комплексный чертеж точки ***A***(10,20,25) и точку ***B***, симметричную точке ***A*** относительно оси ***x***.

6. Построить трехкартинный комплексный чертеж точки ***M***(20,15,10) и точку ***N***, симметричной точке ***M*** относительно горизонтальной плоскости проекций.

7. Построить трехкартинный комплексный чертеж произвольной точки ***A*** и точки ***C***, расположенной выше точки ***A*** на 10 мм, правее на 25 мм и на 20 мм дальше от $\mathbf{П_2}$.

8. Построить недостающие проекции точек ***E***, ***F***, ***K***, ***T***, если известно, что точка ***E*** расположена перед точкой ***A***, точка ***F*** – за ней; точка ***K*** расположена над точкой ***A***, а точка ***T*** – под ней (рис. 6, 7).

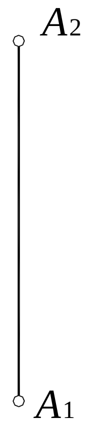


Рис. 6

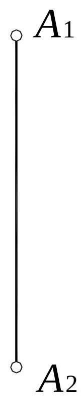


Рис. 7

1.3. Прямая линия. Относительное положение точки и прямой

Прямая линия может быть задана двумя точками, точкой и направлением, своими проекциями или как линия пересечения двух плоскостей.

По положению относительно плоскостей проекций различают прямые общего положения, то есть прямые, наклоненные под произвольными углами ко всем трем плоскостям проекций (рис. 8, 9), и прямые частного положения, параллельные или перпендикулярные какой-либо плоскости проекций.

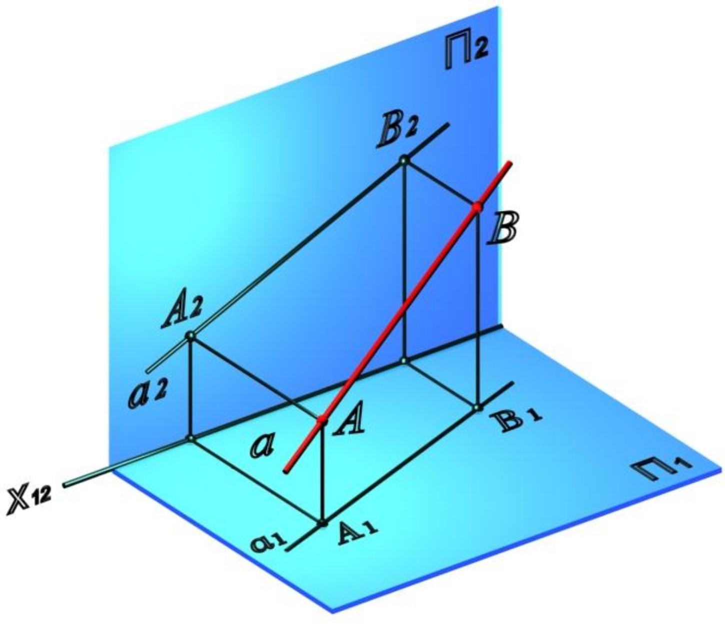
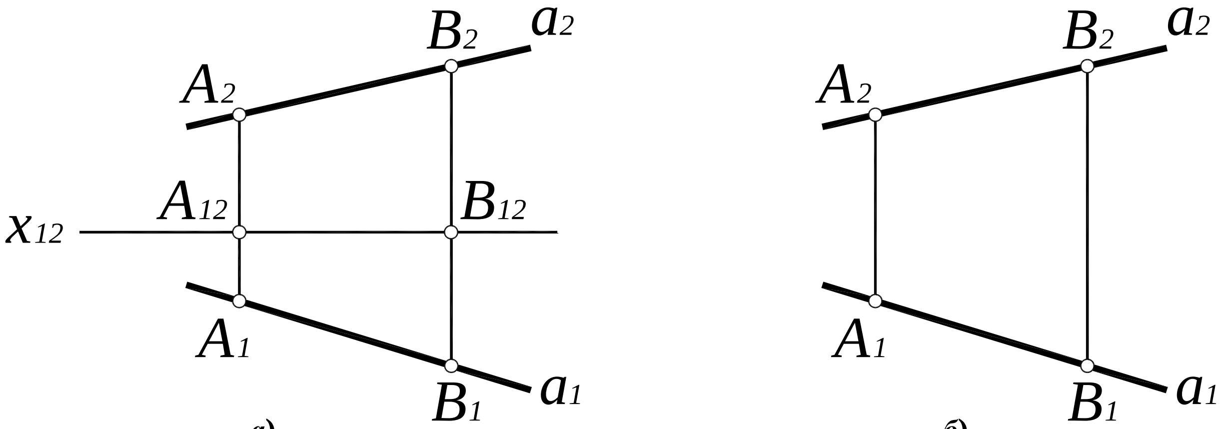


Рис. 8

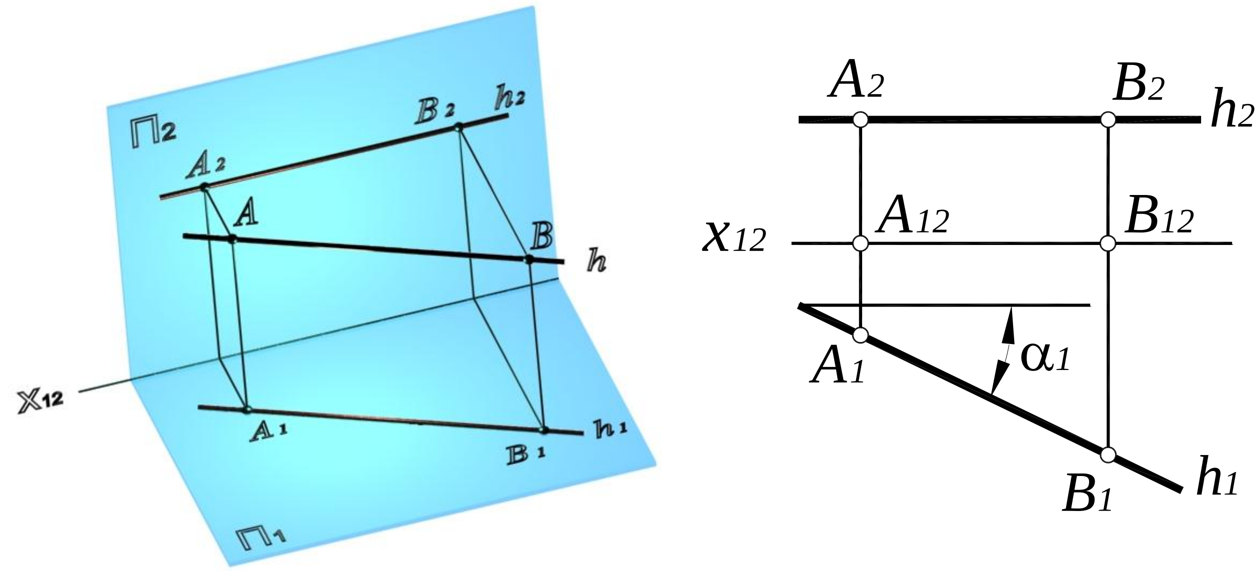


а)　　　　　　*б*)

Рис. 9

На рис. 9, *а* показан двухкартинный комплексный чертеж прямой *а* общего положения, на рис. 9, *б* – безосевой чертеж.

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются линиями уровня (горизонталь, фронталь и профильная прямая). На рис. 10, *а* приведено наглядное изображение горизонтали, на рис 10, *б* – комплексный чертеж.



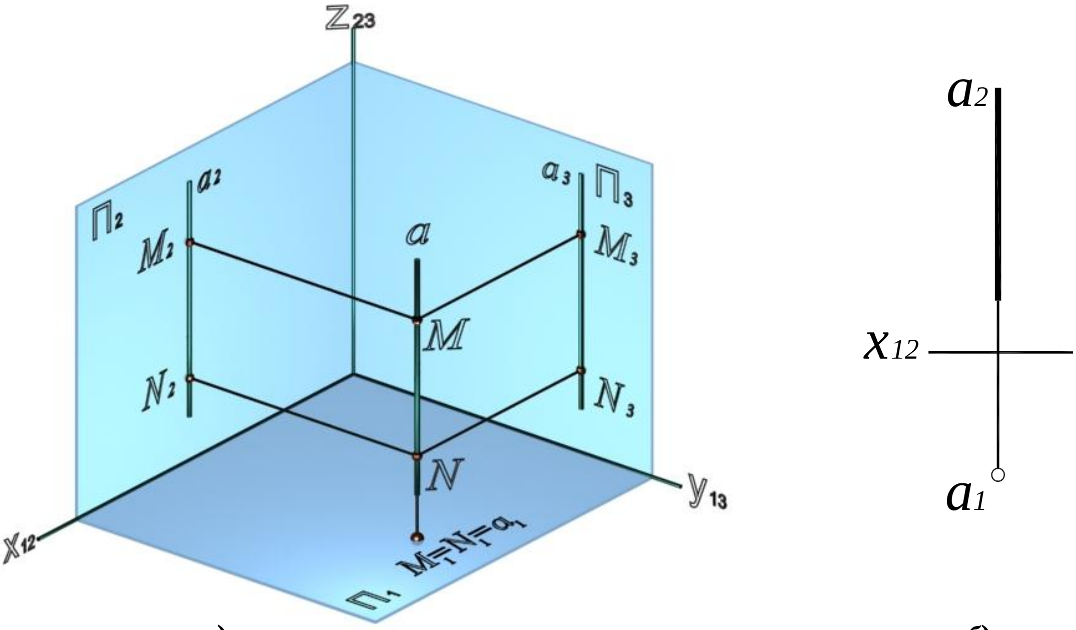
а)　　　　　　*б*)

Рис. 10

Отрезки горизонтали $[A_1B_1] = [AB]$ и угол наклона горизонтали к фронтальной плоскости проекций (угол α) проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

Прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются проецирующими (горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая и профильно-проецирующая прямая).

На рис. 11, *а* приведено наглядное изображение горизонтально-проецирующей прямой, на рис. 11, *б* – комплексный чертеж.



а) *б*)

Рис. 11

Точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой.

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися.

Проекции параллельных прямых соответственно параллельны. Пересекающиеся прямые имеют общую точку, то есть точки пересечения их одноименных проекций лежат на общей линии связи. Прямые, не имеющие общей точки и не параллельные между собой, являются скрещивающимися.

9. Концы отрезков ***AB, CD, EF, KL, MN, QR*** заданы координатами:

A(30,15,10)	***B***(10,20,25);
C(30,20,10)	***D***(5,20,25);
E(30,15,5)	***F***(5,15,20);
K(20,10,25)	***L***(20,10,5);
M(25,10,25)	***N***(25,20,10;
Q(50,20,20)	***R***(10,30,30).

- Построить три проекции каждого отрезка.
- Определить, как каждый отрезок расположен по отношению к плоскостям проекций.
- Указать, какие отрезки проецируются в натуральную величину на одну из плоскостей проекций.
- Определить углы наклона линий уровня к плоскостям проекций.

10. Дана прямая ***a*** общего положения. Построить проекции точек:
A – на прямой, ***B*** – над прямой, ***C*** – за прямой.

11. Зная, что точка ***C*** принадлежит отрезку ***AB***, построить недостающую проекцию точки ***C*** (рис. 12).

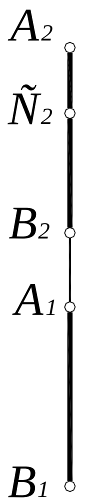


Рис. 12

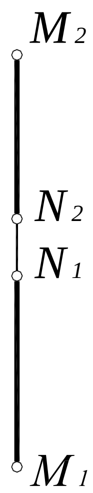


Рис. 13

12. На отрезке ***MN*** найти точку ***K***, делящую отрезок в отношении
***MK*: *KN*=4:1** (рис. 13).

13. Построить проекции отрезка ***MN*** длиной 35 мм, принадлежащего произвольной горизонтали.

14. Построить проекции отрезка ***KL*** длиной 40 мм, принадлежащего произвольной фронтали.

15. Через произвольную точку ***A*** провести горизонталь под углом 30° к **$П_2$**. Сколько решений имеет задача?

16. Построить недостающие проекции точек ***L*** и ***M***, принадлежащих прямой ***l***, проходящей через точку ***K***. Построить проекции прямой ***l*** (рис. 14, 15).

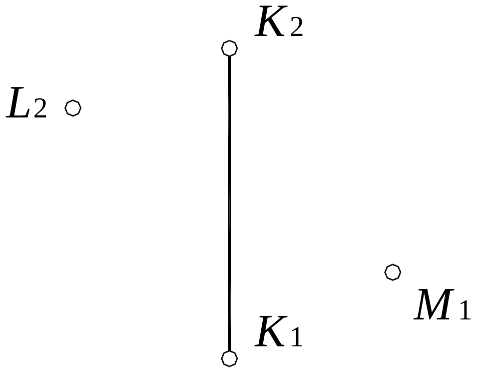


Рис. 14

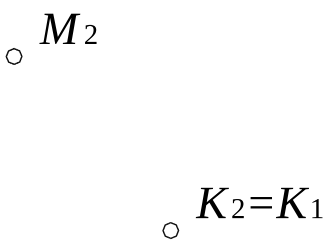


Рис. 15.

17. Определить относительное положение прямых (рис. 16 – 22).

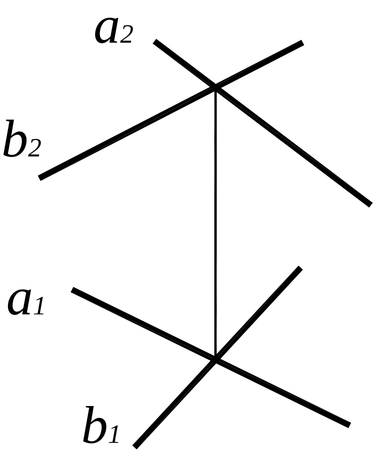


Рис. 16

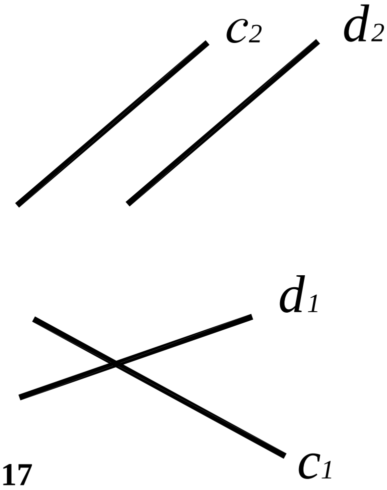


Рис. 17

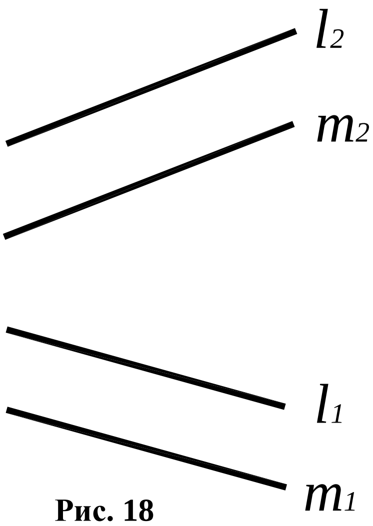


Рис. 18

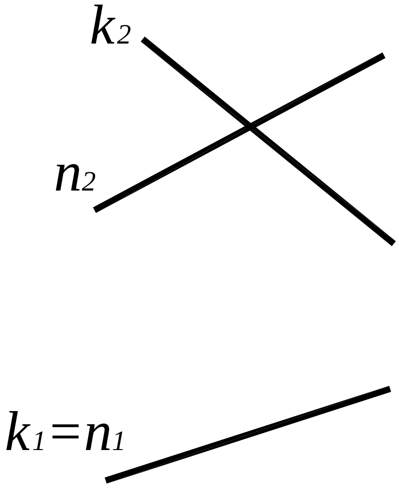


Рис. 19

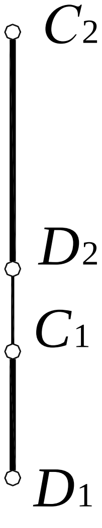


Рис. 20

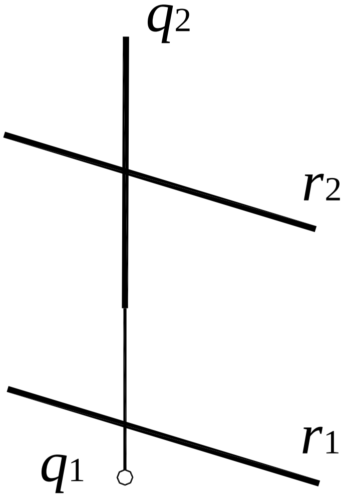


Рис. 21

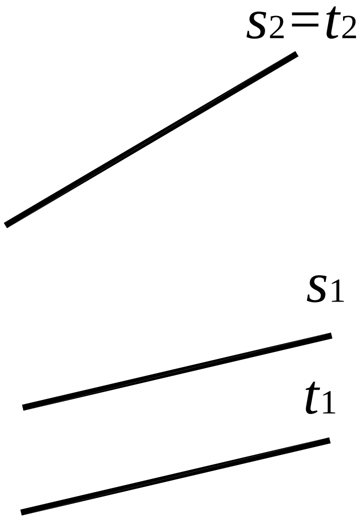


Рис. 22

18. Через точку ***A*** провести горизонталь и фронталь, пересекающие прямую ***c*** общего положения (рис. 23) и профильную прямую ***p*** (рис. 24).

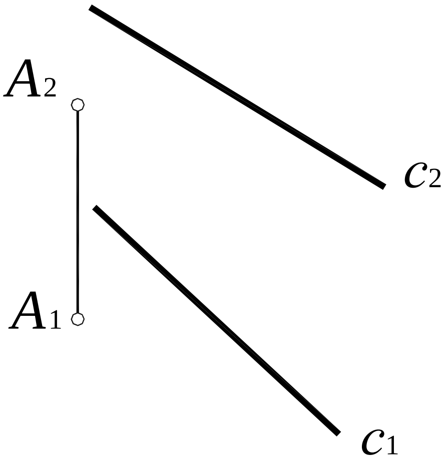


Рис. 23

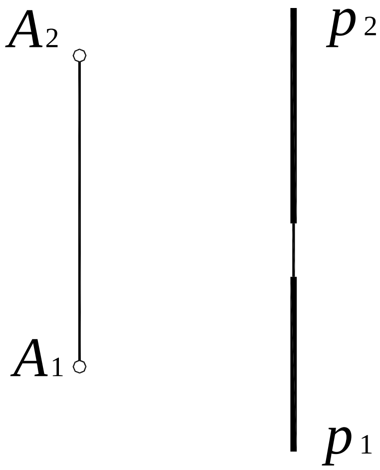


Рис. 24

19. Прямые ***a*** и ***b*** пересечь горизонталью (рис. 25).

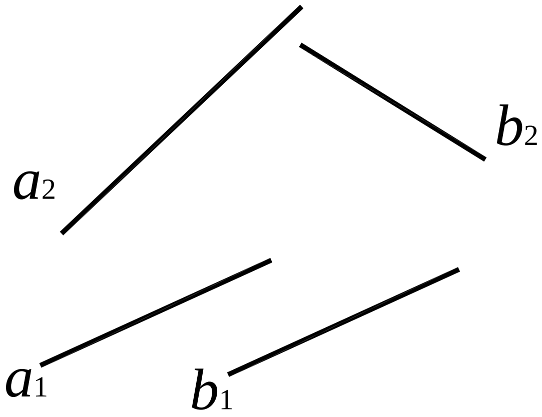


Рис. 25

20. Скрещивающиеся прямые ***a*** и ***b*** пересечь фронтально-проецирующей прямой ***i*** (рис. 26), а прямые ***c*** и ***d*** пересечь горизонтально-проецирующей прямой ***g*** (рис. 27).

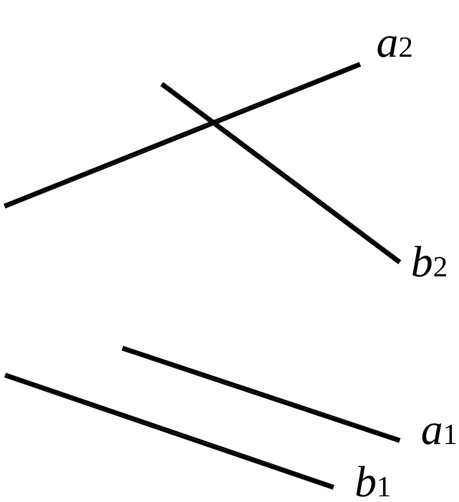


Рис. 26

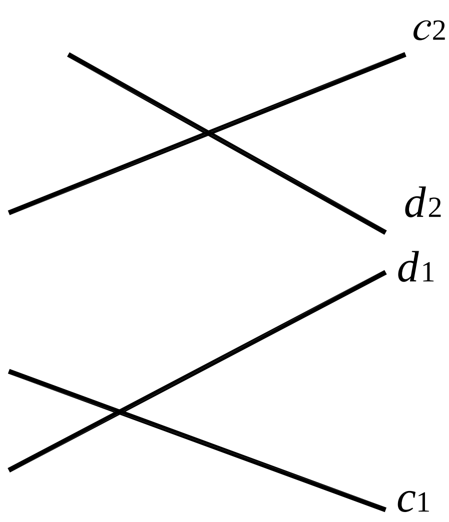


Рис. 27

21. Через произвольную точку ***A*** провести прямую, параллельную заданной:

- прямой ***a*** общего положения;
- горизонтали ***h***;
- горизонтально-проецирующей прямой ***g***.

1.4. Плоскость и поверхность на комплексном чертеже

Плоскость на комплексном чертеже задают проекциями тех объектов, которыми она определяется в пространстве: тремя точками, точкой и прямой, параллельными прямыми, пересекающимися прямыми, любой плоской фигурой (ломаной линией, окружностью и т. д.) или следами, то есть линиями пересечения плоскости с плоскостями проекций.

По положению относительно плоскостей проекций различают:

- плоскости общего положения – плоскости, наклоненные под произвольными углами ко всем трем плоскостям проекций;
- плоскости частного положения – параллельные (плоскости уровня) или перпендикулярные какой-либо плоскости проекций (проецирующие плоскости).

Две плоскости в пространстве могут совпадать, пересекаться или быть параллельными.

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Прямая может принадлежать плоскости, пересекаться с плоскостью или быть параллельна плоскости (рис. 28). Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

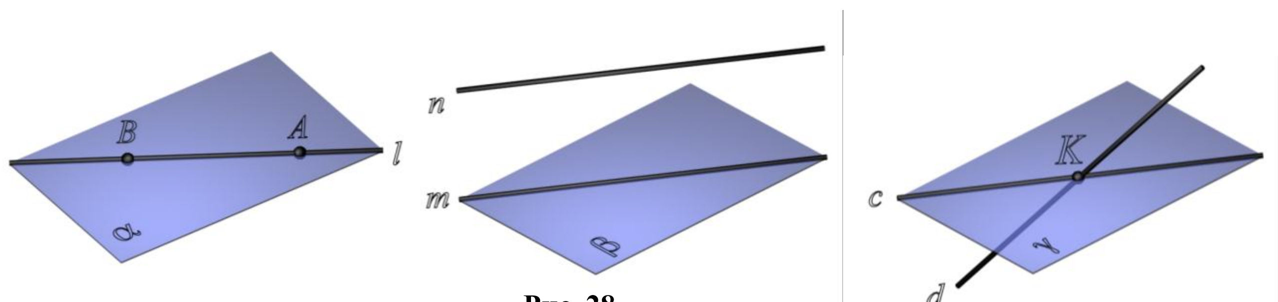


Рис. 28

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

Поверхность на комплексном чертеже задается очерковыми образующими и основными линиями и точками на этой поверхности. Кроме того, на комплексном чертеже изображают оси вращения и оси симметрии поверхности.

22. Плоскость задана точкой ***A*** и прямой ***a***. Эту же плоскость задать: параллельными прямыми; пересекающимися прямыми; фронталью и горизонталью.

23. Через точку ***A*** провести плоскости частного положения:
α – горизонтально-проецирующую; β – горизонтальную плоскость уровня;
μ – фронтальную плоскость уровня; γ – профильно-проецирующую.

24. В заданной плоскости α провести горизонталь: α **(**Δ ***ABC*****)**;
α **(*a* // *b*)** (рис. 29, 30).

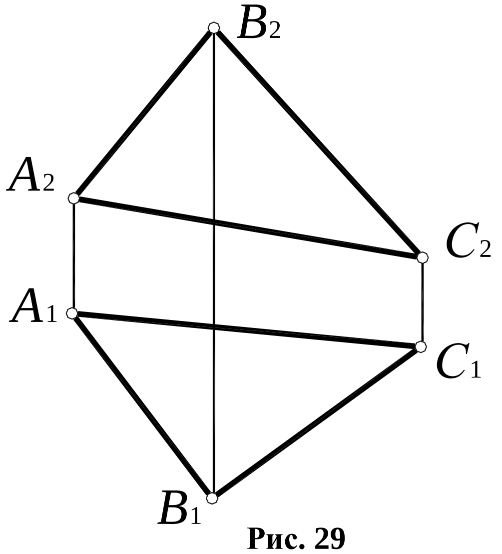


Рис. 29

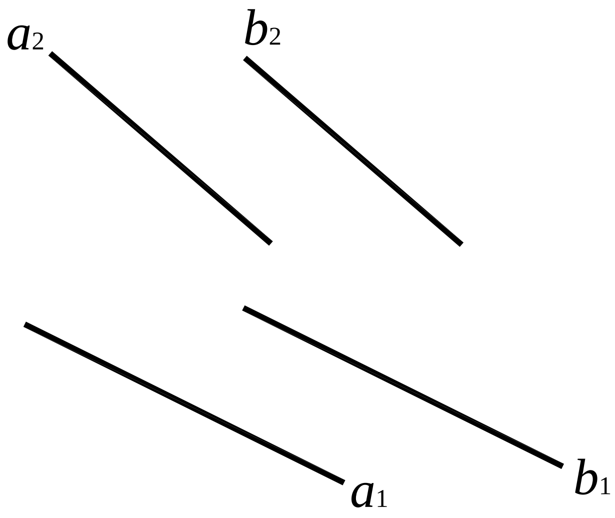


Рис. 30

25. Определить, принадлежат ли заданные точки ***A, B, C, D*** одной плоскости (рис. 31).

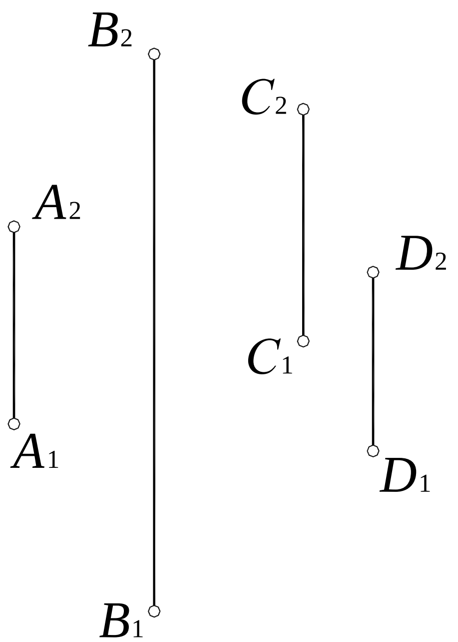


Рис. 31

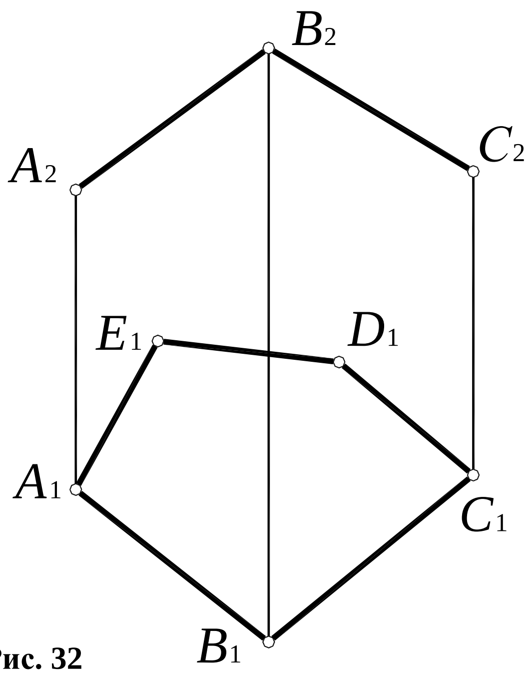


Рис. 32

26. Достроить фронтальную проекцию плоского пятиугольника ***ABCDE*** (рис. 32).

27. Построить недостающую проекцию отрезка ***AB***, принадлежащего плоскости α (***f*** × ***h***) (рис. 33, 34).

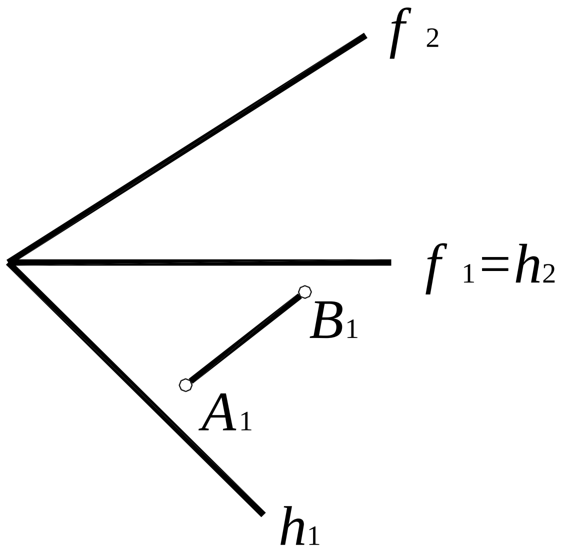


Рис. 33

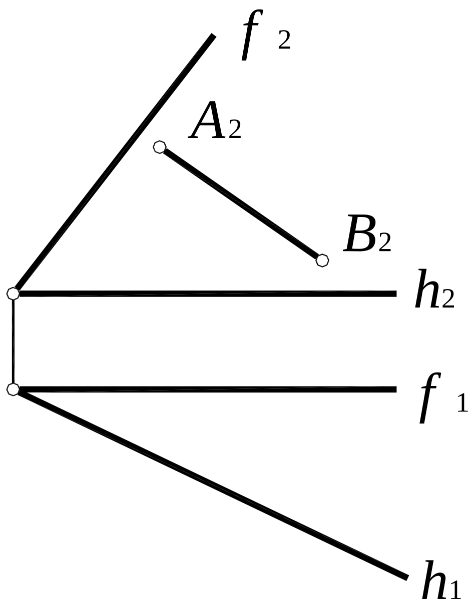


Рис. 34

28. Построить недостающую проекцию точки ***A***, зная, что она принадлежит плоскости α (***a*** × ***b***); β (***c*** // ***d***) (рис. 35, 36).

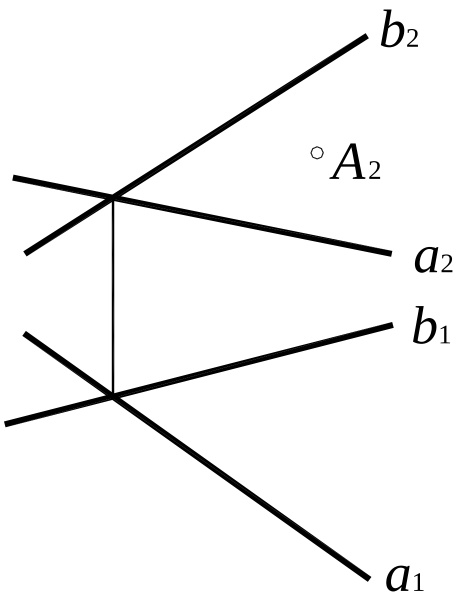


Рис. 35

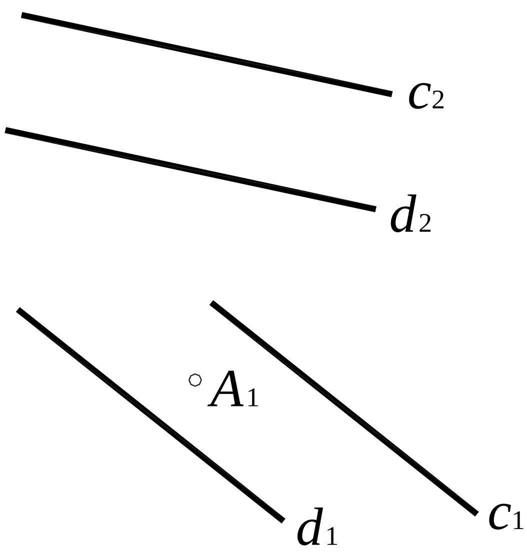


Рис. 36

29. Построить недостающую проекцию треугольника ***ABC***, лежащего в плоскости **α (*l* × *m*)** (рис. 37).

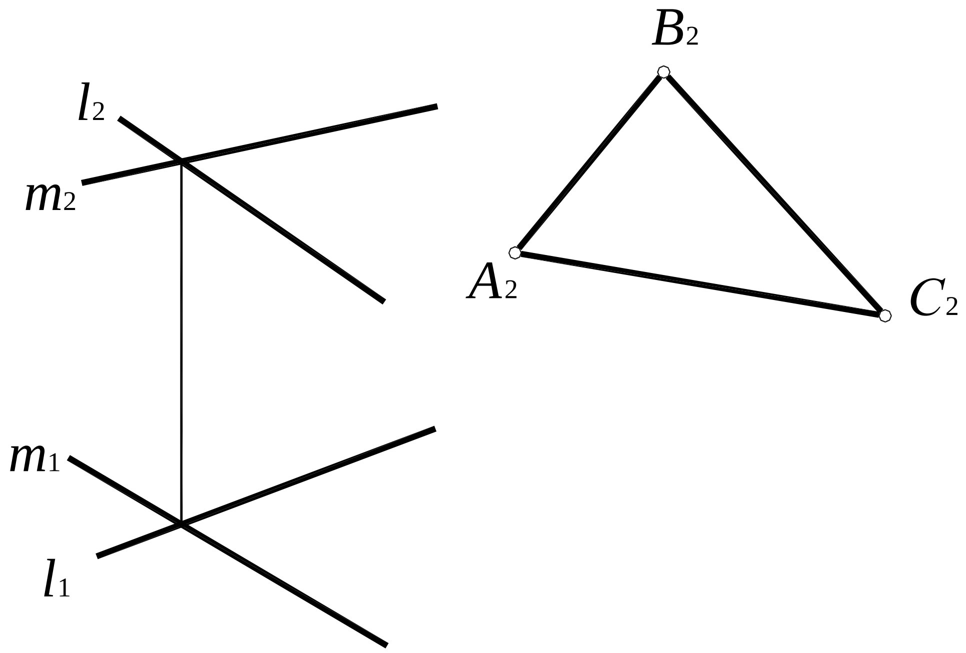


Рис.37

30. С помощью линий уровня построить недостающую проекцию прямоугольника ***ABCD***, лежащего в плоскости **ω (*M, m*)** (рис. 38).

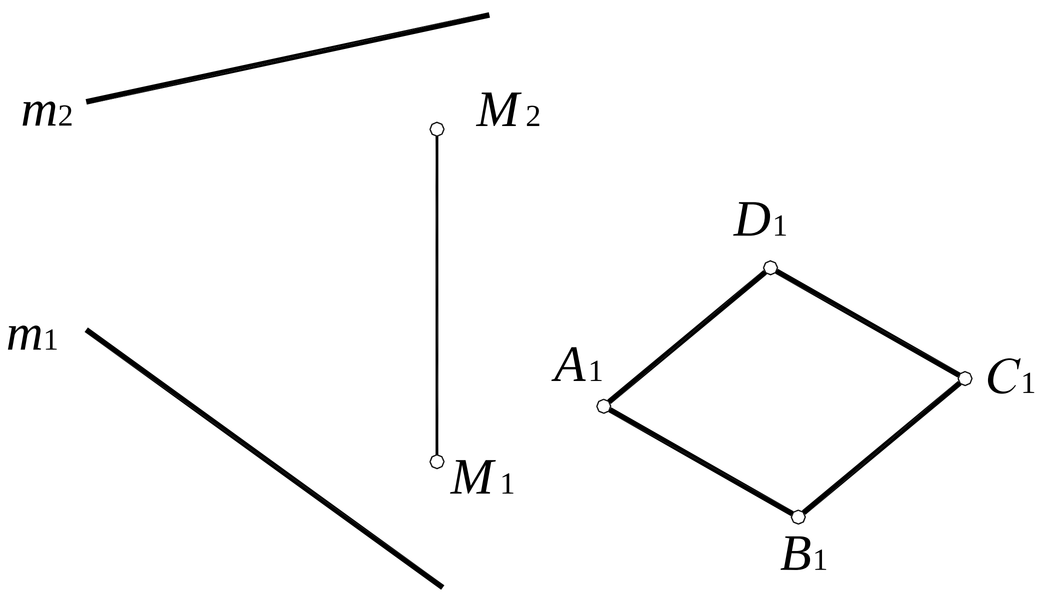


Рис. 38

31. Построить недостающие проекции прямых ***l*** и ***m***, лежащих в плоскости **α (**Δ ***ABC*****)** (рис. 39) и **β (*A, a*)** (рис. 40).

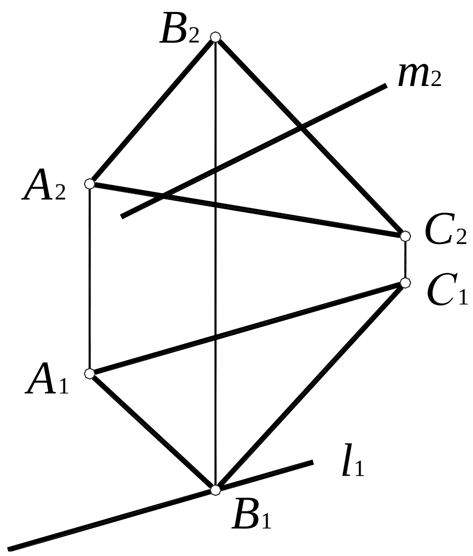


Рис. 39

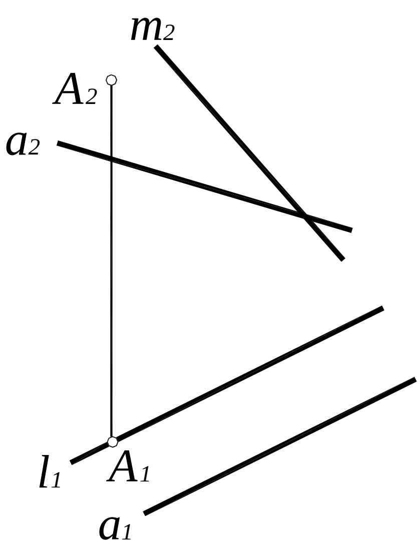


Рис. 40

32. Через точку ***M*** провести прямую, параллельную плоскости **ψ (*m*** × ***n*)**; **σ (*ABC*)** (рис. 41, 42).

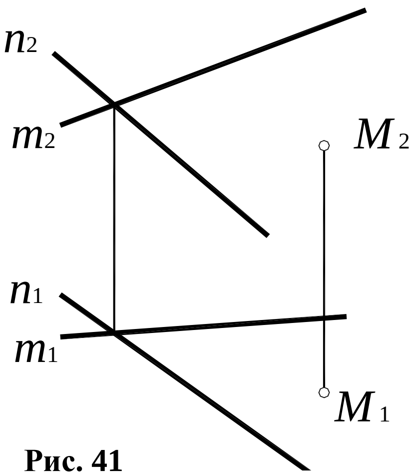


Рис. 41

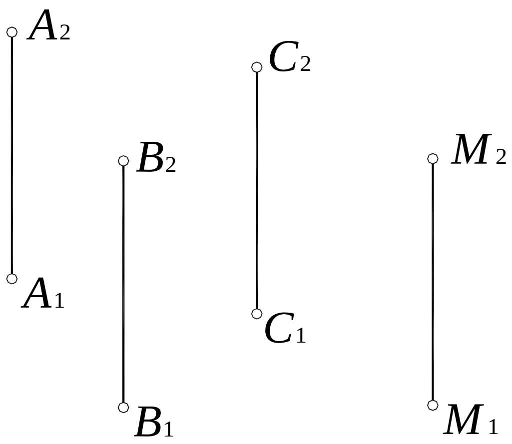


Рис. 42

33. Построить фронтально-проецирующую плоскость **ν**, проходящую через точку ***N*** и параллельную прямой ***n*** (рис. 43).

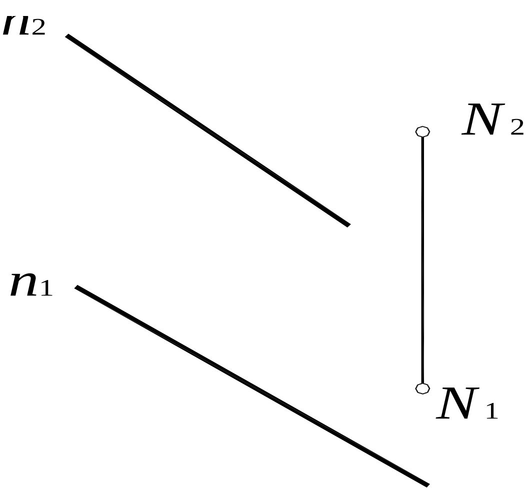


Рис. 43

34. Построить плоскость общего положения **σ**, проходящую через точку ***M*** и параллельную прямой ***m*** общего положения (рис. 44).

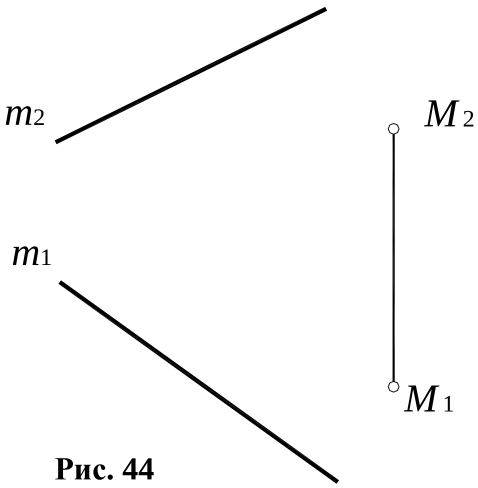


Рис. 44

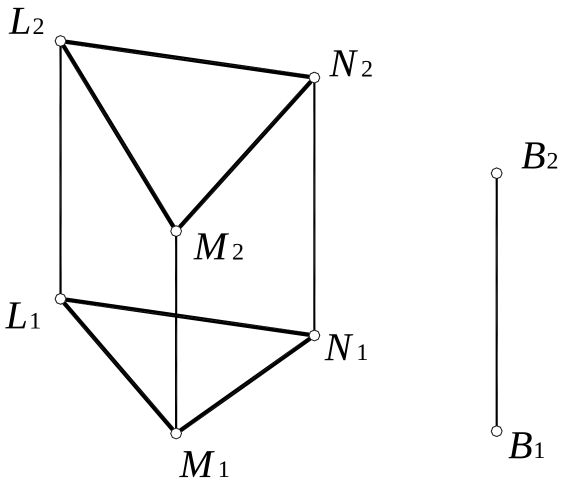


Рис. 45

35. Построить плоскость, проходящую через точку ***B*** и параллельную плоскости **γ (Δ *LMN*)** (рис. 45).

36. Дана пирамида ***SABC*** (рис. 46). Построить фронтальную проекцию точки ***E***, лежащей в грани ***SBC***. Через точку ***D***, лежащую в грани ***DAB***, провести в этой грани горизонталь.

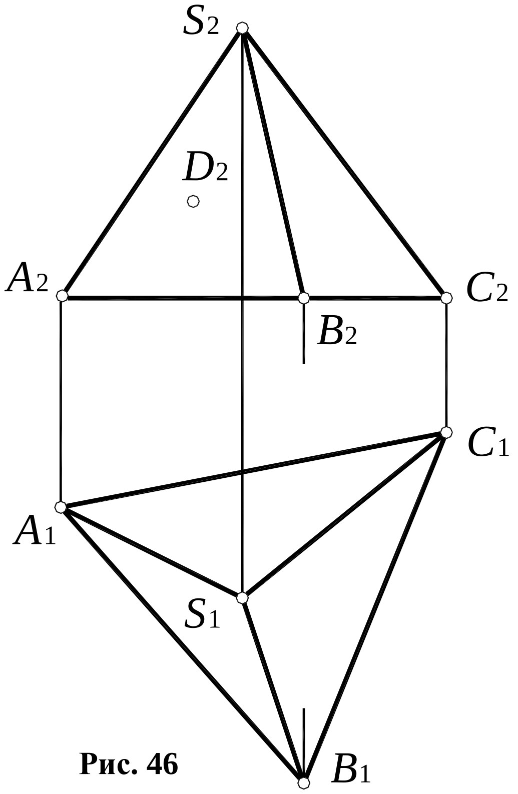


Рис. 46

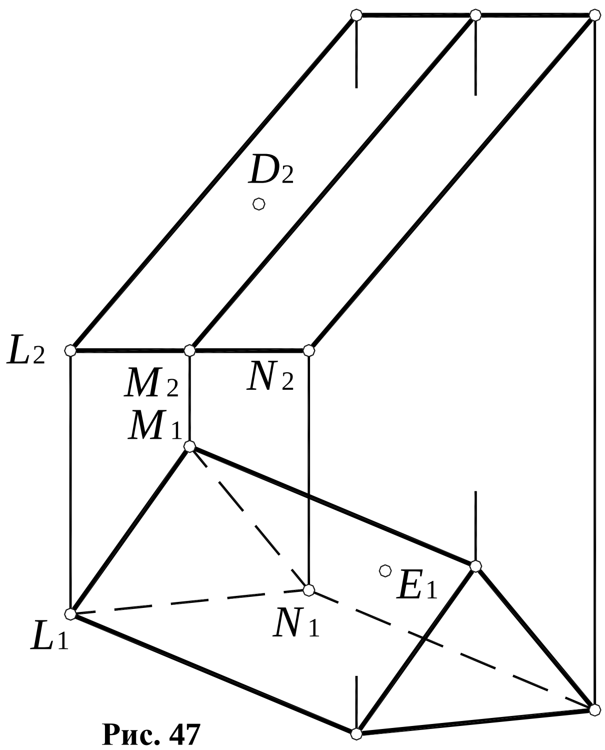


Рис. 47

37. Дана призма ***LMN*** (рис. 47). Построить фронтальную проекцию точки ***E***, лежащей в грани ***MN***. Через точку ***D***, лежащую в грани ***LM***, провести в этой грани горизонталь, не определяя горизонтальную проекцию точки ***D***.

1.5. Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности.

На поверхности конуса можно получить как окружности, так и прямые линии.

Для построения горизонтальной проекции точки ***A*** на поверхности конуса (рис. 48) конус рассекается горизонтальной плоскостью уровня **α (α_2)**, проходящей через точку ***A***.

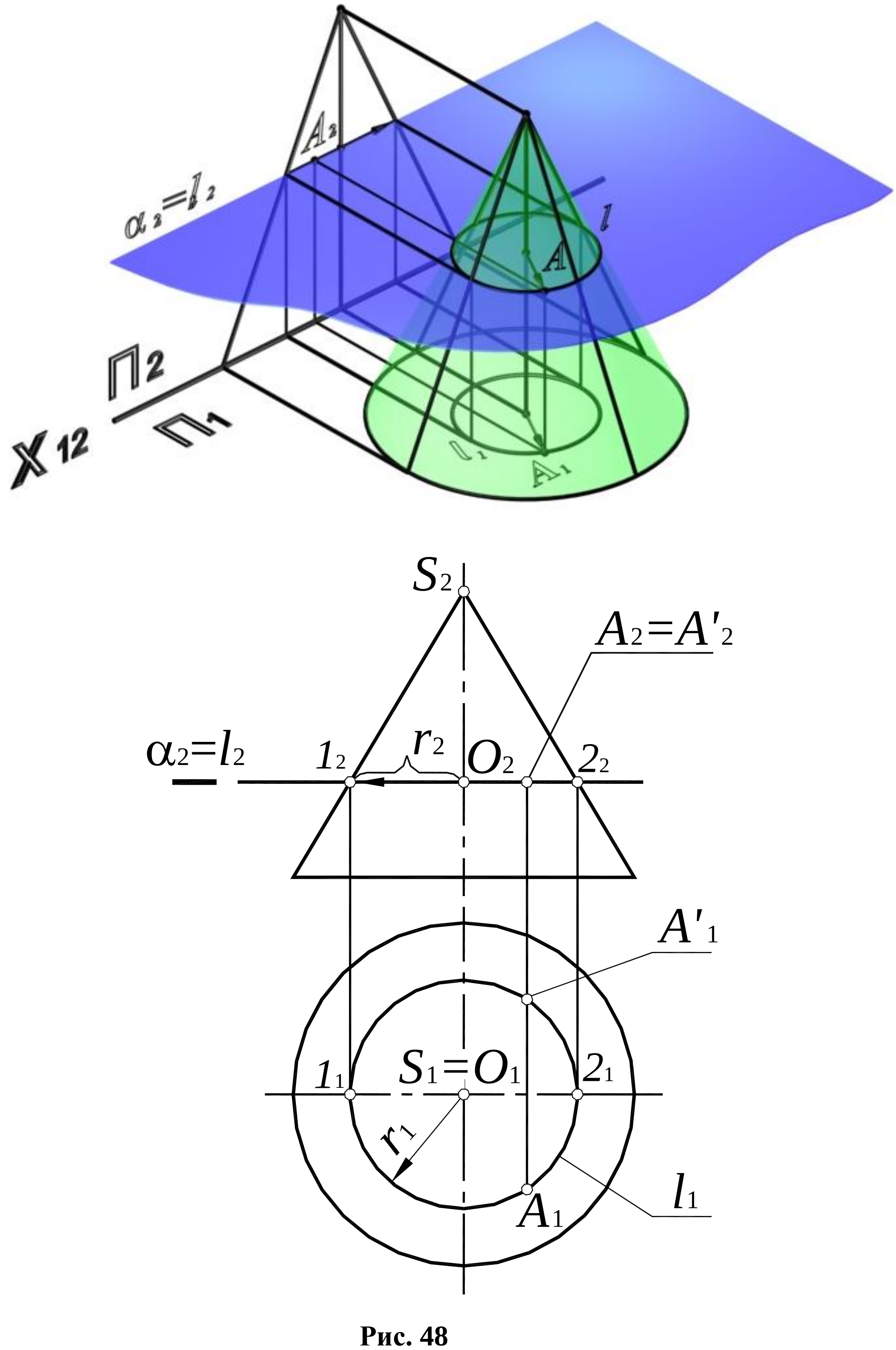


Рис. 48

В сечении конуса получается окружность радиуса r, которая проецируется на Π_1 без искажения – как окружность l_1 с центром в точке O_1 радиусом $r_1 = r$. Фронтальная проекция окружности – l_2 представляет собой отрезок $[1_2\ 2_2]$. Горизонтальная проекция точки A строится на пересечении вертикальной линии связи ($A_2\ A_1$) и окружности l_1. При этом фронтальной проекции A_2 могут соответствовать две точки – A и A'.

Поскольку любая плоскость, проходящая через вершину конуса, рассекает его по двум пересекающимся прямым, вспомогательную плоскость можно задать точкой A и осью вращения конуса (рис. 49).

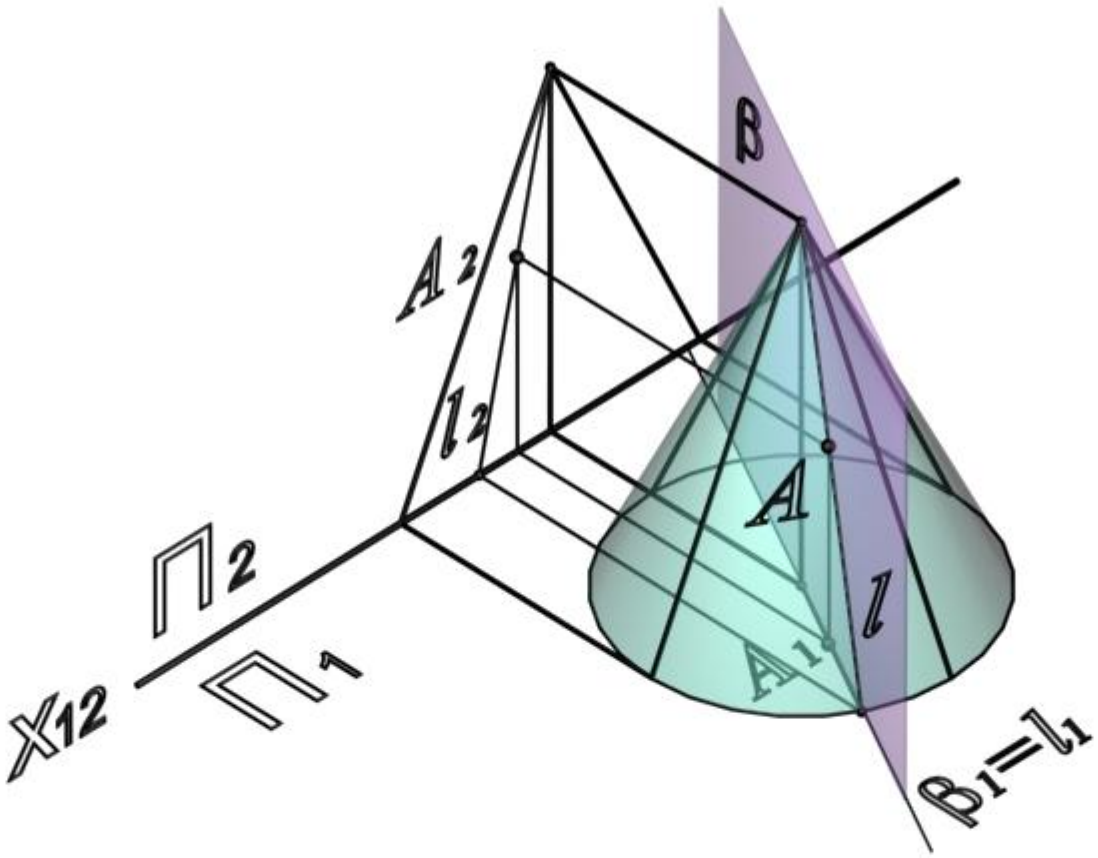


Рис. 49

Если необходимо определить фронтальную проекцию точки A, принадлежащей поверхности конуса (рис. 50), конус рассекается вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскостью β (A, i). Плоскость β (A, i) пересекает основание конуса в точке *1*. Вершина конуса S и точка *1* определят образующую конуса l, проходящую через точку A:

$$l_1=\beta_1,\ l_2=(S_2,\ 1_2);\ A_2 \in l_2.$$

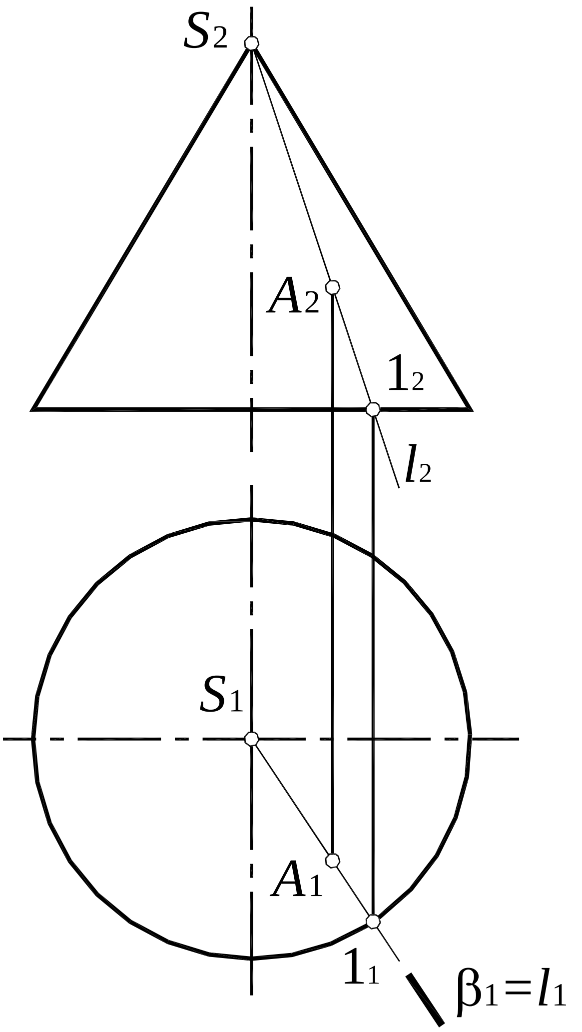


Рис. 50

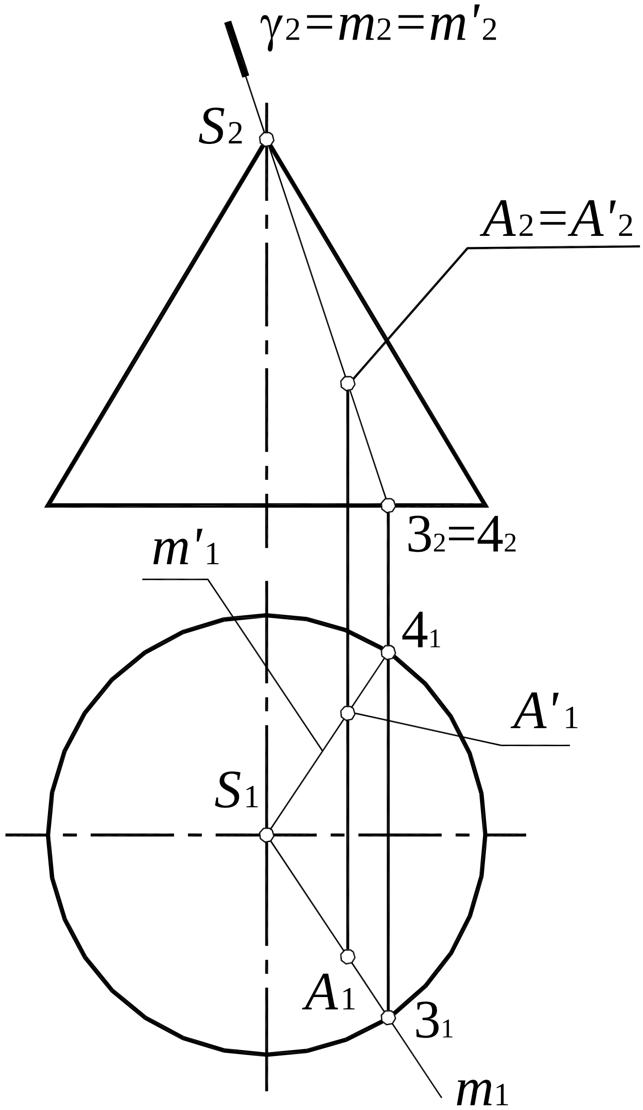


Рис. 51

Если необходимо определить горизонтальную проекцию точки *A*, принадлежащей поверхности конуса (рис. 51), конус рассекается вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью γ (γ_2), проходящей через вершину конуса *S*. Плоскость γ (γ_2) пересекает основание конуса в точках *3* и *4*. Вершина конуса *S* и точка *3* определят образующую конуса *m*, проходящую через точку *A*:

$$m_2 = \gamma_2,\ m_1 = (S_1,\ 3_1);\ A_1 \in m_1;$$
$$m'_2 = \gamma_2,\ m'_1 = (S_1,\ 3_1);\ A'_1 \in m'_1.$$

Таким образом, данной фронтальной проекции точки A_2 могут соответствовать две точки – *A* и *A′*.

38. Построить недостающие проекции точек:

A, ***B***, ***C***, ***D***, лежащих на поверхности сферы (рис. 52),

E, ***F***, ***K***, ***L*** – на боковой поверхности цилиндра (рис. 53),

M, ***N***, ***P*** – на поверхности открытого тора (рис.54),

S, ***Q***, ***R*** – на поверхности закрытого тора (рис. 55).

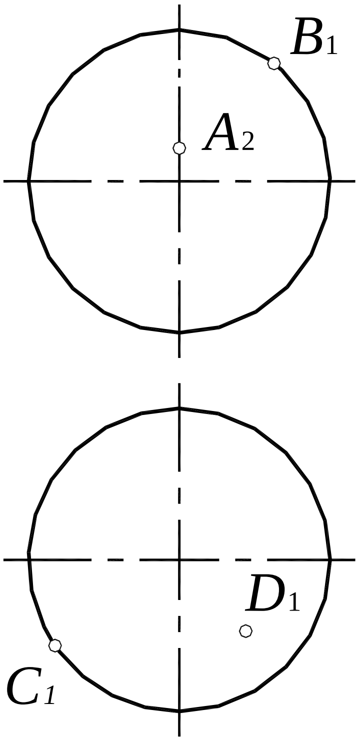


Рис. 52

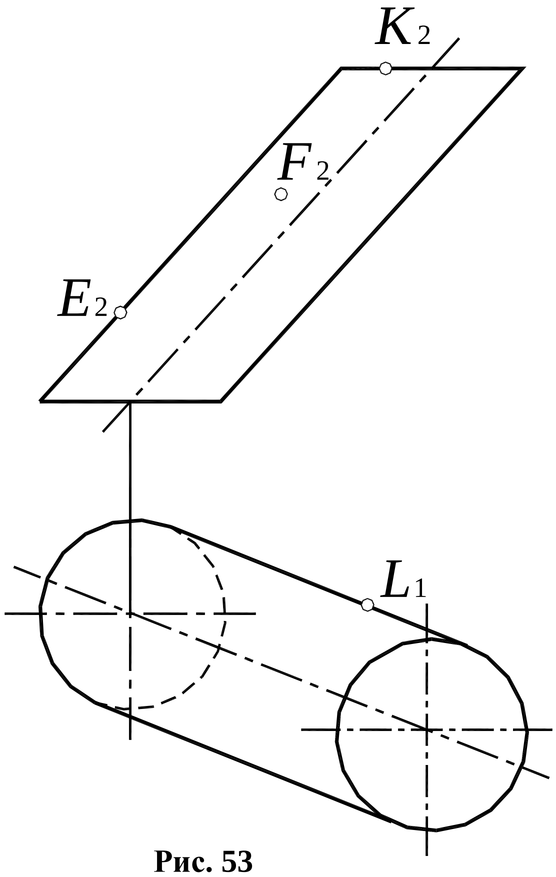


Рис. 53

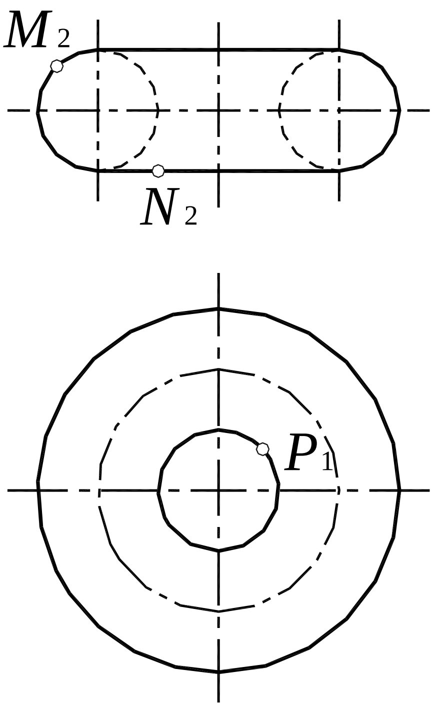


Рис. 54

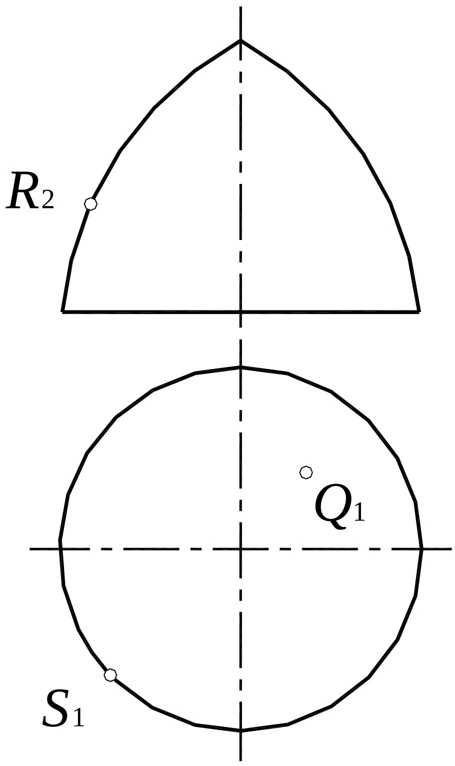


Рис. 55

2. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Прямая по отношению к плоскости может занимать три различных положения: принадлежать плоскости, быть параллельной плоскости или пересекаться с ней.

Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо линии, лежащей в этой плоскости. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

Задача об определении точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения называется первой позиционной задачей (рис. 56).

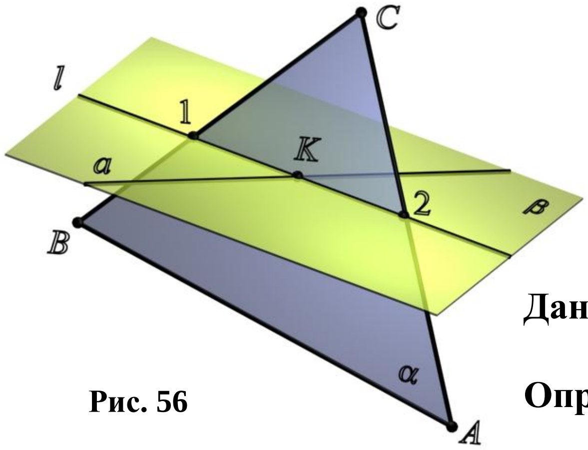


Рис. 56

Дано: α (Δ ABC) – плоскость общего положения.

$a = (a_1, a_2)$ – прямая общего положения.

Определить: $K = a \times \alpha$ (Δ ABC).

1. Заключить прямую a (a_1, a_2) во вспомогательную проецирующую плоскость β (β_2) (рис. 57).

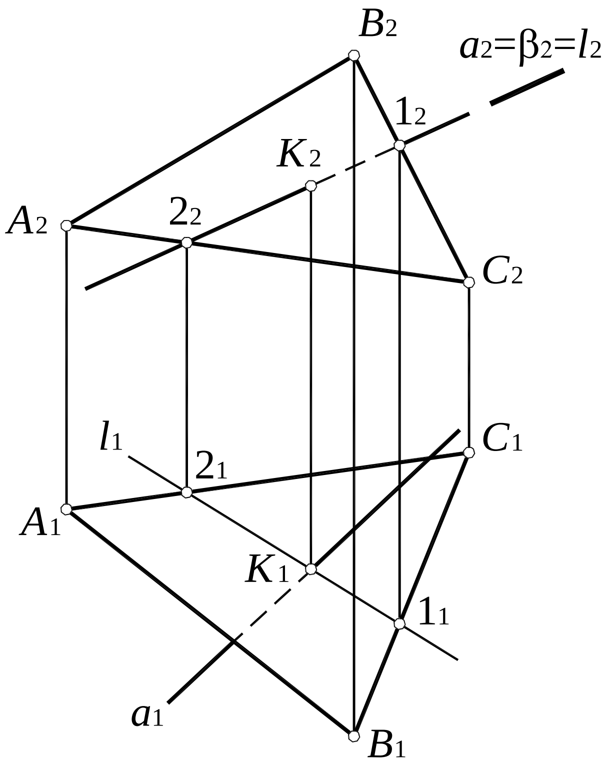


Рис. 57

2. Определить линию пересечения l ($1–2$) вспомогательной плоскости β (β_2) и заданной плоскости α ($\Delta\, ABC$):

$$l = \alpha\ (\Delta\, ABC) \cap \beta\ (\beta_2);\ l_2 = \beta_2;\ l_1 \subset (1_1–2_1).$$

3. Определить взаимное положение заданной прямой a и полученной прямой l. В данном случае прямые a и l пересекаются в точке K, которая и является искомой точкой пересечения прямой a (a_1, a_2) и плоскостиα ($\Delta\, ABC$):

$$l_1 \times a_1 = K_1;\ K_2 \in a_2;\ K = a\ (a_1, a_2) \times \alpha\ (\Delta\, ABC).$$

4. Считая плоскость непрозрачной, определить видимость прямой a (a_1, a_2) относительно плоскости α ($\Delta\, ABC$).

39. Построить точку пересечения прямой ***a*** и плоскости частного положения $\boldsymbol{\beta}$ (рис. 58, 59).

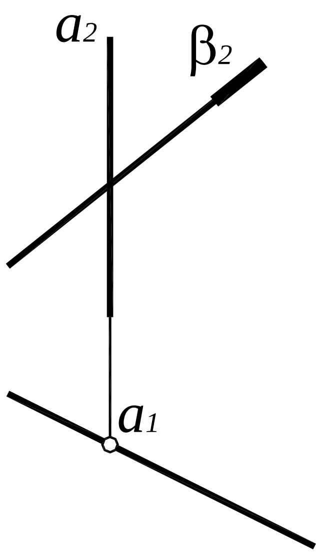


Рис. 58

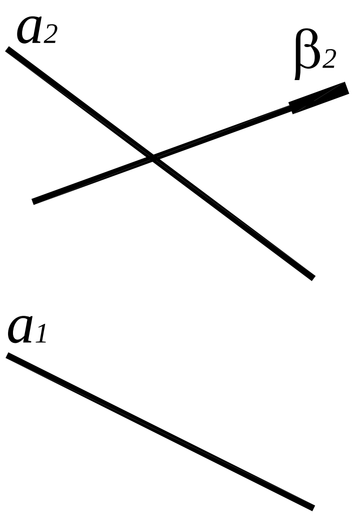


Рис. 59

40. Построить линию пересечения двух плоскостей частного положения $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\delta}$ (рис. 60, 61).

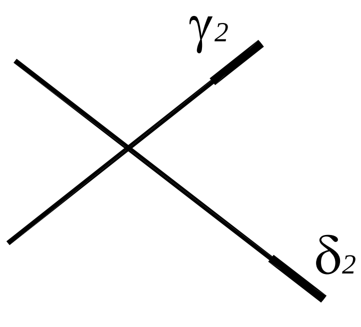


Рис. 60

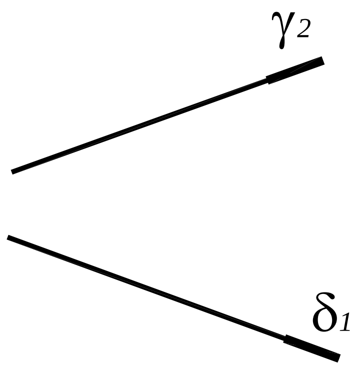


Рис. 61

41. Построить линию пересечения плоскости **α (*a*×*b*)** с плоскостью **μ//П$_1$** (рис. 62).

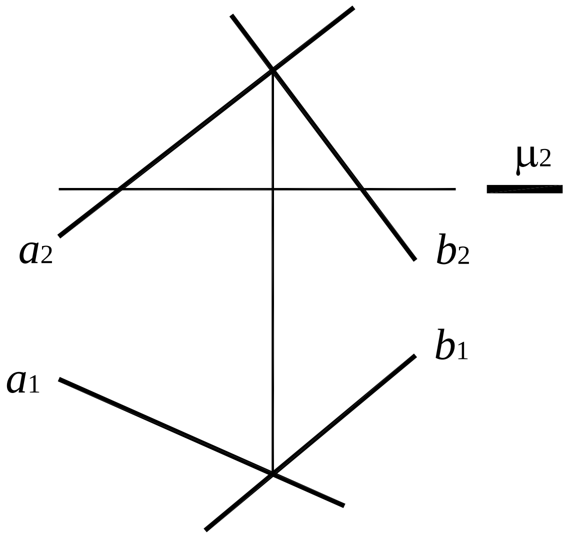


Рис. 62

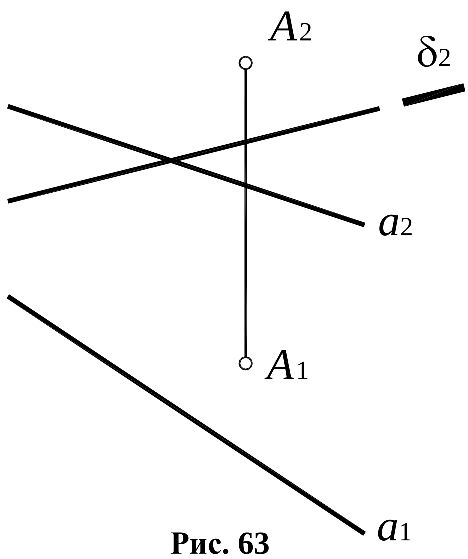


Рис. 63

42. Построить линию пересечения плоскости **α (*A, a*)** с плоскостью **δ (δ$_2$)**⊥ **П$_2$** (рис. 63).

43. Построить проекции сечения многогранников проецирующей плоскостью **δ (δ$_2$)** (рис. 64, 65).

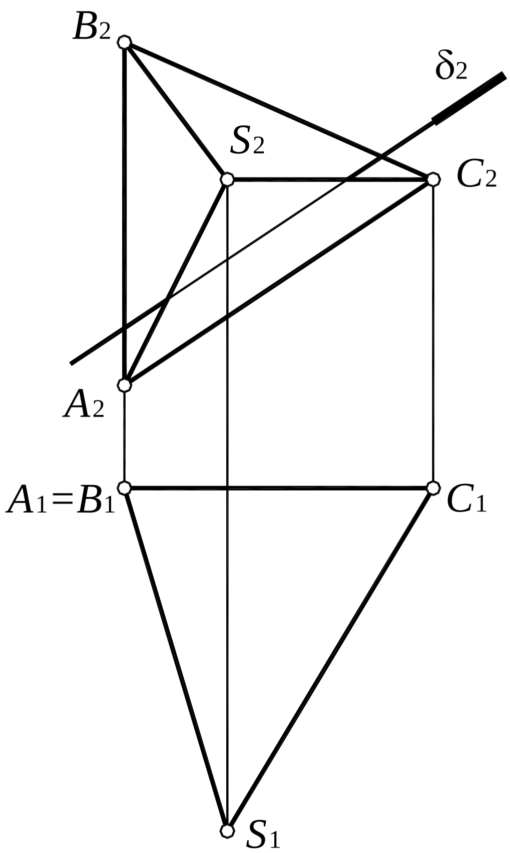


Рис. 64

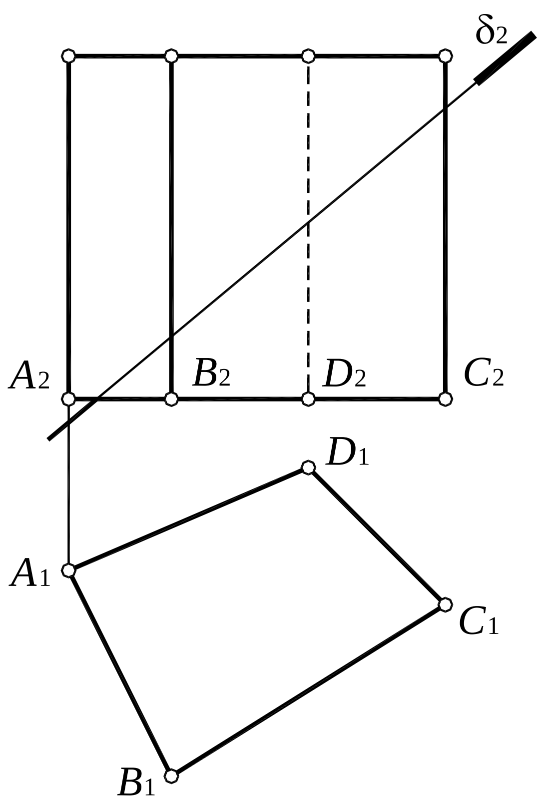


Рис. 65

44. Построить сечение многогранников плоскостью общего положения α **(*A*, *a*)** (рис. 66) и β **(*h*, *a*)** (рис. 67).

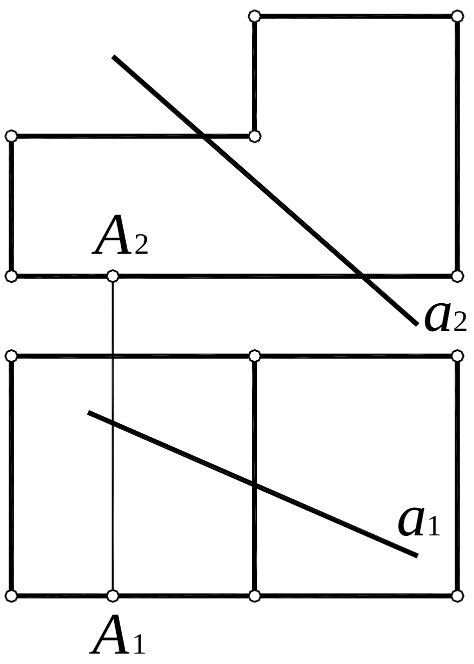


Рис. 66

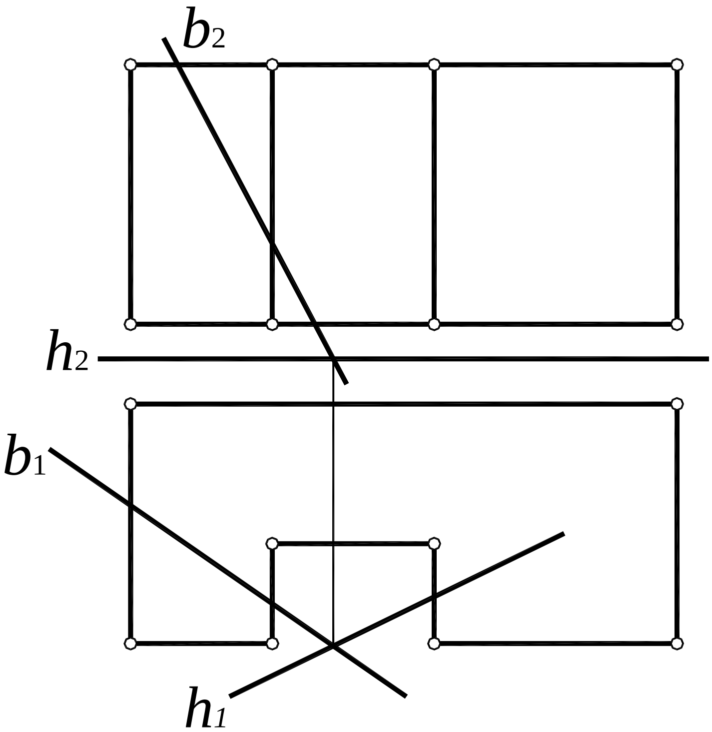


Рис. 67

45. Построить точку пересечения ***K*** прямой ***a*** с плоской фигурой и определить видимость прямой (рис. 68 – 71).

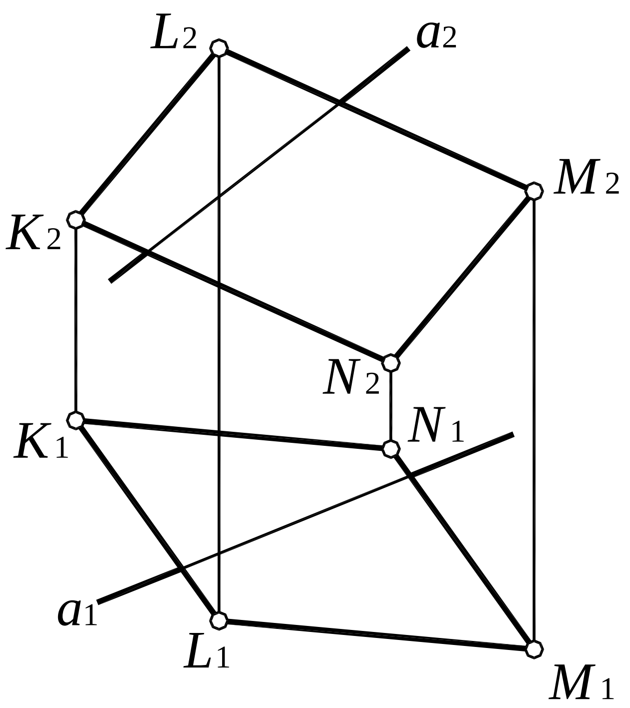


Рис. 68

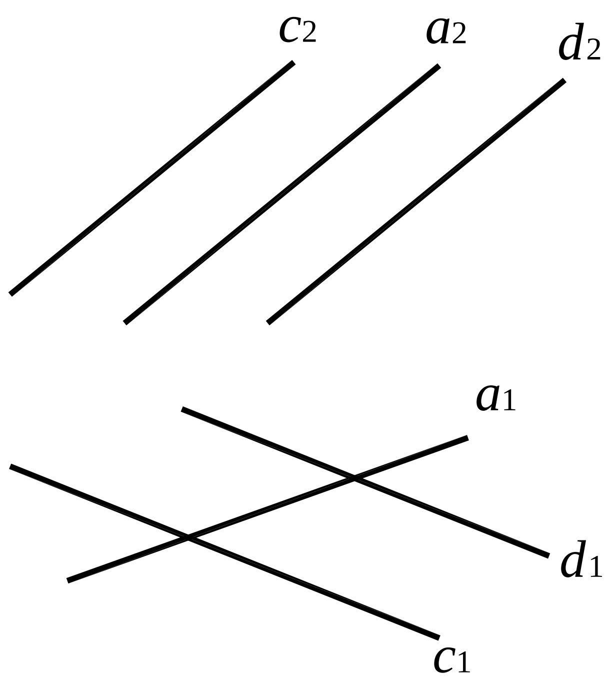


Рис. 69

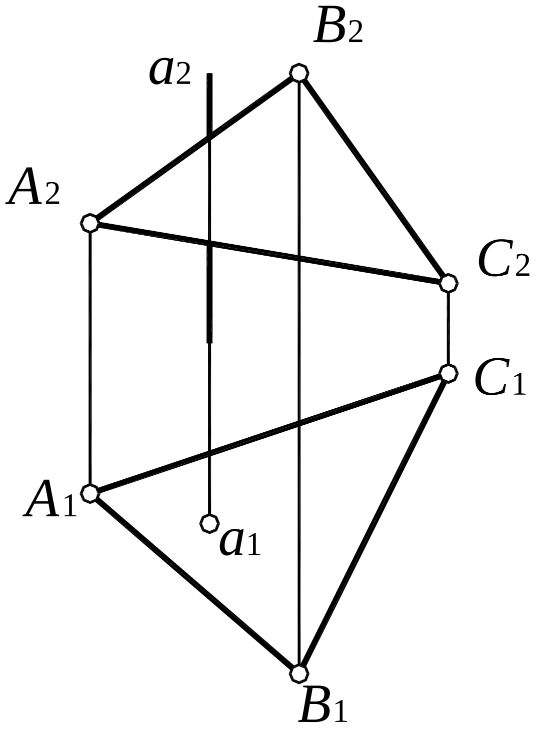


Рис. 70

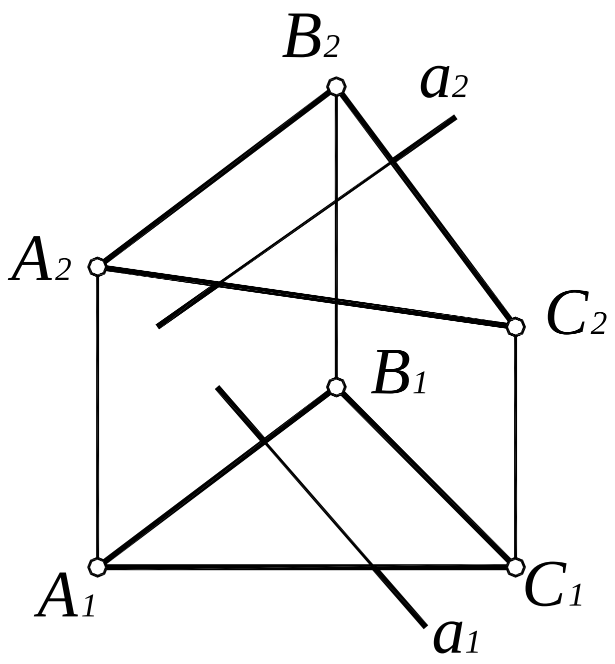


Рис. 71

46. Определить относительное положение прямой ***a*** и плоскости α и определить видимость прямой, считая плоскость непрозрачной и безграничной (рис. 72, 73).

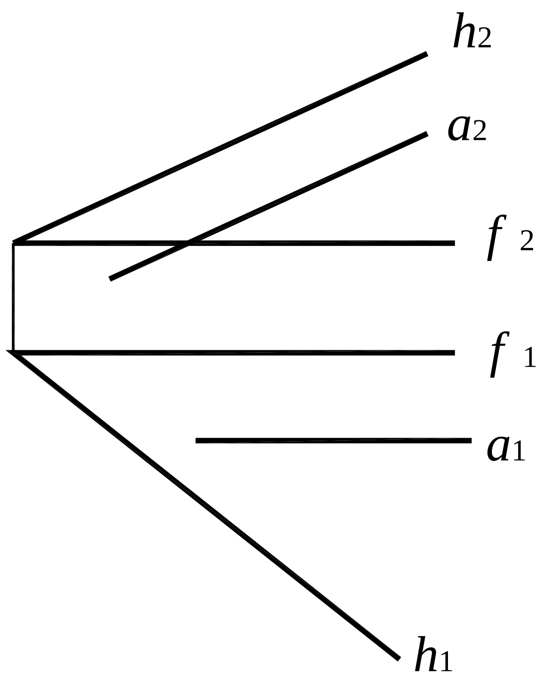


Рис. 72

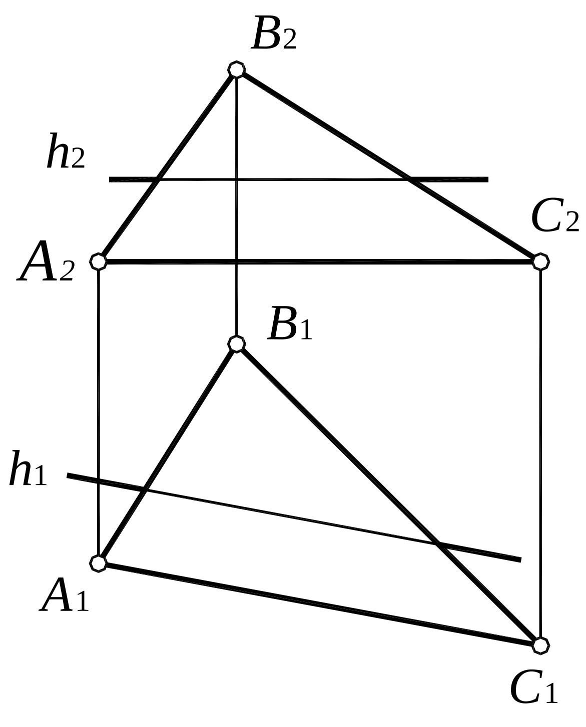


Рис. 73

47. Построить точку пересечения ***K*** прямой ***a*** с плоскостью **α.**

Определить видимость прямой, считая плоскость непрозрачной и безграничной (рис. 74 – 77).

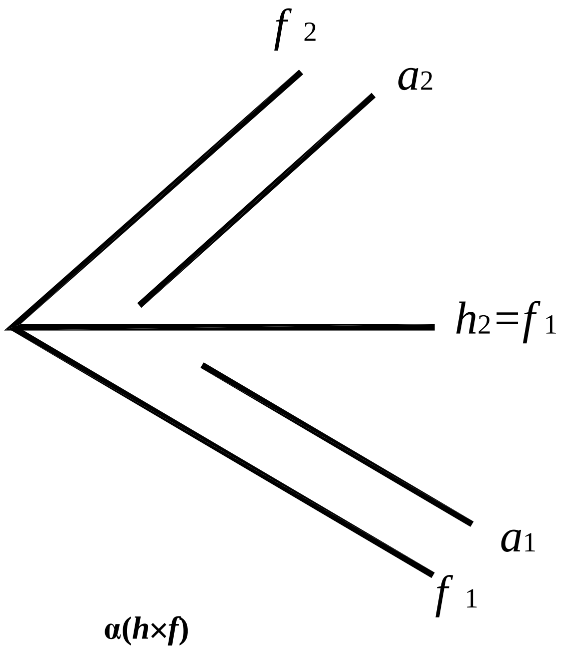


Рис. 74

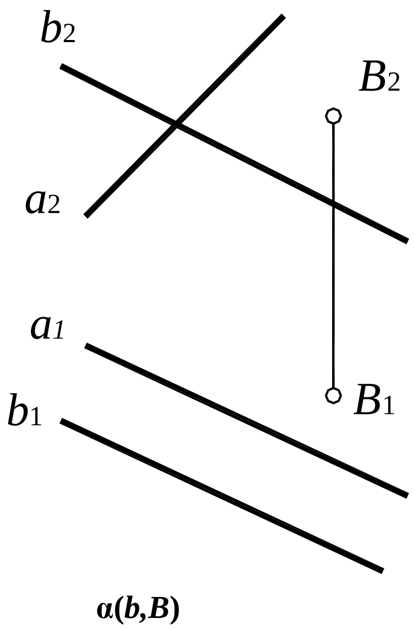


Рис. 75

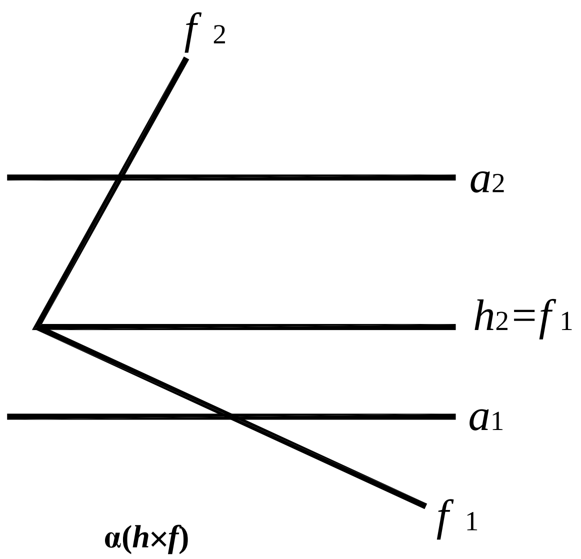


Рис. 76

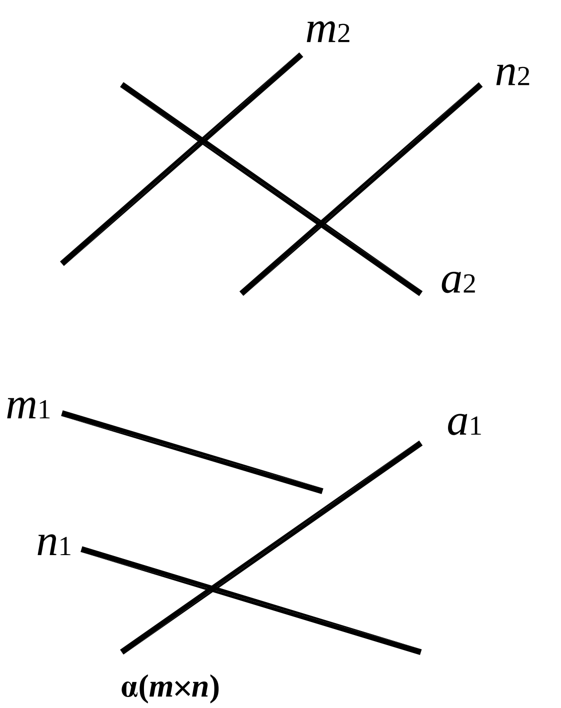


Рис. 77

2.1. Сечение многогранника плоскостью общего положения

Построить сечение призмы плоскостью α ($a \times l$) (рис. 78).

1. Основание *ABC* принадлежит фронтально-проецирующей плоскости β (β_2), следовательно, линия пересечения основания с плоскостью α ($a \times l$) определяется как линия пересечения проецирующей плоскости и плоскости общего положения:

$$\beta\ (\beta_2) \cap \alpha\ (a \times l) = n;\ n_2 = \beta_2;\ n_1 = (1_1 - 2_1).$$

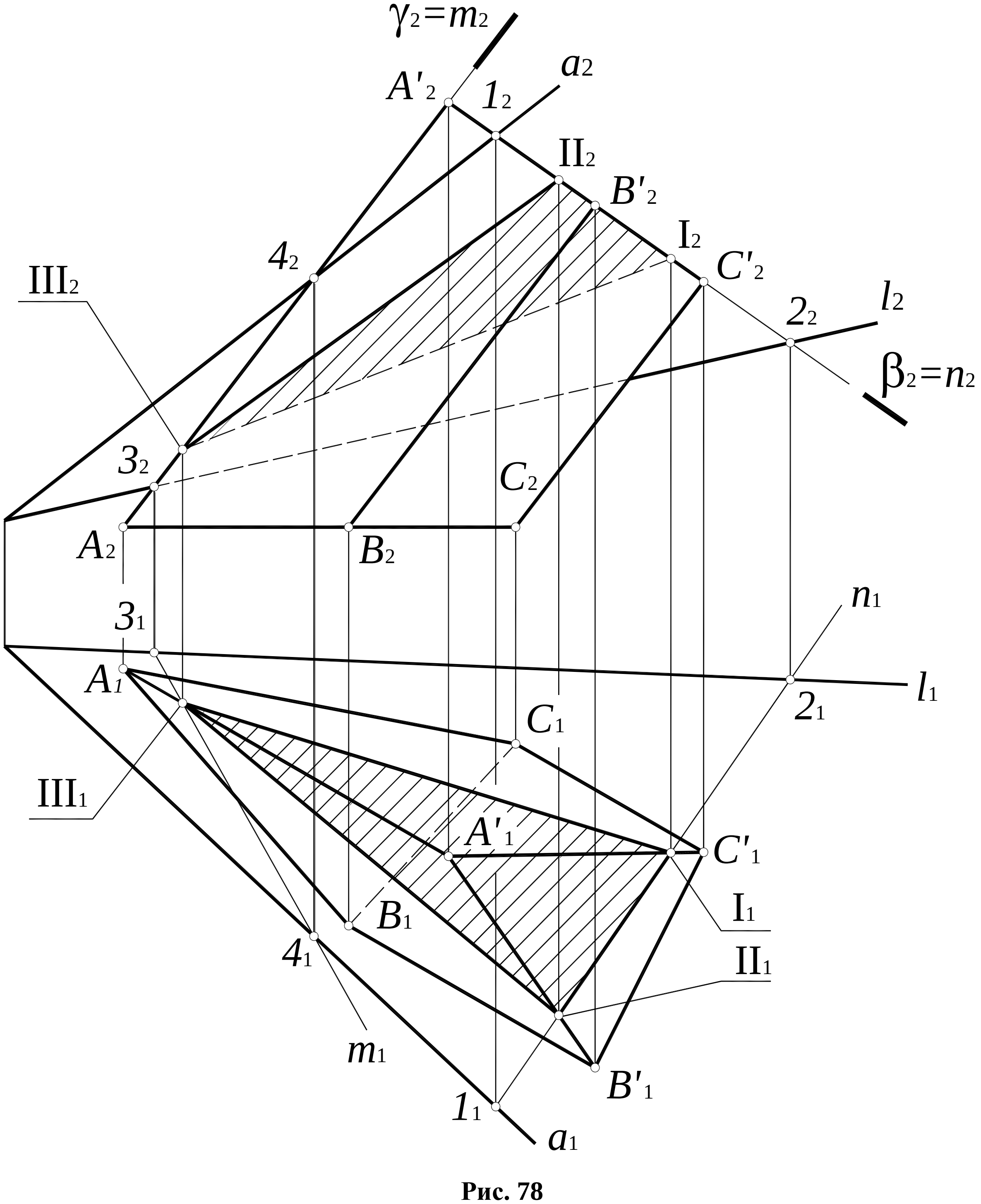


Рис. 78

Поскольку основание призмы ограничено треугольником ABC, точки пересечения полученной линии со сторонами треугольника являются искомыми точками сечения: $AC \times n$ =I; $AB \times n$ =II.

2. Точка III определяется как точка пересечения ребра AA' с плоскостью общего положения α ($a \times l$) (первая позиционная задача):

$$AA' \in \gamma\ (\gamma_2);$$
$$\gamma\ (\gamma_2) \cap \alpha\ (a \times l) = m;\ m_2 = \gamma_2;\ m_1 = (3_1 - 4_1);$$
$$AA' \times m = \text{III}.$$

Точки пересечения прямых (BB') и (CC') находятся за пределами ребер призмы, поэтому построения этих точек не показаны.

3. Сечение данной призмы плоскостью α ($a \times l$) представляет собой треугольник I, II, III. Видимость сечения определяется в соответствии с видимостью граней призмы.

48. Построить точки пересечения прямой $\boldsymbol{d}$ с гранями многогранника и определить видимость прямой (рис. 79, 80).

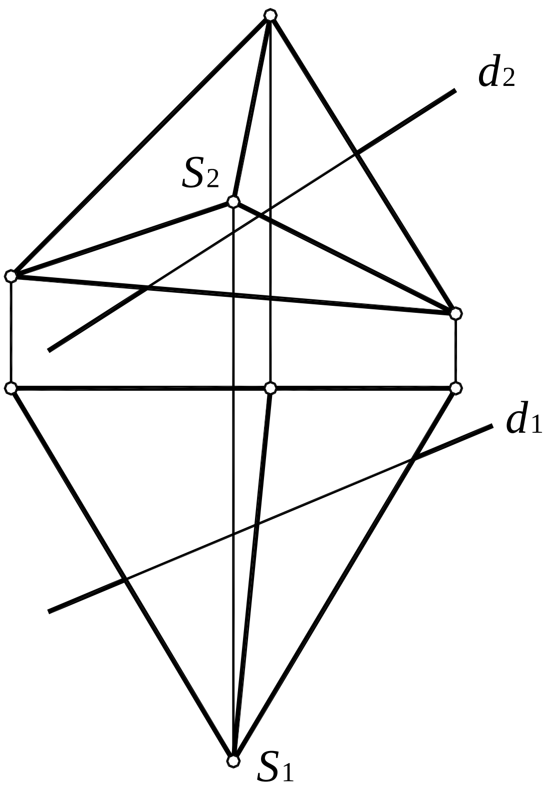


Рис. 79

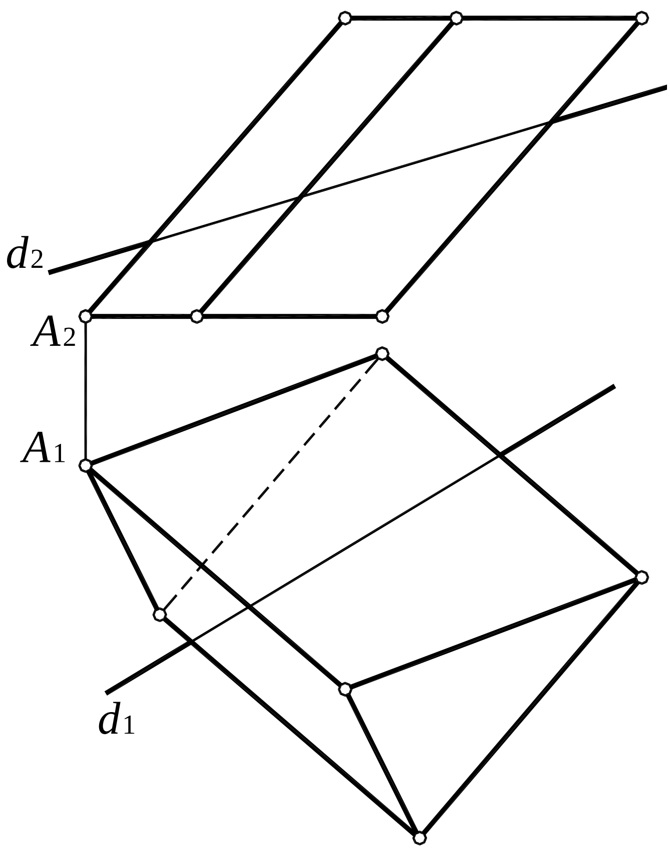


Рис. 80

2.2. Пересечение прямой с поверхностью

Прямая по отношению к поверхности может занимать следующие положения:

- прямая касается поверхности (одна общая точка);
- прямая пересекает поверхность (две и более общих точек);
- прямая не пересекает и не касается поверхности (общих точек нет).

Алгоритм решения задач об определении взаимного положения поверхности и прямой аналогичен решению первой позиционной задачи (рис. 81).

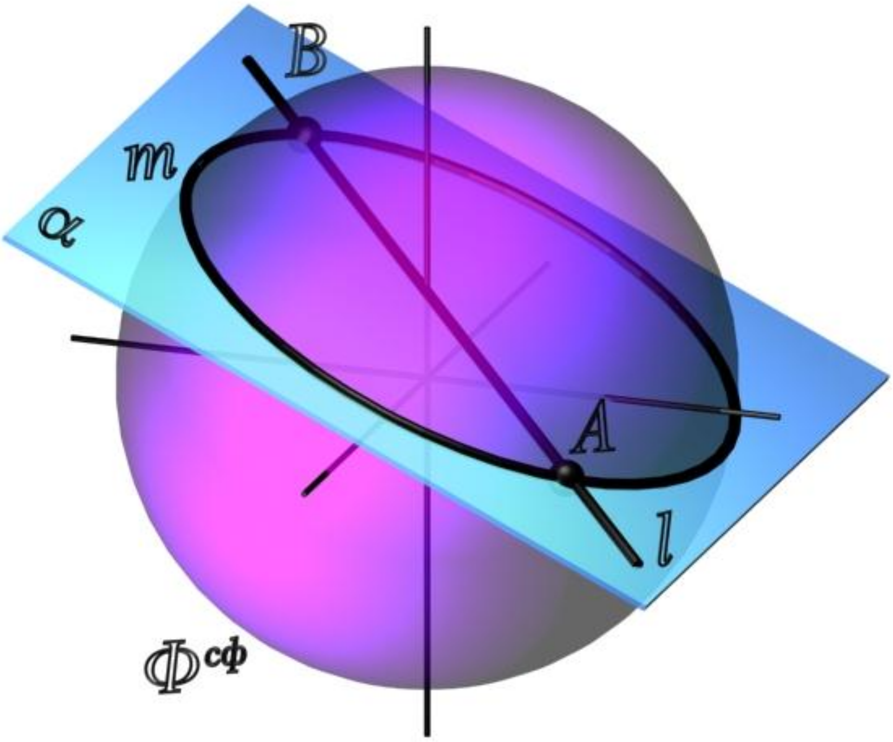


Рис. 81

1. Заключить прямую *l* во вспомогательную плоскость частного положения α.
2. Определить линию пересечения вспомогательной плоскости и заданной поверхности, то есть построить сечение поверхности вспомогательной плоскостью.
3. Определить взаимное положение полученной линии (сечения) и заданной прямой. Точки пересечения являются искомыми точками пересечения прямой с поверхностью.
4. Определить видимость прямой относительно поверхности.

Построение точек пересечения горизонтали с поверхностью сферы на комплексном чертеже приведено на рис. 82.

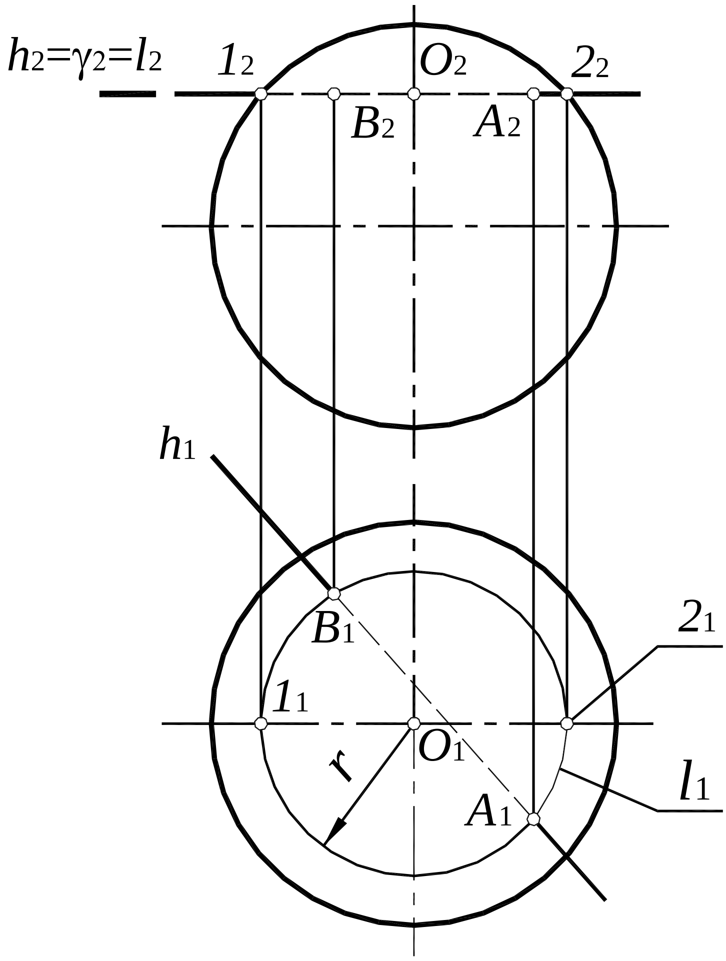


Рис. 82

49. Построить точки пересечения поверхности сферы с прямой и определить видимость прямой (рис. 83, 84).

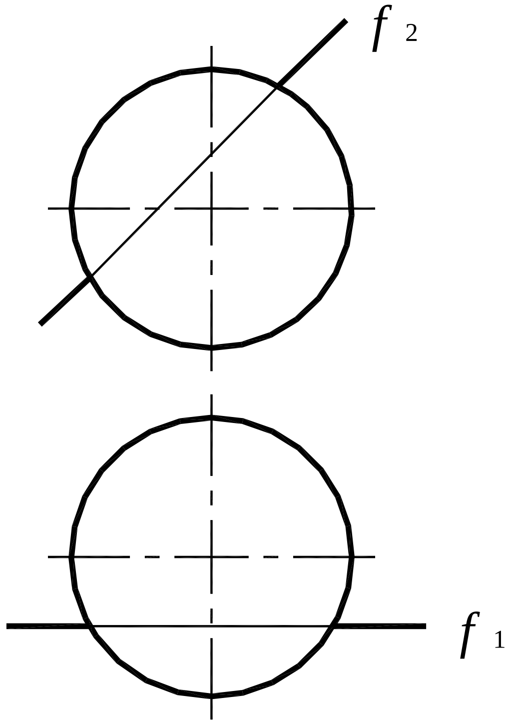


Рис. 83

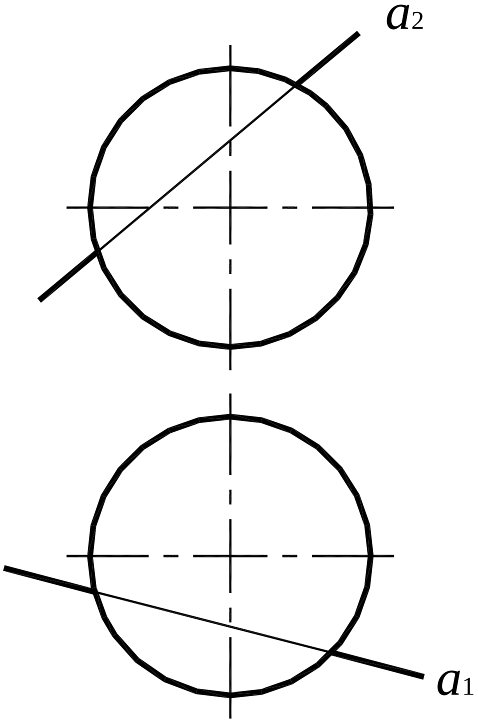


Рис. 84

50. Построить точки пересечения поверхности конуса с прямой и определить видимость прямой (рис. 85, 86).

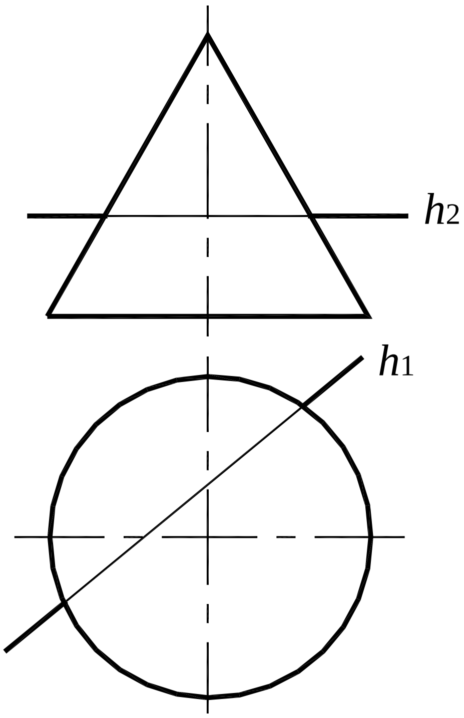


Рис. 85

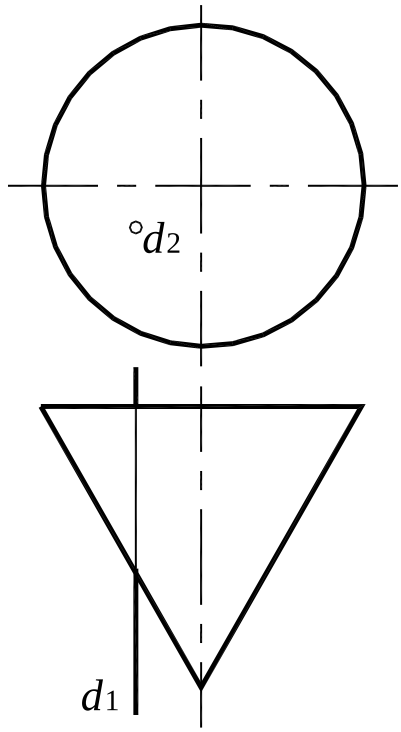


Рис. 86

51. Построить точки пересечения поверхности тора с прямой ***m*** **(*m*₁, *m*₂)** (рис. 87, 88).

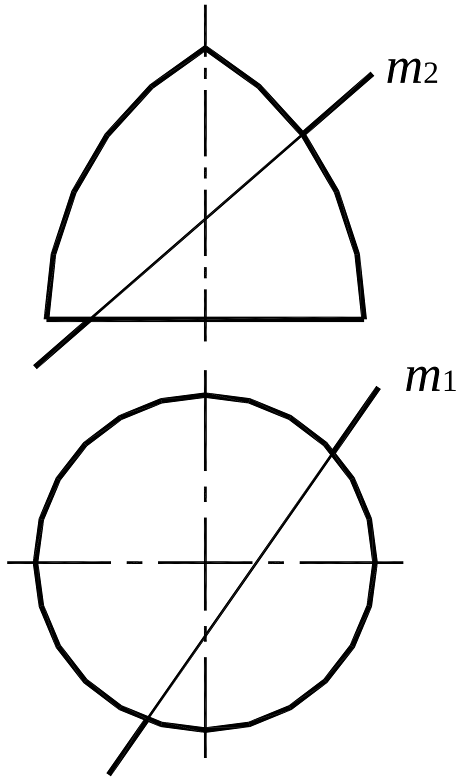


Рис. 87

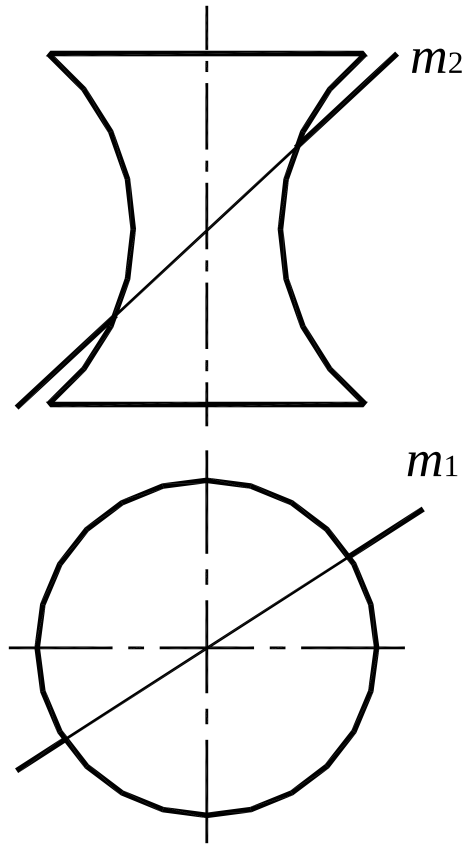


Рис. 88

52. Построить точки пересечения поверхности конуса с прямой, не применяя в построении кривых линий, и определить видимость прямой (рис. 89, 90).

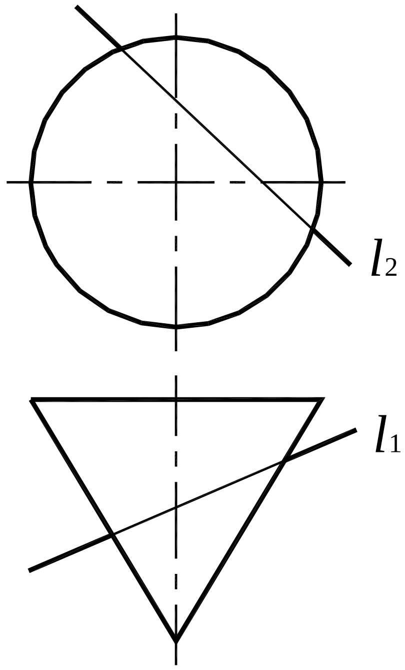


Рис. 89

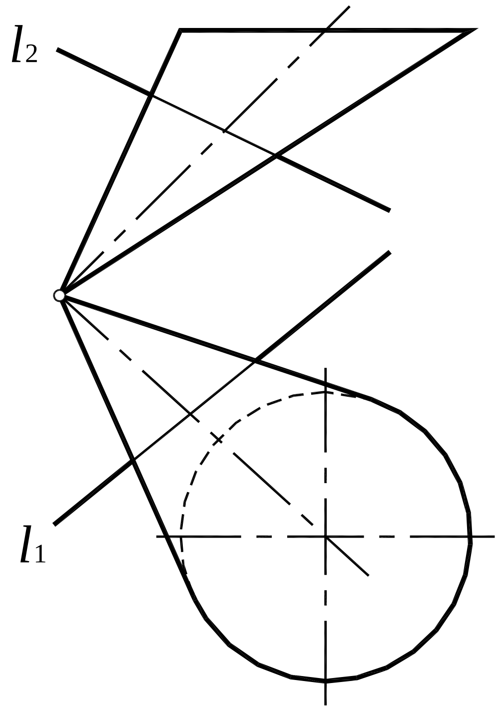


Рис. 90

53. Построить недостающие проекции линии ***MN***, принадлежащей поверхности конуса (рис. 91 – 93).

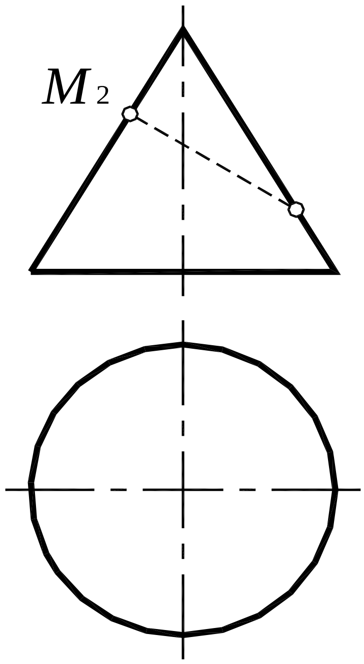


Рис. 91

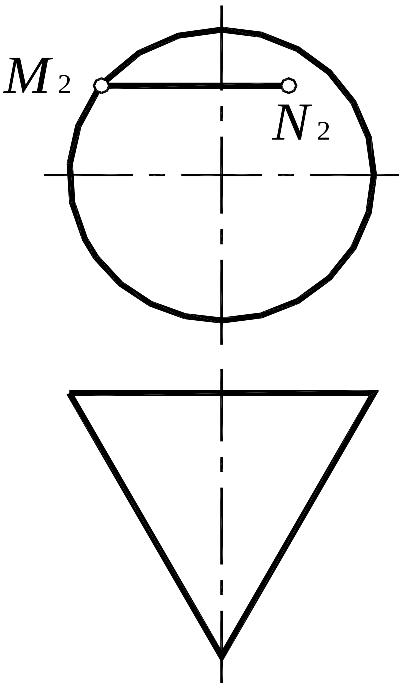


Рис. 92

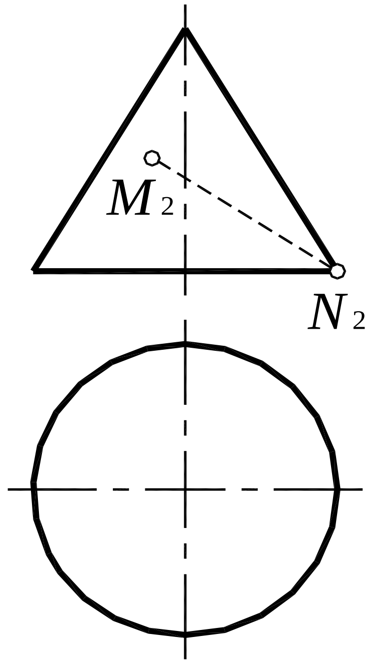


Рис. 93

2.3. Вторая позиционная задача

Вторая позиционная задача – это задача об определении линии пересечения двух плоскостей (рис. 94).

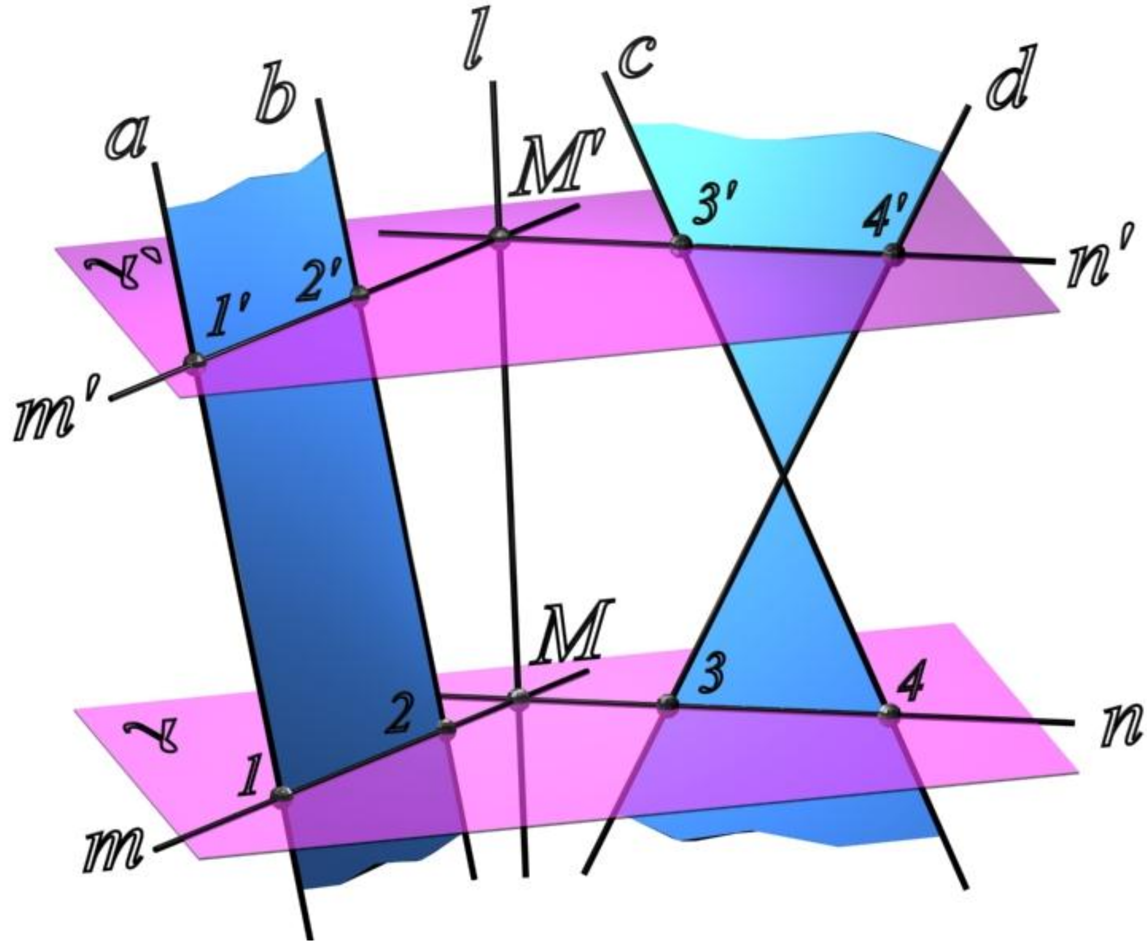


Рис. 94

1. Пересечь данные плоскости вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью γ (γ_2) $\perp$ Π_2 (рис. 95).

2. Определить линии пересечения вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей:

$$m = \gamma\ (\gamma_2) \cap \alpha\ (a \mathbin{//} b);\ m_2 = \gamma_2;\ m_1 \in \alpha_1;$$
$$n = \gamma\ (\gamma_2) \cap \beta\ (c \times d);\ n_2 = \gamma_2;\ n_1 \in \beta_1.$$

3. Определить точку пересечения прямых n и m: $M = n \times m$.

4. Точка $M \subset m \Rightarrow M \subset \alpha\ (a \mathbin{//} b)$; $M \subset n \Rightarrow M \subset \beta\ (c \times d)$. Таким образом, точка M является одной из точек искомой линии пересечения плоскостей.

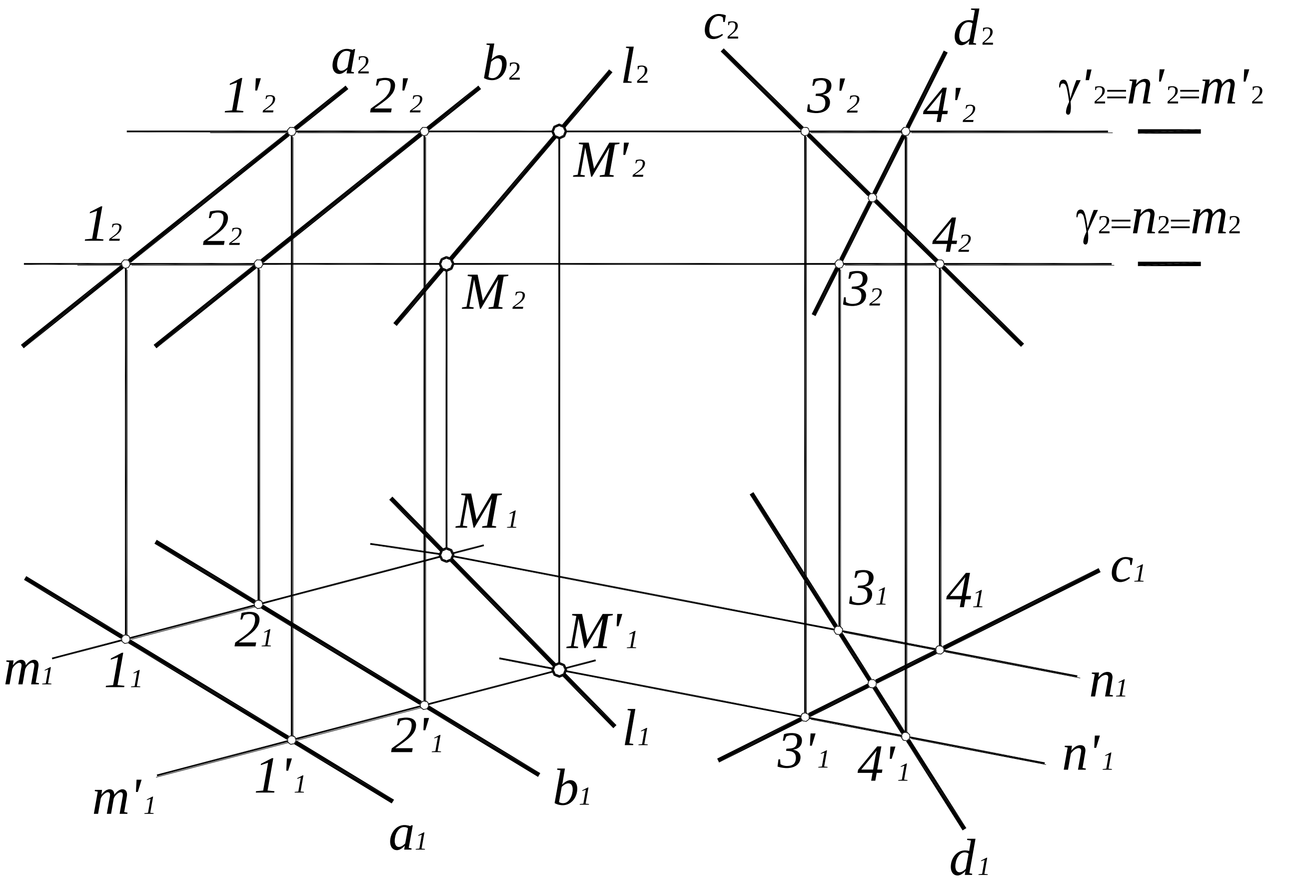


Рис. 95

5. Точка M′ определяется аналогично, с помощью второй вспомогательной плоскости γ′(γ′2).

6. Через полученные точки *M* и *M′* провести прямую *l*. Прямая *l* – искомая линия пересечения плоскостей α (*a* // *b*) и β (*c* × *d*).

54. Построить линию пересечения двух плоскостей **α (*c* × *d*)** и **β (*a* // *b*)** (рис. 52), **δ (*A, a*)** и **γ (*B, b*)** (рис. 96, 97).

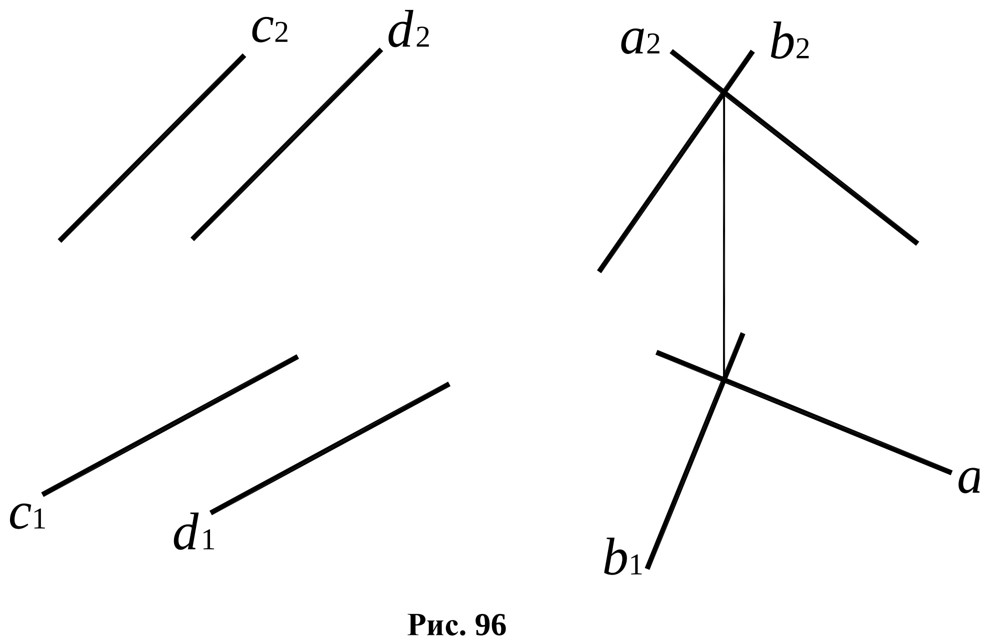


Рис. 96

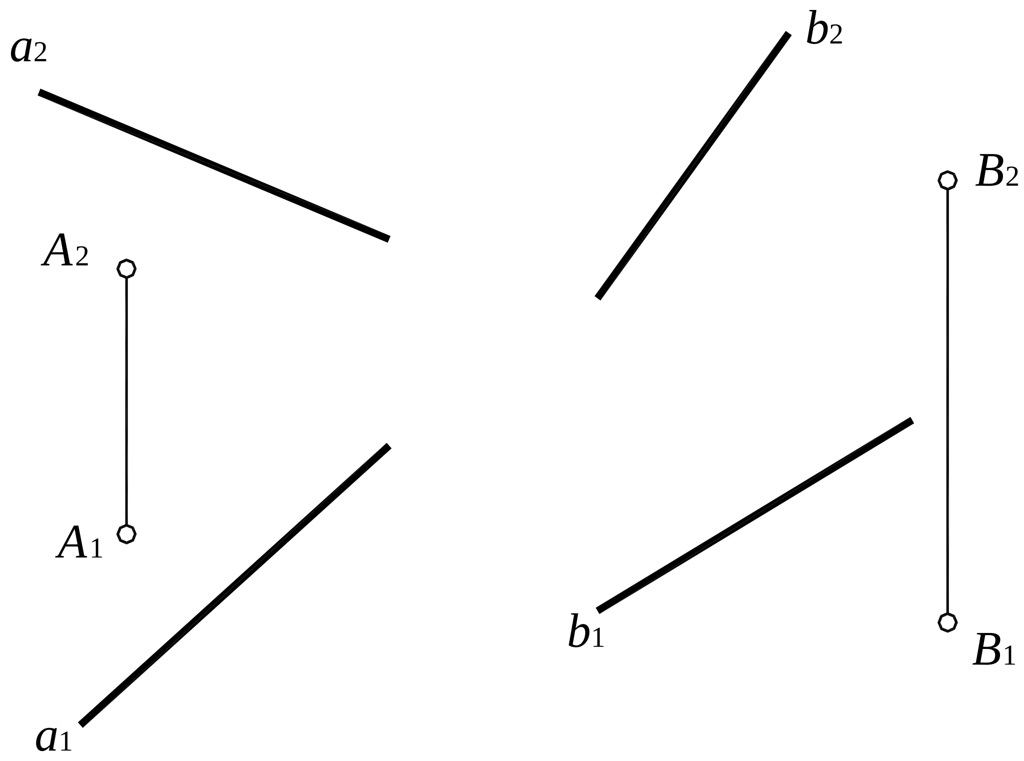


Рис. 97

55. Определить относительное положение двух плоскостей **α (*A, a*)** и **β (*c* × *d*)** (рис. 98), **δ (*ABC*)** и **γ (*m* // *n*)** (рис. 99).

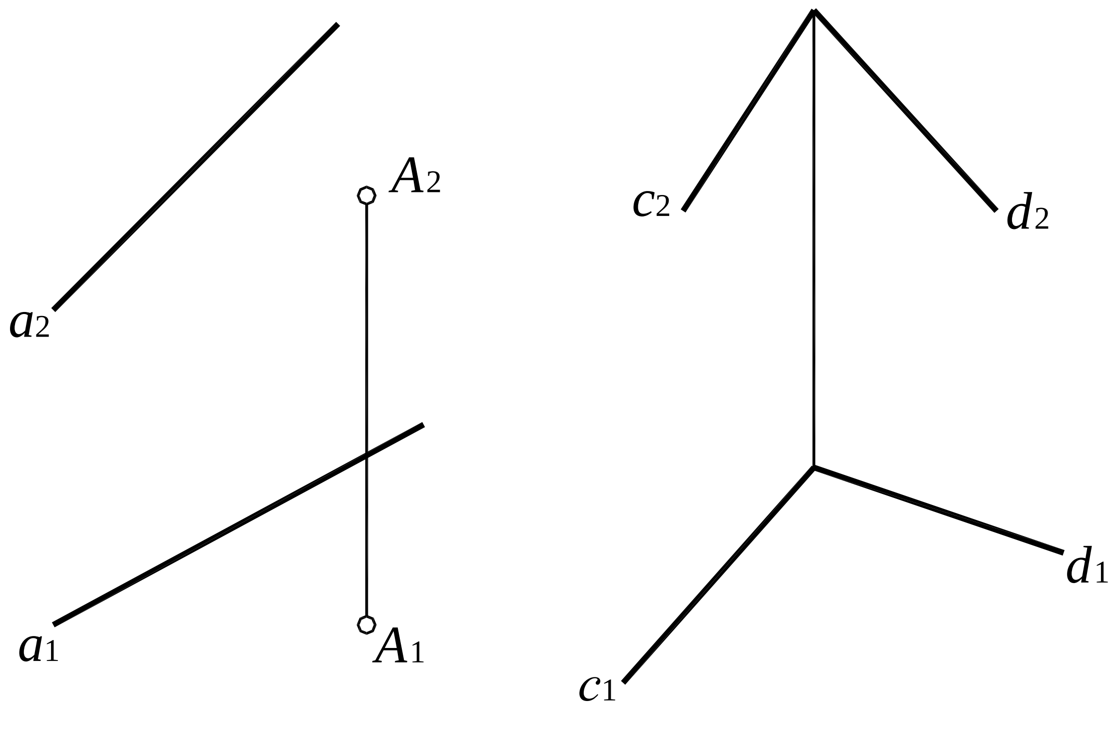


Рис. 98

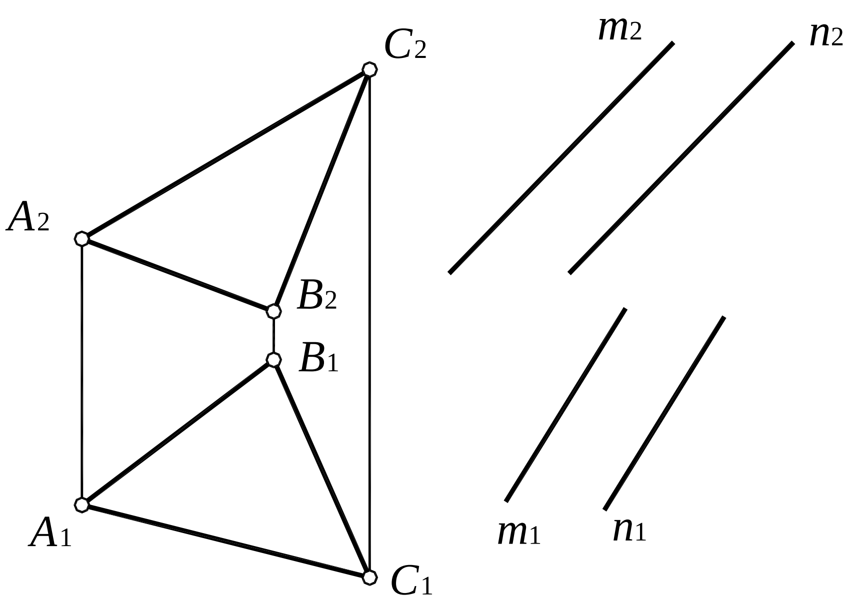


Рис. 99

56. Построить линию пересечения двух треугольных непрозрачных пластин и определить их видимость (рис. 100).

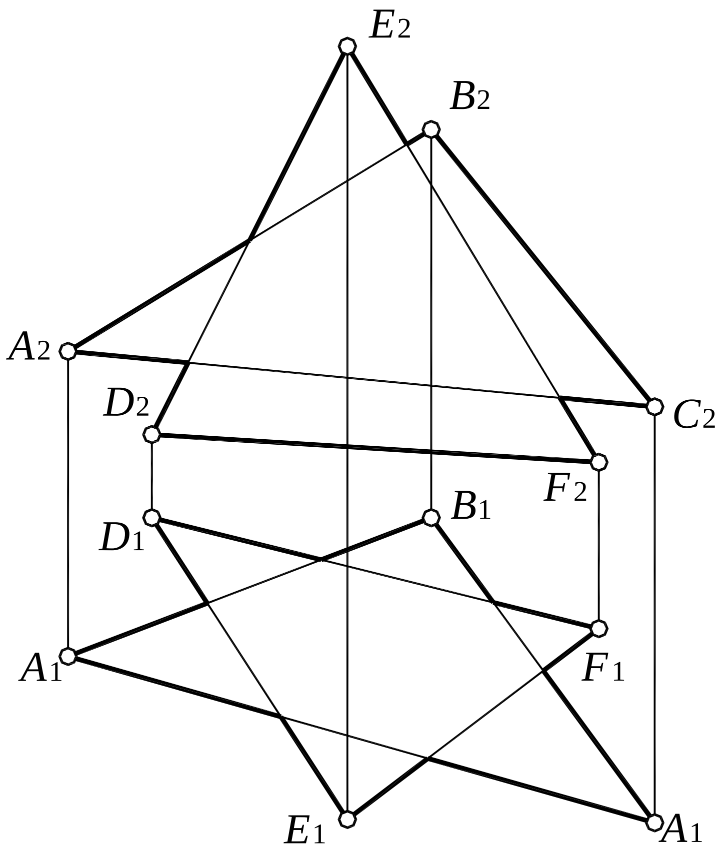


Рис. 100

57. Построить линию пересечения треугольной пластины и поверхности пирамиды и определить видимость, считая пластину и грани пирамиды непрозрачными (рис. 101).

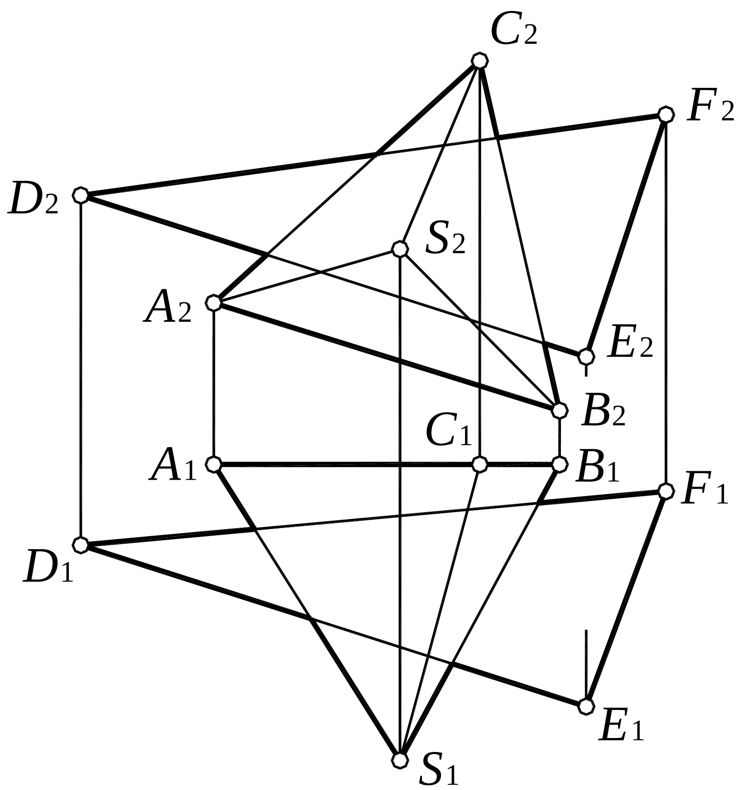


Рис. 101

58. Построить сечение пирамиды ***SABCD*** плоскостью **γ (*L*, *l*)**, причем точка ***L*** принадлежит грани ***SD*** (рис. 102).

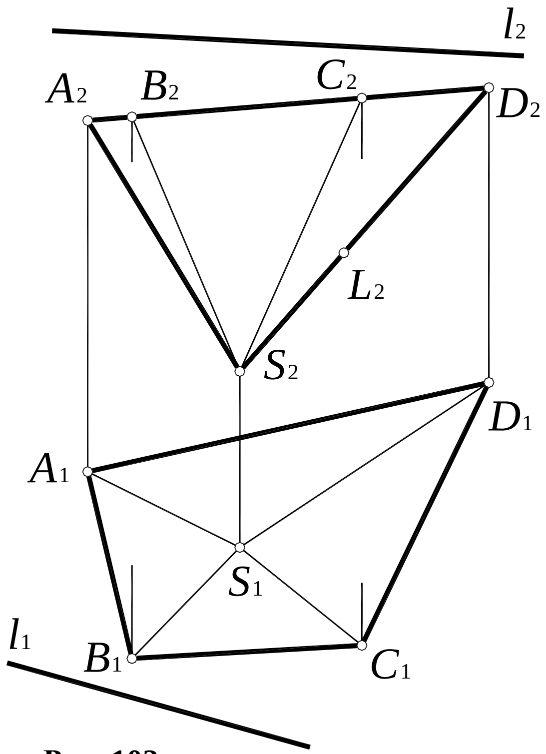


Рис. 102

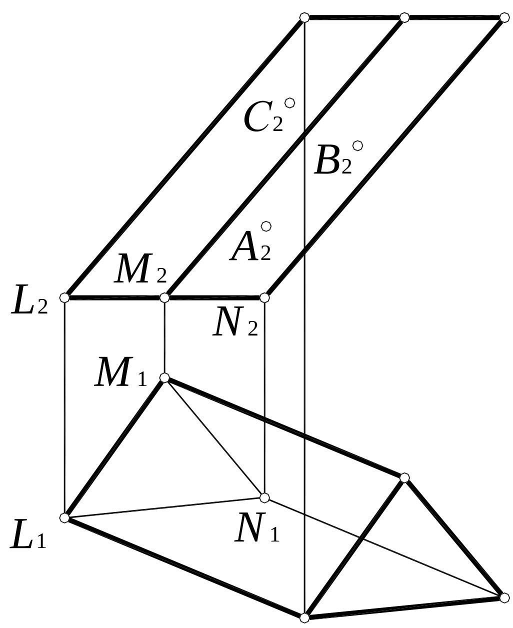


Рис. 103

59. Построить сечение призмы ***LMN*** плоскостью **δ (*ABC*)**, причем точка ***A*** принадлежит грани ***LN***, ***B*** – грани ***MN***, ***C*** – ***LM*** (рис. 103).

2.4. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности закрытого тора с фронтально-проецирующей плоскостью $\mu(\mu_2)$ (рис. 104). Сначала определяются опорные точки: *1* и *2* – точки пересечения плоскости μ (μ_2) с плоскостью основания тора, точка *3* – точка пересечения плоскости μ (μ_2) с очерковой образующей тора.

Промежуточные точки *4* и *5* строятся при помощи вспомогательной плоскости уровня γ (γ_2), которая рассекает поверхность тора по линии $l = \Phi \cap \gamma\ (\gamma_2)$; $l_2 = \gamma_2$; где l – окружность радиуса r, а плоскость μ (μ_2) – по фронтально-проецирующей прямой $p = \mu\ (\mu_2) \cap \gamma\ (\gamma_2)$; $p \perp \Pi_2$; $l \times p = 4, 5$.

Точки *6*, *7*, *8* и *9* определяются аналогично. Полученные точки соединяют плавной лекальной кривой и определяют видимость линии пересечения ***m*** относительно поверхности.

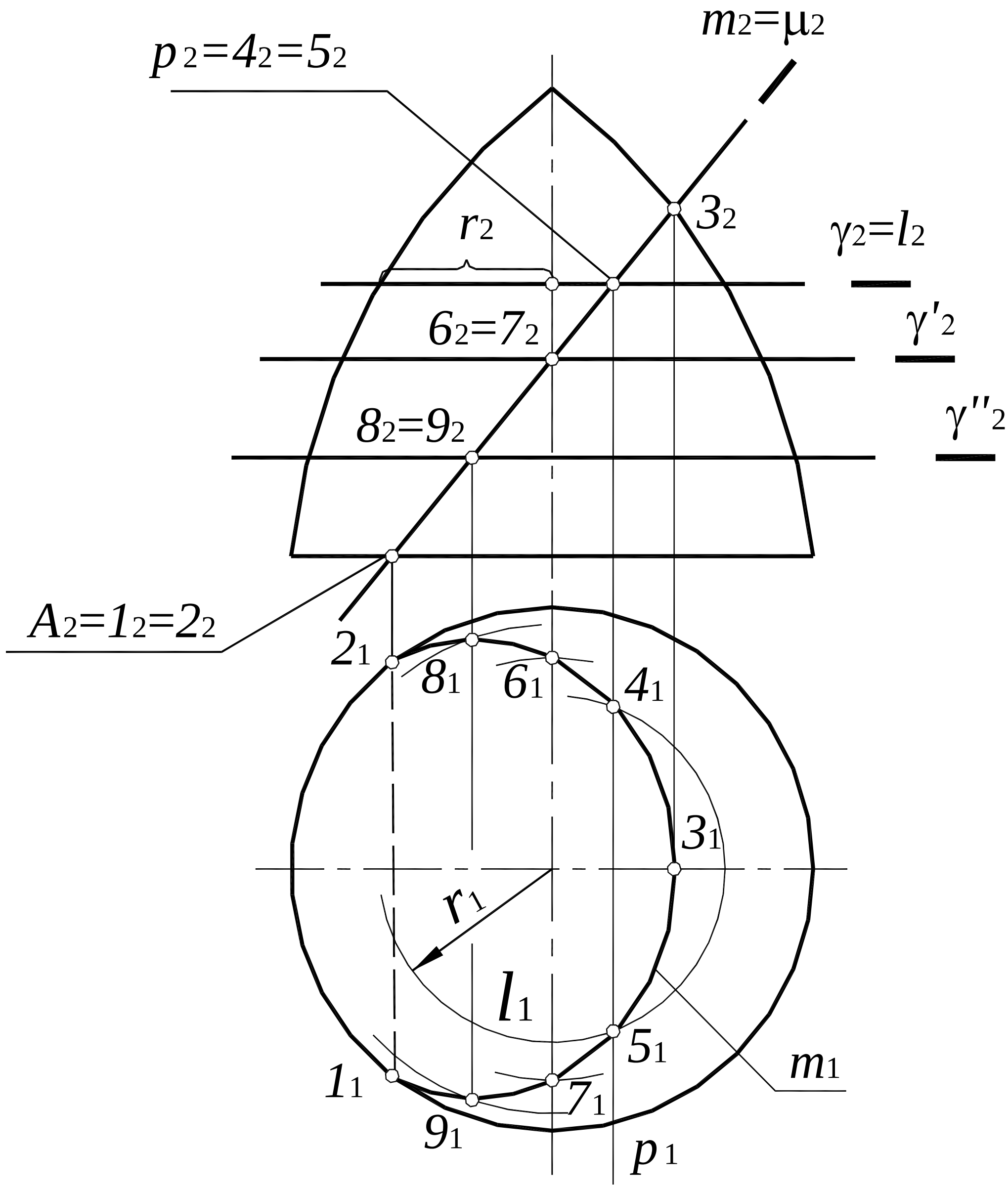


Рис. 104

60. Построить проекции сечения сферы плоскостью **δ (δ₂)** (рис. 105).

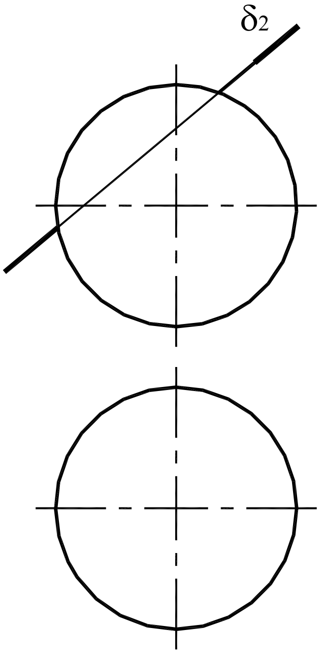


Рис. 105

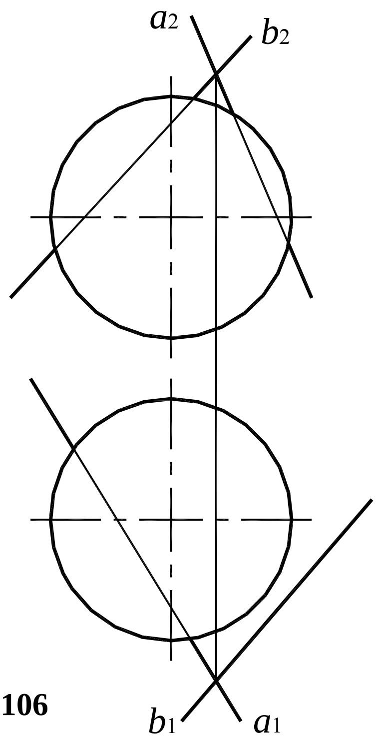


Рис. 106

61. Построить проекции сечения сферы плоскостью **β (*a* × *b*)** (рис. 106).
62. Построить проекции сечения конуса плоскостью **α (*f* × *h*)** (рис. 107).

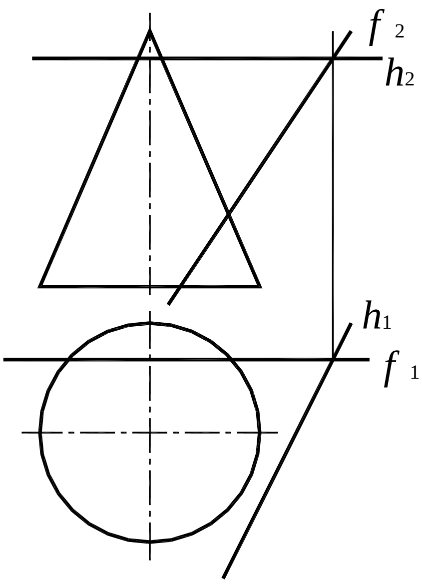


Рис. 107

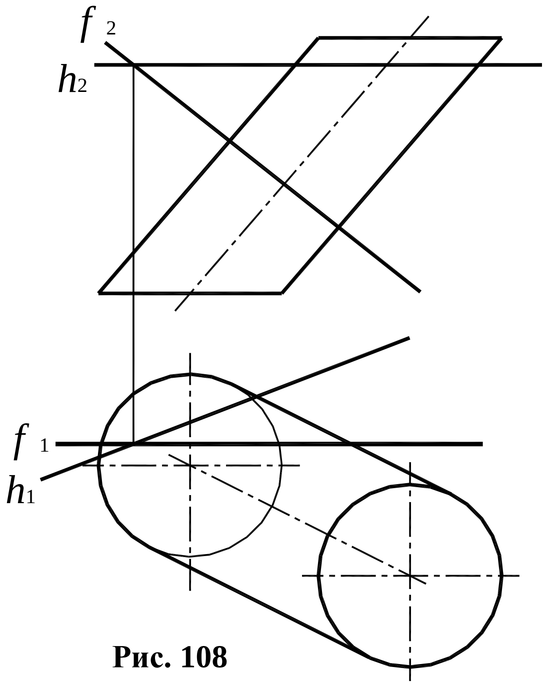


Рис. 108

63. Построить проекции сечения наклонного цилиндра плоскостью **β (*f* × *h*)** (рис. 108).

64. Дан конус вращения, поставленный основанием на плоскость **$П_1$**. Построить фронтально-проецирующие плоскости, рассекающие конус по окружности, пересекающимся прямым, эллипсу, параболе и гиперболе. Построить проекции сечений.

2.5. Пересечение поверхностей

Алгоритм решения задач по определению линии пересечения поверхностей Ф′ и Ф″ (рис. 109) в целом аналогичен решению второй позиционной задачи.

1. Обе заданные поверхности Ф′ и Ф″ пересечь третьей, вспомогательной плоскостью или поверхностью *P*.
2. Определить линии пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной: $Ф' \times P = l'$; $Ф'' \times P = l''$.
3. Определить точки пересечения полученных линий $l' \times l''$=I и II. Точки I и II принадлежат обеим поверхностям.
4. Проведя несколько вспомогательных поверхностей, определить достаточное количество точек и соединить их плавной лекальной кривой, которая и является искомой линией пересечения поверхностей.
5. Определить видимость поверхностей и линии их пересечения.

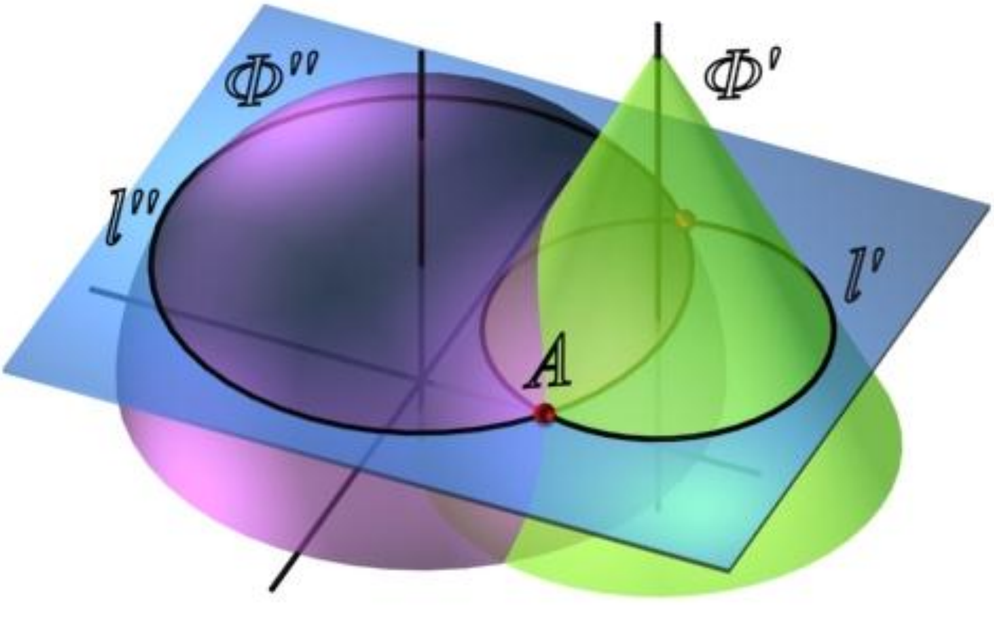


Рис. 109

2.5.1. Способ вспомогательных параллельных плоскостей

Этот способ заключается в том, что обе поверхности рассекаются параллельными плоскостями уровня (рис. 110). Этот способ применяют лишь в тех случаях, когда вспомогательные плоскости рассекают поверхности по простым линиям – прямым или окружностям, которые проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажения.

1. Определить опорные точки, в данном случае это точки пересечения очерковых образующих A и B (рис. 111).

2. Пересечь обе поверхности вспомогательной горизонтальной плоскостью уровня α (α_2). Плоскость α (α_2) пересекает сферу по окружности $m(m_1, m_2)$, а конус – по окружности q (q_1, q_2):

$$m\ (m_1, m_2) = \Phi_{сф} \cap \alpha\ (\alpha_2)$$

$$q\ (q_1, q_2) = \Phi_к \cap \alpha\ (\alpha_2).$$

3. Построив горизонтальные проекции окружностей m и q, определить точки их пересечения E и E':

$$E_1 = m_1 \times q_1;\ E_2 = E_1E_2 \cap \alpha_2;$$

$$E'_1 = m_1 \times q_1;\ E'_2 = E_1E_2 \cap \alpha_2.$$

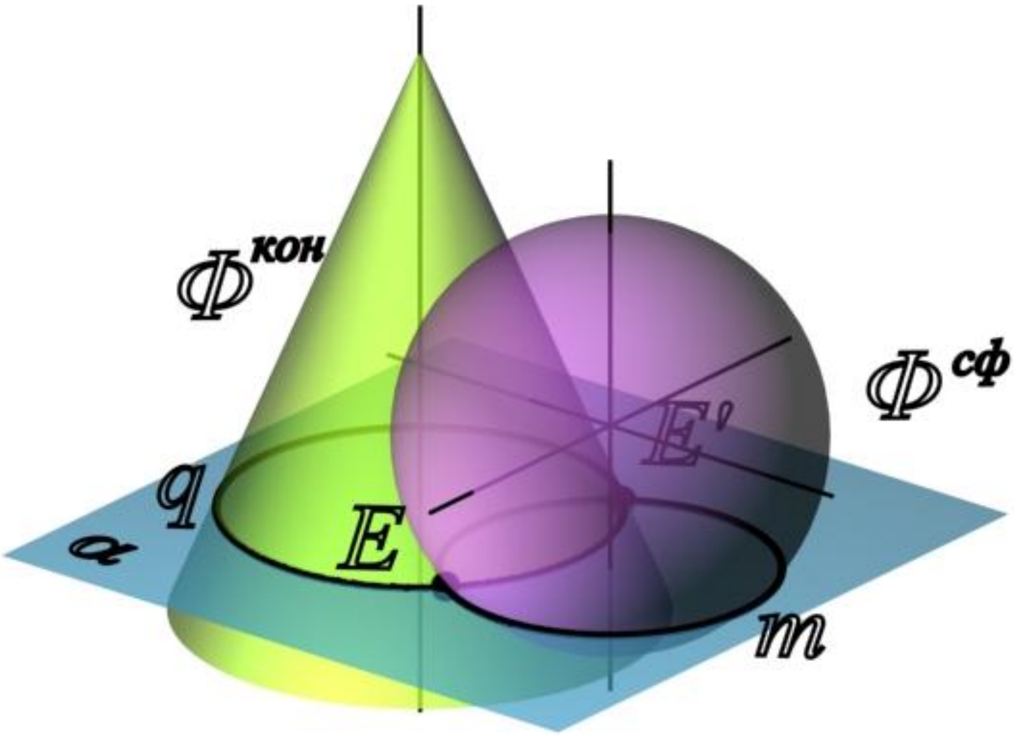


Рис. 110

4. Аналогичным образом определяются остальные точки, формирующие линию пересечения. Они получены с помощью горизонтальных плоскостей уровня β (β_2), δ (δ_2) и μ (μ_2). Пределы этих плоскостей по высоте определяют высшая и низшая опорные точки линии пересечения поверхностей. Плоскость μ (μ_2) рассекает поверхность сферы по очерковой образующей – окружности b (b_1, b_2), поэтому полученные точки B и B' являются опорными, ограничивающими линию пересечения поверхностей по ширине.

5. Последовательно соединить одноименные проекции полученных точек плавной лекальной кривой. Полученная линия не должна выходить за пределы области перекрытия проекций данных поверхностей.

6. Определить видимость линии пересечения поверхностей и их очерковых образующих.

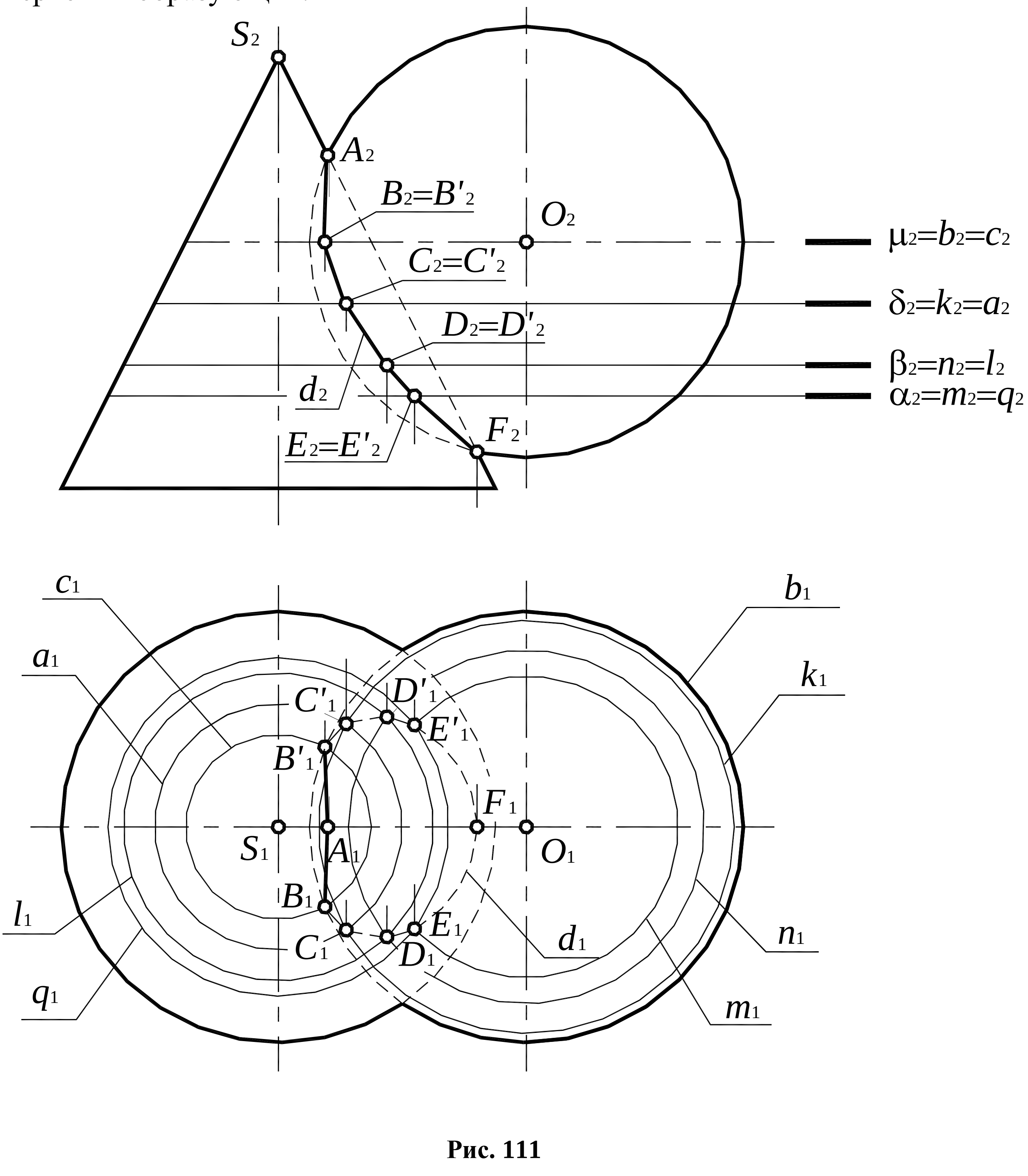


Рис. 111

65. Построить линию пересечения поверхностей, используя в качестве посредников вспомогательные плоскости уровня (рис. 112 – 115).

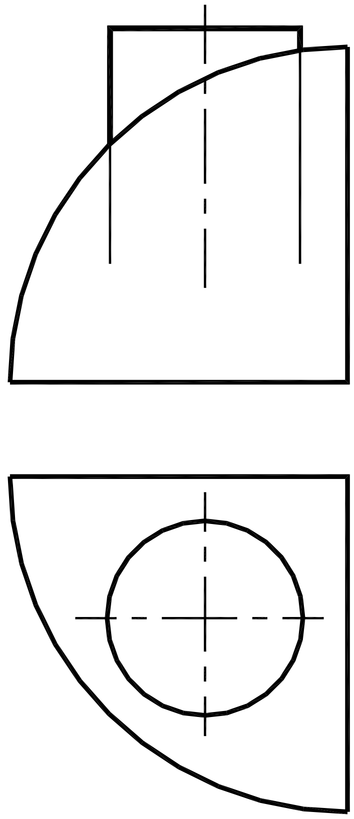


Рис. 112

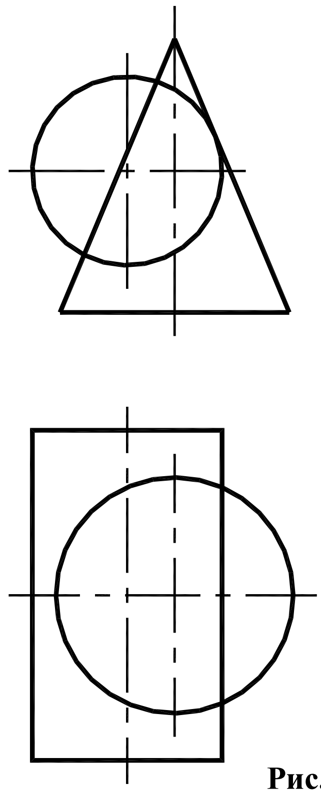


Рис. 113

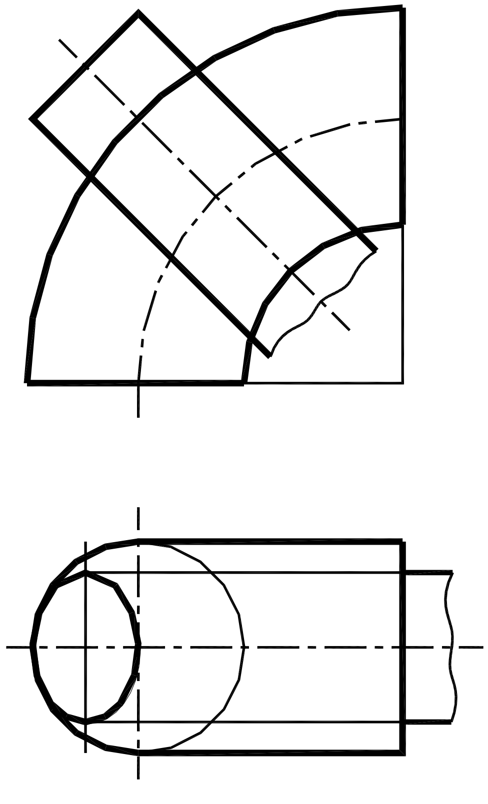


Рис. 114

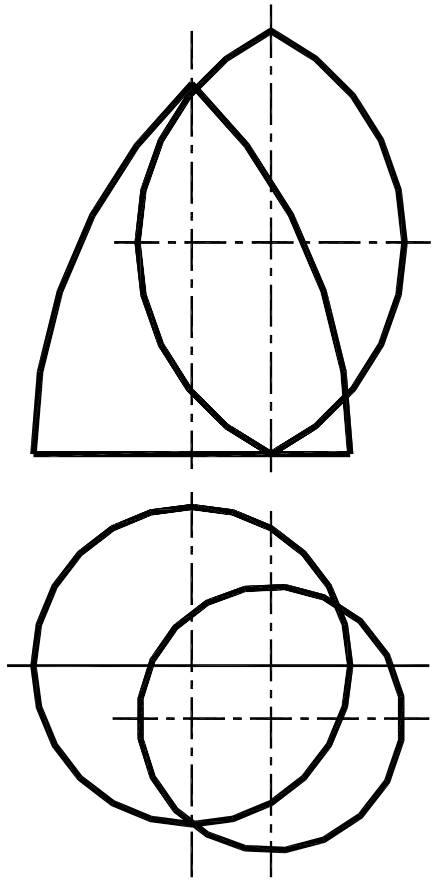


Рис. 115

2.5.2. Способ концентрических сфер

Этот способ применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения произвольного вида при условии, что оси этих поверхностей пересекаются.

Рассмотрим способ концентрических сфер на примере построения линии пересечения цилиндра и конуса вращения, оси которых i (i_1, i_2) и q (q_1, q_2) пересекаются, и точка пересечения осей обозначена через O (O_1, O_2) (рис. 116).

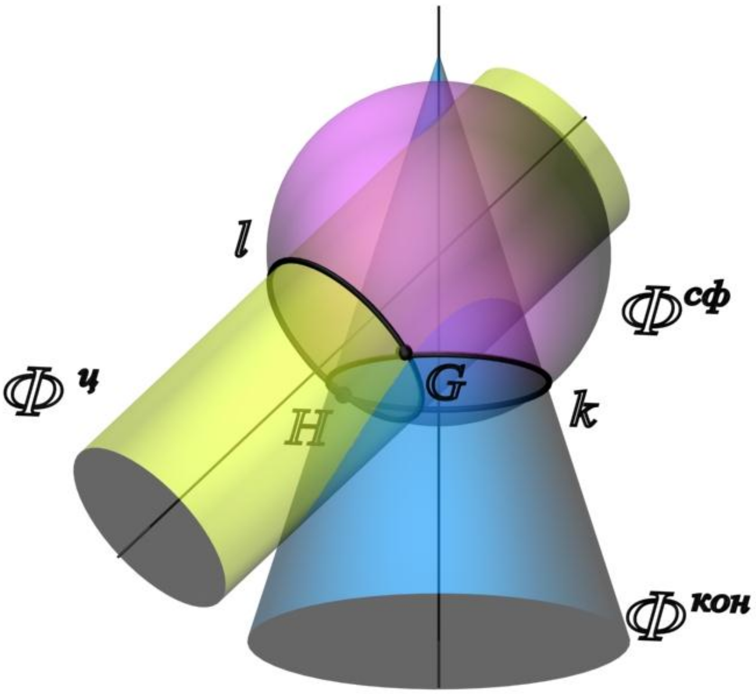


Рис. 116

Точка пересечения осей поверхностей принимается за центр вспомогательных концентрических сфер.

1. Определить опорные точки (рис. 117).
2. Определить радиусы максимальной и минимальной сфер, необходимых для определения точек линии пересечения.

Радиус максимальной сферы $R_{\max}$ равен расстоянию от центра вспомогательных сфер до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих.

Радиус минимальной сферы $R_{\min}$ равен большей из нормалей, проведенных из центра вспомогательных сфер на образующие поверхностей. В этом случае сфера минимального радиуса будет касаться одной из данных поверхностей, а со второй – пересекаться. В данном случае сферой минимального радиуса является сфера, касающаяся цилиндрической поверхности.

3. Для построения промежуточных точек линии пересечения проводят несколько концентрических сфер с центром в точке *O*, причем радиус *R* этих сфер должен изменяться в пределах $R_{\min} < R < R_{\max}$.

4. Полученные точки соединить плавной лекальной кривой.

5. Определить видимость полученной линии и очерковых образующих поверхностей.

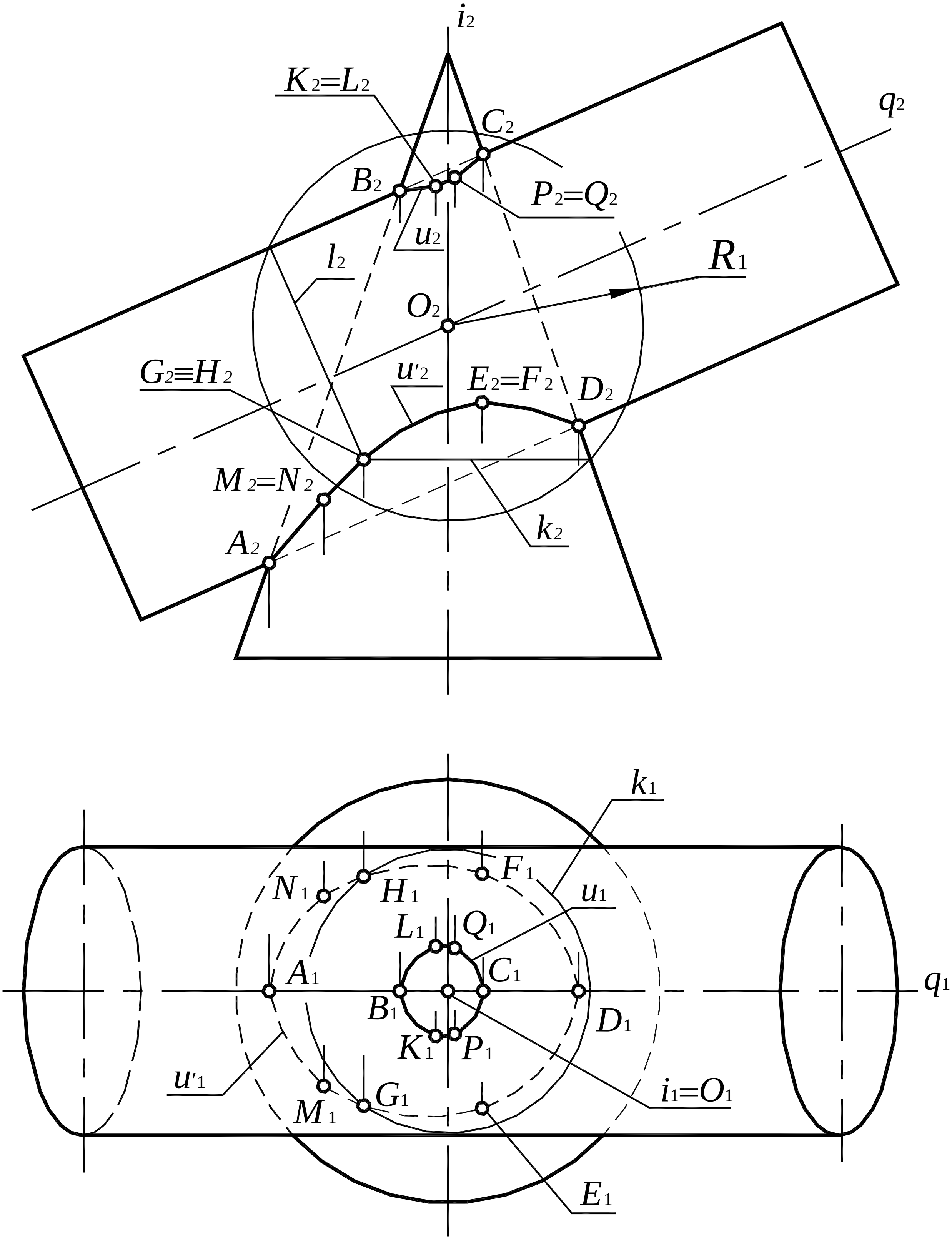


Рис. 117

66. Построить линию пересечения поверхностей, используя метод концентрических сфер (рис. 118 – 120).

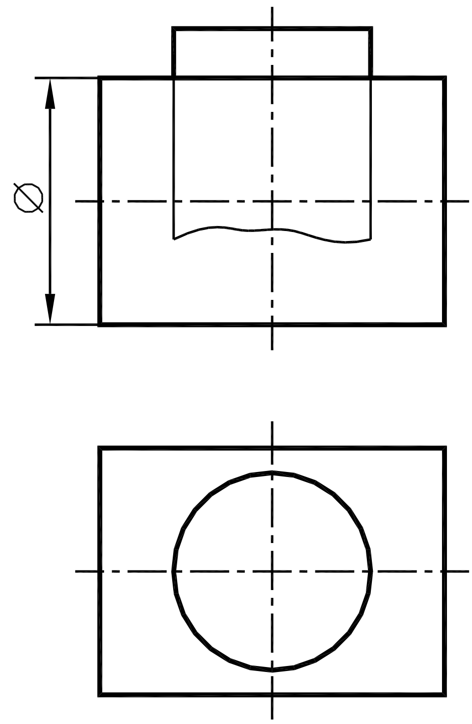


Рис. 118

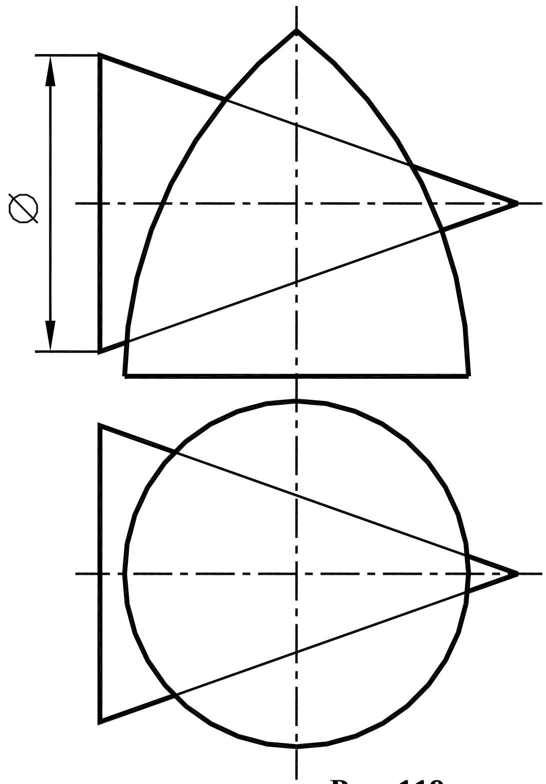


Рис. 119

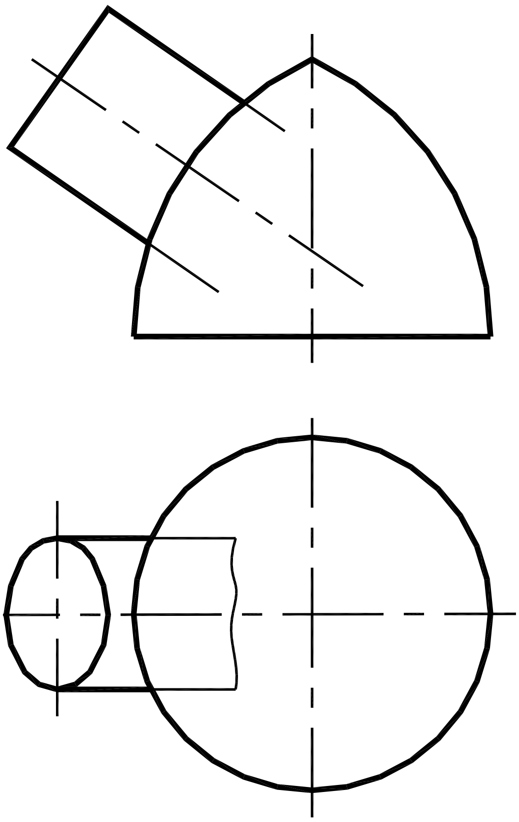


Рис. 120

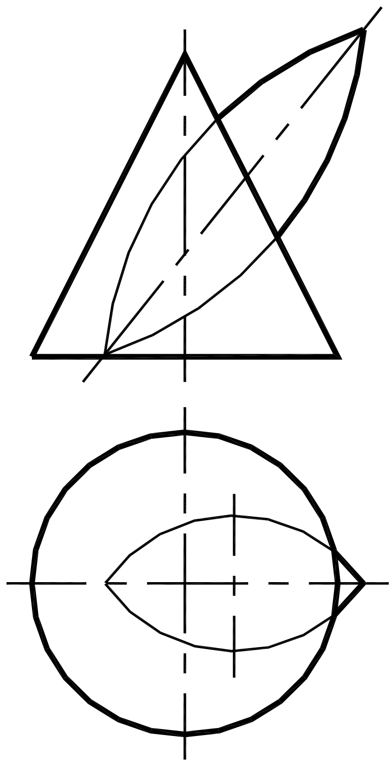


Рис. 121

67. Построить проекции отверстия в поверхности конуса, если оно образовалось от пересечения с тором (рис. 121).

2.5.3. Способ эксцентрических сфер

Способ эксцентрических сфер основан на том, что около всякой окружности можно описать бесчисленное множество сфер, геометрическим местом центров которых является прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная плоскости окружности.

Этот способ применяется в следующих случаях:

- при определении линии пересечения поверхностей вращения со скрещивающимися осями;
- при определении линии пересечения поверхности вращения с поверхностью, имеющей круговые сечения.

В обоих случаях обязательным является наличие общей плоскости симметрии.

Рассмотрим способ эксцентрических сфер на примере построения линии пересечения поверхностей конуса и кольца (рис. 122). Конус и кольцо имеют общую плоскость симметрии δ (δ_1), и их оси вращения i (i_1 ,i_2) и q (q_1 ,q_2) – скрещивающиеся прямые.

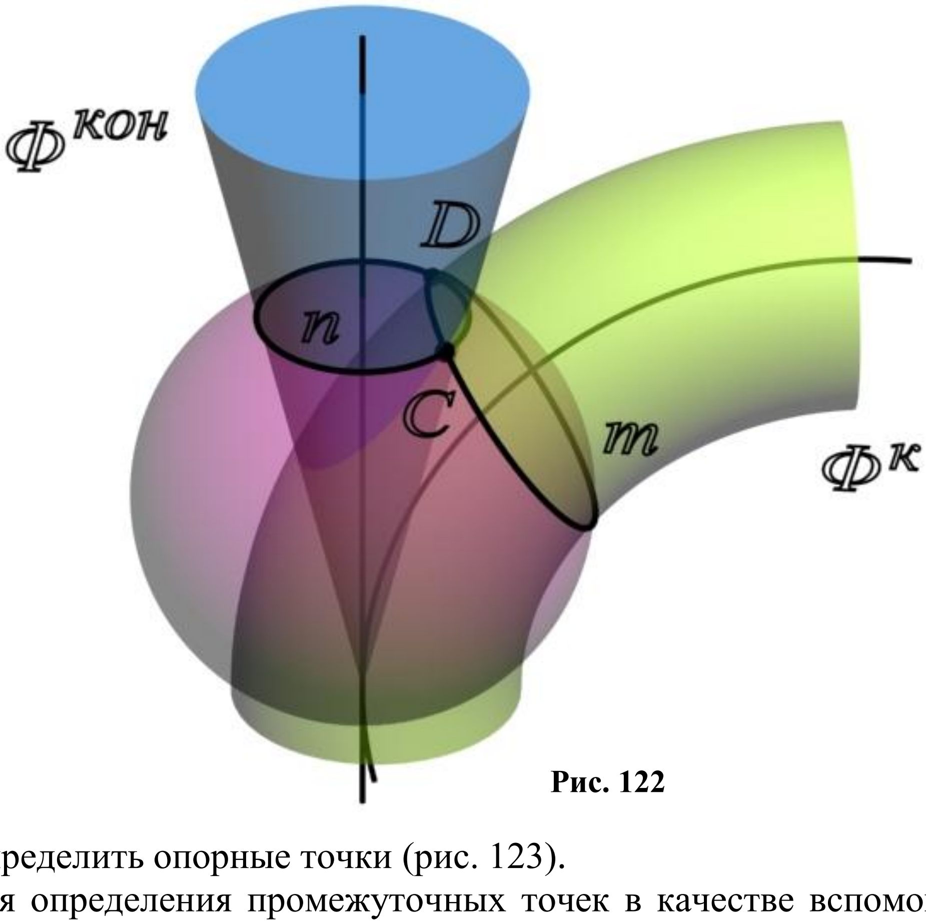


Рис. 122

1. Определить опорные точки (рис. 123).
2. Для определения промежуточных точек в качестве вспомогательных поверхностей выбраны эксцентрические сферы, центры которых лежат на оси конуса.

Для определения центра вспомогательной сферы строят круговое сечение кольца фронтально-проецирующей плоскостью σ – линию m и восстанавливают перпендикуляр из его центра до оси конуса. Полученная точка O_2 и является центром вспомогательной сферы. Радиус сферы определяется точкой пересечения плоскости и очерковой образующей кольца. Затем строится линия *n* пересечения вспомогательной сферы и поверхности конуса. Точки *C* и *D* пересечения линий *n* и *m* и являются искомыми точками линии пересечения поверхностей.

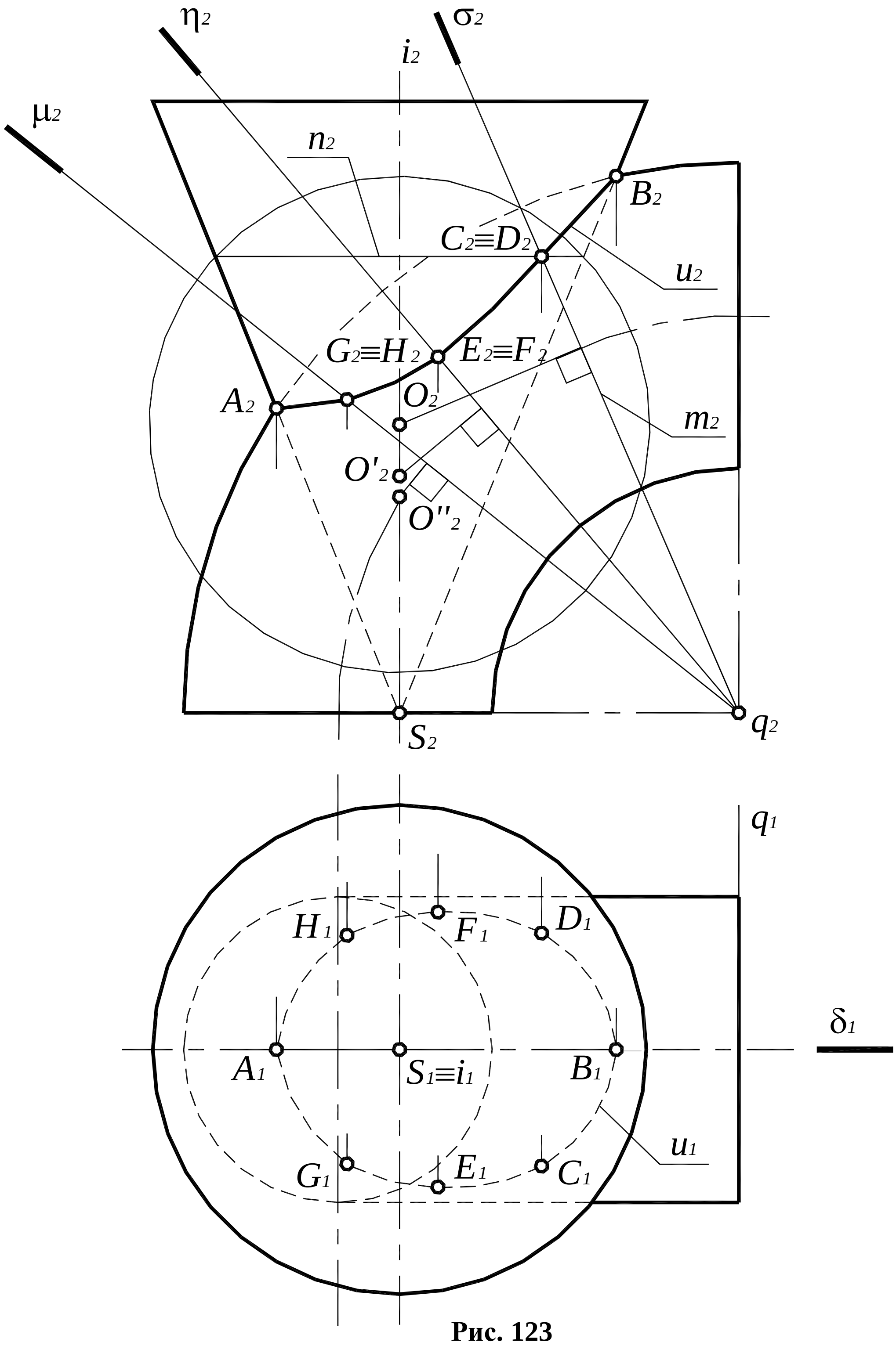


Рис. 123

3. Определить видимость полученной линии и очерковых образующих поверхностей.

68. Построить линию пересечения поверхностей, используя метод эксцентрических сфер (рис. 124 – 127).

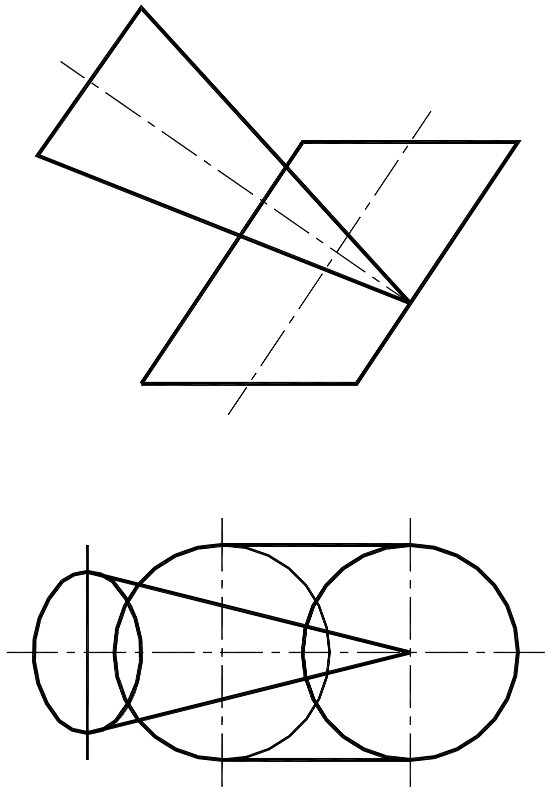


Рис. 124

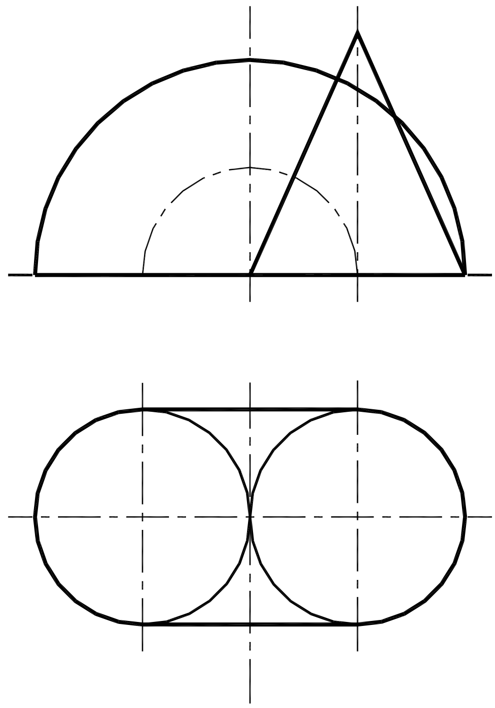


Рис. 125

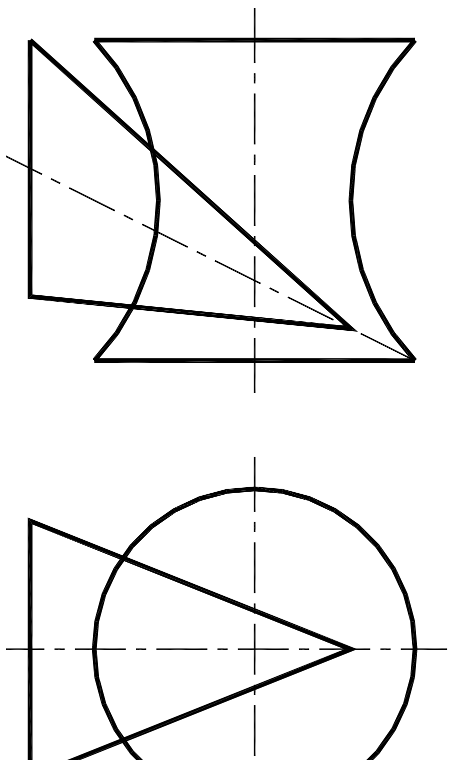


Рис. 126

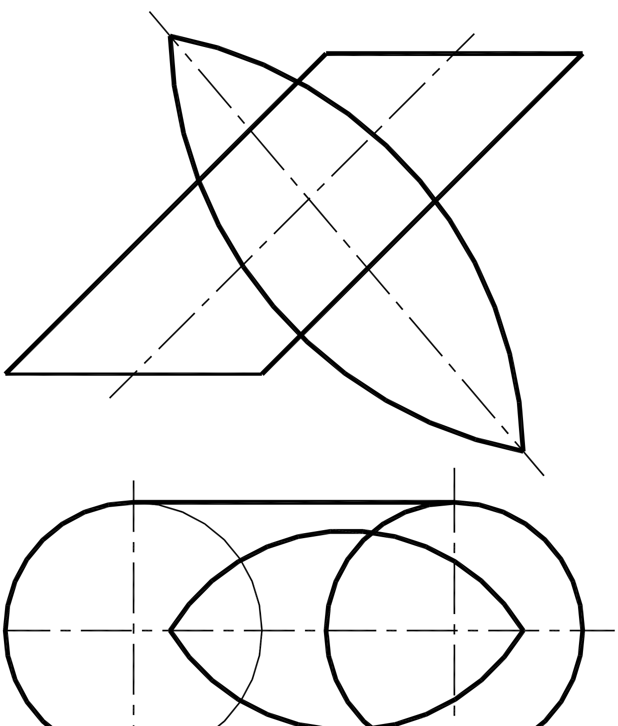


Рис. 127

3. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

3.1. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Задачи, в которых определяются различные геометрические величины – расстояния между объектами, длины отрезков, углы, площади и т.д., называются метрическими. Решение многих метрических задач, например задач на определение кратчайших расстояний, требует построения перпендикулярных прямых и плоскостей.

Теорема о проекциях прямого угла. *Прямой угол проецируется на плоскость без искажения, если одна из его сторон параллельна этой плоскости*.

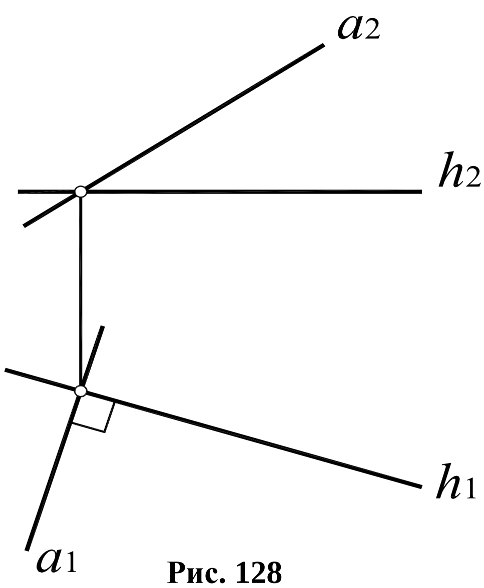


Рис. 128

На основании этой теоремы две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) проецируются на Π_1 в виде взаимно перпендикулярных прямых, если одна из них горизонталь, на Π_2 – если одна из них фронталь (рис. 128).

Условие перпендикулярности скрещивающихся прямых сводятся к условиям перпендикулярности пересекающихся прямых, проведенных через произвольную точку и соответственно параллельных скрещивающимся прямым.

69. Из точки ***A*** провести перпендикуляр к горизонтали ***h*** (рис.129).

70. Через точку ***A*** провести линии уровня, перпендикулярные прямой ***a*** (рис. 130).

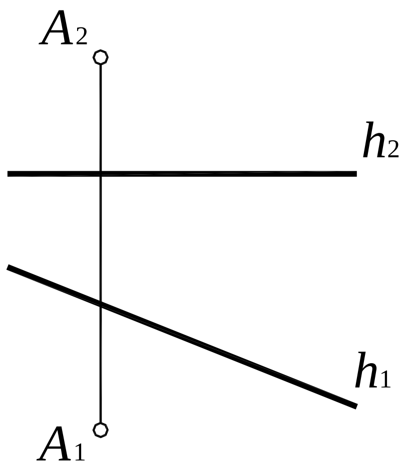


Рис. 129

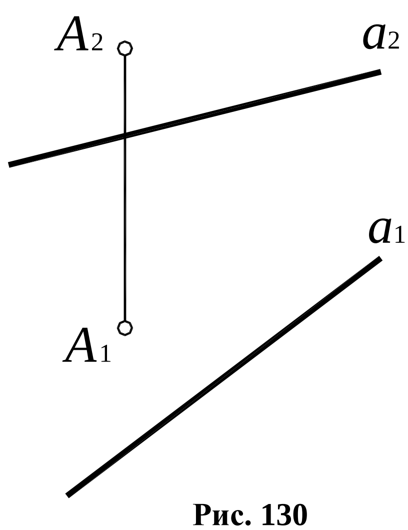


Рис. 130

71. Построить проекции прямоугольного треугольника ***ABC*** по заданному катету и направлению гипотенузы ***a*** (рис. 131).

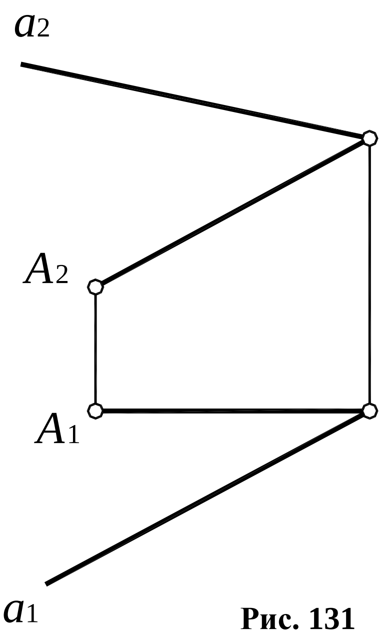


Рис. 131

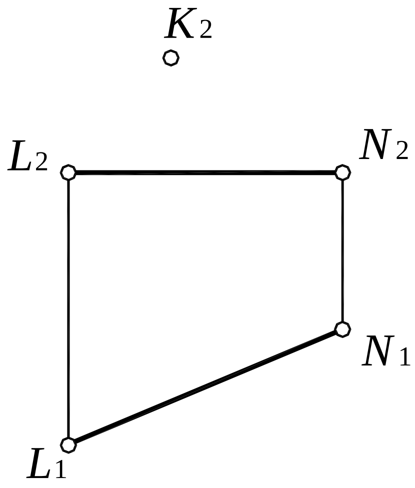


Рис. 132

72. Достроить проекции ромба ***KLMN*** по заданной диагонали ***LN*** и фронтальной проекции вершины ***K*** (рис. 132).

73. Через точку ***A*** провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям **α (*a*** × ***b*)** и **β (*m* // *n*)** (рис. 133).

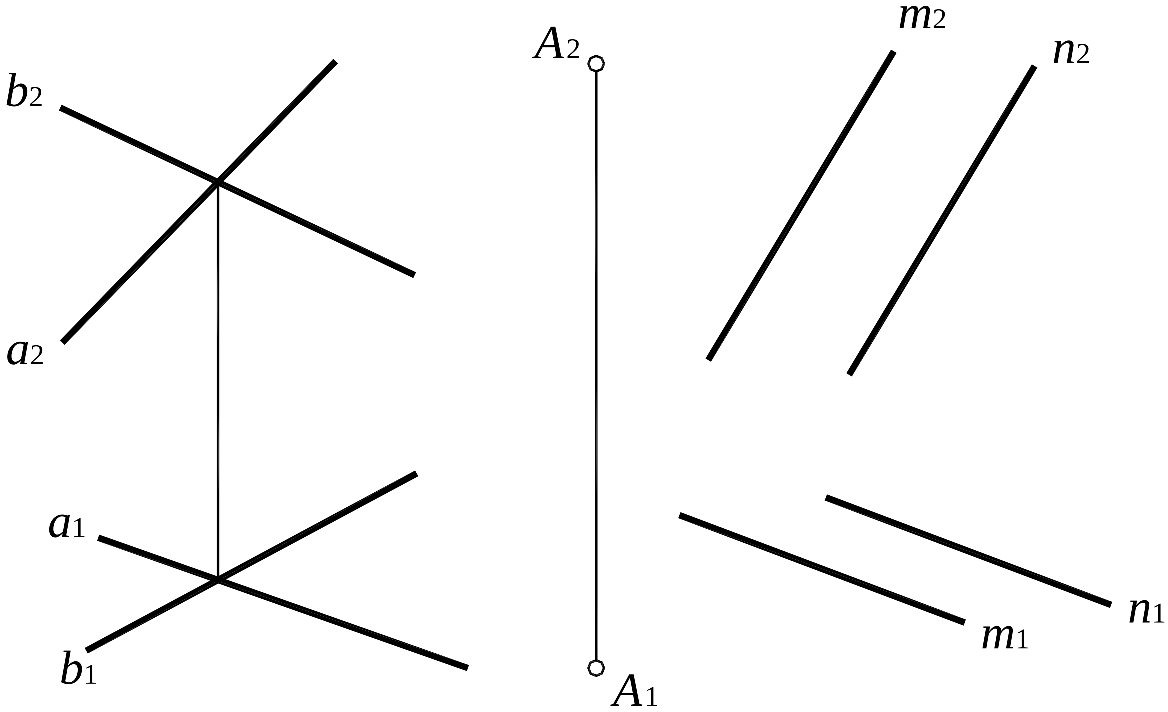


Рис. 133

3.2. Замена плоскостей проекций

Способ замены плоскостей проекций состоит в том, что проецируемый объект остается неподвижным, а одна из плоскостей проекций $П_1$, $П_2$ или $П_3$ заменяется новой, расположенной так, чтобы проецируемый объект по отношению к новой плоскости занял частное положение (рис. 134). При решении задач способом замены плоскостей проекций необходимо выполнять следующие условия:

- каждая новая система должна представлять собой систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей;
- на новые плоскости объект проецируется ортогонально;
- расстояние от точки до незаменяемой плоскости сохраняется.

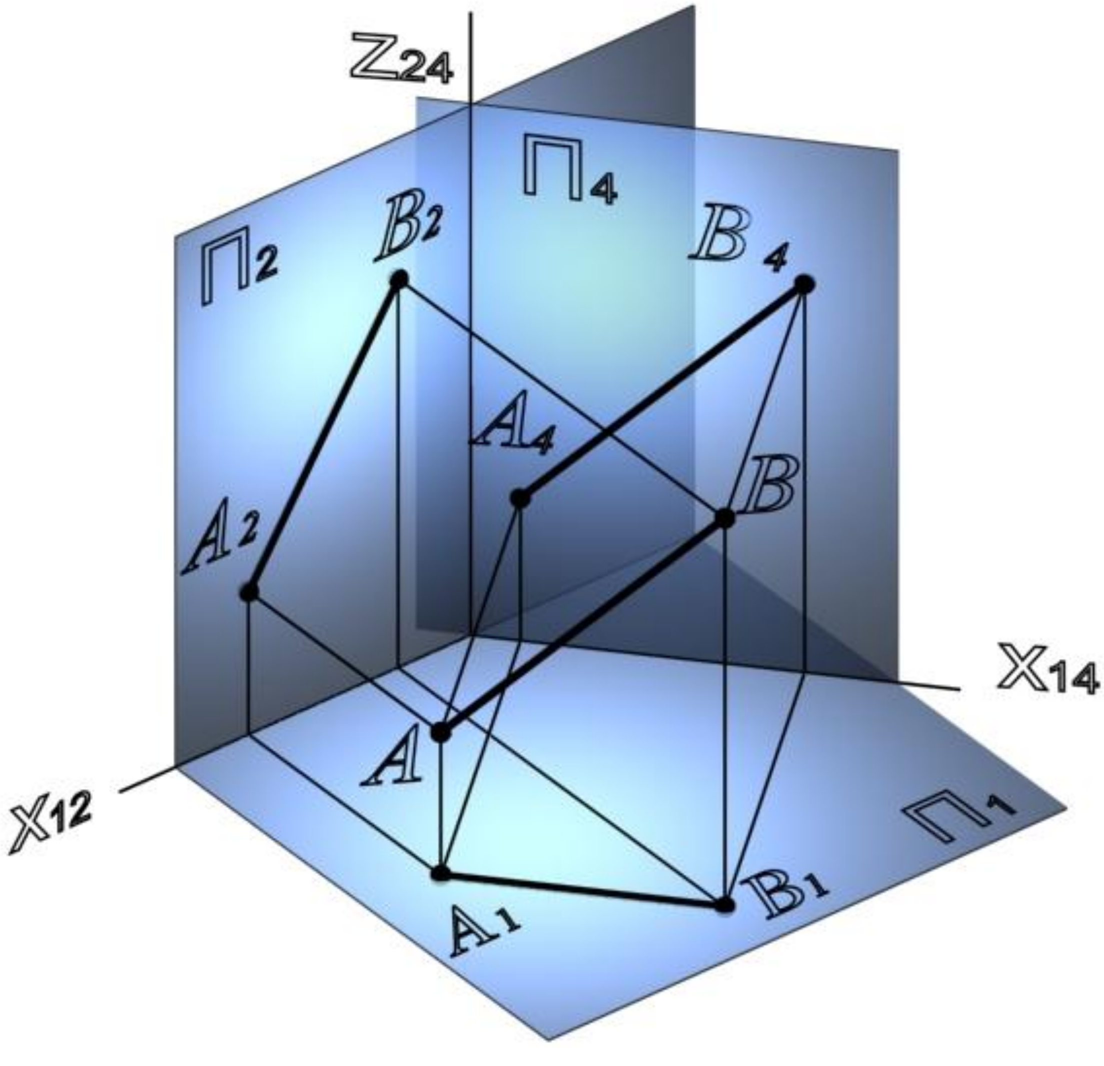


Рис. 134

74. Построить отрезок ***AB*** общего положения. Определить натуральную величину отрезка ***AB***.

75. На прямой ***a*** отложить от точки ***A*** в направлении, указанном стрелкой, отрезок ***AB***, длина которого задана на чертеже (рис. 135).

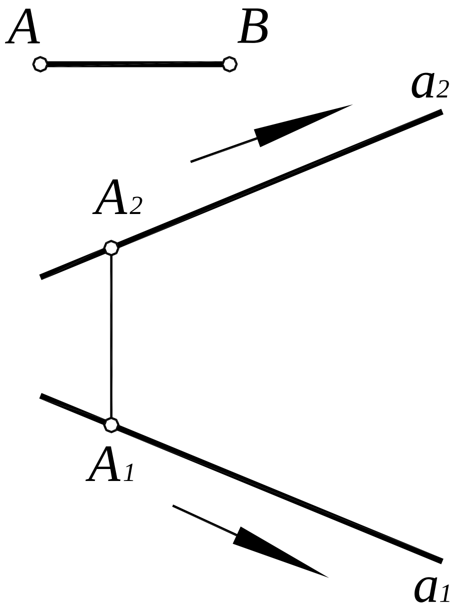


Рис. 135

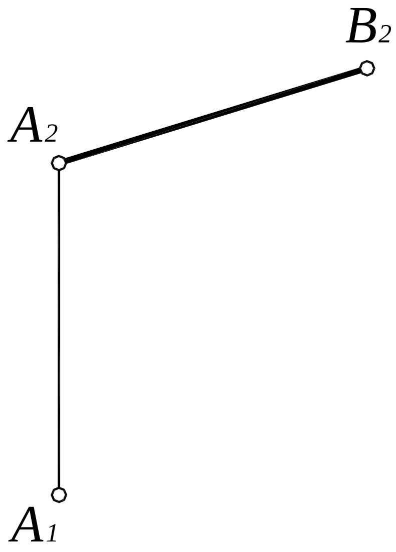


Рис. 136

76. Построить горизонтальную проекцию отрезка ***AB***, если дана его фронтальная проекция, а угол наклона к $\mathbf{\Pi_2}$ равен 30° (рис. 136).

77. Определить натуральную величину и проекции перпендикуляра, измеряющего расстояние от точки ***A*** до прямой ***a*** (рис. 137, 138).

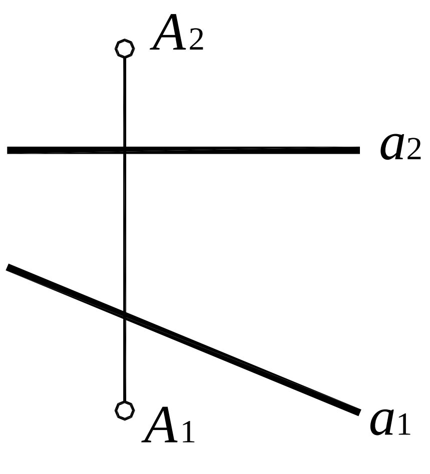


Рис. 137

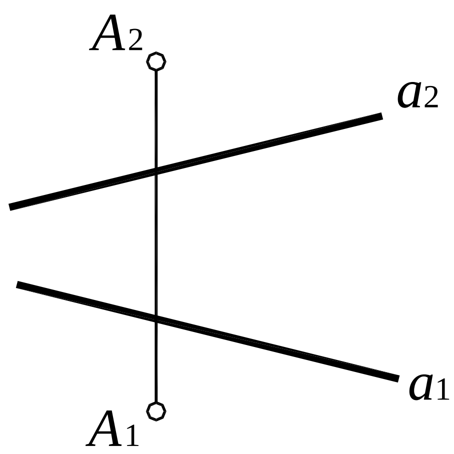


Рис. 138

78. Определить натуральную величину и проекции перпендикуляра, измеряющего расстояние между двумя параллельными прямыми ***a*** и ***b*** (рис. 139, 140).

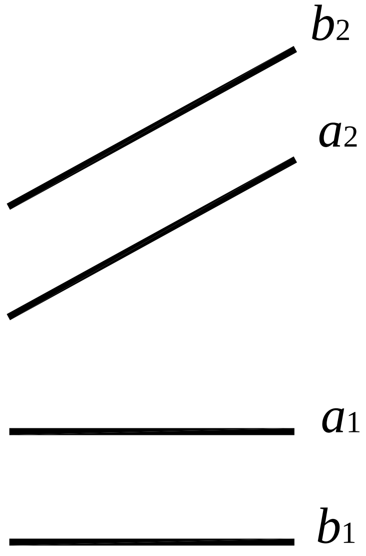


Рис. 139

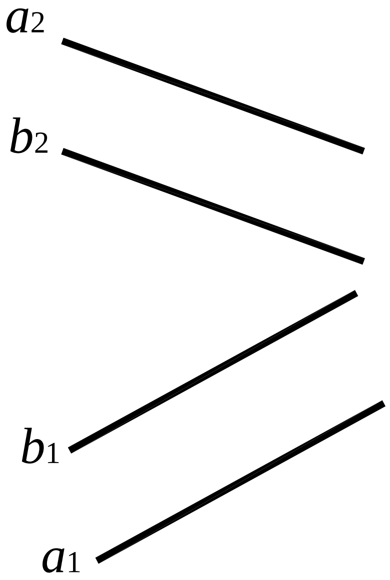


Рис. 140

79. Определить натуральную величину угла ***ABC*** (рис. 141).

80. Определить расстояние между прямой ***l*** и параллельной ей плоскостью α (***A, a***) причем, ***a*** // ***l*** (рис. 142).

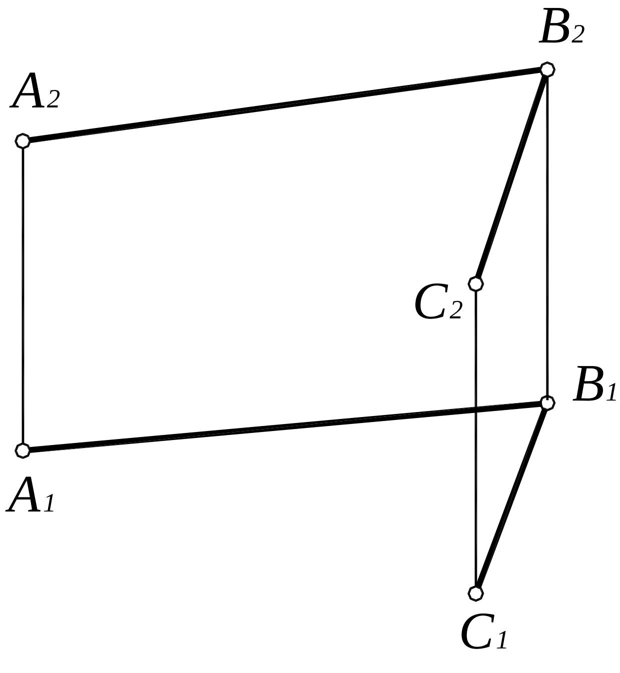


Рис. 141

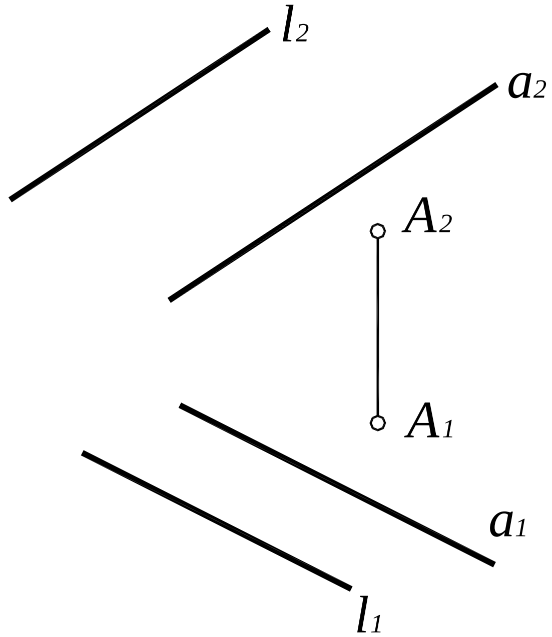


Рис. 142

81. Определить натуральную величину и проекции перпендикуляра, опущенного из точки ***A*** на заданную плоскость α (рис. 143, 144).

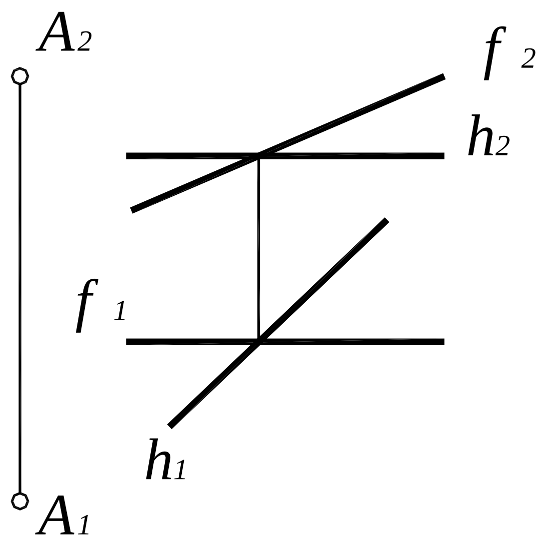


Рис. 143

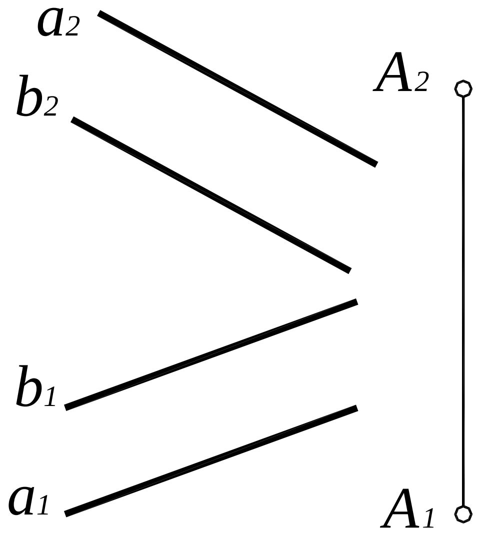


Рис. 144

82. Определить угол наклона плоскости треугольника ***DEF*** к горизонтальной плоскости проекций (рис. 145).

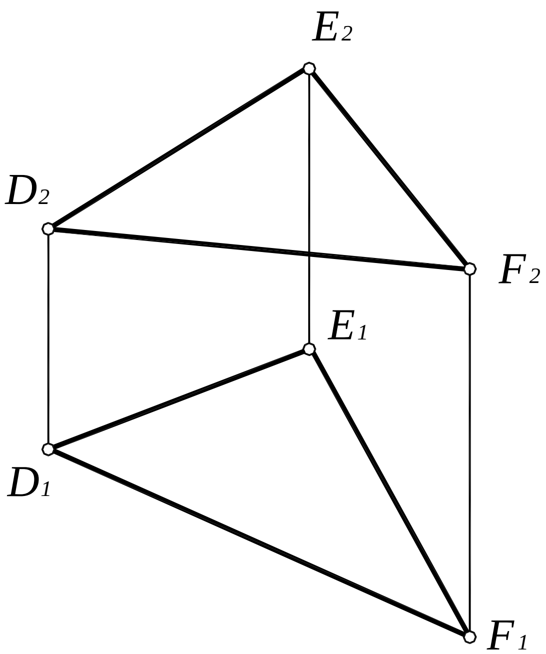


Рис. 145

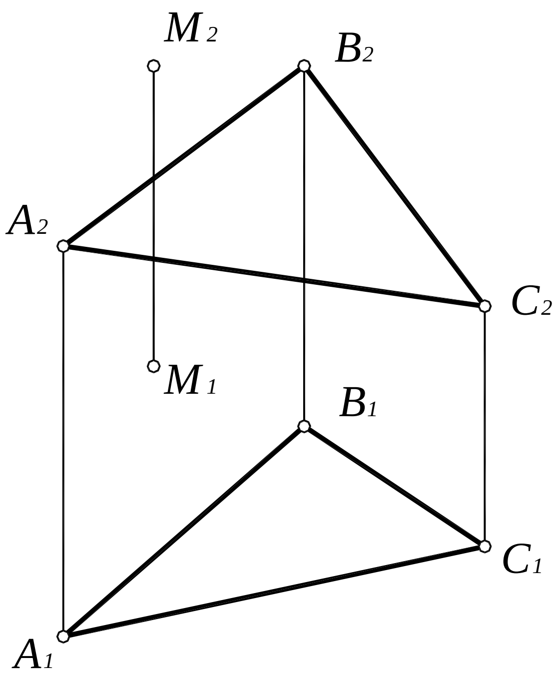


Рис. 146

83. Построить точку, симметричную данной точке ***M*** относительно плоскости α **(*ABC*)** (рис. 146).

3.3. Плоскопараллельное перемещение

Плоскопараллельным движением объекта в пространстве называется такое его перемещение, при котором все точки объекта перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.

Теорема. *Если объект совершает плоскопараллельное движение относительно плоскости проекций* Π_1, *то фронтальные проекции его точек будут двигаться по прямым, перпендикулярным к линиям связи; при этом горизонтальная проекция объекта движется по плоскости проекций, оставаясь равной самой себе.*

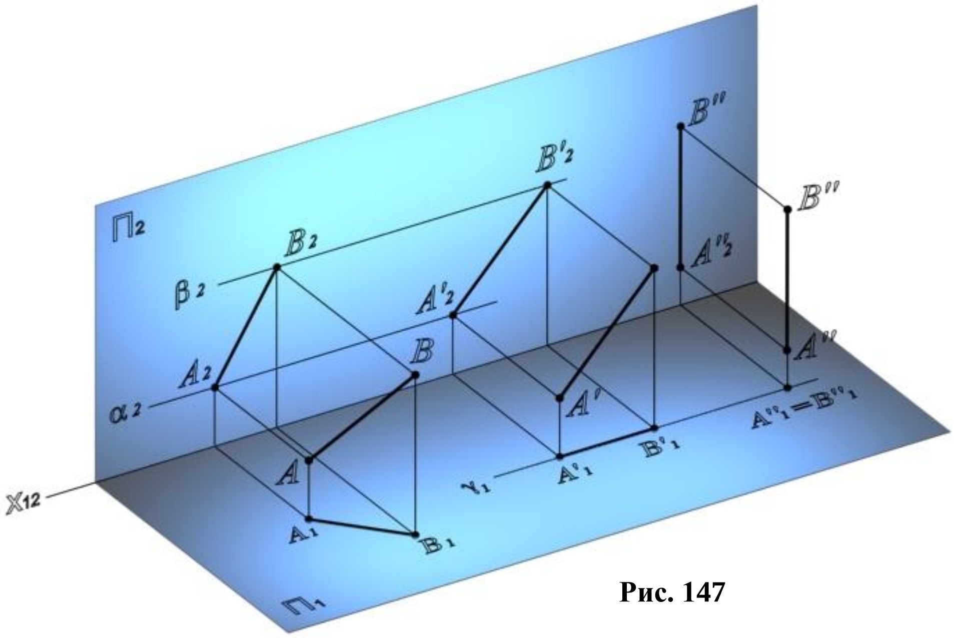


Рис. 147

Для преобразования отрезка из общего положения в горизонтально-проецирующее (рис. 147) выполняют два плоскопараллельных перемещения: относительно горизонтальной плоскости проекций в положение фронтали, затем относительно фронтальной плоскости проекций – в горизонтально-проецирующее положение.

Преобразование отрезка на комплексном чертеже приведено на рис. 148.

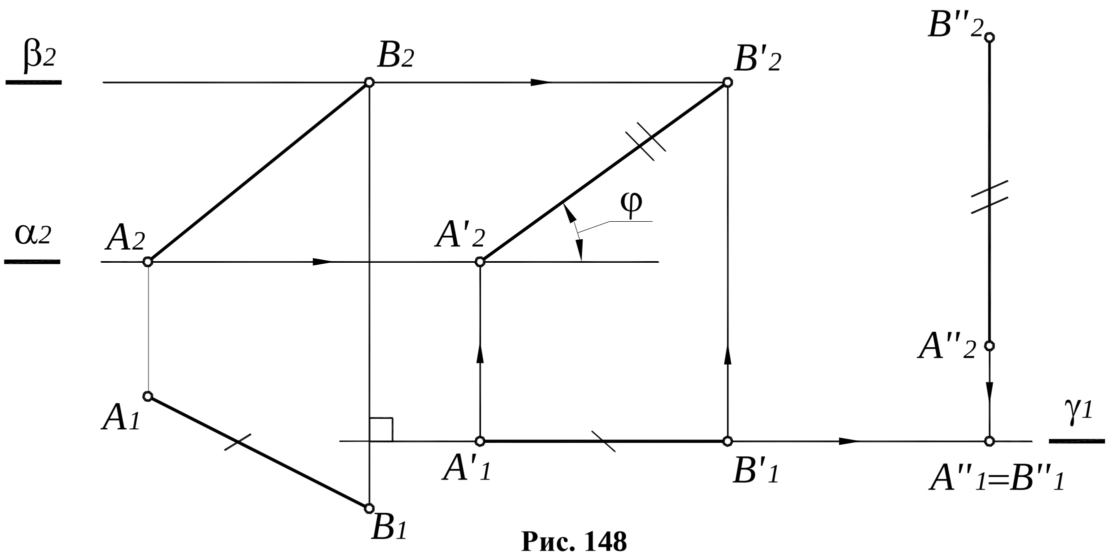


Рис. 148

84. Определить натуральную величину угла между прямыми ***a*** и ***b*** (рис. 149, 150).

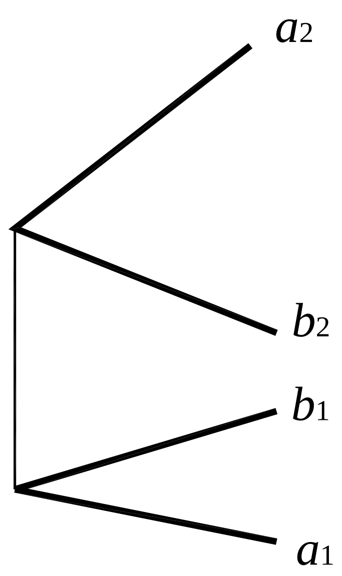


Рис. 149

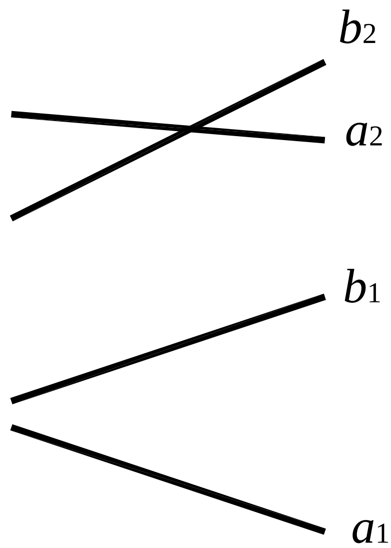


Рис. 150

85. Определить углы наклона заданной плоскости к плоскостям проекций (рис. 151, 152).

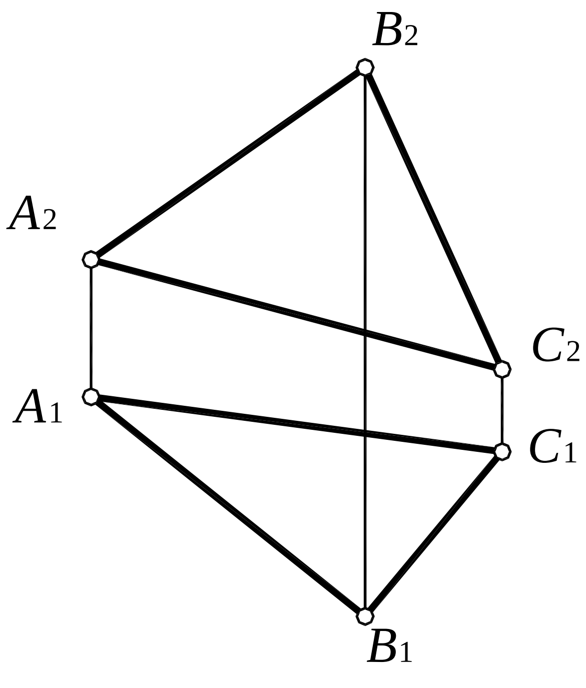


Рис. 151

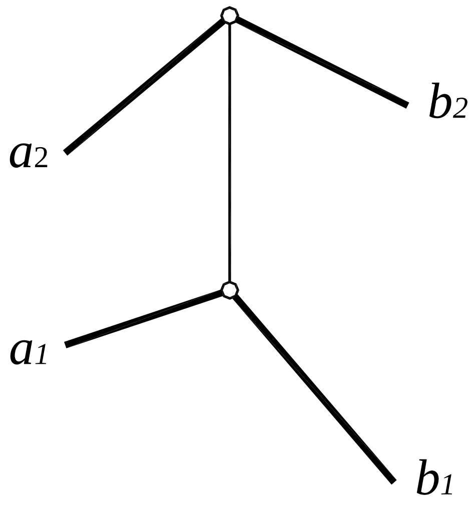


Рис. 152

86. Определить натуральную величину угла между двумя плоскостями **δ (δ_2)** и **γ (γ_1)** (рис. 153), **α (*ABC*)** и **β (*ABD*)** (рис. 154).

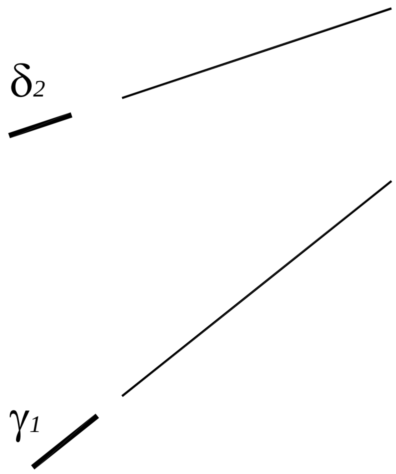


Рис. 153

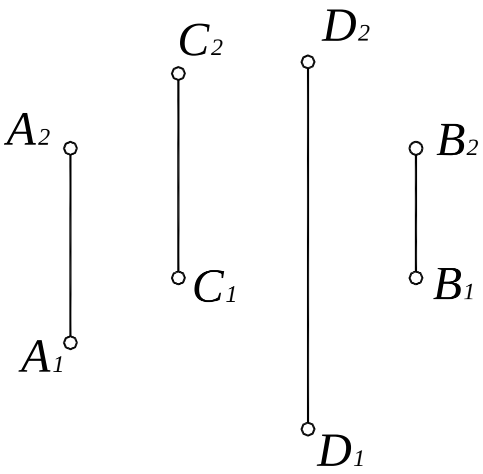


Рис. 154

87. Определить натуральную величину угла между гранями ***ABC*** и ***ABD*** (рис. 155).

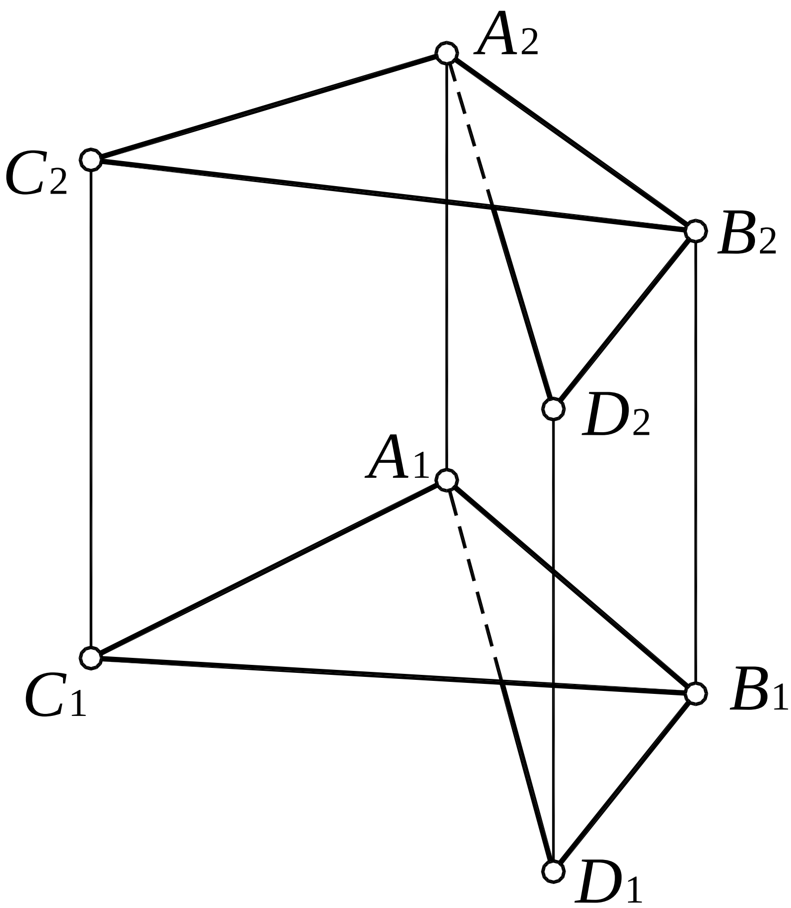


Рис. 155

3.4. Вращение вокруг проецирующей прямой

Вращение – это движение по окружности вокруг некоторой оси. При преобразовании комплексного чертежа способом вращения плоскости проекций остаются неизменными, а проецируемый объект перемещается таким образом, чтобы он занял какое-либо частное положение.

Элементы вращения:

- ***ось вращения*** – прямая, вокруг которой осуществляется вращение;
- ***плоскость вращения*** – плоскость, проходящая через вращаемую точку и перпендикулярная оси вращения (плоскость окружности, которую описывает точка при вращении);
- ***центр вращения*** – точка пересечения оси вращения и плоскости вращения;
- ***радиус вращения*** – кратчайшее расстояние от вращаемой точки до центра (оси) вращения. Радиус всегда перпендикулярен оси вращения;
- ***угол поворота*** – угол между начальным и конечным положением радиуса вращения.

При вращении системы точек вокруг одной оси все точки вращаются в плоскостях, параллельных между собой, поворачиваются на один и тот же угол в одном и том же направлении, поэтому вращение является частным случаем плоскопараллельного перемещения. Точки, находящиеся на оси вращения, остаются неподвижными.

Способом вращения вокруг проецирующей прямой можно совместить точку с плоскостью или поверхностью. Рассмотрим совмещение точки M с поверхностью прямого кругового конуса, поставленного основанием на плоскость Π_1 (рис. 156).

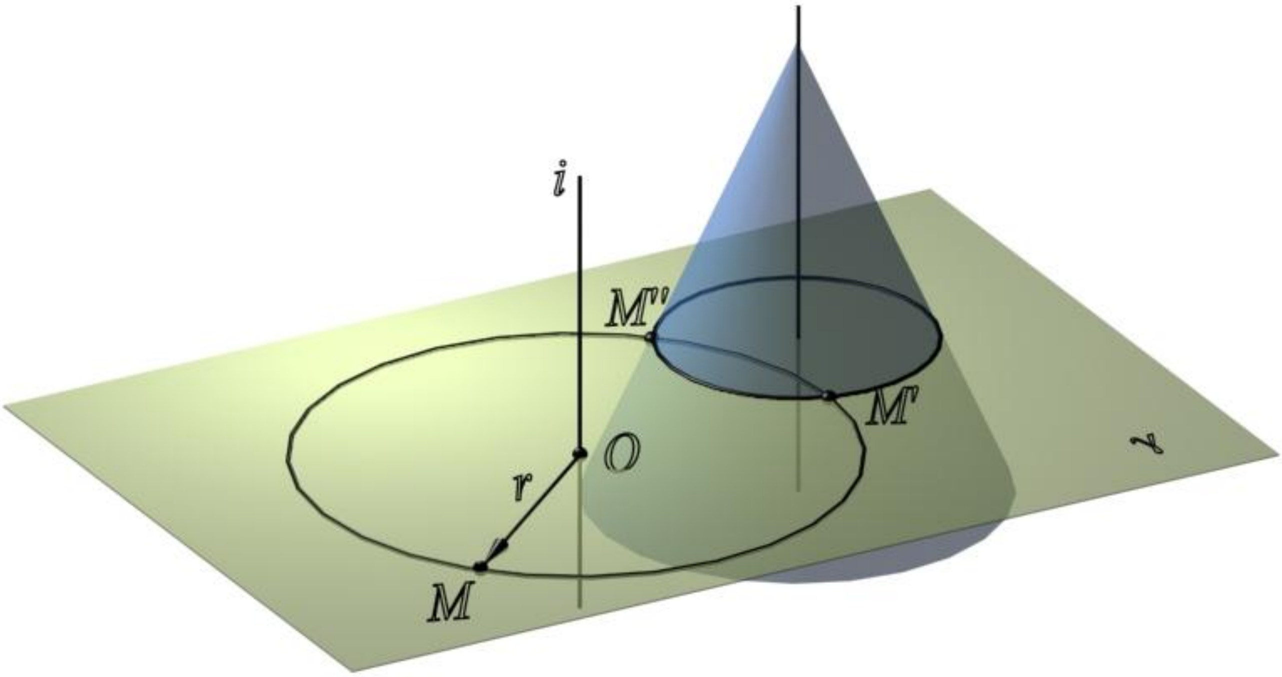


Рис. 156

88. Точку ***T*** вращением вокруг заданной прямой ***i*** совместить:

- с плоскостью (рис. 157);
- поверхностью многогранника (рис. 158);
- поверхностью конуса (рис. 159);
- поверхностью тора (рис. 160).

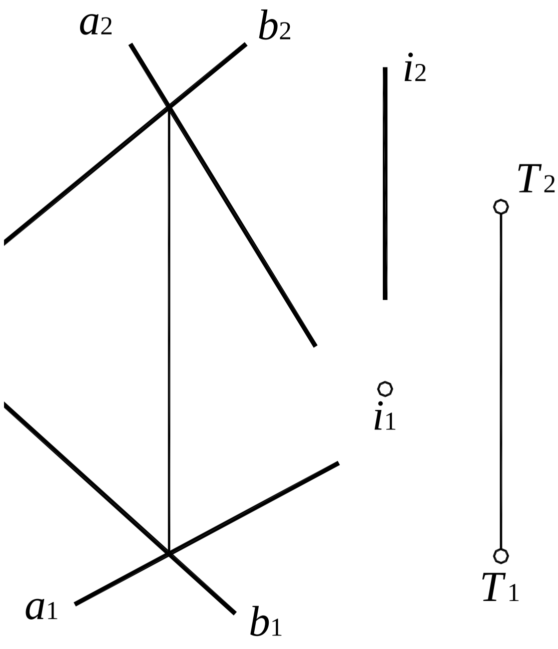


Рис. 157

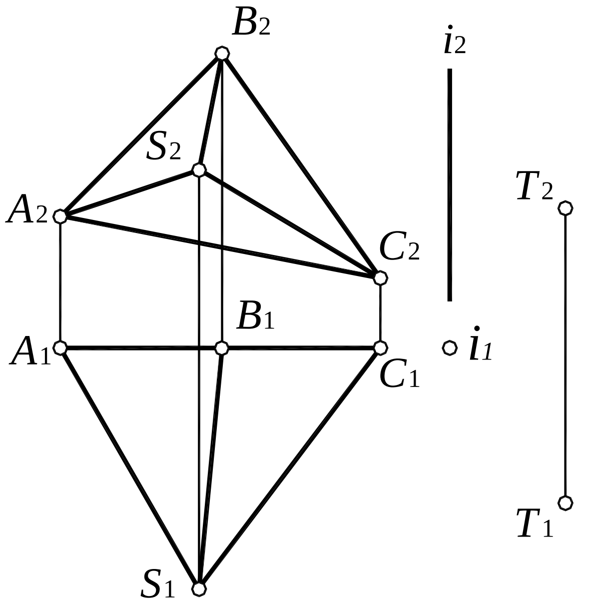


Рис. 158

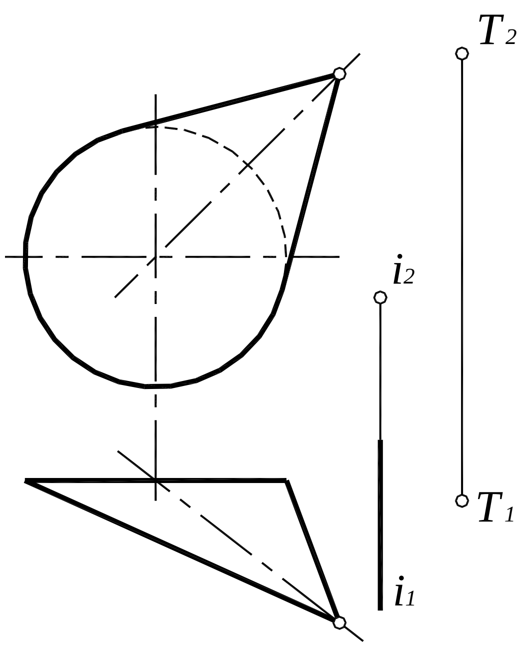


Рис. 159

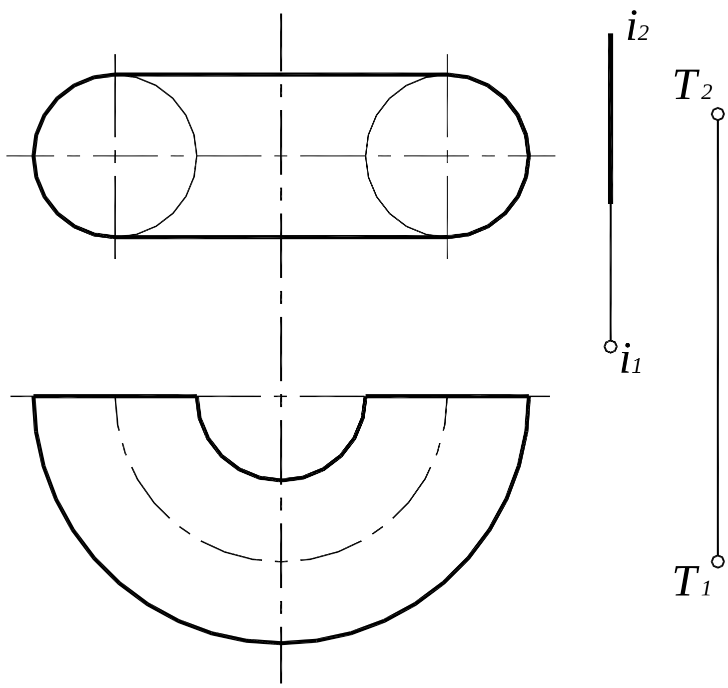


Рис. 160

4. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

Под геометрическим местом точек или прямых пространства понимается множество точек или прямых, удовлетворяющих определенному условию.

Приведем примеры некоторых геометрических мест.

Геометрическое место точек, удаленных на заданное расстояние:

- от точки – сфера, центром которой является данная точка;
- двух точек – плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего эти точки, и перпендикулярная к нему;
- прямой – поверхность цилиндра вращения;
- плоскости – пара плоскостей, параллельных данной;
- двух пересекающихся плоскостей – биссекторная плоскость двугранного угла, образованного данными плоскостями.

Геометрическое место прямых:

- проходящих через точку и прямую – плоскость;
- проходящих через некоторую точку и параллельных данной плоскости – плоскость, параллельная данной;
- параллельных данной прямой и отстоящих от нее на одинаковое расстояние – поверхность цилиндра вращения, осью которого является данная прямая, а радиусом – данное расстояние;
- проходящих через точку и наклоненных под одинаковым углом к данной плоскости – поверхность прямого кругового конуса, ось которого перпендикулярна к данной плоскости;
- пересекающих данную прямую и параллельных другой прямой – плоскость, образованная первой прямой и прямой, параллельной второй.

Геометрическим местом точек, общих для двух геометрических образов, является точка или линия их пересечения. На этом основан прием решения задач методом геометрических мест. Сначала строят геометрическое место точек или прямых, удовлетворяющих только первому условию, затем – удовлетворяющих только второму, только третьему и т. д., и определяют точки или линии пересечения полученных геометрических мест.

Таким образом, задачи сводятся к решению первой или второй основных позиционных задач. Задачи, решаемые методом геометрических мест, могут быть либо позиционными, либо позиционно-метрическими.

Пример 1. *Определить точку К, принадлежащую прямой l и равноудаленную от данных точек А и В (рис. 161).*

Геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек *А* и *В*, образует плоскость α, перпендикулярную отрезку *АВ* и проходящую через его середину. Кроме того, искомая точка *К* должна принадлежать прямой *l*.

Следовательно, $K = \alpha \times l$, то есть точка *К* определяется пересечением указанных геометрических мест.

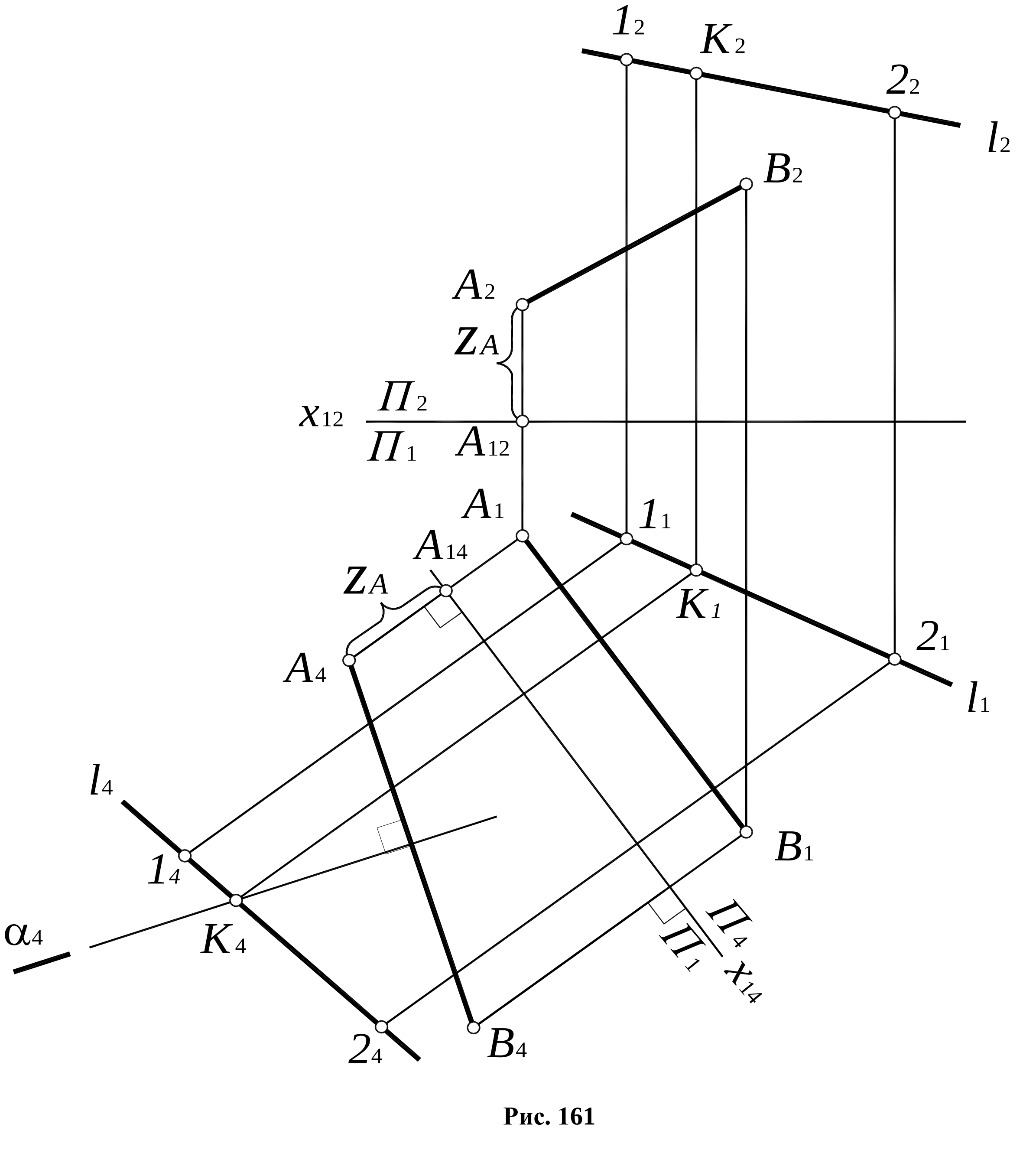


Рис. 161

Способом замены плоскостей проекций Π_2 на Π_4 отрезок *АВ* переведен в положение фронтали. При помощи двух произвольных точек *1* и *2* построена проекция прямой *l* на плоскость Π_4. След плоскости α построен как серединный перпендикуляр к отрезку A_4B_4. Точка пересечения прямой *l* и плоскости α и есть искомая точка *K*.

Пример 2. *Даны три скрещивающиеся прямые l, m и n. Построить прямую a, параллельную прямой n и пересекающую прямые l и m (рис. 162).*

Искомая прямая должна отвечать трем условиям:

- быть параллельной прямой ***n***;
- пересекать прямую ***l***;
- пересекать прямую ***m***.

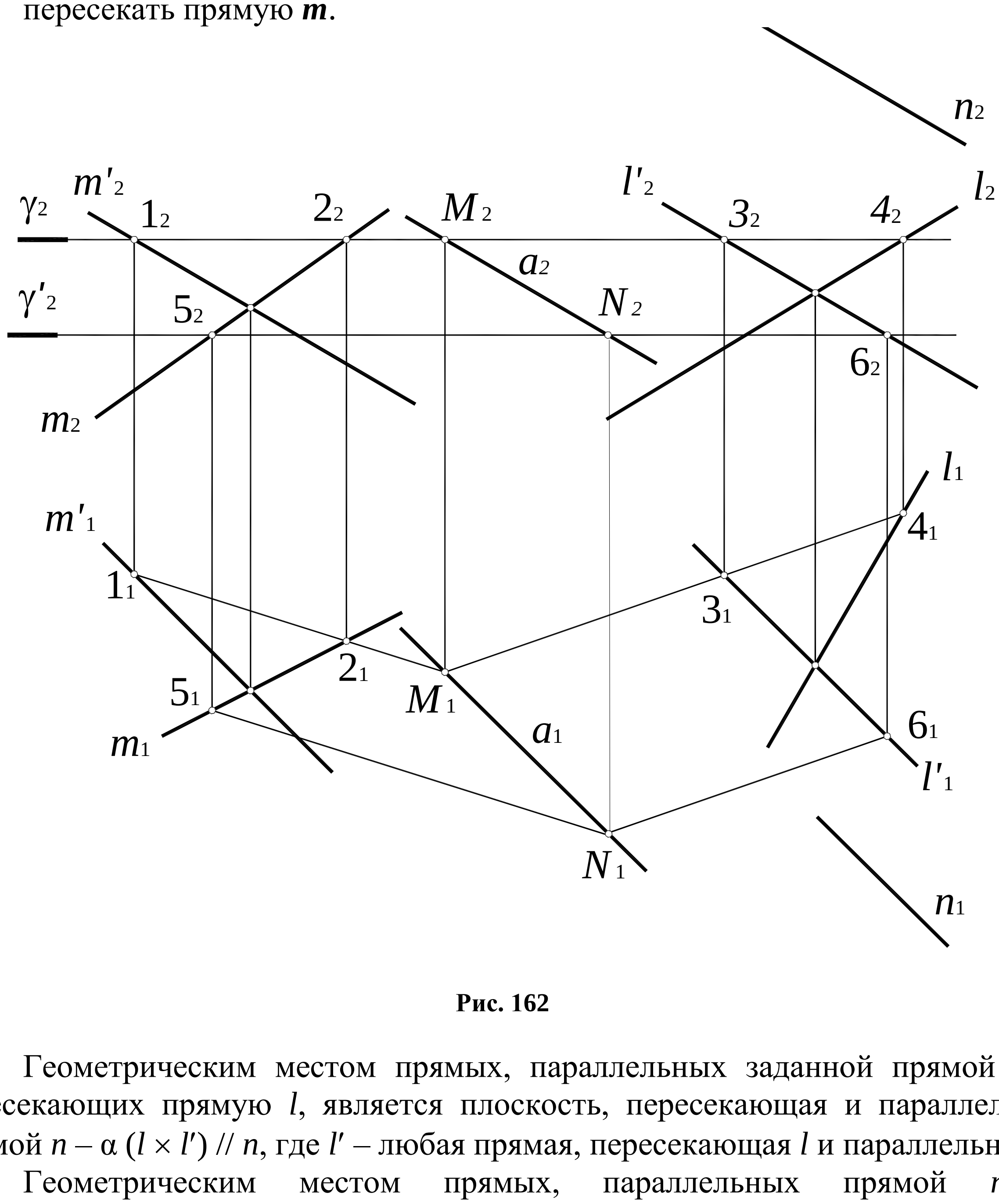


Рис. 162

Геометрическим местом прямых, параллельных заданной прямой n и пересекающих прямую l, является плоскость, пересекающая и параллельная прямой n – α ($l \times l'$) // n, где l' – любая прямая, пересекающая l и параллельная n.

Геометрическим местом прямых, параллельных прямой n и пересекающих прямую m, является плоскость β ($m \times m'$), где m' – любая прямая, пересекающая m и параллельная n.

Линия пересечения плоскостей α и β – прямая a (MN) будет отвечать всем трем условиям задачи, следовательно, прямая a и является искомой.

Пример 3. *В плоскости* α *(A, b) через точку A провести прямую a под углом* φ *к плоскости* Π_1 *(рис.163).*

Геометрическое место прямых, проходящих через точку *A* и наклоненных под некоторым углом к плоскости Π_1, представляет собой поверхность прямого кругового конуса с вершиной в точке *A*, поставленного основанием на Π_1.

Поскольку плоскость, проходящая через вершину конуса, рассекает его поверхность по двум пересекающимся прямым (два решения) или касается поверхности по одной прямой (одно решение), сечение конуса плоскостью α (*A*, *b*) и является искомой прямой *a*. Если угол наклона плоскости больше заданного угла φ, задача не имеет решения.

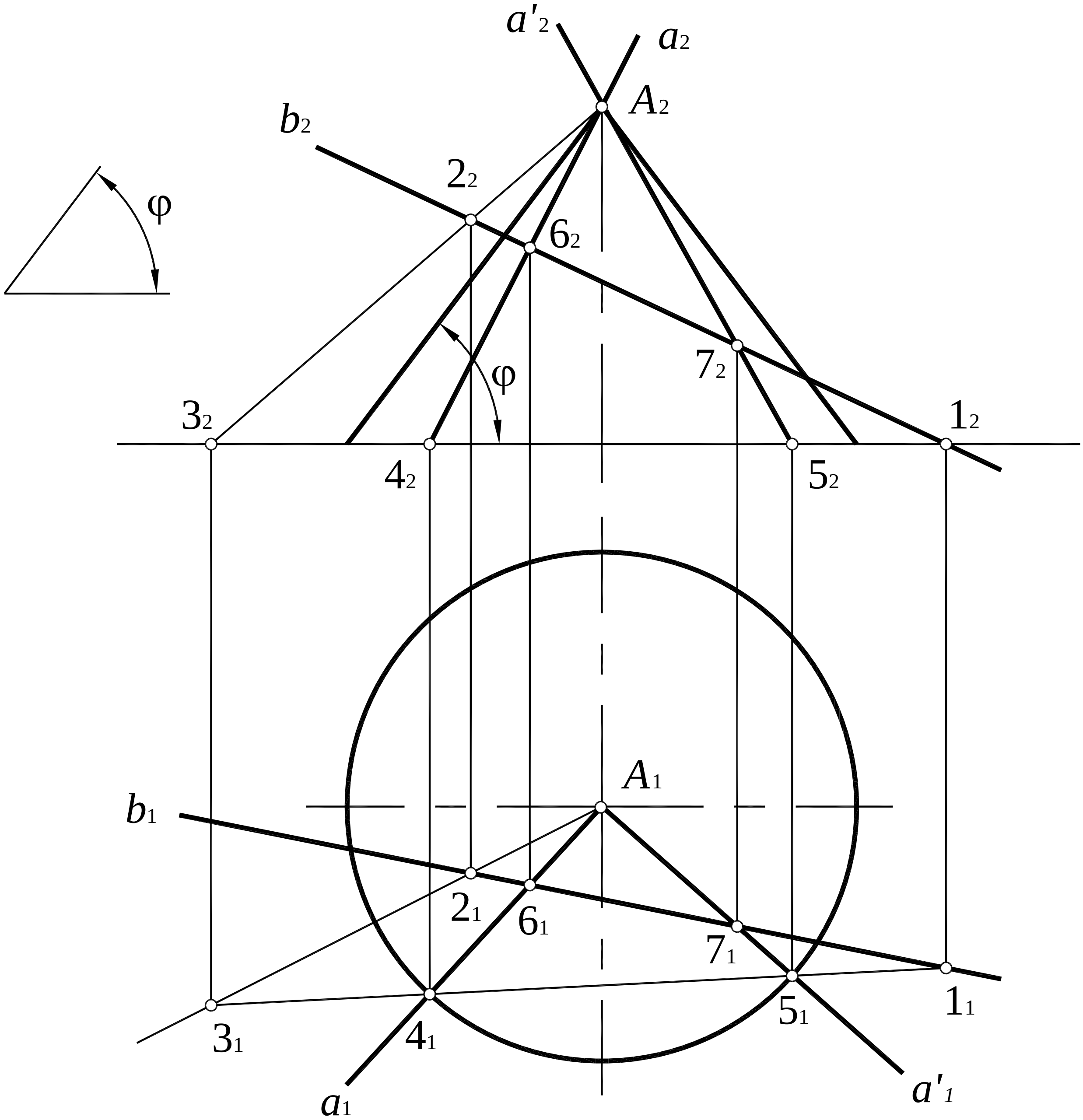


Рис. 163

Пример 4. *Прямую c повернуть вокруг подходящим образом выбранной проецирующей оси до совмещения с плоскостью* α *(a × b) (рис. 164).*

Прямая будет совмещена с плоскостью, если две ее точки будут совмещены с этой плоскостью.

Первая точка определяется как точка пересечения прямой c (c_1, c_2) с плоскостью α ($a \times b$): $K = c \times \alpha$ (первая позиционная задача).

Для совмещения второй точки – произвольной точки $C \in c$ через точку K проведена горизонтально-проецирующая ось i (i_1, i_2), вокруг которой произведено вращение точки C до совмещения с плоскостью α ($a \times b$). Результатом совмещения являются две точки – C' и C'', следовательно, задача в данном случае имеет два решения – прямые c' (K, C') и c'' (K, C'')

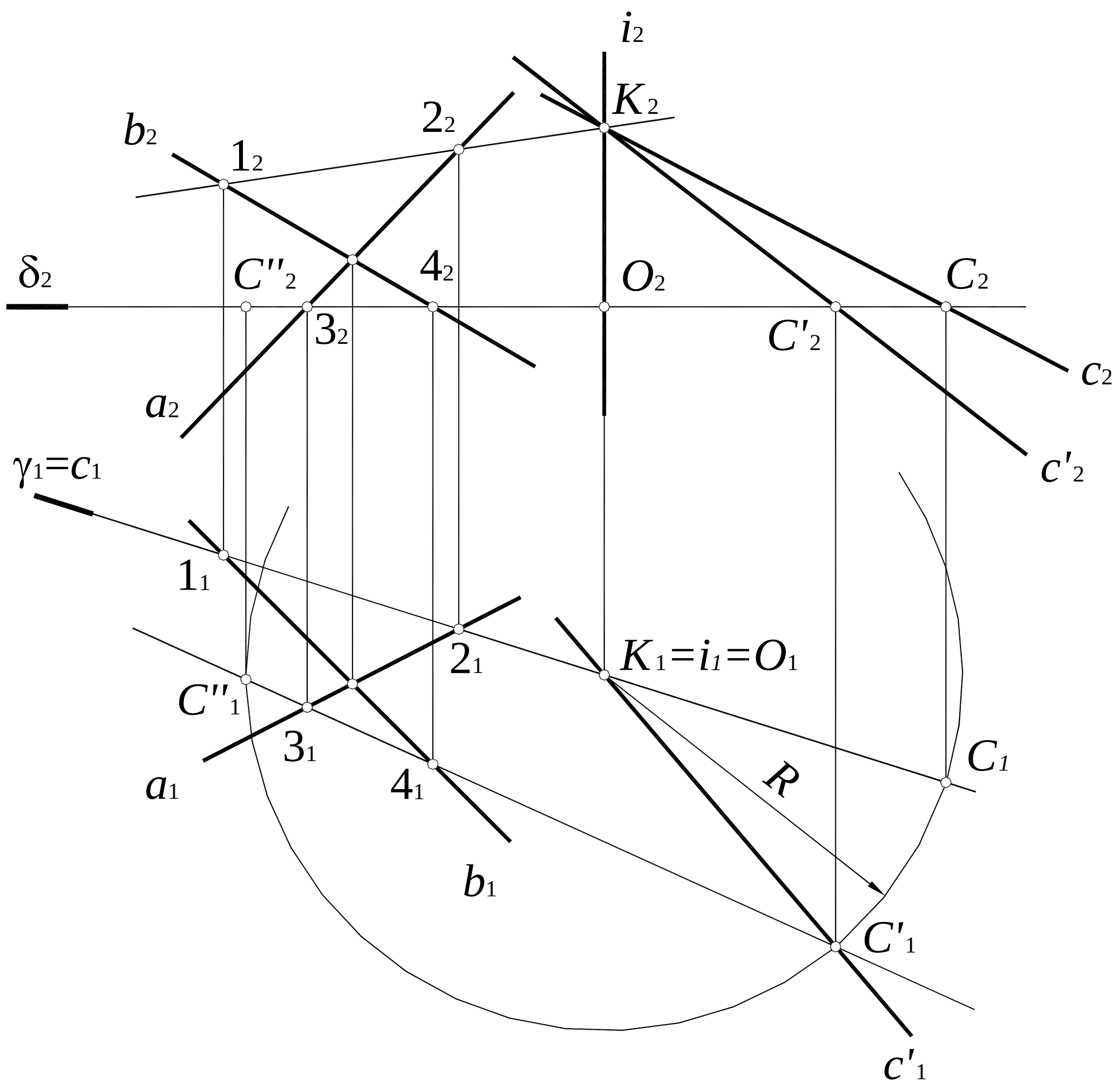


Рис. 164

Пример 5. *Построить фронтальную проекцию прямой a, если известно, что прямая a отстоит от прямой b на расстояние l (рис. 165).*

Прямая *a* должна быть образующей цилиндра вращения, осью которого является прямая *b*, а радиусом – заданное расстояние *l*.

Задача может иметь одно, два решения или не иметь решений. Два решения получаются в случае, если расстояние ***s*** между прямыми *a* и *b* < *l*. Одно – если *s* = *l*. Если расстояние *s* > *l*, задача не имеет решений.

Для упрощения решения выполняют такое преобразование комплексного чертежа, при котором прямая *b* займет проецирующее положение.

В данном случае прямая *b* переведена в проецирующее положение способом замены плоскостей проекций. Выполнено две замены плоскостей проекций. В системе плоскостей Π_4 / Π_5 прямая *b* заняла фронтально-проецирующее положение.

Если применять способ вращения при решении данной задачи, то ось вращения следовало бы взять перпендикулярной Π_1.

Если применять способ плоскопараллельного движения, то первое преобразование нужно выполнить относительно Π_1.

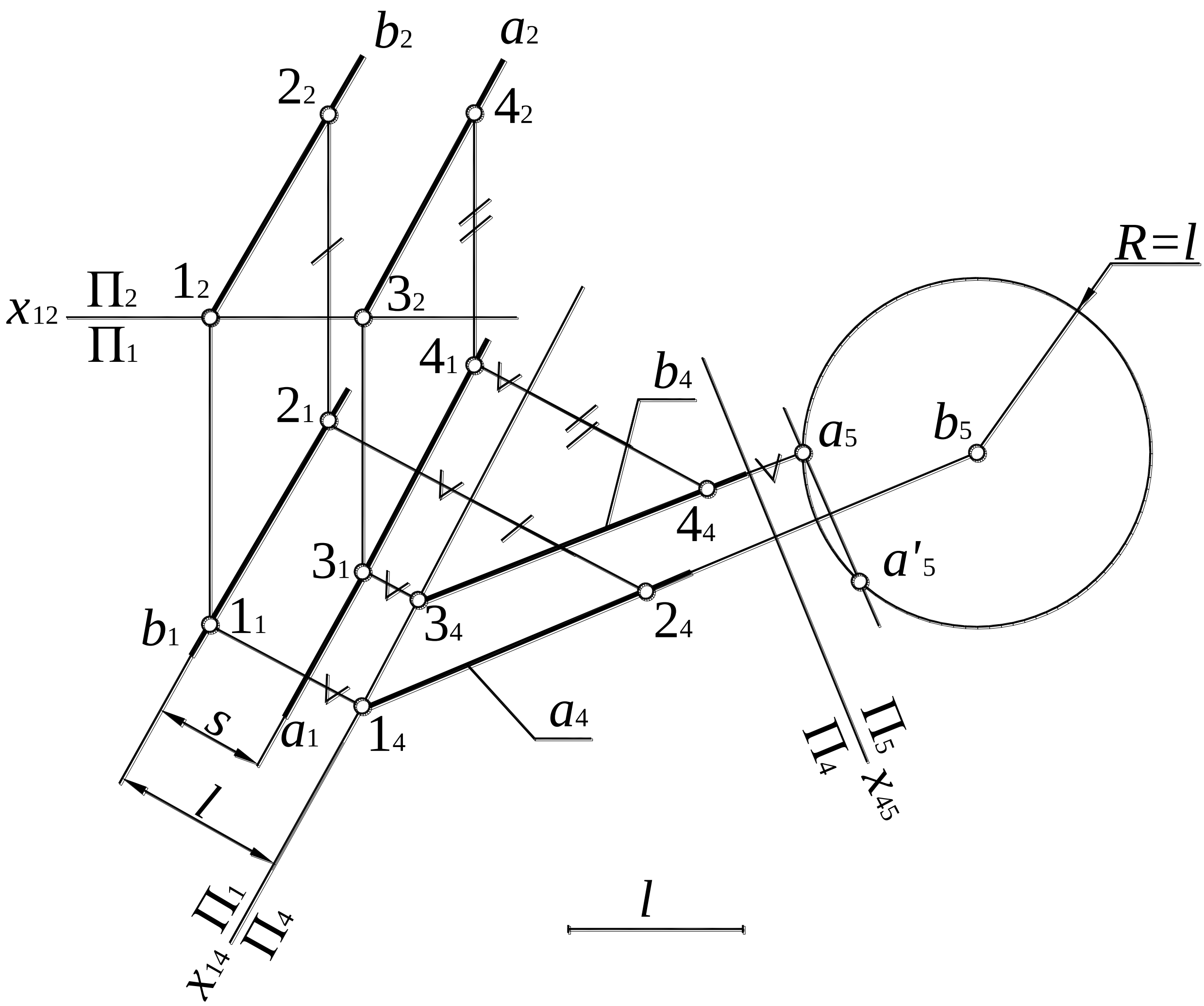


Рис. 164

89. Построить геометрическое место точек, равноудаленных:

- от двух данных точек ***C*** и ***D*** (рис. 166);
- трех данных точек ***K***, ***L*** и ***M*** (рис. 167).

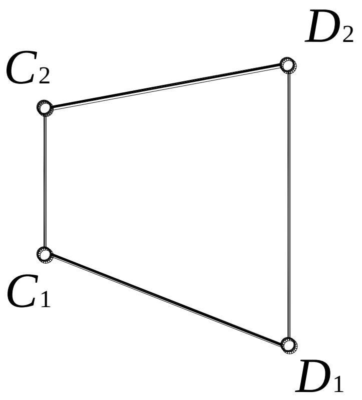


Рис. 166

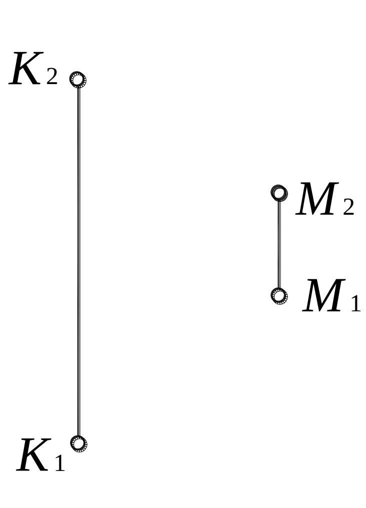


Рис. 167

90. На прямой ***a*** найти точку, равноудаленную от двух данных точек ***M*** и ***N*** (рис. 168).

91. На плоскости β(***a*** // ***b***) найти точки, равноудаленные от двух данных точек ***E*** и ***F*** (рис. 169).

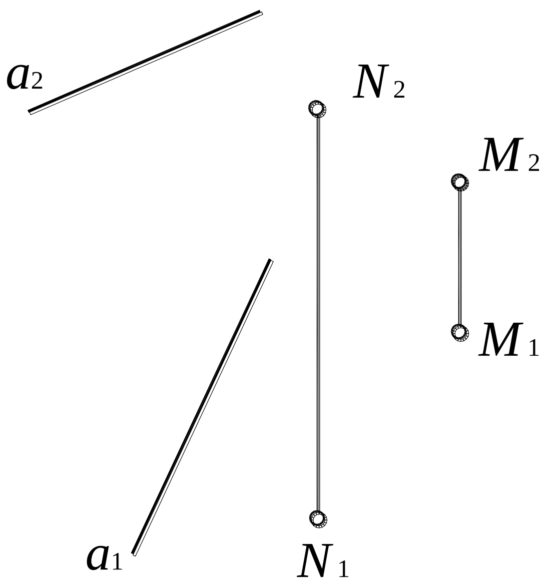


Рис. 168

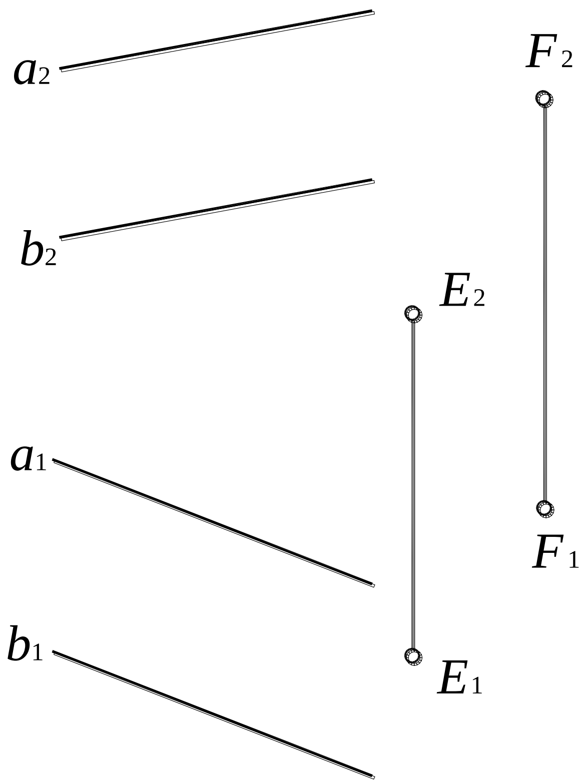


Рис. 169

92. Через точку ***A***, провести прямую ***a***, перпендикулярную прямой ***h*** и параллельную плоскости α (***c*** // ***d***) (рис. 170).

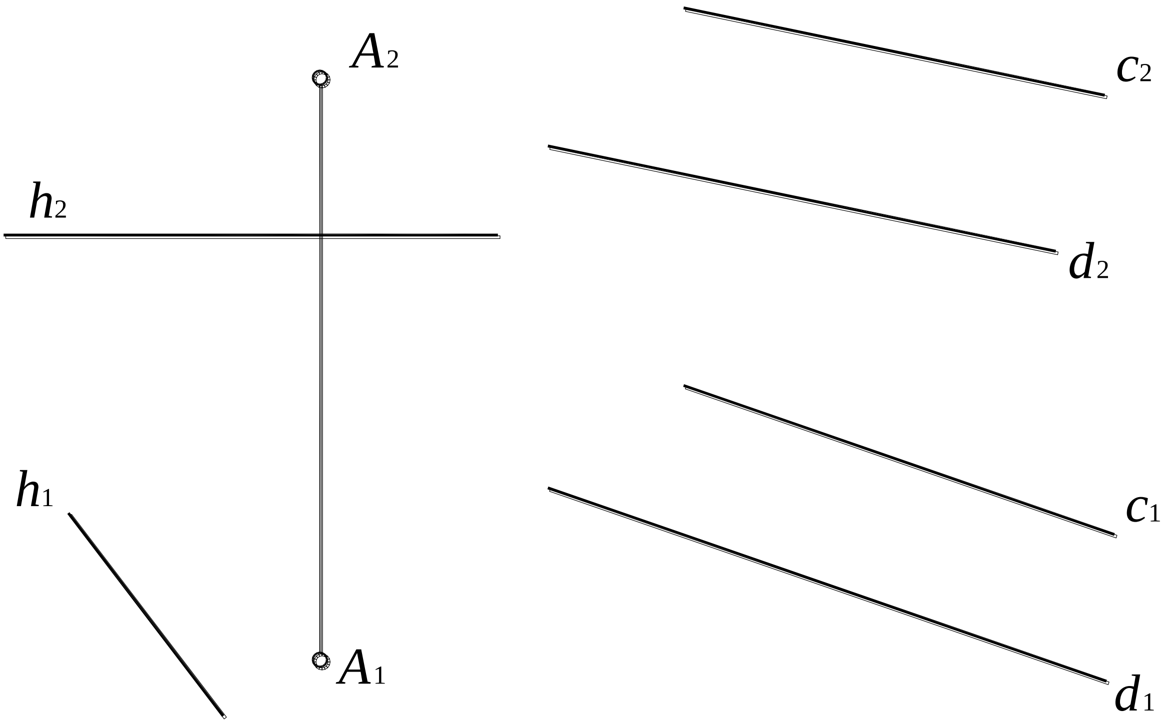
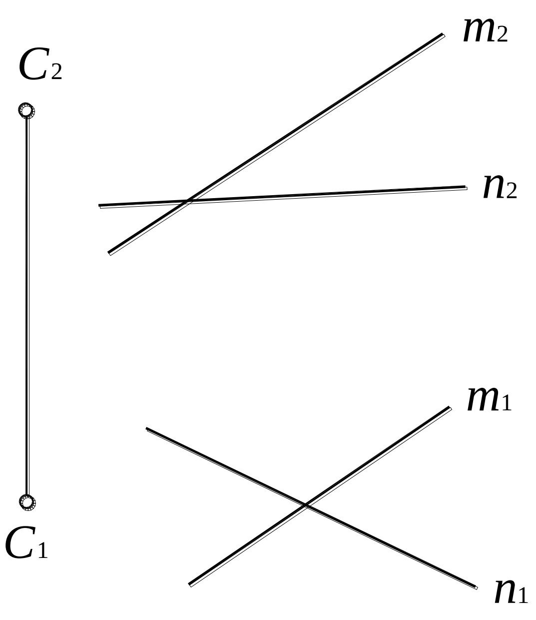


Рис. 170

93. Через точку ***C*** провести прямую ***c***, пересекающую две скрещивающиеся прямые ***m*** и ***n*** (рис. 171).



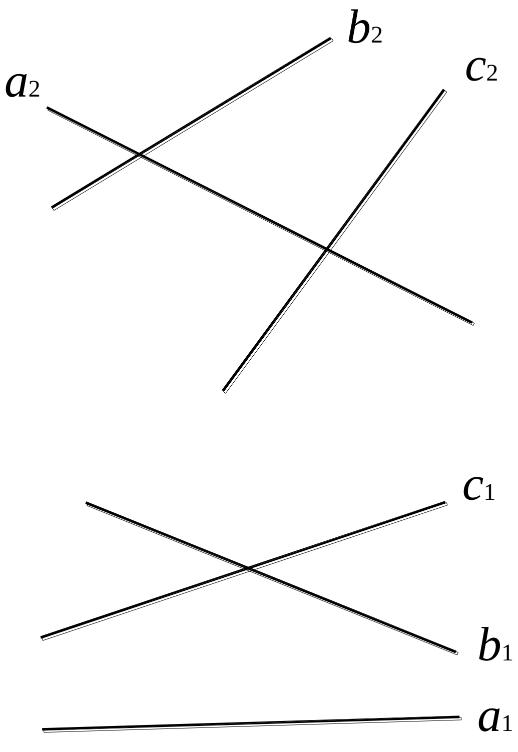


Рис. 171 **Рис. 172**

94. Построить произвольную прямую ***l***, пересекающую три скрещивающихся прямые ***a***, ***b*** и ***c*** (рис. 172).

95. Построить прямую ***l***, пересекающую две скрещивающиеся прямые ***a*** и ***b*** и параллельную третьей прямой ***c*** (рис. 173).

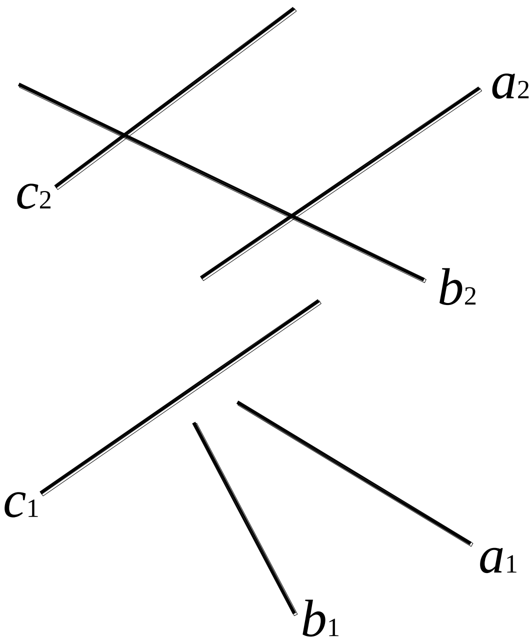


Рис. 173

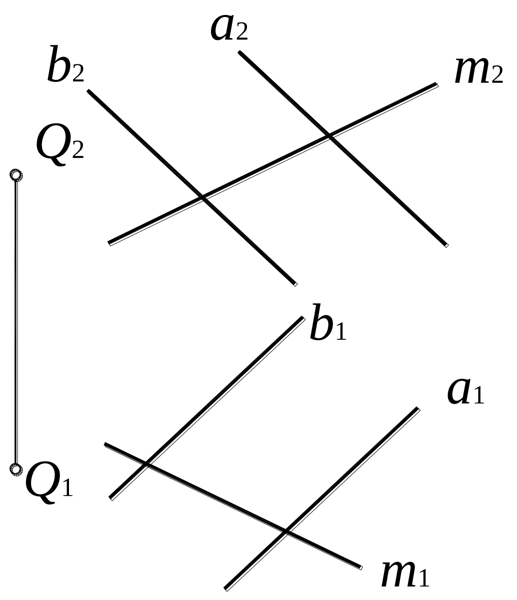


Рис. 174

96. Через точку ***Q*** провести прямую ***q***, параллельную плоскости **α (*a* // *b*)** и пересекающую прямую ***m*** (рис. 174).

97. Провести горизонталь, пересекающую прямые ***m*** и ***l*** и параллельную плоскости **β (*B*, *b*)** (рис. 175).

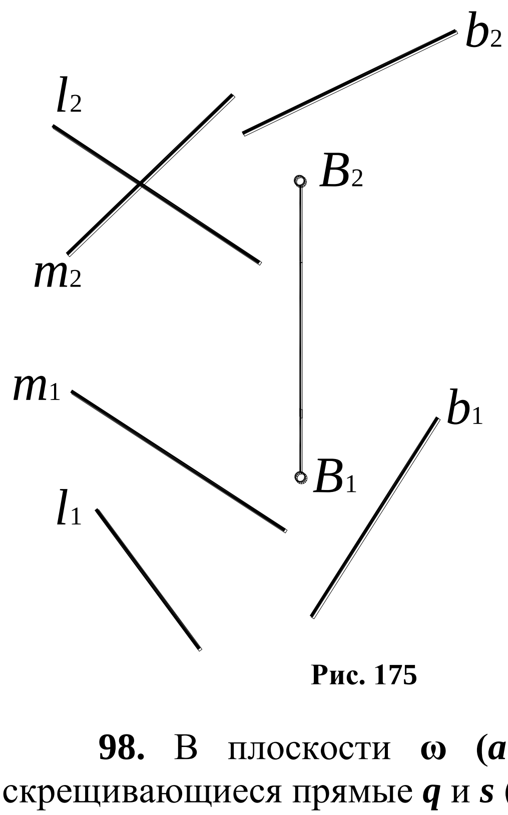


Рис. 175

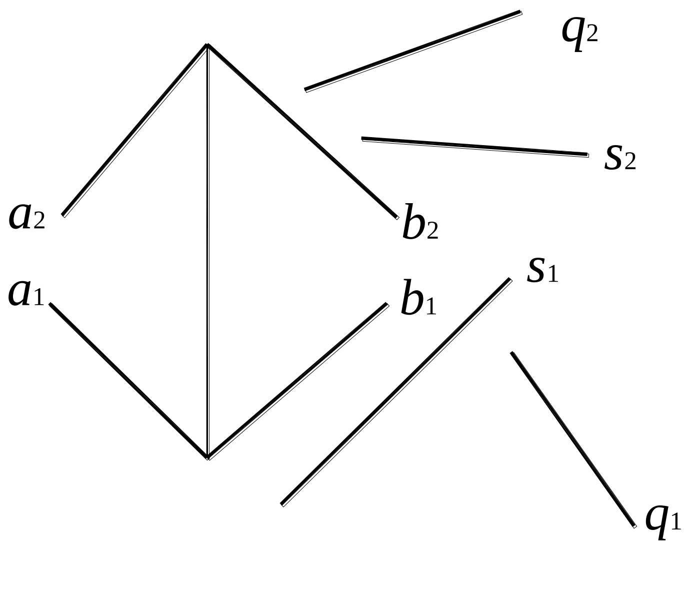


Рис. 176

98. В плоскости **ω (*a*×*b*)** провести прямую ***l***, пересекающую две скрещивающиеся прямые ***q*** и ***s*** (рис. 176).

99. Через точку ***A*** провести прямую *a*, перпендикулярную прямой ***q*** и пересекающую другую прямую ***s*** (рис. 177).

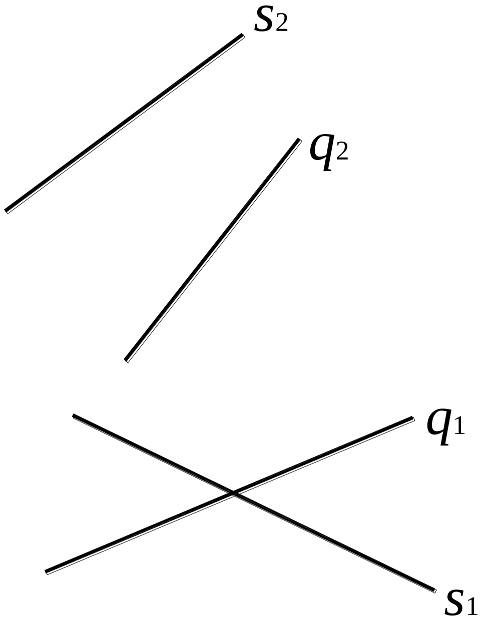


Рис. 177

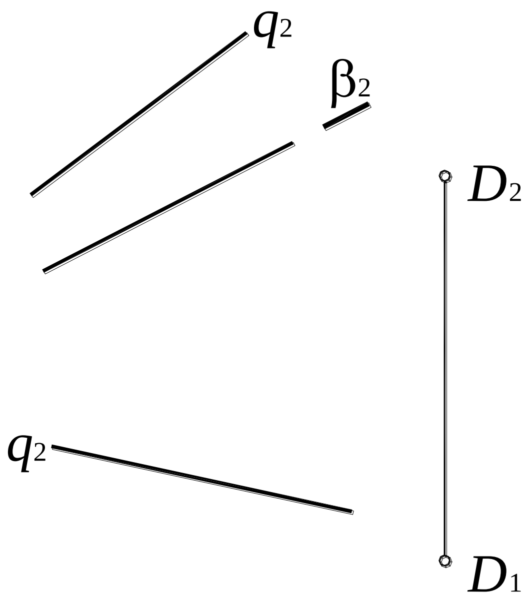


Рис. 178

100. Через точку ***D*** провести прямую ***d***, перпендикулярную прямой ***q*** и параллельную плоскости **β (β₂)** (рис. 178).

101. Прямую ***l*** вращением вокруг подходящим образом выбранной проецирующей прямой совместить с плоскостью **γ** (***f*** × ***h***) (рис. 179).

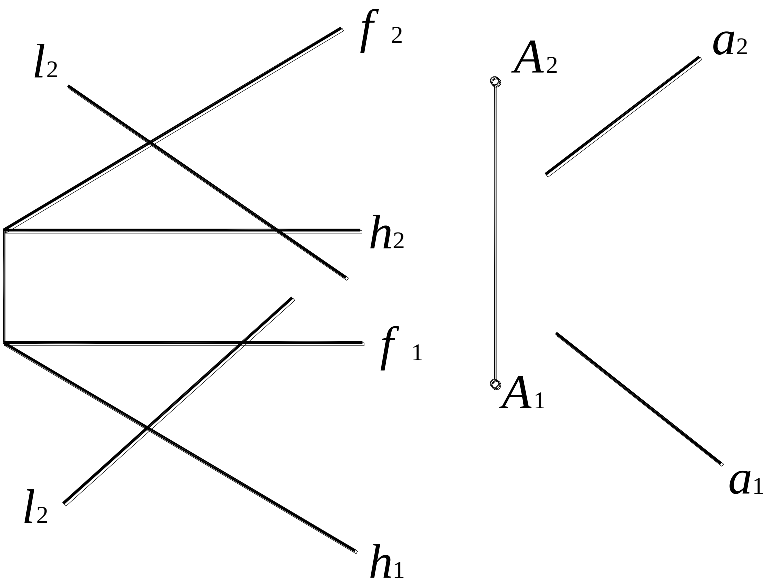


Рис. 179

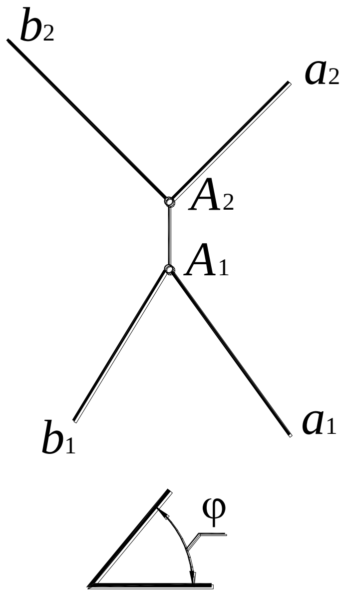


Рис. 180

102. В плоскости **α** (***a*** × ***b***) (рис. 180) через точку ***A*** провести прямую под углом **φ** к плоскости **Π_2**.

103. Провести прямую, отстоящую на расстояние $\boldsymbol{l}$ от плоскости $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$) и плоскости $\boldsymbol{\delta}$ ($\boldsymbol{\delta_1}$) (рис. 181).

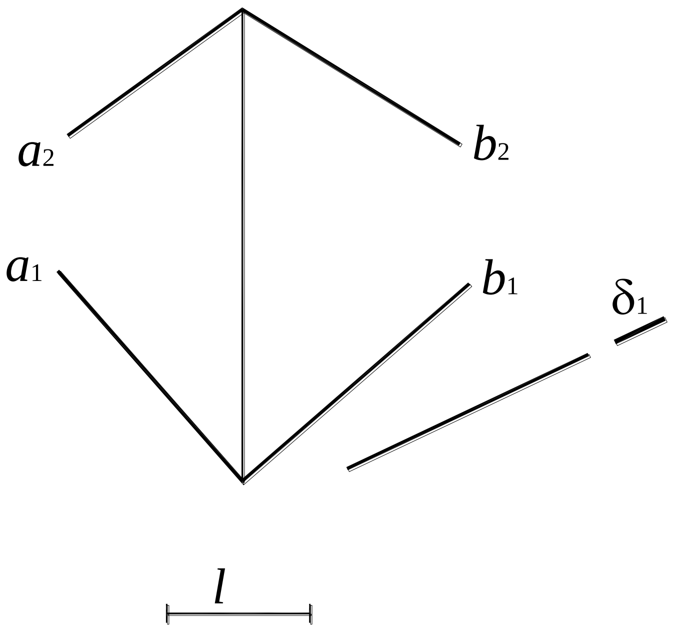


Рис. 181

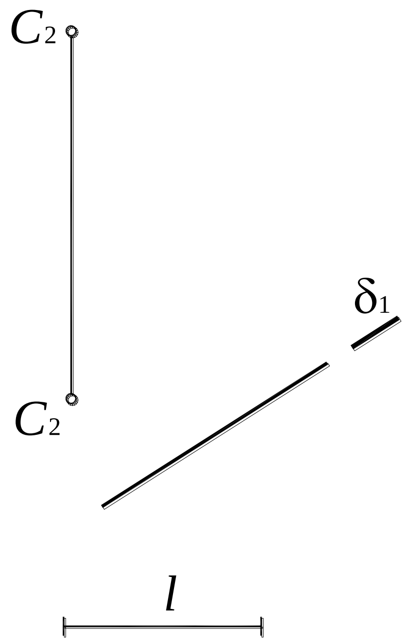


Рис. 182

104. Построить геометрическое место точек, удаленных от данной точки $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C_1C_2}$) и плоскости δ (δ_1) на расстояние $\boldsymbol{l}$ (рис. 182).

105. На прямой $\boldsymbol{d}$ найти точки, отстоящие от заданной плоскости $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{h}$) (рис. 183) и $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{ABC}$) (рис. 184) на расстояние 15 мм.

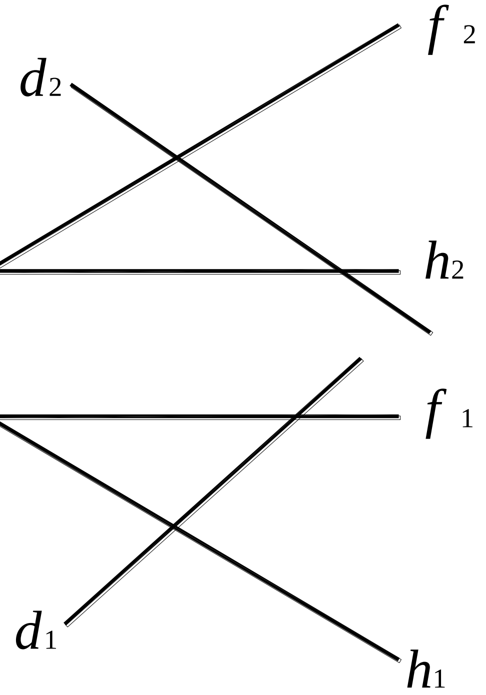


Рис. 183

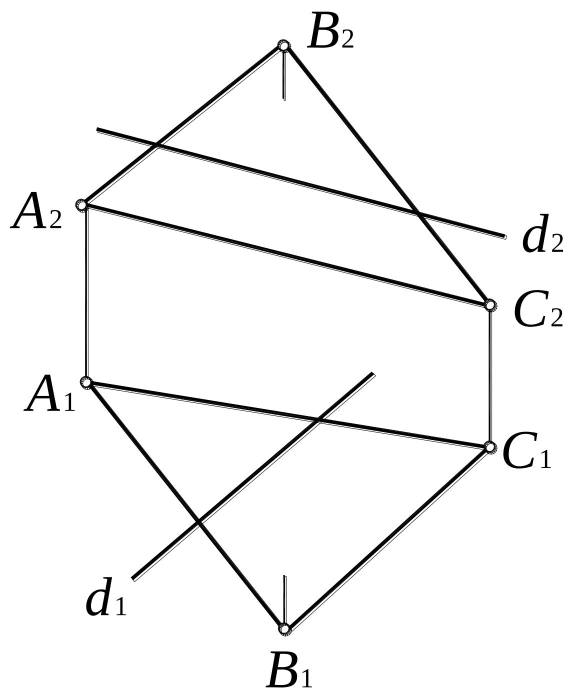


Рис. 184

106. Даны три параллельные прямые ***a***, ***b*** и ***c***. Провести четвертую прямую ***d***, параллельную данным и равноудаленную от них (рис. 185).

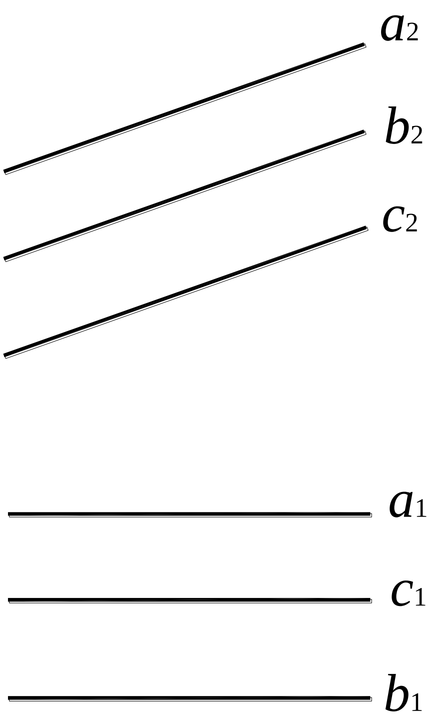


Рис. 185

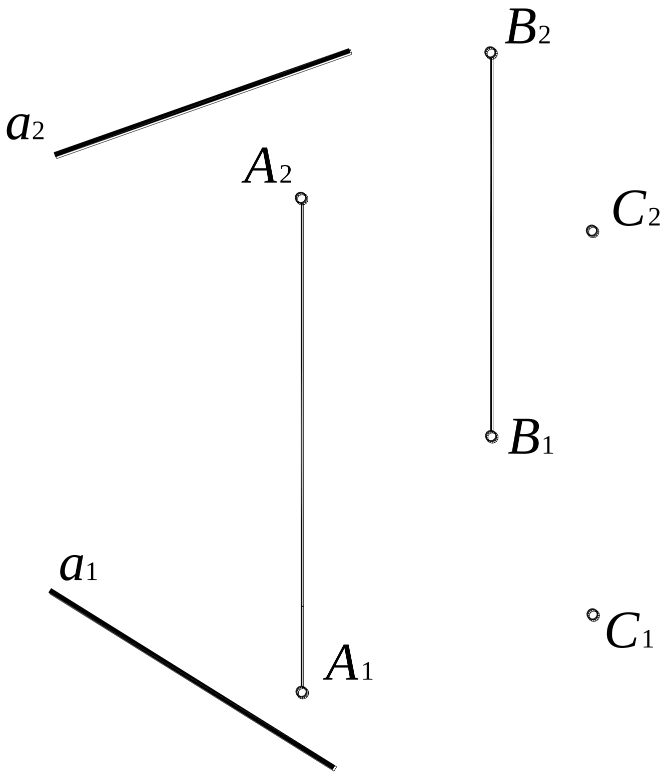


Рис. 186

107. Даны три точки ***A***, ***B***, ***C*** и прямая ***a***. Через точку, равноудаленную от точек ***A***, ***B*** и ***C*** провести прямую ***b***, параллельную прямой ***a*** (рис. 186).

108. На прямой ***m*** найти точки, равноудаленные от двух заданных плоскостей α и β: α ($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$), β // $\mathbf{\Pi_1}$ (рис. 187) и α (α_2) $\perp$ $\mathbf{\Pi_2}$, β **(**β_1**)** // $\mathbf{\Pi_2}$ (рис. 188).

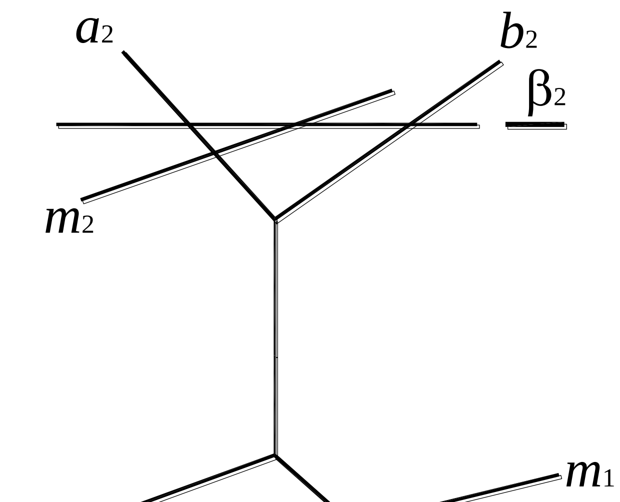


Рис. 187

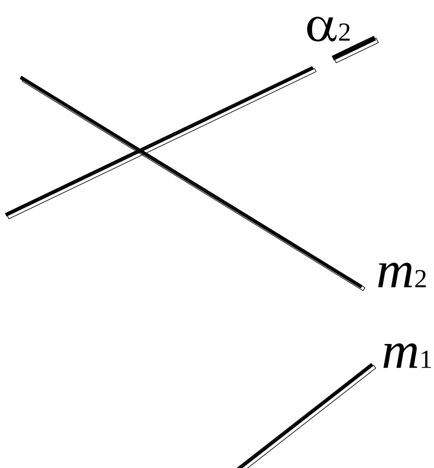


Рис. 188

109. Построить недостающую проекцию точки ***B***, если известно, что она удалена от данной плоскости **β (*ABC*)** (рис. 189) и **β (*A, a*)** (рис. 190) на расстояние ***l***.

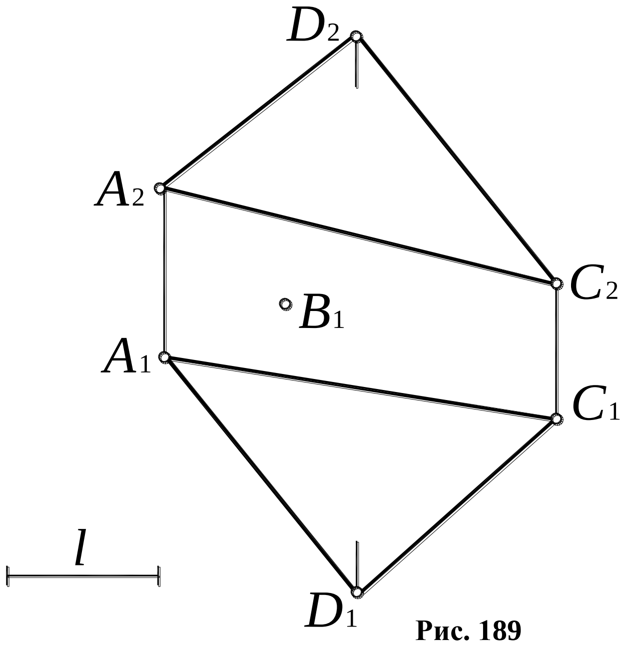


Рис. 189

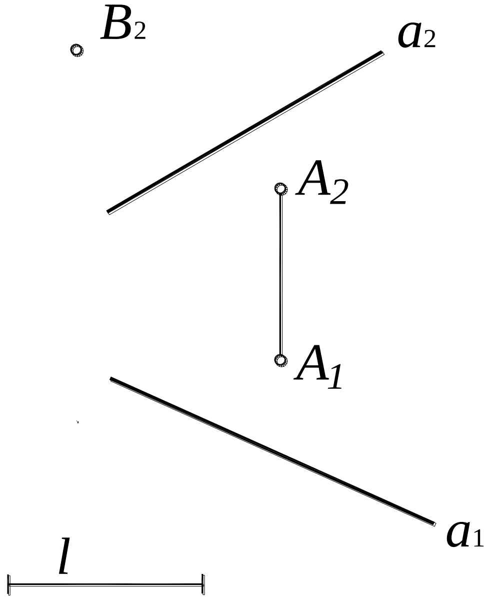


Рис. 190

110. Построить горизонтальную проекцию прямой ***d***, если известно, что прямая ***d*** отстоит от прямой ***c*** (***c*** // ***d***) на расстояние 15 мм (рис. 191, 192).

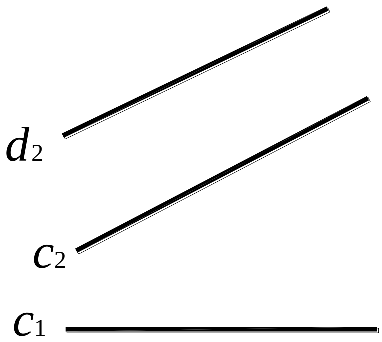


Рис. 191

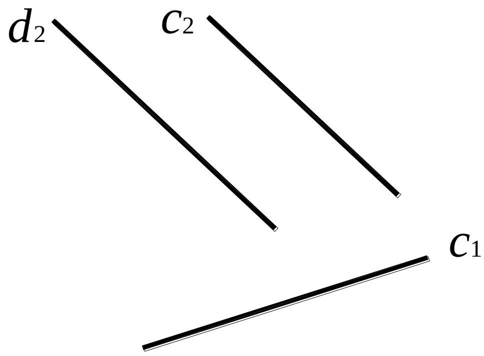


Рис. 192

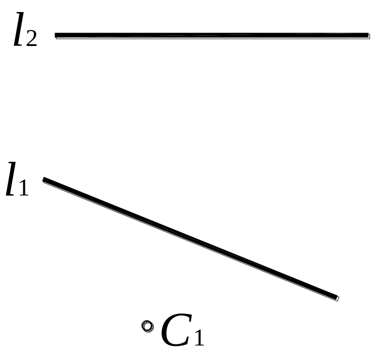


Рис. 193

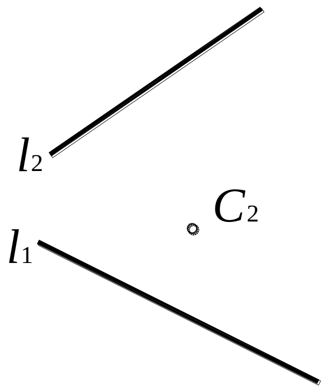


Рис. 194

111. Построить недостающую проекцию точки ***C***, если известно, что эта точка находится на расстоянии 20 мм от прямой ***l*** (рис. 193, 194).

5. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Сущность метода аксонометрического проецирования заключается в том, что предмет, жестко связанный с осями прямоугольных координат, параллельно проецируется на некоторую плоскость – плоскость аксонометрических проекций. При этом направление проецирования не должно совпадать ни с одной из координатных осей. Если направление проецирования перпендикулярно картинной плоскости, то такая проекция называется прямоугольной, или ортогональной аксонометрической проекцией, в остальных случаях – косоугольной аксонометрической проекцией.

В общем случае прямоугольная система координат $Oxyz$ наклонена под произвольным углом к аксонометрической плоскости проекций. При этом натуральные масштабные отрезки проецируются на картинную плоскость с различными искажениями.

Показателем искажения называют отношение аксонометрического масштаба к соответствующему натуральному:

по оси x – $u = ex'/ex$; по оси y – $v = ey'/ey$; по оси z – $w = ez'/ez$.

В зависимости от соотношения показателей искажения различают три вида аксонометрических проекций:

1) изометрия – $u = v = w$;
2) диметрия – $u = w \neq v$;
3) триметрия – $u \neq w \neq v$.

На практике пользуются приведенными показателями искажения, то есть принимают $U = V = W = 1$ в изометрии и $U = V = 1$, $V = 0{,}5$ в диметрии. Такие аксонометрические проекции называются приведенными.

В общем случае окружность проецируется на аксонометрическую плоскость проекций в виде эллипса, большая ось (БОЭ) которого в точной аксонометрии равна диаметру окружности d, а малая (МОЭ) – $d\cos\alpha$, где α – угол наклона плоскости окружности к аксонометрической плоскости проекций.

Если окружность лежит в координатной плоскости или параллельна ей, то на аксонометрическом чертеже большая ось эллипса, изображающего окружность, располагается перпендикулярно той аксонометрической оси, которая отсутствует в наименовании плоскости окружности.

Например, если окружность расположена в плоскости Π_1 (xOy), в аксонометрии большая ось эллипса перпендикулярна оси z. Размеры осей эллипса в прямоугольных приведенных изометрии и диметрии даны в табл.1 (d – диаметр окружности).

Таблица 1

Изометрия		**Диметрия**			
во всех плоскостях		в плоскостях Π_1 и Π_3		в плоскости Π_2	
БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ
1.22d	0.72d	1.06d	0.35d	1.06d	0.95d

На рис. 195 представлен пример построения приведенной прямоугольной изометрической и диметрической проекции детали.

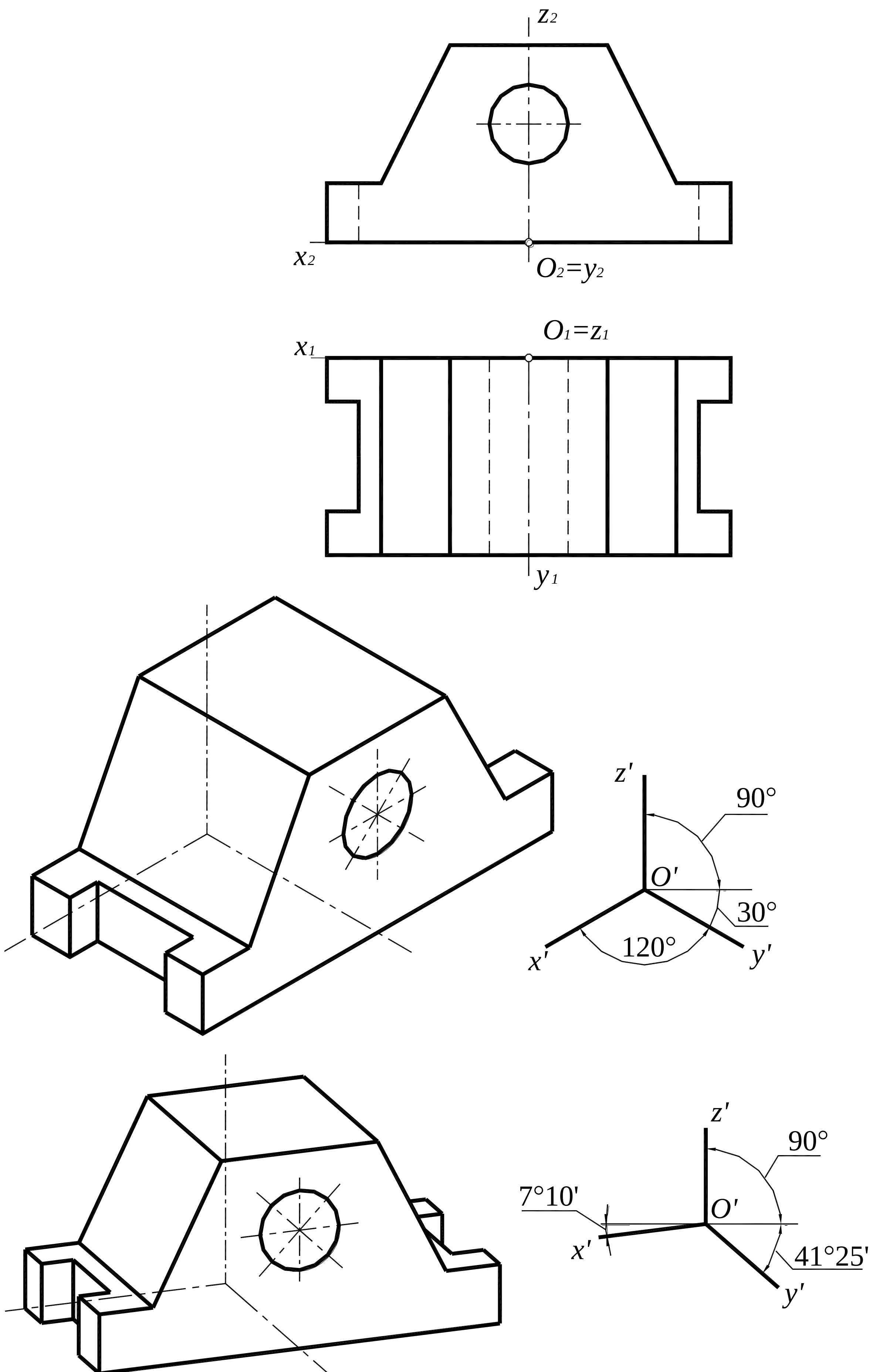


Рис. 195

112. По заданному ортогональному чертежу построить приведенную изометрию и диметрию детали с вырезом ¼ координатными плоскостями (рис. 196 – 199).

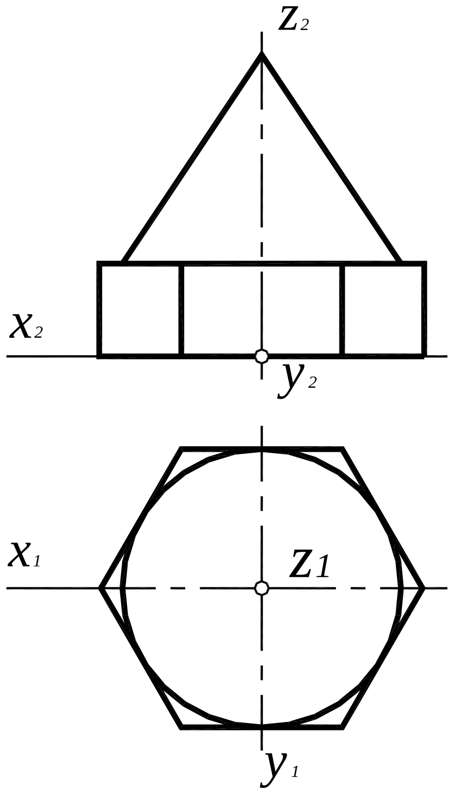


Рис. 196

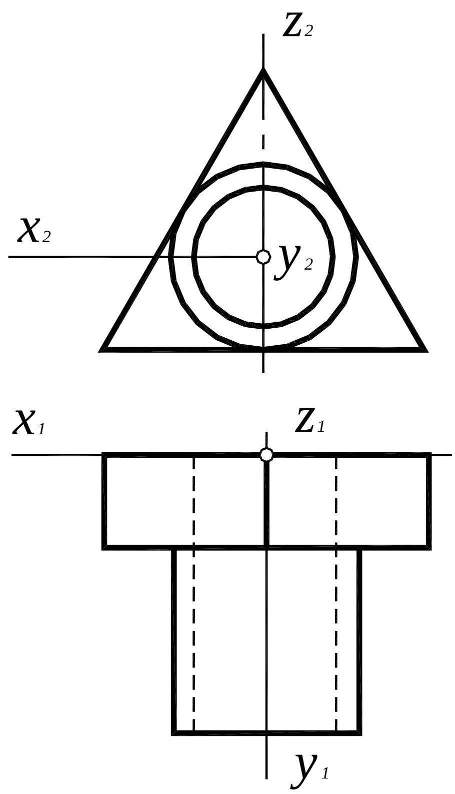


Рис. 197

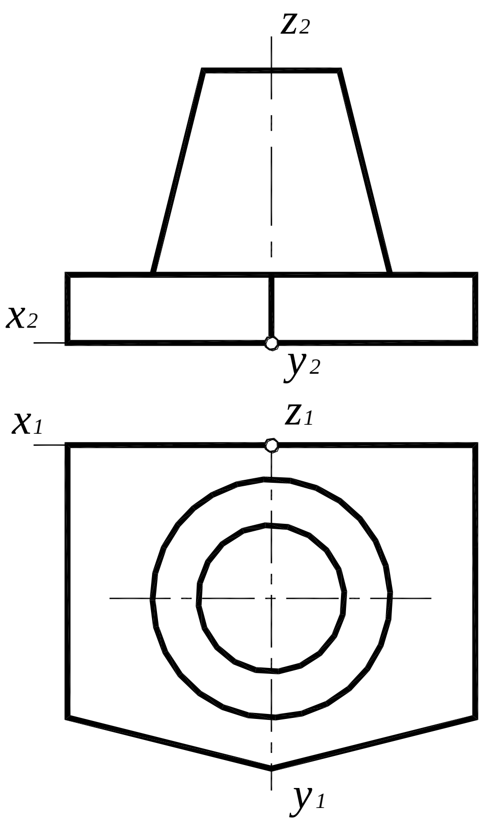


Рис. 198

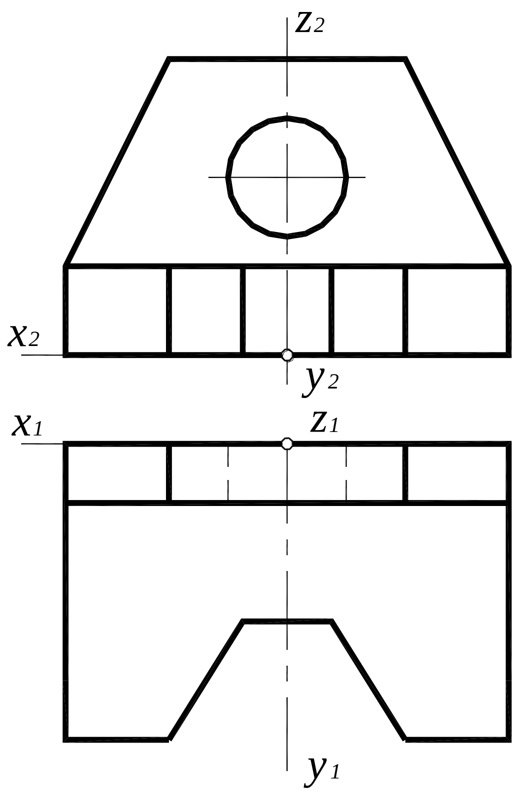


Рис. 199

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гордон, В.О.** Курс начертательной геометрии: учеб. пособие / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огневский; под ред. Ю.Б. Иванова. – 23-е изд., перераб. – М.: Наука, 1988. – 272 с.
2. **Бубенников, А.В.** Начертательная геометрия: учебник для втузов / А.В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 288 с.
3. **Виницкий, И.Г.** Начертательная геометрия: учебник для вузов / И.Г. Винницкий.– М.: Высш. шк., 1975. – 280 с.
4. **Капустина, О.А.** Начертательная геометрия (конспект лекций): учеб. пособие / О.А. Капустина, Л.М. Колосунина, С.С. Станков. ГПИ им. А.А. Жданова. – Горький, 1970. – 135 с.
5. **Капустина, О.А.** Сборник задач по начертательной геометрии / О.А. Капустина [и др.]. ГПИ им. А.А. Жданова. – Горький, 2001. – 73 с.
6. **Лагерь, А.И.** Инженерная графика: учебник / А.И. Лагерь, Э.А. Колесникова. – М.: Высш. шк., 1985. – 176 с.
7. **Локтев, О.В.** Краткий курс начертательной геометрии: учебник для втузов / О.В. Локтев. – 2-е изд., перераб. и доп., – М.: Высш. шк., 1985. – 136 с.
8. **Посвянский, А.Д.** Краткий курс начертательной геометрии: учебник / А.Д. Посвянский. – 3-е изд., – М.: Высш. шк., 1970. – 240 с.
9. **Скобелева, И.Ю.** Начертательная геометрия: учебное пособие / И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова, М.Л. Мухина;НГТУ. Нижний Новгород, 2006. – 150 с.
10. **Фролов, С.А.** Начертательная геометрия: учебник для втузов / С.А. Фролов. – 2-е изд., перераб. и доп., – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
11. **Четверухин, Н.Ф.** Курс начертательной геометрии: учебник для всех специальностей технических вузов / Н.Ф. Четверухин [и др.]. – М.: Гос. из-во тех.-теор. лит, 1956. – 436 с.

Скобелева Ирина Юрьевна
Ширшова Ирина Александровна
Мухина Милена Львовна

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор **Н.Н. Максимова**
Технический редактор **Т.П. Новикова**
Компьютерная верстка **И.Ю. Скобелева**

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,25.
Уч. изд. л. 5. Тираж 1500. Заказ

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.