ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. Ершов
Д.А. Смирнов

СТАТИКА. КИНЕМАТИКА.

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Часть I

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета в качестве учебно-методического пособия для студентов безотрывных форм обучения по специальностям:

151001- «Технология машиностроения»
190201- «Автомобиле- и тракторостроение»
190601- «Автомобили и автомобильное хозяйство»

Н. Новгород 2006

УДК 531.43 (075.5)

Статика. Кинематика: Ершов Н.В., Смирнов Д.А. Комплекс учебно - методических материалов. Часть I / Н.В. Ершов, Д.А. Смирнов, Нижегород. гос. тех. ун-т, Н. Новгород, 2006. 116с.

Комплекс учебно - методических материалов по курсу «Теоретическая механика» написан в соответствии с программой курса по теоретической механике для студентов НГТУ безотрывных форм обучения. В нем выводятся условия равновесия произвольной системы сил, а также частные случаи приведения данной системы сил к центру. Излагаются способы задания движения и определения параметров движения материальной точки и твердого тела. Даются методические указания к решению задач, расчетно-графических работ, примеры этих решений для успешного освоения разделов «Статика», «Кинематика».

Рецензент кандидат технических наук, доцент Р.Л. Шиберт

Редактор Э.Б. Абросимова

Подп. в печ. .09.06. Формат $60 \times 84^1/16$. Бумага газетная. Печать офсетная.
Печ. л. 1,0. Уч.-изд.л. 6.0. Тираж 300 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603950, Н. Новгород, ул. Минина, 24.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теоретическая механика является одной из фундаментальных научных дисциплин физико-математического цикла. На материале курса теоретической механики базируются такие важные для общего инженерного образования дисциплины, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, строительная механика, гидравлика, теория упругости и пластичности, гидродинамика и аэродинамика, теория колебаний и др., а также большое число специальных инженерных дисциплин, посвященных изучению динамики машин и различных видов транспорта, методов расчета, сооружения и эксплуатации таких объектов, как высотные здания, мосты, тоннели, шахты, плотины, корабли, станки, роботы, автомобили и др. Изучение теоретической механики должно также дать тот минимум фундаментальных знаний, на базе которых будущий специалист сумеет самостоятельно овладеть всем новым, с чем придется сталкиваться в ходе дальнейшего научно-технического прогресса. Наконец, изучение курса теоретической механики способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и выработке у него правильного материалистического мировоззрения.

В результате изучения курса теоретической механики студент должен усвоить основные понятия и законы механики и вытекающие из этих законов методы изучения равновесия и движения материальной точки, твердого тела и механической системы, уметь прилагать полученные знания для решения соответствующих конкретных задач механики. Дополнительные вопросы предлагаются применительно к будущей специальности студента.

Программой предусмотрены расчетно-графические работы, которые должен выполнить студент. Перечень расчетно-графических работ и сроки их выполнения, а также их защит тоже устанавливаются кафедрой. Защиты проводятся путем собеседования с каждым студентом в течение семестра во внеучебное время.

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Ведомость числа часов по рабочим учебным планам

Наименование темы	Курс с общим объёмом	
	38 часов Заочный факультет	
	Лекции	Практические занятия
1. Основные понятия и аксиомы статики	1	_
2. Система сходящихся сил	0,5	1
3. Момент силы и пары сил	0,5	_
4. Система пар сил	1	_
5. Приведение системы сил к центру	1	_
6. Плоская система сил	1	2
7. Пространственная система сил	1	1
8. Центр параллельных сил и центр тяжести	1	_
9. Кинематика точки	1	1
10. Поступательное движение твёрдого тела	1	_
11. Вращательное движение твёрдого тела	1	1
12. Плоское движение твёрдого тела	2	2
13. Сложное движение точки	1	_

Тематический план дисциплины

Наименование раздела, темы	Заочная форма обучения								
	Всего часов	Аудиторные	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельная работа	Курсовой проект	Курсовая работа	РГР
Раздел 1. «Статика»									
Тема 1			1						
Тема 2			0.5		1				
Тема 3			0.5						
Тема 4			1						
Тема 5			1						
Тема 6			1		2				8
Тема 7			1		1				4
Тема 8			1						
Раздел 2. «Кинематика»									
Тема 9			1		1				3
Тема 10			1						
Тема 11			1		1				
Тема 12			2		2				8
Тема 13			1						
Всего часов			13		8				
Форма контроля знаний студента	Экзамен								

Описание содержания основных тем

Тема 1. Основные понятия и аксиомы статики. Сила и пара сил. Абсолютно твердое тело. Аксиомы статики. Связи и реакции связей.
Тема 2. Система сходящихся сил. Приведение к равнодействующей. Условия равновесия. Теорема о трех силах.
Тема 3. Момент силы и пары сил. Момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Момент пары сил.
Тема 4. Система пар сил. Теоремы о парах сил. Приведение системы пар сил к простейшему виду. Условия равновесия системы пар.
Тема 5. Приведение системы сил к центру. Параллельный перенос силы. Основная теорема статики. Условия равновесия системы сил в векторной и аналитической форме. Частные случаи приведения системы сил. Теорема Вариньона. Распределенные нагрузки.
Тема 6. Плоская система сил. Условия равновесия. Статически определимые и статически неопределимые задачи. Равновесие системы тел.
Тема 7. Пространственная система сил. Условия равновесия. Условия равновесия для частично закрепленного тела.
Тема 8. Центр параллельных сил и центр тяжести. Центр параллельных сил. Центр тяжести. Методы нахождения центра тяжести.
Тема 9. Кинематика точки. Способы задания движения. Скорость и ускорение точки при различных способах задания движения.
Тема 10. Поступательное движение твердого тела. Определение. Перемещения, скорости и ускорения различных точек тела.
Тема 11. Вращательное движение твердого тела. Определение. Задание движения. Угловая скорость и угловое ускорение. Определение абсолютной производной вектора заданного в подвижной системе координат. Скорость и ускорение точки тела.
Тема 12. Плоское движение твердого тела. Определение. Задание движения. Теорема о сложении скоростей. Теорема о проекциях скоростей на ось, проходящую через две точки. Мгновенный центр скоростей. Теорема о сложении ускорений. Мгновенный центр ускорений.
Тема 13. Сложное движение точки. Определение. Сложное движение и составляющие движений. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). Ускорение Кориолиса.

3. ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема 1. Основные понятия и аксиомы статики.

Статикой называется раздел механики, в котором выводятся условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил. Под *равновесием* будем понимать состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам.

В курсе теоретической механики рассматриваются задачи о равновесии абсолютно твердых тел. *Абсолютно твердым телом* будем называть такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается постоянным.

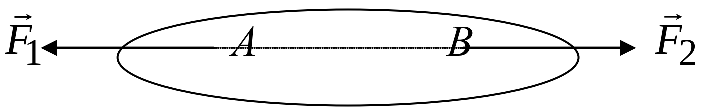
Состояние равновесия или движения данного тела обусловлены его механическим взаимодействием с другими телами. Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике *силой*. Сила является величиной векторной, т.е. ее действие на тело определяется: 1) модулем силы, 2) направлением силы, 3) точкой приложения силы. В механике основной единицей измерения силы является 1 ньютон 1 [Н].

Совокупность сил, действующих на твердое тело, будем называть *системой сил*. Если одну систему сил, действующих на твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния равновесия, то такие две системы сил называются *эквивалентными*. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то такая сила называется *равнодействующей* данной системы сил.

Силы, действующие на твердое тело, можно разделить на внешние и внутренние. *Внешними* называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел. *Внутренними* называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга. Силы также можно разделить на сосредоточенные и распределенные. *Сосредоточенные* – это силы, приложенные к какой-нибудь одной точке данного тела. *Распределенные* – это силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела.

Аксиомы статики

Аксиома 1. *Если на абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.*



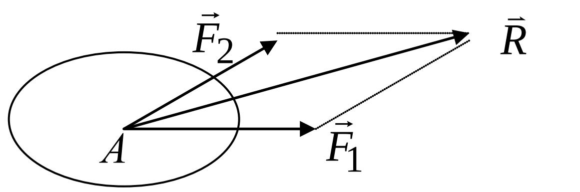
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Эта аксиома показывает, что тело под действием только одной силы находиться в равновесии не может.

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Из 1-й и 2-й аксиом следует, что сила - скользящий вектор.

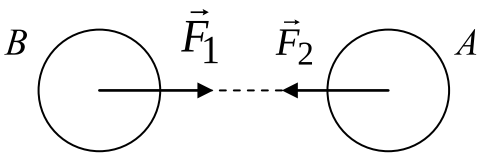
Аксиома 3 (аксиома о сложении сил). *Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и определяемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.*



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Аксиома 4 (аксиома действия и противодействия). *Силы взаимодействия двух тел равны по величине, обратные по направлению и лежат на одной линии.*

Эта аксиома является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело A действует на тело B с силой $\vec{F}_1$, то тело B действует на тело A с такой же по модулю, но обратной по направлению силой: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.



Здесь следует отметить, что силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам. Из этой аксиомы следует, что при изучении равновесия абсолютно твердого тела внутренние силы можно не учитывать.

Аксиома 5 (аксиома отвердевания). *Равновесие деформируемого тела не нарушается при его отвердевании.*

Эта аксиома показывает, что условия равновесия сил, которые мы получим для абсолютно твердого тела, являются необходимыми и для равновесия деформируемого (реального) тела.

Связи и их реакции. Принцип освобождения от связей

Тело называется *свободным*, если оно может получить любое перемещение в пространстве. Если на тело наложены какие-либо ограничения, препятствующие его свободному перемещению в пространстве, то такое тело называется *несвободным*, а эти ограничения называются в механике *связями* или *опорами*.

Поскольку тело и опора находятся во взаимодействии, то между ними возникают силы взаимодействия (аксиома 4). Сила, с которой опора действует на тело, называется *опорной реакцией* или *реакцией связи*.

Типы опор (связей)

1. *Гладкая поверхность*
   Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела в первом приближении можно пренебречь. Эта связь не дает телу перемещаться только по направлению общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1). Поэтому реакция $\vec{N}$

гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис.2), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

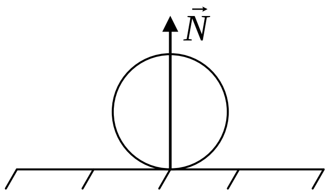


Рис. 1

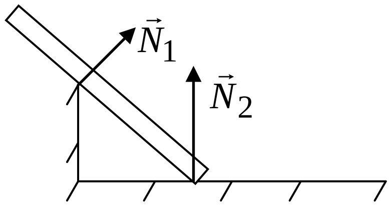


Рис.2

2. *Гибкая нерастяжимая нить*

Гибкой нерастяжимой нитью будем называть такую связь, реакция $\vec{T}$ которой направлена вдоль нити к точке ее подвеса (рис. 3). Поскольку нить работает только на растяжение, то реакция нити **всегда** направлена от данного тела вдоль самой нити.

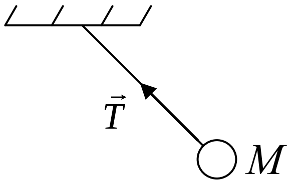


Рис. 3

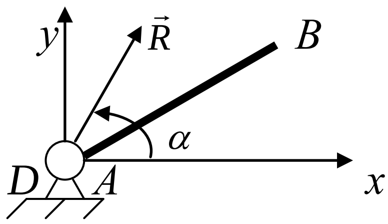


Рис.4

3. *Цилиндрический шарнир (подшипник)*

Если два тела соединены болтом, проходящим через отверстия в этих телах, то такое соединение называется *шарнирным* или просто *шарниром*. Осевая линия болта называется осью шарнира. Тело AB, прикрепленное шарниром к опоре D (рис. 4), может свободно вращаться в плоскости чертежа, при этом конец A тела не может переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира. Поэтому реакция $\vec{R}$ цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, т.е. в плоскости Axy. В этом случае модуль и направление реакции $\vec{R}$ будут определяться действующими на тело AB внешними силами.

4. *Шаровой (сферический) шарнир и подпятник*

Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. Примерами таких связей служат шаровая пята, с помощью которой прикрепляется фотоаппарат к штативу, и подшипник с упором (подпятник) (рис. 5). Реакция $\vec{R}$ шарового шарнира или подпятника может иметь любое направление в пространстве. Для нее заранее не известны ни модуль реакции $\vec{R}$, ни углы, образуемые ею с осями x, y, z.

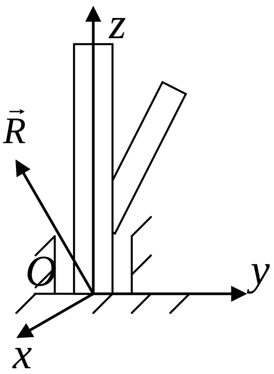


Рис. 5

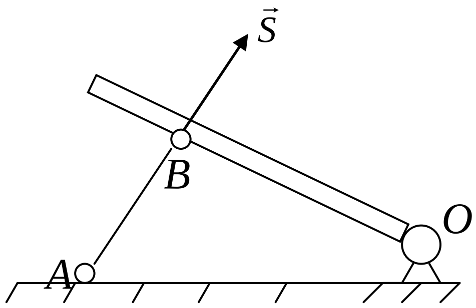


Рис.6

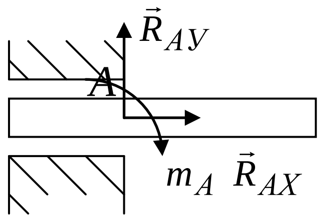


Рис.7

5. *Стержень*

   Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень AB, закрепленный на концах шарнирами (рис. 6). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в шарнирах A и B. Если стержень AB находится в равновесии, то по аксиоме 1 эти силы должны быть прямопротивоположными. Следовательно, нагруженный на концах стержень, весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь, работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то реакция $\vec{S}$ стержня будет направлена вдоль стержня (рис. 6).

6. *Жесткая заделка*

   В этом случае конец балки защемлен между опорными плоскостями. Этот тип опорного закрепления препятствует любому отрыву от себя, а также вращению. Таким образом, данный тип опоры дает неизвестные составляющие реакции $\vec{R}_{AX}, \vec{R}_{AY}$ и опорный момент (рис. 7).

Принцип освобождения от связей

Любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи, наложенные на тело, отбросить и заменить их действие реакциями этих связей.

Данный принцип позволяет свести изучение равновесия несвободного тела к изучению равновесия свободного тела. Например, брус AB весом $\vec{P}$ (рис. 8,*а*), для которого связями являются гладкая плоскость OE и опора D, можно рассматривать как свободное тело (рис. 8,*б*), находящееся в равновесии под действием заданной силы $\vec{P}$ и реакций связей $\vec{N}_A, \vec{N}_D$.

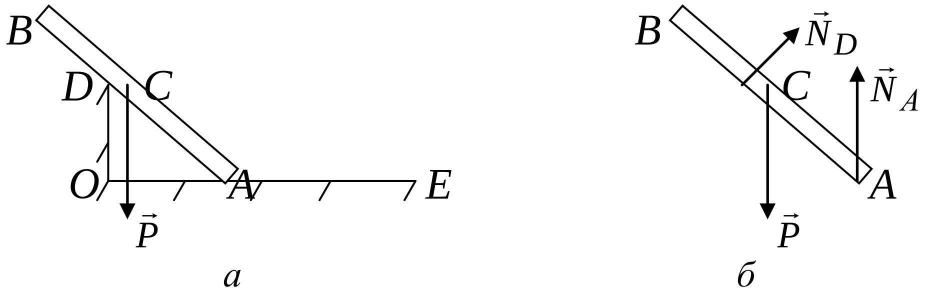


Рис.8

Тема 2. Система сходящихся сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 9). Так как сила – вектор скользящий, то эти силы можно перенести вдоль линий их действия в точку пересечения. Тогда мы делаем переход от системы сходящихся сил к системе сил пересекающихся в одной точке (рис. 10).

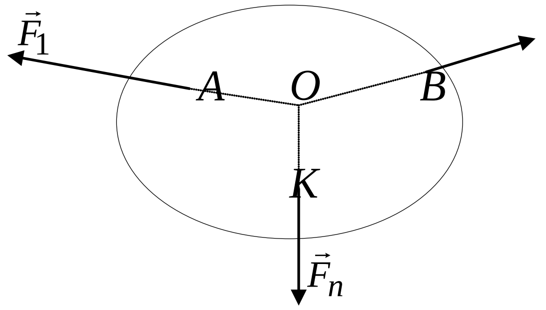


Рис. 9

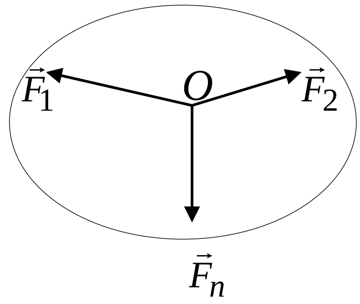


Рис.10

Далее, рассматривая уже систему сил пересекающихся в одной точке, мы можем заменить эту систему сил равнодействующей. Складываем эти силы на основании аксиомы 3. Сложение можно проводить геометрическим или аналитическим способами.

а) Геометрический способ сложения сил

Этот способ сложения применим в основном для случаев, когда слагаемые силы расположены в одной плоскости. Допустим, нам нужно сложить четыре силы, пересекающиеся в точке O (рис. 11). Откладываем из точки O, в масштабе и параллельно самому себе, вектор силы $\vec{F}_1$, затем из конца вектора $\vec{F}_1$ откладываем, в масштабе и параллельно самому себе, вектор силы $\vec{F}_2$, затем из конца вектора $\vec{F}_2$ откладываем, в масштабе и параллельно самому себе, вектор силы $\vec{F}_3$ и из конца вектора $\vec{F}_3$ откладываем, в масштабе и параллельно самому себе, вектор силы $\vec{F}_4$. Получили ломаную линию (рис. 12). Вектор, соединяющий начальную и конечную точки этой ломаной линии, будет по модулю и направлению определять равнодействующую $\vec{R}$ данной системы сил (рис. 13).

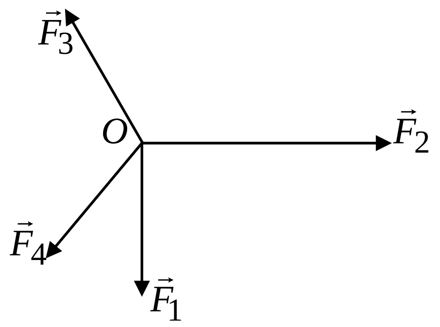


Рис. 11

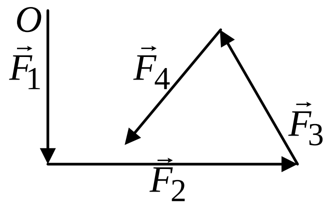


Рис.12

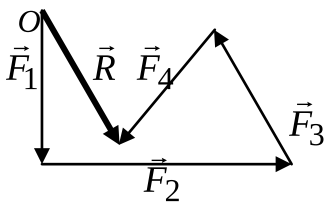


Рис.13

По этому принципу можно складывать любое количество сил. Ломаная линия, получаемая в процессе сложения сил, называется *силовым многоугольником*, а само правило сложения сил называется *правилом силового многоугольника*.

б) Аналитический способ сложения сил

При этом способе делается переход от векторов к зависимостям между их проекциями на основании теоремы геометрии: *проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось*. Допустим, требуется сложить систему сил. Расписывая эти силы через их проекции на оси координат, получаем

$$\vec F_1 = F_{1x}\vec i + F_{1y}\vec j + F_{1z}\vec k\ ,$$

$$\vec F_2 = F_{2x}\vec i + F_{2y}\vec j + F_{2z}\vec k\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vec F_n = F_{nx}\vec i + F_{ny}\vec j + F_{nz}\vec k\ .$$

Затем, складываем коэффициенты при соответствующих орт-векторах получаем и зависимость для определения равнодействующей этой системы сходящихся сил

$$\vec R = R_x\vec i + R_y\vec j + R_z\vec k = (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx})\vec i + \left(F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}\right)\vec j + (F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz})\vec k\ . \quad (1)$$

Коэффициенты, стоящие при соответствующих орт-векторах в зависимости (1), представляют собой проекции вектора $\vec R$ на оси координат, а направление этого вектора будет определяться направляющими косинусами:

$$R_x = (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}) = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\ ,\ \cos\left(\vec R, x\right) = \frac{R_x}{R}\ ,$$

$$R_y = \left(F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\ ,\ \cos\left(\vec R, y\right) = \frac{R_y}{R}\ ,\quad R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2}\ . \quad (2)$$

$$R_z = (F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz}) = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\ ,\quad \cos\left(\vec R, z\right) = \frac{R_z}{R}\ ,$$

Зависимости (2) позволяют решать задачи о сложении сил аналитически.

Условия равновесия системы сходящихся сил

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю ($\vec{R}=0$). Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1. *Геометрическое условие равновесия*. **Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут.**

2. *Аналитическое условие равновесия.* $R=\sqrt{R_x{}^2+R_y{}^2+R_z{}^2}=0$. Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то выражение обратится в ноль только тогда, когда одновременно $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$ или

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}F_{kz}=0. \tag{3}$$

Равенства (3) выражают условия равновесия в аналитической форме: **для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из координатных осей были равны нулю.**

Из полученных условий равновесия можно получить следствие. **Правило трех сил**: *если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, лежащих в одной плоскости, две из которых пересекаются в одной точке, то линия действия третьей силы проходит через точку пересечения первых двух сил*.

Складываем две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Получаем равнодействующую этих сил $\vec{R}$. Тогда тело находится в равновесии под действием двух сил $\vec{R}$ и $\vec{F}_3$. А это возможно, только если эти силы прямопротивоположные (аксиома 1). Значит, линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через точку A (рис. 14).

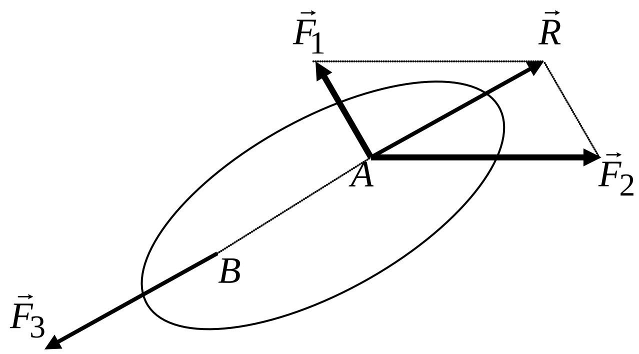


Рис. 14

Тема 3. Момент силы и пары сил

а) Момент силы относительно центра (точки)

Под действием силы твердое тело может совершать как поступательное, так и вращательное перемещение относительно какого-либо центра.

Вращательный эффект силы характеризуется ее *моментом*. **Алгебраическим моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется произведение, взятое со знаком плюс или минус, модуля силы на длину плеча.**

Плечом силы $\vec{F}$ относительно центра O является перпендикуляр, опущенный из центра O на линию действия силы $\vec{F}$ (рис.15).

$m_O(F) = +Fh$ $m_O(F) = -Fh$

а   *б*

Рис.15

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O будем обозначать символом $m_O(F)$. Следовательно, $m_O(F) = \pm Fh$. (4)

При определении знака у момента условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (рис.15,*а*), и знак минус, - если по ходу часовой стрелки (рис. 15,*б*). Момент силы измеряется в ньютон на метр $[\text{Нм}]$.

Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия.
2. Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю $(\vec{F} = 0)$ или когда линия действия силы проходит через центр O $(h = 0)$.
3. Момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB, построенного на силе и центре O (рис. 15,*а*).

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} Fh, \qquad m_O(F) = Fh, \qquad m_O(F) = 2S_{\Delta OAB}.$$

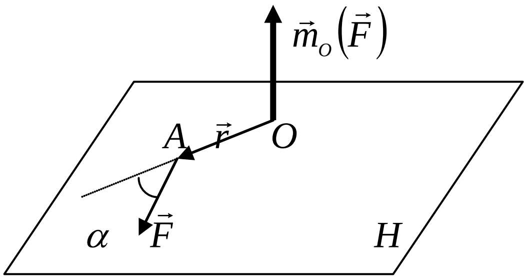
Момент силы как вектор. Понятием алгебраического момента силы удобно пользоваться, только в том случае, когда все силы, действующие на тело, расположены в одной плоскости. Если же силы, действующие на тело, расположены произвольным образом в пространстве, то в этом случае вводится понятие *векторного момента силы*.

Векторный момент силы должен определять:

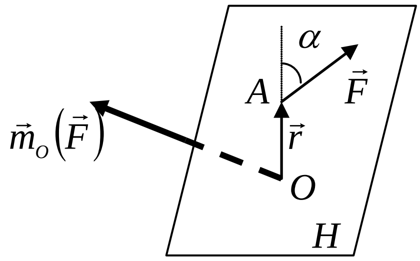
1. Плоскость действия силы относительно данного центра.
2. Направление вращения силы относительно данного центра.
3. В произвольно выбранном масштабе численное значение момента силы относительно данного центра.

Исходя из перечисленного, получаем правило направления векторного момента силы.

Векторный момент силы расположен перпендикулярно плоскости, которая строится на силе и центре, относительно которого берется момент, и направляется он таким образом, чтобы, смотря с конца этого вектора, сила стремилась повернуть тело, относительно данного центра, против часовой стрелки.



а



б

Рис.16

На рис.16 показано правило направления векторного момента силы $\vec{F}$ относительно центра O. Здесь $\vec{r}$ – радиус – вектор точки приложения силы $\vec{F}$ (точка A), относительно центра O. Плоскость H построена на векторах $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Векторный момент $\vec{m}_O(\vec{F})$ направляется перпендикулярно плоскости H. Определяя модуль этого вектора, получаем $\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = Fr\sin\alpha$.

б) Момент силы относительно оси

Рассмотрим этот случай на примере силы $\vec{F}$ произвольно расположенной в пространстве. Определим момент этой силы относительно оси z, т.е. определяем вращательный эффект силы $\vec{F}$ относительно данной оси (рис. 17,*а*). Для этого проводим плоскость H, перпендикулярную оси z и проходящую через точку приложения силы $\vec{F}$ (точка A) (рис. 17,*б*). Затем раскладываем силу $\vec{F}$ на составляющие: $\vec{F}_z$, параллельную оси z и $\vec{F}_{xy}$, лежащую в плоскости H (рис. 17,*в*). Рассматривая вращающий эффект этих составляющих относительно оси z, очевидно, что под действием силы $\vec{F}_z$, тело относительно оси z вращаться не будет, а будет стремиться переместиться вдоль этой оси. Таким образом, вращательный эффект силы $\vec{F}_z$ относительно оси z равен нулю.

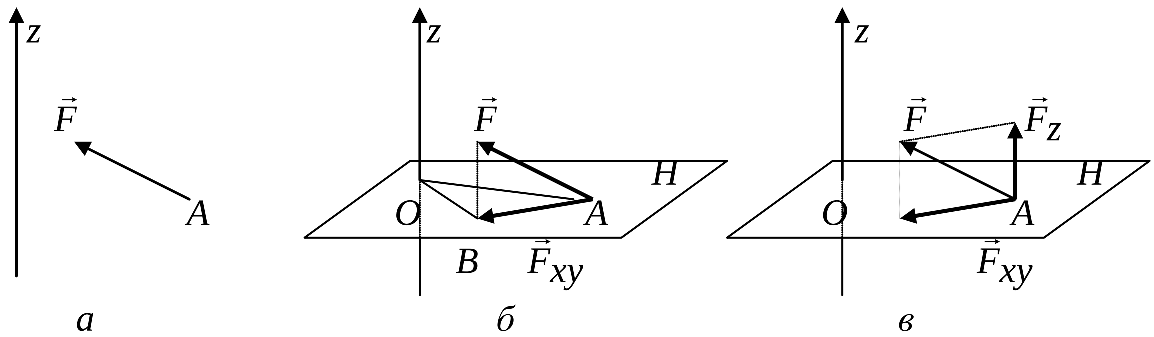
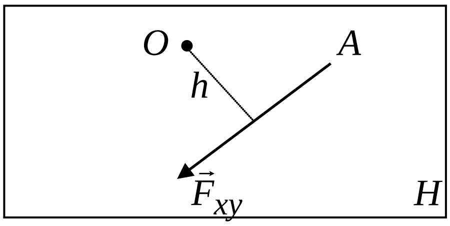


Рис.17

Следовательно, момент силы $\vec{F}$, относительно оси z, будет определяться моментом проекции этой силы $\vec{F}_{xy}$ на плоскость H относительно точки пересечения оси z с этой плоскостью (точка O). Таким образом, можно сделать переход от пространственной схемы к плоской (рис. 18).



$$m_z(F) = m_O(F_{xy}) = -F_{xy}h.$$

Рис.18

Момент силы относительно оси равен моменту, который создает проекция этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки пересечения этой оси с перпендикулярной ей плоскостью.

Свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия.
2. Момент силы относительно оси равен нулю только тогда, когда сила параллельна данной оси или когда линия действия силы пересекает данную ось $(h = 0)$.
3. Момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB, построенного на проекции $\vec{F}_{xy}$ и центре O (рис.17,*б*).
4. Правило знаков: если, смотря с конца оси видеть, что сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, то момент берут со знаком плюс, если по ходу часовой стрелки, то со знаком минус.

Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси

Момент силы относительно оси равен проекции момента этой же силы, относительно точки, лежащей на данной оси, на эту ось.

Рассмотрим силу $\vec{F}$, расположенную в пространстве. Проводим плоскость H, перпендикулярную оси z и проходящую через точку приложения силы $\vec{F}$. Определяем момент этой силы относительно точки O, точки пересечения плоскости H и оси z. Из свойств момента силы относительно точки получаем, что модуль этого момента равен удвоенной площади треугольника OAB, а направляется векторный момент перпендикулярно плоскости этого треугольника (рис. 19,*а*).

Аналогично определяя момент силы $\vec{F}$, относительно оси z получаем, что модуль этого момента равен удвоенной площади треугольника OAD, а направляется векторный момент перпендикулярно плоскости этого треугольника (рис. 19,*б*).

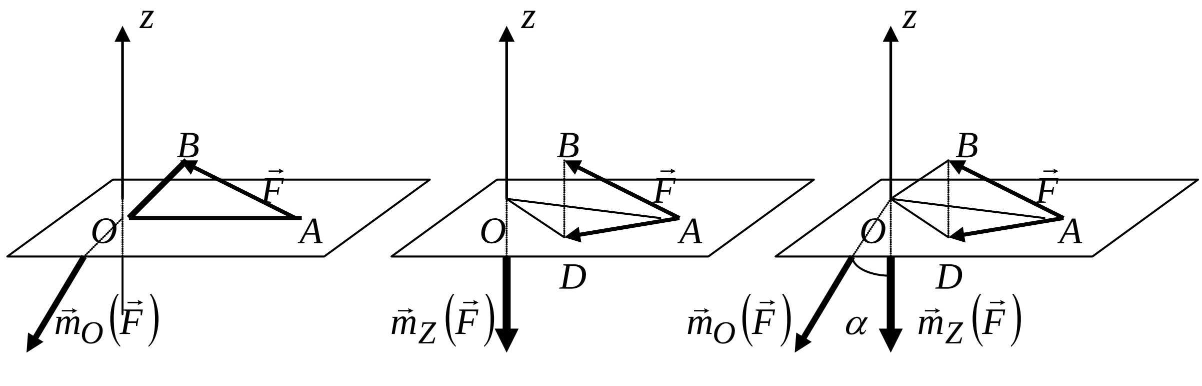


Рис. 19

В результате получаем $m_O(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$, $m_Z(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAD}$. С другой стороны, обозначая угол BAD между плоскостями треугольников OAB и OAD через α, получаем, что $S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OAB}\cos\alpha$. Тогда $m_Z(\vec{F}) = m_O(\vec{F})\cos\alpha$. Если мы посмотрим на рисунок 19,*в*, то из векторов моментов можно получить следующее равенство: $m_Z(\vec{F}) = m_O(\vec{F})\cos\alpha = \left[m_O(\vec{F})\right]_Z$. (5)

Зависимость (5) устанавливает связь между моментами силы относительно центра и относительно оси, которую мы записали словами вначале параграфа.

Тема 4. Система пар сил

а) Параллельные силы направлены в одну сторону

Рассмотрим твердое тело, на которое действуют две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные в точках A и B тела (рис.20,*а*). Требуется определить модуль и точку приложения равнодействующей этих двух сил.

Пользуясь аксиомами 1 и 2 статики, перейдем от данной системы параллельных сил к эквивалентной системе сходящихся сил $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$. Для этого приложим в точках A и B прямопротивоположные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, направленные вдоль прямой AB, и сложим силы $\vec{F}_1, \vec{P}_1$ и $\vec{F}_2, \vec{P}_2$ по аксиоме 3 (рис. 20,*б*).

Полученные в результате такого сложения силы $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$, переносим вдоль линий их действия в точку O и раскладываем обратно на составляющие $\vec{F}_1, \vec{P}_1$ и $\vec{F}_2, \vec{P}_2$. Прямопротивоположные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ можно отбросить, при этом состояние тела не изменится (рис. 20,*в*).

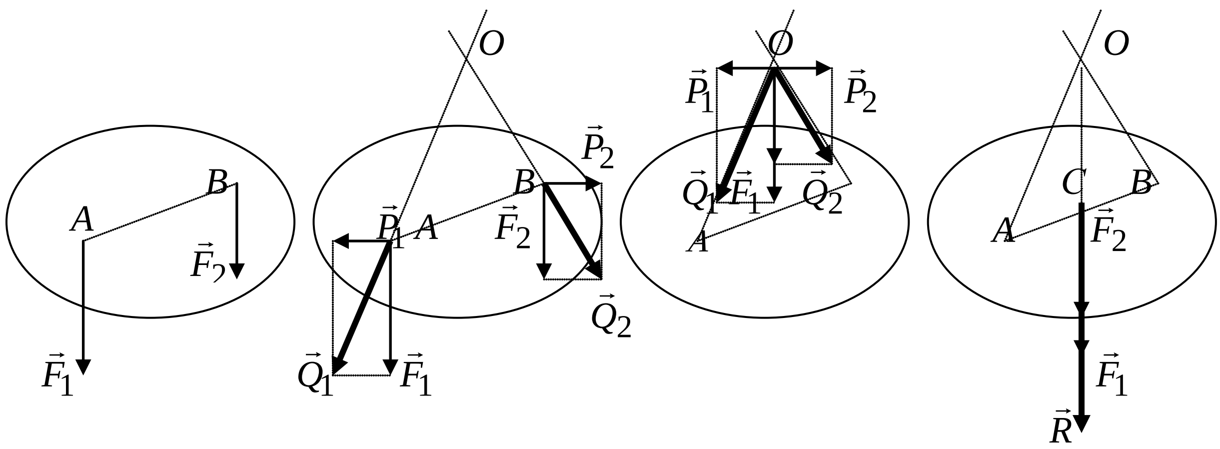


Рис. 20

В результате в точке O получаем две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные вдоль одной прямой. Перенесем эти силы вдоль линии их действия в точку C и находим их равнодействующую $\vec{R}$, модуль которой равен $R = F_1 + F_2$ (рис. 20,*г*). Для определения точки приложения силы $\vec{R}$ (точки C) рассмотрим подобные треугольники $\Delta OAC, \Delta OQ_1F_1$, $\Delta OBC, \Delta OQ_2F_2$ (рис. 20,*в*).

$\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{P_1}{F_1}, \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{P_2}{F_2}$ или, учитывая, что $P_1 = P_2$, $F_2 \cdot BC = F_1 \cdot AC$. $R = F_1 + F_2$,

$AC + CB = AB$, получаем $\dfrac{BC}{F_1} = \dfrac{AC}{F_2} = \dfrac{AB}{R}$. (6)

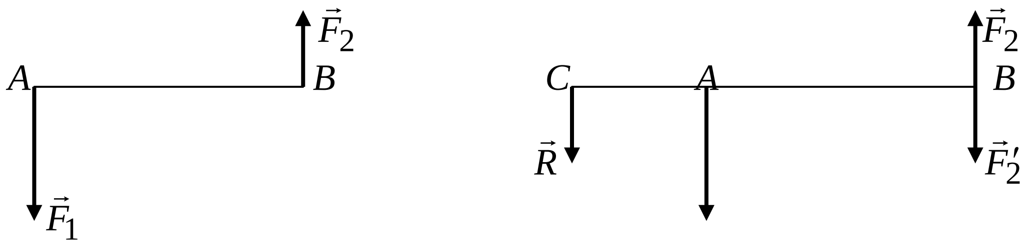
Таким образом, равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.

б) Антипараллельные силы

Докажем **теорему**: *равнодействующая двух антипараллельных сил параллельна этим силам и направлена в сторону большей из них. Модуль равнодействующей равен разности модулей данных сил, а линия действия равнодействующей делит расстояния между точками приложения данных сил внешним образом на части, обратнопропорциональные этим силам.*

Рассмотрим твердое тело, на которое действуют две антипараллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные в точках A и B тела, и при этом $F_1 \rangle F_2$ (рис.21,*а*). Требуется определить модуль и точку приложения равнодействующей этих двух сил. Заменим силу $\vec{F}_1$ двумя эквивалентными силами $\vec{F}_2'$, приложенной в точке B, причем $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$ и силой $\vec{R}$, приложенной в точке C. $\vec{F}_1 = \vec{F}_2' + \vec{R}$, $F_1 = F_2' + R$ и, учитывая, что $F_2' = F_2$, $R = F_1 - F_2$, $\frac{AC}{AB} = \frac{F_2'}{R} = \frac{F_2}{R}$, отсюда $AC = \frac{F_2 AB}{R} = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB$. Это равенство определяет положение точки C.

Преобразуем равенство $\frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{F_1 - F_2}$, $1 + \frac{AB}{AC} = \frac{F_1 - F_2}{F_2} + 1$, $\frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}$, $\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2}$. Из последней полученной зависимости видно, что в этом случае линия действия равнодействующей $\vec{R}$ проходит через точку, лежащую вне отрезка AB, и притом **ближе к большей силе** (рис. 21,*б*).



а Рис. 21 *б*

Рассмотрим частный случай, когда две антипараллельные силы равны по модулю (рис. 22,*а*). Такая система называется **парой сил**.

а *б*

Рис.22

Ранее получили $R = F_1 - F_2$, $AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB$. В данном случае $F_1 \to F_2$, $R \to 0$, $AC \to \infty$, т.е. равнодействующая обращается в ноль, а точка ее приложения удаляется в бесконечность. Этот результат указывает на то, что в действительности ***пару сил невозможно заменить одной силой, ей эквивалентной***, т.е. пара не имеет равнодействующей и под действием пары сил тело может совершать только вращательное движение.

На практике понятие пары сил мы применяем постоянно: поворачивая вентиль крана, чтобы потекла вода, вращая рулевое колесо автомобиля и т.д. (рис. 22,*б*). Так как под действием пары сил тело может совершать только вращательное движение, то действие пары характеризуется ее моментом. *Алгебраическим моментом пары* называется взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары (рис. 22,*а*): $m(F_1, F_2) = \pm F_1 d$, здесь d - плечо пары $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, т.е. кратчайшее расстояние между линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Знак у момента пары определяется по тому же правилу, что и у момента силы относительно точки. Теорема о сумме алгебраических моментов сил пары. *Алгебраическая сумма моментов сил пары относительного любого центра, лежащего в плоскости действия пары, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.*

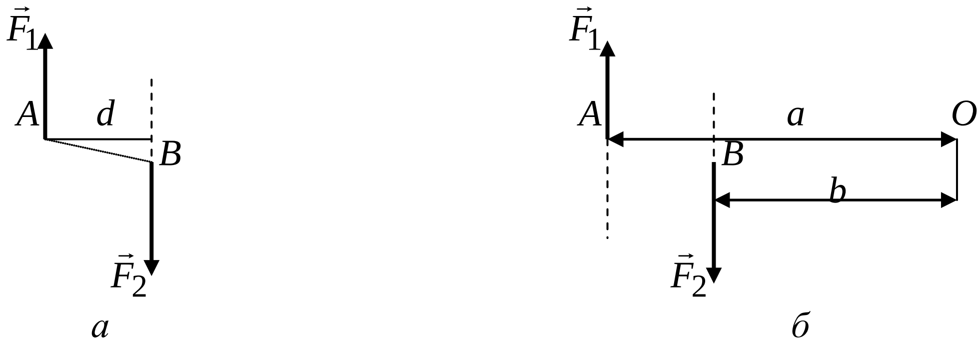


Рис. 23

Доказательство: рассмотрим пару сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ (рис. 23,*а*), лежащую в плоскости листа, и покажем, что сумма моментов, которую создают эти силы относительно любого центра, лежащего в плоскости листа, есть величина постоянная и равная моменту данной пары. Сначала определим момент данной пары $m(F_1, F_2) = -F_1 d$, а затем выбираем произвольный центр O (рис. 23,*б*) и определяем относительно него моменты сил F_1 и F_2: $m_O(F_1) = -F_1 a$, $m_O(F_2) = F_2 b$. Тогда $\sum_{k=1}^{2} m_O(F_k) = -F_1 a + F_2 b = -F_1(a-b) = -F_1 d = m(F_1, F_2)$, так как $(a-b) = d$.

Эквивалентность пар

Теорема. *Две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие численно равные моменты и одинаковые направления вращения, эквивалентны.*

Доказательство: даны две пары $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ и $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$, лежащие в одной плоскости и имеющие численно равные моменты и одинаковые направления вращения $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 d_1 = m(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = P_1 d_2$ (рис. 24,*а*). Требуется доказать, что эти пары эквивалентны.

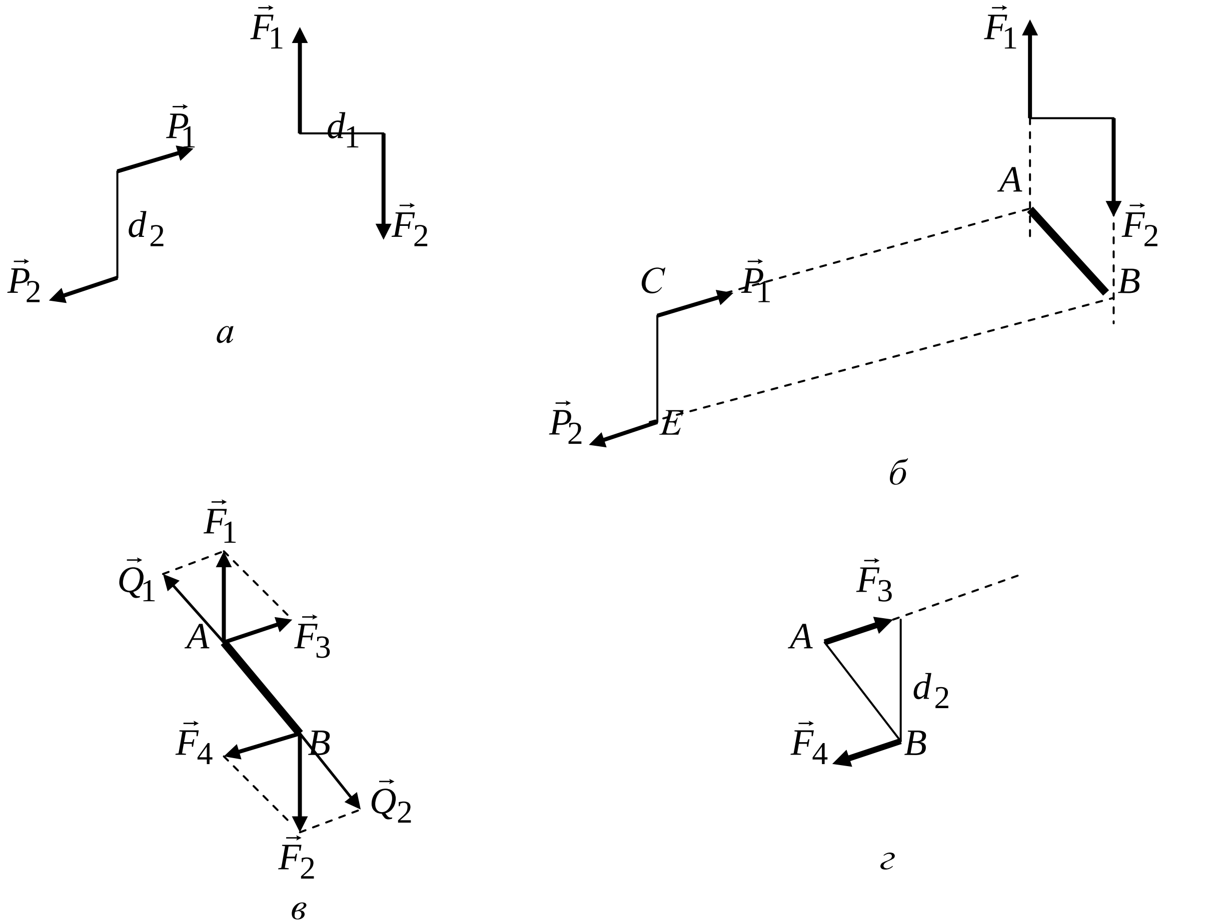


Рис. 24

Продлеваем линии действия этих сил и получаем линию пересечения AB плоскостей пар $\left(\vec F_1, \vec F_2\right)$ и $\left(\vec P_1, \vec P_2\right)$ (рис. 24,*б*). Далее, переносим силы $\vec F_1$ и $\vec F_2$ вдоль линий их действия в точки A и B соответственно и раскладываем силы на составляющие: $\vec F_1$ на $\vec F_3$ и $\vec Q_1$, а $\vec F_2$ на $\vec F_4$ и $\vec Q_2$ (рис. 24,*в*). Причем $\vec F_1 = \vec F_3 + \vec Q_1$, $\vec F_2 = \vec F_4 + \vec Q_2$ и линии действия сил $\vec F_3$ и $\vec F_4$ направлены вдоль AC и BE соответственно, а силы $\vec Q_1$ и $\vec Q_2$ равные прямопротивоположные и направлены вдоль AB. На основании аксиомы 2 , не изменяя состояния тела, силы $\vec Q_1$ и $\vec Q_2$ можно отбросить, и в результате мы получаем пару сил с плечом d_2 (рис. 24,*г*).

Покажем, что момент полученной пары $\left(\vec F_3, \vec F_4\right)$ будет численно равен моменту первоначальной пары $\left(\vec F_1, \vec F_2\right)$. Для этого воспользуемся теоремой Вариньона, которая для нашего случая будет иметь вид (рис. 24,*в*) $m_B(F_1) = m_B(F_3) + m_B(Q_1)$, причем $m_B(Q_1) = 0$, так как линия действия силы $\vec Q_1$ пересекает точку B. Следовательно, $F_1 d_1 = F_3 d_2$ или $F_1 d_1 = m\left(\vec F_1, \vec F_2\right)$, $F_3 d_2 = m\left(\vec F_3, \vec F_4\right)$.

Тогда, учитывая $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = m(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$, получаем $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = m(\vec{F}_3, \vec{F}_4) = m(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$. Учитывая, что у пар $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ и $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ одинаковые плечи и алгебраические моменты, получаем, что силы этих пар равны как по модулю, так и по направлению, т.е. данные пары эквивалентны.

Из доказанной теоремы получаем следующие следствия.

Следствие 1. Данную пару, не изменяя ее действия на тело, можно как угодно переносить в ее плоскости действия. Следовательно, действие пары на тело не зависит от ее положения в своей плоскости.

Следствие 2. Не изменяя действия данной пары на тело, можно менять модули сил и плечо данной пары, но при условии, что ее момент и направление вращения остаются неизменными.

Следствие 3. Две данные пары всегда можно привести к одному плечу.

Момент пары как вектор

Понятием алгебраического момента пары удобно пользоваться, если все пары лежат в одной плоскости. Теперь представим, что требуется рассмотреть пары, плоскости действия которых, по отношению друг к другу, расположены в пространстве. В этом случае вводится понятие векторного момента пары. По аналогии с векторным моментом силы относительно центра, векторный момент пары должен определять:

- плоскость действия данной пары;
- направление вращения пары в этой плоскости;
- численное значение момента пары.

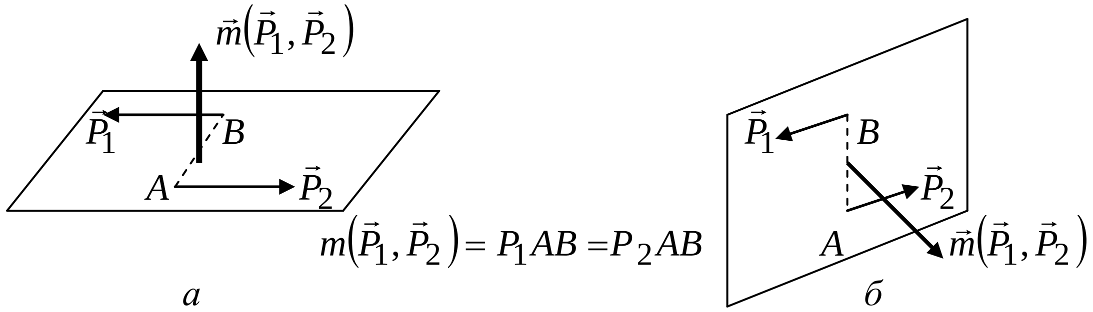


Рис. 25

Таким образом, модуль этого вектора должен выражать в произвольно выбранном масштабе численное значение момента пары, а направление этого вектора должно определять направление перпендикуляра к плоскости действия пары. Принято направлять векторный момент пары по перпендикуляру к ее плоскости в ту сторону, чтобы, смотря с его конца на пару, видеть эту пару вращающей тело против хода часовой стрелки (рис. 25).

Исходя из того, что действие пары на тело не зависит от ее положения в своей плоскости действия, точка приложения векторного момента пары значения не имеет. Условно, за эту точку принимают середину отрезка, соединяющего точки приложения сил данной пары.

Сложение пар. Условия равновесия пар

Теорема о сложении пар, лежащих в одной плоскости. *Система пар, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одной паре, лежащей в той же плоскости и имеющей момент равный алгебраической сумме моментов слагаемых пар.*

Доказательство: Пусть на тело действуют три пары с моментами m_1, m_2, m_3 (рис. 26,*а*). На основании теоремы об эквивалентности пар мы можем заменить эти пары тремя парами $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$,$(\vec{F}_5, \vec{F}_6)$, имеющими общее плечо d и такие же моменты: $m_1 = F_1 d$, $m_3 = F_3 d$, $m_3 = F_5 d$ (рис. 26,*б*). Складывая отдельно силы, приложенные в точках A и B, получаем в точке B силу $\vec{R}$, а в точке A силу $\vec{R}'$, которые по модулю будут равны $R = R' = F_1 + F_3 + F_5$ (рис. 26,*в*).

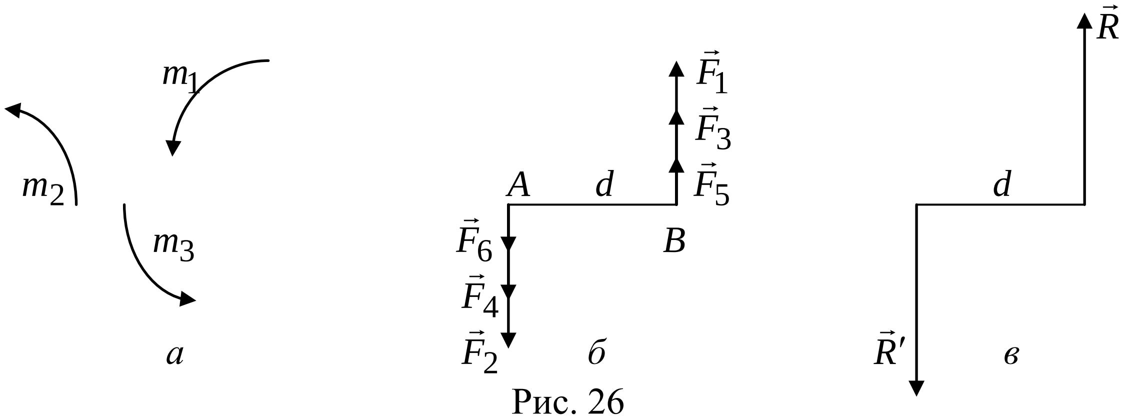


Рис. 26

В результате вся система пар заменяется одной парой $(\vec{R}, \vec{R}')$ с моментом $M = Rd = F_1 d + F_3 d + F_5 d = m_1 + m_2 + m_3$. Для случая из «$n$» пар с моментами m_1, m_2, … m_n, система заменяется одной парой с моментом $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$. Если пары расположены в пространстве, то можно перейти к векторному равенству $\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k$. Проектируя это векторное равенство на оси декартовой системы координат, получаем $M_x = \sum_{k=1}^{n} m_{kx}$, $M_y = \sum_{k=1}^{n} m_{ky}$, $M_z = \sum_{k=1}^{n} m_{kz}$.

Отсюда получаем условие равновесия системы пар: **для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары был равен нулю $\vec{M} = 0$.**

Геометрическое условие равновесия: для равновесия произвольной системы пар необходимо и достаточно, чтобы векторный момент результирующей пары был равен нулю $\vec{M} = 0$.

Аналитическое условие равновесия: $M = \sum_{k=1}^{n} m_k = 0$ или через проекции на оси

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0, \; M_y = \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0, \; M_z = \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0. \qquad (7)$$

Тема 5. Приведение системы сил к центру

Пусть на тело действует система из «n» сил, лежащих в одной плоскости. Мы умеем их складывать, если они пересекаются в одной точке или они параллельны. Однако, если эти силы в плоскости расположены произвольно, то появляется необходимость привести эти силы к какому то центру. Покажем эту процедуру приведения силы к данному центру на примере одной силы. Теорема. *Любая данная сила эквивалентна такой же по модулю и направлению сил, но приложенной в другой точке тела и некоторой паре.*

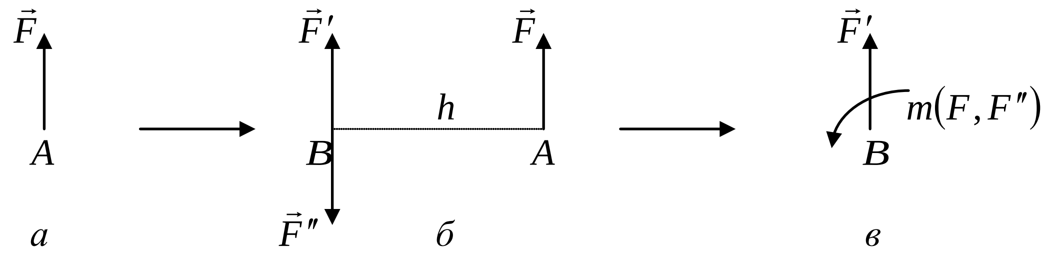


Рис. 27

Дана сила, $\vec{F}$ приложенная в точке A (рис. 27,*а*). Требуется привести эту силу к произвольно выбранному центру B причем так, чтобы состояние тела при этом не изменилось. Прикладываем в точке B две прямопротивоположные силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, равные по модулю силе $\vec{F}$ (рис. 27,*б*). Тогда силы $\vec{F}$ и $\vec{F}''$ образуют пару. Следовательно, данную силу $\vec{F}$ можно заменить равной ей силой $\vec{F}'$, приложенной в любой точке тела, и парой (F, F'') с моментом $m(F, F'')$, что и требовалось доказать (рис. 27,*в*).

Из доказанной теоремы получаем, что данную силу можно переносить параллельно самой себе в **любую точку** тела с присоединением соответствующей пары. Поэтому пару (F, F'') называют ***присоединенной***. Модуль момента присоединенной пары равен $m(F, F'') = Fh$. С другой стороны, произведение Fh представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно нового центра приведения B: $Fh = m_B(F)$. *Следовательно,* $m(F, F'') = m_B(F)$, *момент присоединенной пары* (F, F'') *равен моменту силы* $\vec{F}$, *приложенной в старом центре* A *относительно нового центра* B.

Приведение плоской системы сил к данному центру. Частные случаи приведения

Пусть на тело действует произвольная система сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \ldots,\vec{F}_n$, лежащих в одной плоскости (рис. 28,*а*). Возьмем в этой плоскости произвольную точку O, которую назовем **центром приведения**, и пользуясь доказанной выше теоремой, приведем все силы в центр O (рис. 28,*б*).

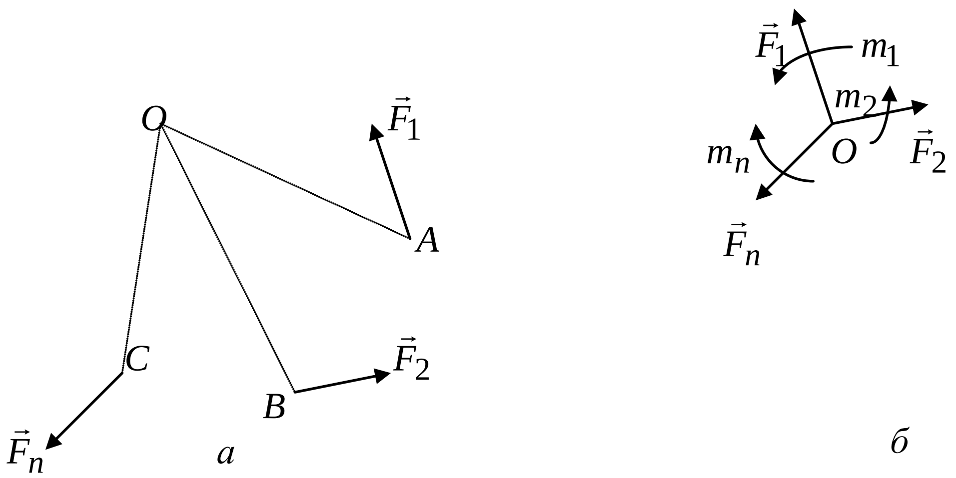


Рис. 28

В результате в центре O получаем систему сходящихся сил и систему пар сил с моментами: $m_1 = m_O(F_1),\ \ m_2 = m_O(F_2),\ \ \ldots,\ \ m_n = m_O(F_n)$. Систему сходящихся сил можно заменить одной силой $\vec{R}$, приложенной в центре O, при этом $\vec{R} = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_k$. Аналогично, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары равен $M_O = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k = \sum\limits_{k=1}^{n} m_O(F)$.

Величина $\vec{R}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется **главным вектором системы**. Величину M_O называют **главным моментом системы относительно центра** O.

В результате получили, что при приведении произвольной плоской системы сил к какому-либо центру O, *получаем два вектора:* $\vec{R}$ *- главный вектор системы и* $\vec{M}_O$ *- главный момент системы относительно центра* O.

Здесь следует отметить, что *главный вектор системы* $\vec{R}$ не зависит от центра приведения, так как все силы переносятся параллельно самим себе, а *главный момент системы* M_O зависит от центра приведения, поскольку при изменении центра приведения плечи у сил будут меняться.

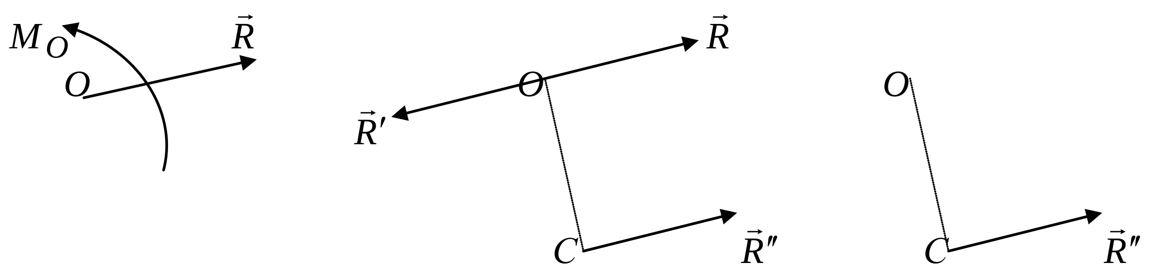
Рассмотрим теперь, к каким простейшим видам можно привести плоскую систему сил.

1. Если для данной системы сил $R = 0$, а $M_O \neq 0$, то она *приводится к одной паре* с моментом $M_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k)$. Причем в этом случае величина M_o не зависит от центра приведения, т.к. иначе мы получили бы, что одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными друг другу парами, что невозможно.
2. Если для данной системы сил $R \neq 0$, то она приводится к равнодействующей.

Рассмотрим два случая.

а) $R \neq 0$, $M_O = 0$. В этом случае система сразу заменяется *равнодействующей*, которая в данном случае будет равна главному вектору системы и она проходит через точку O.

б) $R \neq 0$, $M_O \neq 0$. В этом случае система также заменяется *равнодействующей*, которая тоже будет равна главному вектору системы, но проходить она будет не через точку O, а через точку C. Покажем, что это действительно так, и определим положение точки C. Пусть в результате приведения получили главный вектор $\vec{R}$ и главный момент M_O относительно центра O (рис. 29,*а*). Пару сил изобразим силами $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$, причем эти силы подбираем таким образом, чтобы у нас выполнялись равенства: $R = R' = R''$, $M_O = R \cdot OC$ (рис. 29,*б*). Затем отбрасываем силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ как уравновешенные, получаем, что система заменяется равнодействующей $R'' = R$, но проходящей через точку C (рис. 29,*в*). Положение точки C определится соотношением $OC = \dfrac{M_o}{R}$.



а *б* *в*

Рис. 29

3. Если для данной системы сил $R = 0$ и $M_O = 0$, то она находится в *равновесии*.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Момент равнодействующей системы сил относительно любой точки на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Рассмотрим плоскую сходящуюся систему сил, в точке A (рис. 30,*а*).

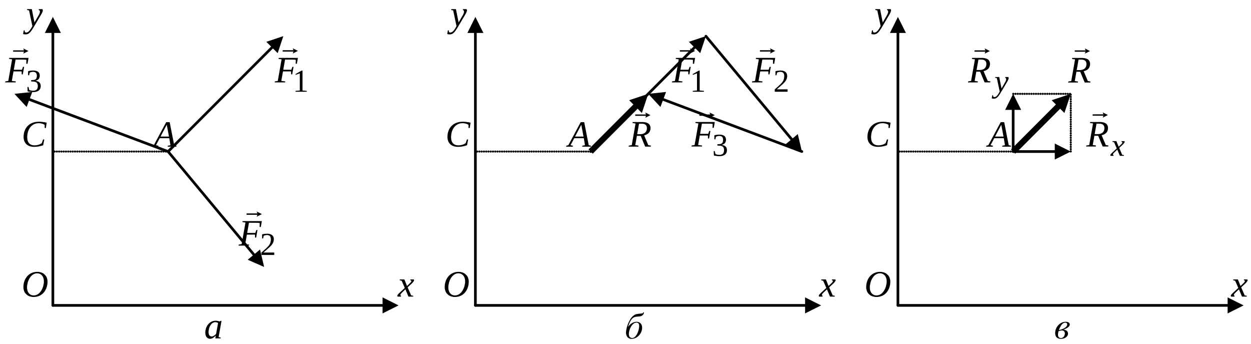


Рис.30

Заменим эту систему сил равнодействующей, приложенной в той же точке (рис. 30,*б*). Определим момент этой равнодействующей относительно точки C, лежащей на оси y (рис. 30,*в*). Разложим равнодействующую $\vec{R}$ на составляющие $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$, каждая из которых будет определяться: $R_x = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})$, $R_y = (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})$. Определяя момент этих проекций относительно точки C (рис. 30,*в*), получаем, что $m_C(R_x) = 0$, так как $\vec{R}_x$ пересекает точку C. Тогда $m_C(R) = m_C(R_y) = R_y AC$. Аналогично рассматривая каждую из сил (рис. 30,*а*), получим, что момент каждой из них относительно точки C будет определяться моментом проекции этих сил на ось y относительно точки C, т.е. $m_C(F_1) = m_C(F_{1y}) = F_{1y}AC$, $m_C(F_2) = m_C(F_{2y}) = F_{2y}AC$, $m_C(F_3) = m_C(F_{3y}) = F_{3y}AC$. Учитывая, что $R_y = (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})$, получаем

$$m_C(R) = (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})AC = F_{1y}AC + F_{2y}AC + F_{3y}AC = m_C(F_1) + m_C(F_2) + m_C(F_3),$$

$$m_C(R) = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k). \qquad (8)$$

Распределенные нагрузки

На практике часто вместо сосредоточенных сил сталкиваются с нагрузками, распределенными по поверхностям, по тому или иному закону. В этом случае вводится понятие интенсивности распределенной нагрузки q. В зависимости от того, по какой поверхности распределены силы, интенсивность q может иметь размерность: $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$, $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right] = [\text{Па}]$, $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3}\right]$. Рассмотрим нагрузку, распределенную по длине для различных случаев.

1. Равномерно распределенная нагрузка вдоль отрезка прямой ($q = \text{const}$)

В этом случае силы, равномерно распределены вдоль отрезка прямой AB. Для такой системы сил интенсивность q имеет постоянное значение. При расчетах эту систему сил нужно заменить равнодействующей $\vec{Q}$ (рис. 31). **Общее правило замены распределенной нагрузки сосредоточенной силой:** *модуль сосредоточенной силы* $\vec{Q}$ *численно равен площади фигуры, которую образует распределенная нагрузка, а линия действия этой силы проходит через центр тяжести фигуры, которую образует данная распределенная нагрузка*.

Применяя это правило к схеме, показанной на рис. 31, получаем, что $Q = S_{ABCD} = qAB$ и проходит эта сила через центр тяжести прямоугольника $ABCD$, т.е. через точку пересечения диагоналей, и делит сторону AB пополам.

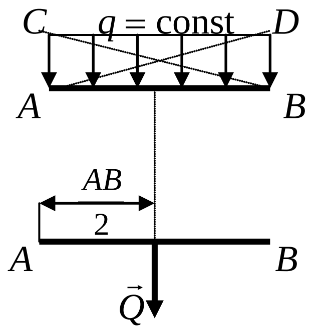


Рис. 31

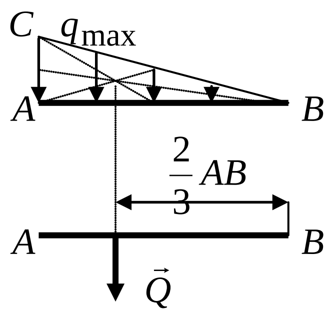


Рис. 32

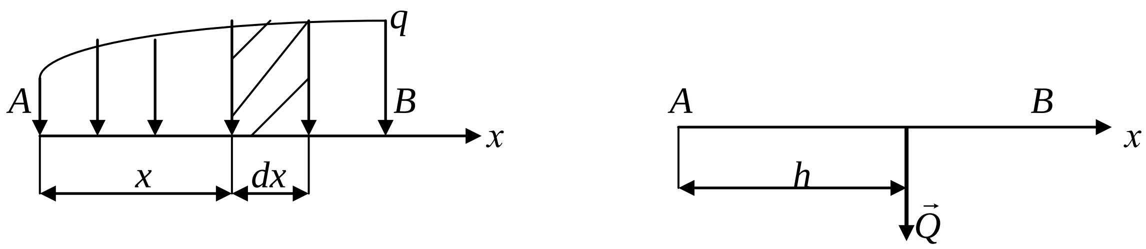
2. Нагрузка, распределенная вдоль отрезка по линейному закону

В этом случае силы распределены вдоль отрезка прямой AB по линейному закону, т.е. интенсивность q меняется от нуля до $q_{\max}$ (рис. 32). Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды, распределенные по высоте какого-либо не полностью погруженного тела. Действуя по процедуре описанной выше, также заменяем эту распределенную нагрузку сосредоточенной силой $\vec{Q}$: $Q = S_{ABC} = \frac{1}{2} q_{\max} AB$. Проходит эта сила через центр тяжести треугольника ABC, т.е. через точку пересечения медиан, и делит высоту AB в отношении $\frac{1}{3}AB$ от основания AC и $\frac{2}{3}AB$ от вершины B.

3. Нагрузка, распределенная вдоль отрезка прямой по произвольному закону

Такой вид нагрузки показан на рис. 33,*а*. Требуется заменить эту нагрузку сосредоточенной силой $\vec{Q}$, определив ее точку приложения по процедуре описанной ранее. Для примера примем, что интенсивность q зависит от длины распределения x, т.е. $q = x^n$. Покажем, как можно сделать переход от схемы 33,*а* к схеме 33,*б*.

Первую часть задачи, т.е. определение модуля силы $\vec{Q}$ можно решить следующим образом. Разбиваем произвольную фигуру, показанную на рис. 33,*а*, на ряд бесконечно малых прямоугольников длиной dx. Модуль сосредоточенной силы от этой элементарной нагрузки будет равен $\Delta Q_k = qdx = x^n dx$. Переходя от элементарных фигур к фигуре, показанной на рис. 33,*а* берем интеграл по длине $AB = \ell$: $Q = \int\limits_0^\ell \Delta Q_k = \int\limits_0^\ell x^n dx = \dfrac{\ell^{n+1}}{n+1}$.



а *б*

Рис. 33

Теперь переходим ко второй части задачи, т.е. определяем точку приложения этой силы. Для этого воспользуемся теоремой Вариньона. Применительно к данным схемам она будет выглядеть следующим образом: $m_A(Q) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_A(\Delta Q_k)$. Разбиваем произвольную фигуру, показанную на рис. 33,*а*, на ряд бесконечно малых прямоугольников длиной dx. Модуль сосредоточенной силы от этой элементарной нагрузки будет равен $\Delta Q_k = qdx = x^n dx$. Определяем момент этой силы относительно точки A: $m_A(\Delta Q_k) = \Delta Q_k x = qxdx = x^{n+1}dx$. Тогда $m_A(Q) = \int\limits_0^\ell m_A(\Delta Q_k) = \int\limits_0^\ell x^{n+1}dx = \dfrac{\ell^{n+2}}{n+2}$.

Но, с другой стороны, если посмотреть на рис. 33,*б*, то $m_A(Q) = Qh = \dfrac{\ell^{n+1}}{n+1}h$.

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем выражение для h: $\dfrac{\ell^{n+1}}{n+1}h = \dfrac{\ell^{n+2}}{n+2}$, отсюда $h = \ell\dfrac{n+1}{n+2}$.

4. Нагрузка, равномерно распределенная по дуге окружности

Примером такой нагрузки могут служить силы давления жидкости на боковые стенки цилиндрического сосуда (рис. 34).

Из симметрии видно, что сумма проекций этих сил на ось y равна нулю. Следовательно, их равнодействующая $\vec{Q}$ направлена вдоль оси x.

По модулю

$$Q = Q_x = \sum_{k=1}^{n} (q\Delta\ell_k)\cos\varphi_k ,$$

где $q\Delta\ell_k$ - сила, действующая на элемент дуги длиной $\Delta\ell_k$, φ_k - угол, образуемой этой силой с осью x. Из рис. 34 видно, что $\Delta\ell_k \cos\varphi_k = \Delta y_k$, тогда, вынося общий сомножитель q за знак суммы, получаем $Q = \sum_{k=1}^{n} q\Delta y_k = q\sum_{k=1}^{n}\Delta y_k = qAB$. Окончательно $Q = qh$, где h - длина хорды, стягиваемой дугою $A\breve{B}$.

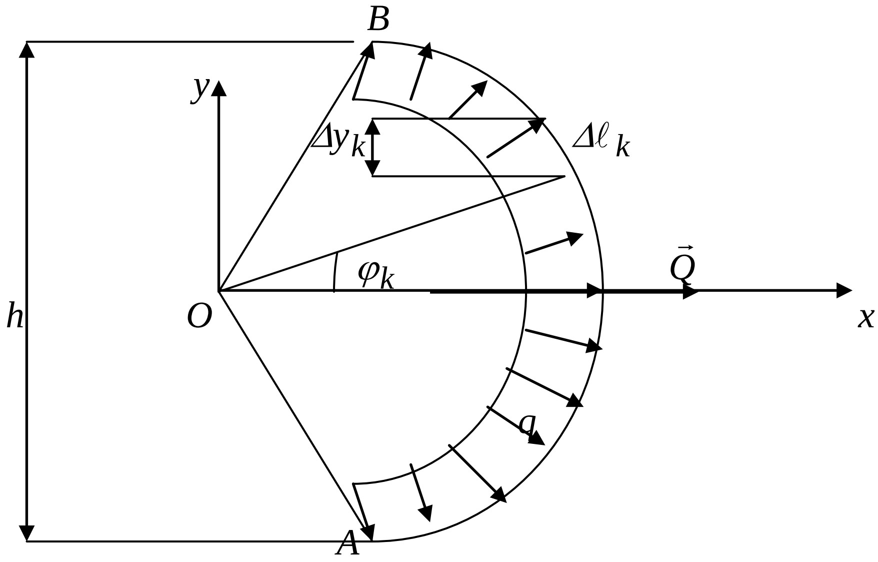


Рис. 34

Тема 6. Плоская система сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия $R = 0$ ***и*** $M_O = 0$**.**

Эти условия являются необходимыми, так как, если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится либо к паре сил ($R = 0$), либо к равнодействующей ($M_O = 0$) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно эти условия являются достаточными, так как при $R = 0$ система может приводиться только к паре с моментом M_O, а так как $M_O = 0$, то имеет место равновесие.

Определим аналитические условия равновесия. Эти условия можно получить в трех различных формах.

1.Основная форма условий равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=0,\ R_x=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0, R_y=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0\ , M_O=\sum_{k=1}^{n}m_O(F_k)=0.$$

Тогда
$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0,\ \sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0,\ \sum_{k=1}^{n}m_O(F_k)=0. \tag{9}$$

2.Вторая форма условий равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно каких - нибудь двух центров A и B и сумма проекций этих сил на ось x, не перпендикулярную AB, были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0,\ \sum_{k=1}^{n}m_A(F_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n}m_B(F_k)=0.$$

Эта форма записи содержит ограничение, чтобы ось x была не перпендикулярна AB. Суть этого ограничения состоит в следующем. Допустим, что в результате приведения плоской системы сил, она привелась к равнодействующей $\vec{R}$, причем линия действия этой силы может проходить через центры A и B. Тогда, если мы ось x направим перпендикулярно AB, то проекция равнодействующей на эту ось будет равна нулю. Следовательно, все условия равновесия выполняются, но система в равновесии не находится. Значит, для того, чтобы «поймать» этот вектор $\vec{R}$**,** ось x должна составлять с линией AB любой угол, кроме прямого.

3.Третья форма условий равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно каких - нибудь трех центров A, B, C, не лежащих на одной линии, были равны нулю.

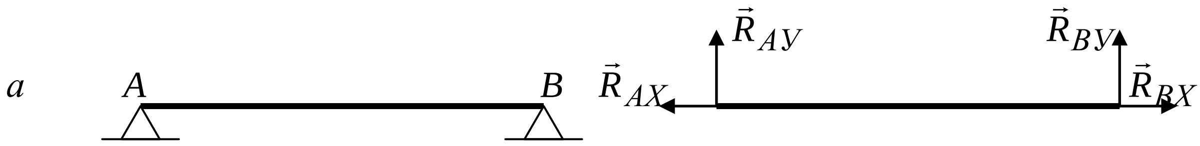
$$\sum_{k=1}^{n}m_A(F_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n}m_B(F_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n}m_C(F_k)=0.$$

Эта форма записи также содержит ограничение, которое объяснялось во второй форме записи.

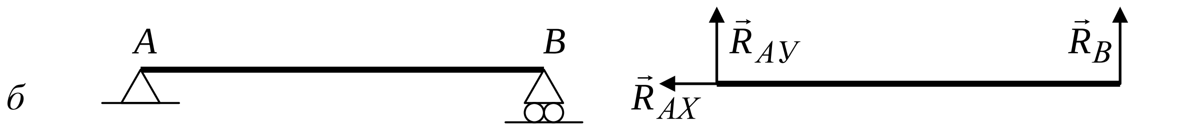
Статически определимые и неопределимые системы

При решении задач статики реакции всегда являются величинами заранее неизвестными. Чтобы решить такую задачу, требуется, чтобы число неизвестных реакций не превышало числа условия равновесия, которые можно составить для данной схемы. Задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются *статически определенными*, а такие системы – *статически определимыми*.

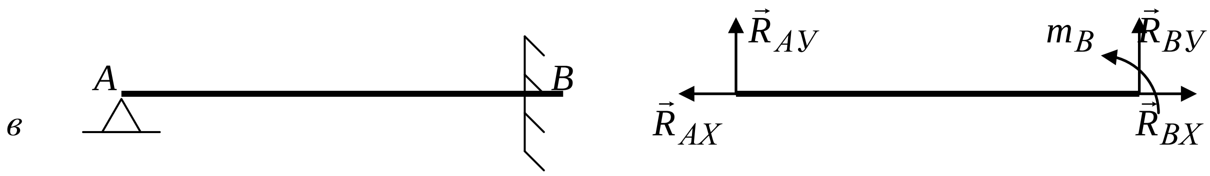
Задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений равновесия, называются *статически неопределенными*, а такие системы – *статически неопределимыми*.



$N = 4 > 3$ система один раз статически неопределима



$N = 3 = 3$ система статически определима



$N = 5 > 3$ система дважды статически неопределима

Рис. 35

Разберем эти определения на примерах. Для каждой из схем, показанных на рис. 35, применяем принцип освобождения от связей и сравниваем число неизвестных реакций N с числом уравнений равновесия (для показанных плоских схем это число равно трем). Активные силы нагружают балки, но на схемах они не показаны, так как эти силы не влияют на понятие определимости или неопределимости системы.

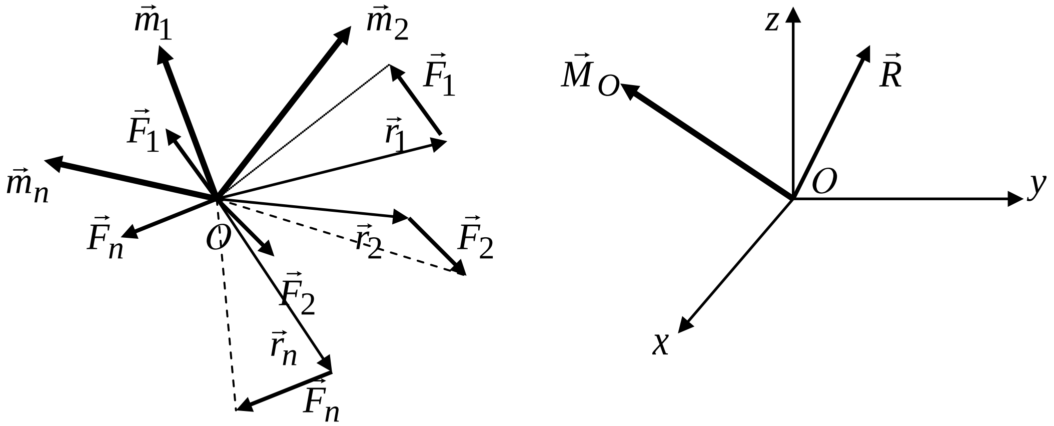
Тема 7. Пространственная система сил

Пусть на тело действует произвольная система сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \ldots, \vec{F}_n$, расположенных в пространстве (рис. 36,*а*). Возьмем произвольную точку O, которую назовем **центром приведения**, и по аналогии, как и для плоской системы, приведем все эти силы к центру O (рис. 36,*б*). В результате в центре O получаем:

1. Систему сходящихся сил, складывая которые получаем **главный вектор системы** $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_n$.
2. Пространственную систему присоединенных пар, вектора – моменты которых равны: $\vec{m}_1 = \vec{m}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$, $\vec{m}_2 = \vec{m}_O\left(\vec{F}_2\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$, …, $\vec{m}_n = \vec{m}_O\left(\vec{F}_n\right) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$.

Сложим геометрически вектора – моменты присоединенных пар. В результате система пар заменится одной парой, вектор – момент которой будет равен $\vec{M}_O = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{m}_k$ или $\vec{M}_O = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$.

Величина $\vec{M}_O$, равная геометрической сумме векторов – моментов всех сил относительно центра O, называется **главным моментом системы сил относительно этого центра**.



а *б*

Рис. 36

Определим проекции этих двух векторов на координатные оси:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky},$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \quad R = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}.$$

Направление главного вектора $\vec{R}$ определяют направляющие косинусы :

$$\cos(R, x) = \frac{R_x}{R}, \cos(R, y) = \frac{R_y}{R}, \cos(R, z) = \frac{R_z}{R}.$$

$$M_{Ox} = M_x = \left[\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k)\right]_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k),$$

$$M_{Oy} = M_y = \left[\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k)\right]_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k),$$

$$M_{Oz} = M_z = \left[\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k)\right]_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k),$$

$$M_O=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k)\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n} m_y(F_k)\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)\right)^2}\ .$$

Направление главного момента $\vec{M}_O$ определяют направляющие косинусы:

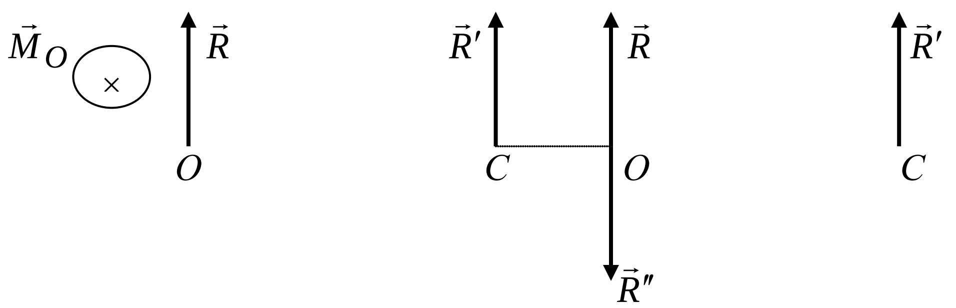
$$\cos(M_O,x)=\frac{M_x}{M_O},\ \cos(M_O,y)=\frac{M_y}{M_O},\ \cos(M_O,z)=\frac{M_z}{M_O}\ .$$

Рассмотрим теперь, к каким простейшим видам можно привести пространственную систему сил.

1. Если для данной системы сил $\vec{R}=0$, а $\vec{M}_O\neq 0$, то она *приводится к одной паре* с моментом $\vec{M}_O=\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O(F_k)$. Причем в этом случае величина $\vec{M}_O$ не зависит от центра приведения, так как иначе мы получили бы, что одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными друг другу. парами, что невозможно.
2. Если для данной системы сил $\vec{R}\neq 0$, то здесь появляются следующие варианты приведения:

   а) $\vec{R}\neq 0$, $\vec{M}_O=0$. В этом случае система сразу заменяется *равнодействующей*, которая в данном случае будет равна главному вектору системы и проходит через точку O.

   б) $\vec{R}\neq 0$, $\vec{M}_O\neq 0$ и $\left(\vec{R},\vec{M}_O\right)=90^0$. В этом случае система также заменяется *равнодействующей*, которая будет равна главному вектору системы, но проходить она будет не через точку O, а через точку C. Покажем, что это действительно так и определим положение точки C. Пусть в результате приведения, система привелась к главному вектору $\vec{R}$ и главному моменту M_O относительно центра O (рис. 37,*а*).



а *б* *в*

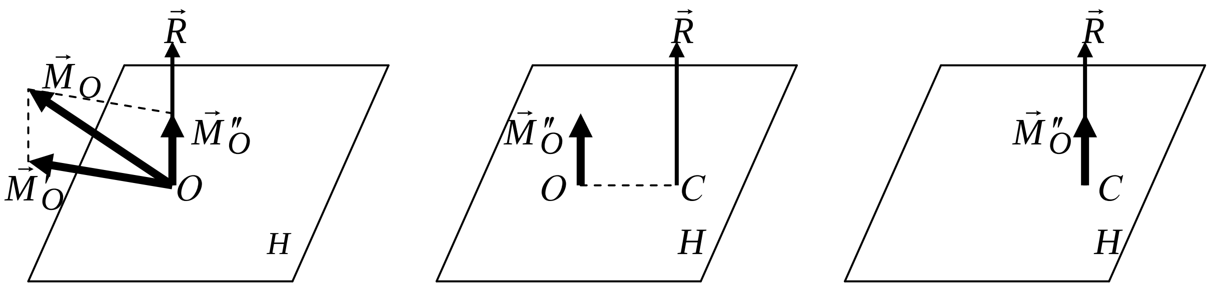
Рис. 37

Пару сил изобразим силами $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$, причем эти силы подбираем таким образом, чтобы у нас выполнялись равенства: $R=R'=R''$, $M_O=R\cdot OC$ (рис. 37,*б*).

Затем отбрасываем силы $\vec{R}$ и $\vec{R}''$ как уравновешенные и получаем, что система заменяется равнодействующей $R' = R$, но проходящей через точку C (рис. 37,*в*). Положение точки C определится соотношением $OC = \dfrac{M_O}{R}$.

3. Приведение к динамическому винту. Если в результате приведения система привелась и к главному вектору и главному моменту, причем угол между ними либо $\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right) = 0^0$, либо $\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right) = 180^0$, т.е. эти вектора коллинеарные, то такая система называется **динамическим винтом**.

Покажем, что если угол $\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right) \neq 90^0$, то систему всегда можно привести к динамическому винту. Рассмотрим такой случай (рис. 38,*а*). Разложим $\vec{M}_O$ на две взаимоперпендикулярные составляющие: $\vec{M}'_O$, которая направлена, перпендикулярна плоскости H, и $\vec{M}''_O$, которая лежит в плоскости H.



а *б* *в*

Рис. 38

Заменяя вектора $\vec{R}$ и $\vec{M}'_O$ по процедуре, описанной в п. 2, получаем вектор $\vec{R}$, но проходящий не через точку O, а точку C (рис. 38,*б*). Вектор $\vec{M}''_O$ можно свободно переносить в плоскости H, используя свойства пар сил. Поэтому переносим $\vec{M}''_O$ параллельно самому себе в точку C. В результате получаем два коллинеарных вектора $\vec{M}''_O$ и $\vec{R}$, которые и образуют динамический винт (рис. 38,*в*).

4. Приведение к равновесию. Если для данной системы сил $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_O = 0$, то она находится в *равновесии*.

$$R = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2} = 0,$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} m_x\left(F_k\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} m_y\left(F_k\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} m_z\left(F_k\right)\right)^2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = 0. \tag{10}$$

Получили шесть условий равновесия***: для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из координатных осей а также суммы моментов этих сил относительно каждой из координатных осей были равны нулю.***

Тема 8. Центр параллельных сил и центр тяжести.

Рассмотрим систему параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу (рис. 39).

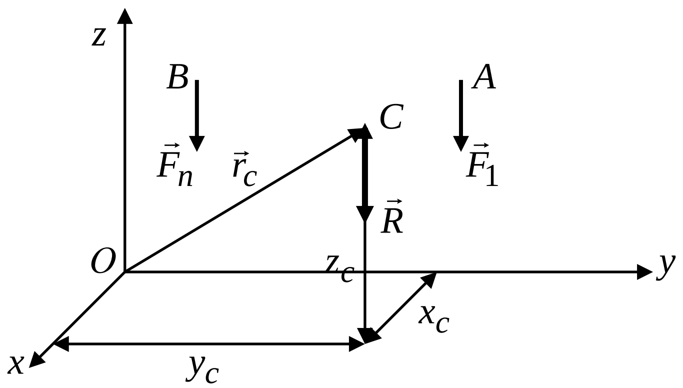


Рис. 39

Очевидно, что эта система имеет равнодействующую $\vec{R}$, направленную так же, как слагаемые силы, причем по модулю $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$, и приложенную в точке C. Найдем координаты этой точки. Применим к этим силам теорему Вариньона (8), и возьмем моменты относительно оси x: $m_x(R) = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k)$, $m_x(R) = -Ry_c$, $m_x(F_1) = -F_1 y_1$, ….., $m_x(F_n) = -F_n y_n$. Отсюда находим:

$y_c = \dfrac{-F_1 y_1 - \ldots\ldots - F_n y_n}{-R} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$. Аналогичные зависимости получим, беря моменты относительно других осей. Окончательно получаем:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}, \qquad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}, \qquad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}. \tag{11}$$

Если перейти от проекций к векторам, то получим $$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}. \tag{12}$$

Следует отметить, что, если параллельные силы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, то равнодействующая повернется на тот же угол, но координаты точки C не изменятся. Таким образом, **центром параллельных сил** называется такая точка, через которую проходит равнодействующая системы при любом ее направлении. В качестве примера можно рассмотреть тело, находящееся в поле тяжести земли. Каждая частица этого тела испытывает силу притяжения со стороны земли. С учетом того, что расстояния между этими частицами по сравнению с радиусом земли малы, можно считать такую систему сил параллельной. Равнодействующая такой системы называется **весом тела**, а точка приложения - ***центром тяжести***, координаты которой определяются по зависимостям (11).

Тема 9. Кинематика точки

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения материальных тел без учета их инертности (массы), а также причин, вызывающих данное движение (сил).

Кинематика представляет собой, с одной стороны, введение в динамику, так как здесь вводятся основные понятия и зависимости, необходимые для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например при изучении движения в механизмах.

Под ***движением*** в механике понимается изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам. Для определения положения движущегося тела с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему осей координат, которую будем называть ***системой отсчета***.

Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время постоянными, то тело по отношению к данной системе отсчета находится в покое. Если же координаты каких-нибудь точек тела с течением времени изменяются, то тело по отношению к данной системе отсчета находится в движении.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени.

Пространство в механике рассматривается, как трехмерное, а время считается универсальным, т.е. протекающим одинаково во всех системах отсчета. Время является скалярной, непрерывно меняющейся величиной. В задачах кинематики оно принимается за независимую переменную (аргумент), а все остальные величины (координаты, скорости и т.д.) рассматриваются как функции этого аргумента.

Кинематику делят на кинематику точки и кинематику системы материальных точек (тела). В кинематике решаются две основные задачи:

- *первая задача* состоит в установлении математических способов задания движения точек или тел;
- *вторая задача* заключается в том, чтобы, зная закон движения данного тела или точки, определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности.

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы непосредственно был задан или закон движения данного тела, или же закон движения, какого-нибудь другого тела, кинематически связанного с данным.

Способы задания движения точки

Чтобы задать движение точки, надо задать ее положение по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени. Для этого задания можно применять один из трех способов: естественный, координатный, векторный.

1. Естественный способ задания движения точки

Естественным способом задания движения пользуются в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется ***траекторией точки***. Если траектория является прямой линией, то движение точки называется *прямолинейным*, а если кривой линией – то *криволинейным*.

Пусть точка M движется относительно системы отсчета вдоль некоторой траектории AB (рис. 40). Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку O, которую примем за начало отсчета, а затем, рассматривая траекторию как координатную ось, установим на ней положительное и отрицательное направление, как на обычной координатной оси.

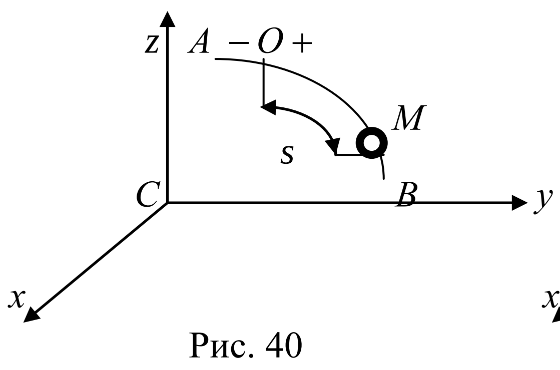


Рис. 40

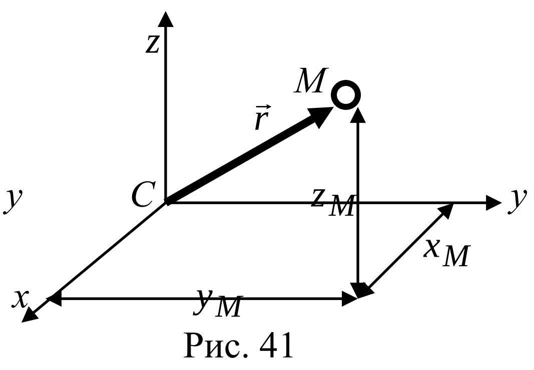


Рис. 41

Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой s, равной расстоянию от точки O до точки M, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка M будет перемещаться вдоль траектории, следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться. Чтобы определить положение точки на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость вида:

$$s = f(t). \tag{13}$$

Это уравнение выражает закон движения точки. Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо знать:

1. Траекторию движения точки;
2. Начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;
3. Закон движения точки вдоль траектории $s = f(t)$.

Следует отметить, что величина s определяет положение точки, а не пройденный ей путь. Например, если точка, двигаясь из начала отсчета O, доходит до положения B, а затем, двигаясь в обратном направлении, приходит в положение M, то в этот момент ее координата $s = \breve{OM}$, а пройденный за это время путь будет равен $\breve{OB} + \breve{BM} \neq s$.

2.Координатный способ задания движения точки

В этом случае положение движущейся точки в пространстве определяют тремя ее декартовыми координатами относительно выбранной неподвижной прямоугольной системы (рис. 41). При движении точки эти координаты являются однозначными и непрерывными функциями времени, т.е. уравнения движения получают в виде

$$x_M = f_1(t), \quad y_M = f_2(t), \quad z_M = f_3(t). \tag{14}$$

При координатном способе задания движения точки траектория в непосредственном виде не дается, но может быть получена из уравнений движения. Исключая из уравнений движения время, получаем два соотношения между координатами x, y, z, которые определяют линию, описываемую в пространстве движущейся точкой, т.е. ее траекторию.

Если движущаяся точка остается за все время движения в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за координатную xOy, получаем два уравнения движения $x_M = f_1(t),\ y_M = f_2(t)$.

Уравнения движения точки в координатной форме представляют собой уравнение траектории в *параметрической форме*, где за независимый параметр принято время. Исключая его из уравнений движения, получаем уравнение траектории.

При движении точки в плоскости можно пользоваться не только декартовыми координатами. В этом случае можно ввести в рассмотрение полярные координаты (рис. 42).

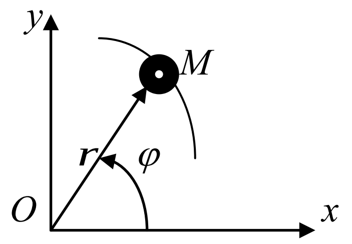


Рис. 42

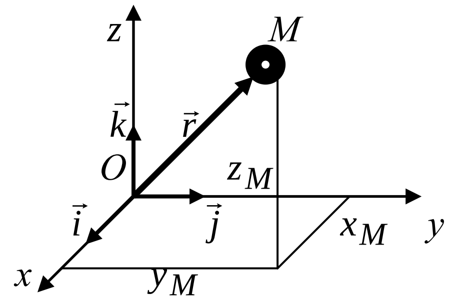


Рис. 43

Положение точки в этом случае будут определять полярными координатами φ и r, т.е. уравнения движения точки в *полярных координатах* имеют вид $\varphi = f_1(t), r = f_2(t)$.

3.Векторный способ задания движения точки

В этом случае положение точки в пространстве определяется только радиусом – вектором, проведенным из начала декартовой системы координат (рис. 43). Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{15}$$

Векторный способ задания движения удобен для установления общих зависимостей, так как позволяет описать движение точки одним векторным уравнением вместо трех скалярных.

Связь между различными способами задания движения

В этом параграфе показано, как можно сделать переход от одного способа задания движения точки к другому.

1. Переход от координатного способа задания движения к векторному.

Эту связь легко получить, если ввести единичные векторы (орты) осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 43). Тогда, учитывая, что проекции вектора $\vec{r}$ на оси $Oxyz$ равны координатам точки M, т.е. $r_x = x, r_y = y, r_z = z$, получаем

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{16}$$

По зависимости (16) можно сделать переход от координатного способа задания движения к векторному и наоборот.

2. Переход от координатного способа задания движения к естественному.

Допустим, что движение задано в виде уравнений (14). Известно, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ или $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt$, где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$.

Отсюда получаем:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt. \tag{17}$$

Прямолинейное движение точки. Скорость, ускорение

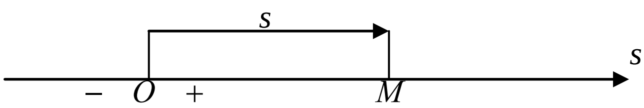


Рис. 44

В этом случае траекторией движения точки является прямая линия (рис. 44). Положение точки определяется относительно начала отсчета (точки O) координатой s. Чтобы определить положение точки M на траектории в любой момент времени, нам должна быть известна зависимость вида (13): $s = f(t)$. Это уравнение характеризует закон движения точки вдоль оси s. Перемещение точки по траектории характеризуется ***скоростью*** ее движения, т.е. отношением пройденного пути к соответствующему промежутку времени.

Рассмотрим два частных случая движения точки.

1. *Равномерное движение*, при котором отношение пройденного пути к соответствующему промежутку времени остается постоянным для любого промежутка времени: $\dfrac{s}{t} = V = \text{const}$, $V\left[\dfrac{м}{с}\right]$ - скорость равномерного движения.

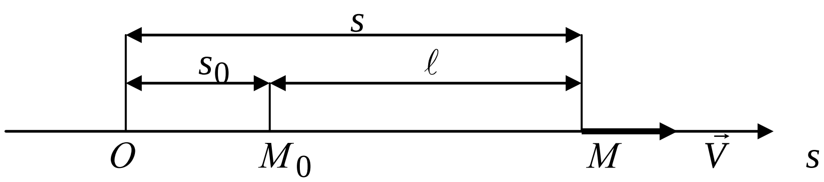


Рис. 45

Пусть точка находится в начальный момент в положении M_0 и движется вдоль оси s (рис. 45). Начало координат в точке O; расстояние $OM_0 = s_0$. Тогда через промежуток времени t точка будет находиться на расстоянии $OM = s = s_0 + \ell$ или $s = s_0 + Vt$. Получили закон равномерного движения точки:

$$\vec{V} = \text{const}, \quad s = s_0 + Vt. \tag{18}$$

2. *Неравномерное прямолинейное движение*, при котором скорость есть **переменная величина**, т.е. точка за равные промежутки времени проходит разные расстояния. Например, $s = 2t^2$ (рис. 46).

Отношение пути s, пройденного точкой при неравномерном движении, ко времени t, в течение которого этот путь пройден, называется *средней скоростью точки* за данный промежуток времени t или на данном пути s.

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{19}$$

Средняя скорость характеризует быстроту движения за некоторый данный промежуток времени, но не дает представления о быстроте движения точки в отдельные моменты этого промежутка времени. Поэтому, кроме средней скорости, определяют ***мгновенную скорость*** точки в данный момент времени.

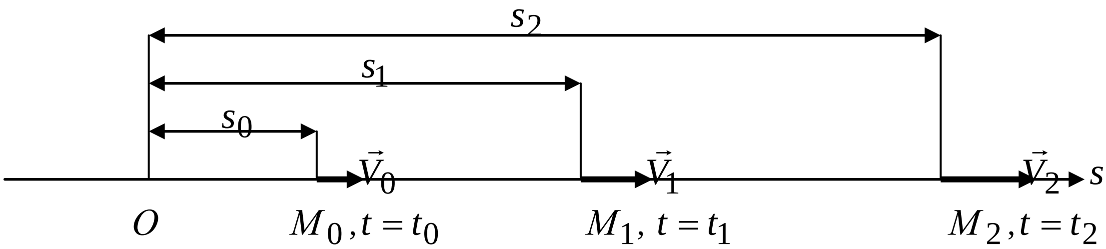


Рис. 46

Скоростью точки в данный момент времени называется величина V*, к которой стремится средняя скорость* $V_{\text{ср}}$ *при стремлении промежутка времени* Δt *к нулю*:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \left[\frac{м}{с}\right]. \qquad (20)$$

Для прямолинейного движения этот вектор направлен вдоль траектории движения, и, учитывая, что производная может дать знак минус, вектор скорости может быть направлен как в сторону возрастания значения s, так и в сторону убывания значения s.

Ускорением точки в прямолинейном движении называется величина, характеризующая быстроту изменения скорости с течением времени, т.е. производная

$$a = \frac{dV}{dt}, \text{ но } V = \frac{ds}{dt}, \text{ значит } a = \frac{d^2 s}{dt^2} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]. \qquad (21)$$

Если скорость и ускорение имеют одинаковые знаки, то движение ускоренное, т.е. с течением времени скорость возрастает, а если скорость и ускорение имеют разные знаки, то движение будет замедленным.

Из зависимости $a = \dfrac{dV}{dt}$ следует, что ускорение обращается в ноль в те моменты, когда величина скорости достигает минимума или максимума.

Если преобразовать (изобразить) функциональную зависимость между s, V, a и временем t графически, то эти кривые называются соответственно графиками движения, скорости и ускорения (рис.47).

Например, $s = 2t^2$ $[\text{м}]$, $V = \dfrac{ds}{dt} = 4t$ $\left[\dfrac{м}{с}\right]$, $a = \dfrac{dV}{dt} = 4$ $\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$.

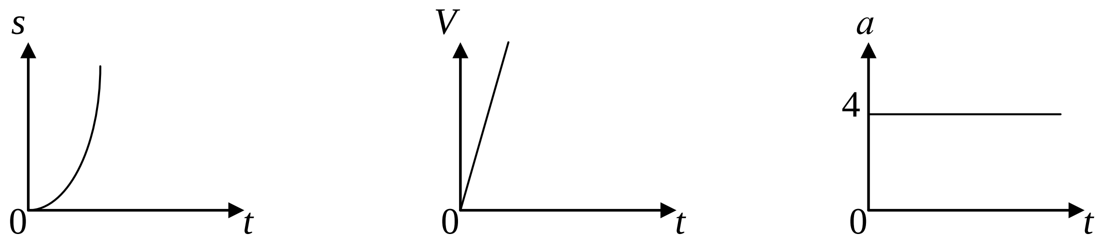


Рис. 47

Рассмотрим частный случай. Если ускорение сохраняет свое значение за все время движения $a = \text{const}$, то такое движение называю **равномерно – переменным**. Получим закон такого движения $\frac{dV}{dt} = \pm a$, $dV = \pm a dt$,

$\int\limits_{V_0}^{V} dV = \pm a \int\limits_{t_0=0}^{t} dt$, $V - V_0 = \pm at$ или $V = V_0 \pm at$. $V = \frac{ds}{dt}$, $ds = Vdt = (V_0 \pm at)dt$,

$\int\limits_{s_0}^{s} ds = \int\limits_{t_0=0}^{t} (V_0 \pm at)dt$, $s - s_0 = V_0 t \pm \frac{at^2}{2}$. Таким образом, зависимости для равномерно – переменного движения имеют вид

$$a = \text{const},\ V = V_0 \pm at,\ s = s_0 + V_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (22)$$

Случай прямолинейного движения является простейшим случаем движения, и он характерен тем, что в этом случае скорость и ускорение направлены вдоль траектории движения точки.

Криволинейное движение точки. Скорость, ускорение

Пусть движение задано в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Точка M движется по некоторой криволинейной траектории AB, и ее положение определяется вектором $\vec{r}$. Пусть в момент времени t положение точки M определяется вектором $\vec{r}$ $(t \to M \to \vec{r})$. В момент времени t_1, отличающийся от первоначального на бесконечно малый промежуток времени Δt, точка занимает положение M_1 $(t_1 = t + \Delta t \to M_1 \to \vec{r}_1)$. Таким образом, в каждый момент времени конец вектора $\vec{r}$ будет находиться на траектории точки M. *Геометрическое место концов этих векторов, или, линия, описываемая в пространстве концом вектора, начало которого находится в данной неподвижной точке, называется* ***годографом*** *этого вектора*. Очевидно, что годографом радиуса – вектора $\vec{r}$ движущейся точки M является траектория AB этой точки. Соединим точки M и M_1 прямой (рис. 48), тогда, очевидно, можно записать векторное равенство: $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ или $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$, где $\Delta\vec{r}$ есть изменение (приращение) данного вектора $\vec{r}$ за время Δt.

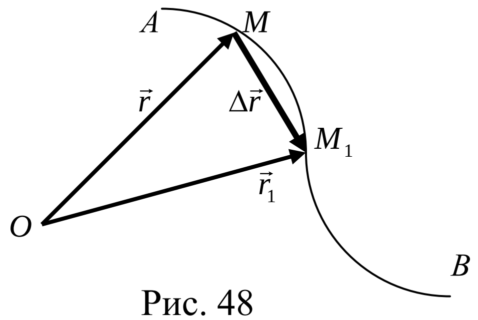


Рис. 48

Разделив это приращение на промежуток времени Δt, получим новый вектор, имеющий тоже направление, но другую величину. Этот вектор $\vec{V}_{\text{ср}}$ называется средней скоростью точки за время Δt.

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (23)$$

Средняя скорость криволинейного движения - это скорость такого равномерного движения, при котором точка, двигаясь по хорде равномерно, попадает на траекторию в тоже положение, которое она занимает через данный промежуток времени, двигаясь по траектории неравномерно.

Будем теперь приближать Δt к нулю. При этом точка M_1 будет при этом приближаться к точке M. В пределе направление вектора $\vec{V}_{CP}$ (так же как и $\Delta\vec{r}$), совпадает с направлением касательной к траектории в точке M, а модуль его равен $\lim_{\Delta t\to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Предел средней скорости $\vec{V}_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$ называется *скоростью движущейся точки в момент времени* t.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{V}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (24)$$

Вектор скорости в данный момент времени равен векторной производной от радиуса вектора, определяющего положение точки, по времени. Вектор истинной скорости имеет направление касательной к траектории в данном положении точки.

Определим модуль вектора истинной скорости. Введем обозначение $\Delta s = \breve{M}\breve{M}_1$ - дуга траектории.

Тогда $\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)$. Учитывая, что предел производной равен произведению пределов, $\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$.

Мы определяем модуль, т.е. переходим от векторных величин к скалярным $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$. Учитывая, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\breve{M}\breve{M}_1} = 1$, получаем $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, где $s = f(t)$.

Таким образом, модуль скорости точки равен производной от дуговой координаты движущейся точки по времени.

Если производная $\frac{ds}{dt}$ положительна, то с ростом времени возрастает и s, т.е. точка движется по траектории в положительном направлении и наоборот. Если модуль $V = \text{const}$, то получаем случай *равномерного криволинейного* движения. В этом случае величина s является линейной функцией времени, т.е. $s = s_0 + Vt$, где s_0 - начальное значение дуговой координаты при $t = 0$.

Для случая прямолинейного движения было получено, что ускорение точки выражается производной от скорости по времени (21). В случае криволинейного движения эта производная, очевидно, не может полностью характеризовать изменение скорости по времени, так как здесь скорость меняется не только по модулю, но и по направлению рис. 49. Для случая криволинейного движения вектор ускорения строят следующим образом. Пусть в момент времени t движущаяся точка занимает на траектории положение M и имеет скорость $\vec{V}$.

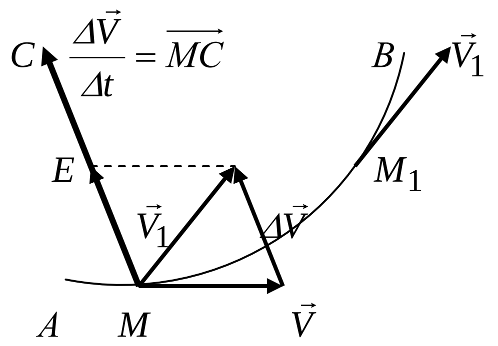


Рис. 49

Через малый промежуток времени Δt, т.е. в момент $t + \Delta t$, эта точка занимает положение M_1 и имеет скорость $\vec{V}_1$. Перенесем начало вектора $\vec{V}_1$ в точку M, соединим конец вектора $\vec{V}_1$ и $\vec{V}$, а затем достроим полученный треугольник до параллелограмма. Тогда вектор $\overrightarrow{ME}$ представляет собой изменение скорости за время Δt: $\overrightarrow{ME} = \vec{V}_1 - \vec{V} = \Delta\vec{V}$.

Построим теперь новый вектор $\overrightarrow{MC}$, равный отношению изменения скорости $\Delta\vec{V}$ к соответствующему промежутку времени Δt. $\overrightarrow{MC} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{ME}}{\Delta t}$. Этот вектор называется *средним ускорением точки* за время Δt:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \tag{25}$$

Предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$, называется ускорением точки в данный момент времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \overrightarrow{MC} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}\ . \tag{26}$$

Ускорение точки в данный момент времени равно векторной производной от скорости точки по времени.

Проекции скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат

Пусть положение точки определяется радиусом вектором $\vec{r}$ (рис. 43). Учитывая связь радиуса-вектора с координатами точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, подставляем это выражение в уравнение (24):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{27}$$

При таком разложении вектора по координатным осям коэффициенты, стоящие при соответствующих орт-векторах представляют, собой проекции данного вектора на координатные оси, т.е.

$$V_x = \frac{dx}{dt},\ V_y = \frac{dy}{dt},\ V_z = \frac{dz}{dt},\ \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}. \tag{28}$$

Таким образом, проекции скорости на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени. Эти производные находятся из уравнений движения точки.

Для определения модуля скорости получаем

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{29}$$

Направление вектора $\vec{V}$ определяется его направляющими косинусами:

$$\cos\left(\vec{V}, x\right) = \frac{V_x}{V},\quad \cos\left(\vec{V}, y\right) = \frac{V_y}{V},\quad \cos\left(\vec{V}, z\right) = \frac{V_z}{V}. \tag{30}$$

Зависимости (29) и (30) полностью определяют вектор скорости как по модулю, так и по направлению.

Для определения ускорения точки подставим зависимость (27) в (26):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}, \tag{31}$$

где $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = a_y$, $\dfrac{d^2z}{dt^2} = a_z$.

Для определения модуля ускорения получаем

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{32}$$

Направление вектора $\vec{a}$ определяется его направляющими косинусами

$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a}, z) = \frac{a_z}{a}. \tag{33}$$

Зависимости (32) и (33) полностью определяют вектор ускорения как по модулю, так и по направлению.

Кривизна, радиус кривизны траектории

Пусть нам дана некоторая кривая (траектория точки), изображенная на рис. 50. Возьмем на ней две близкие точки A и B, и длину дуги $\overset{\cup}{AB}$ обозначим через Δs. Проведем в точках A и B касательные к данной кривой. Угол между касательными, называемый ***углом смежности*** и измеряемый в радианах, обозначим $\Delta\varphi$. ***Отношение*** $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ***называется средней кривизной дуги*** $\overset{\cup}{AB}$ **.**

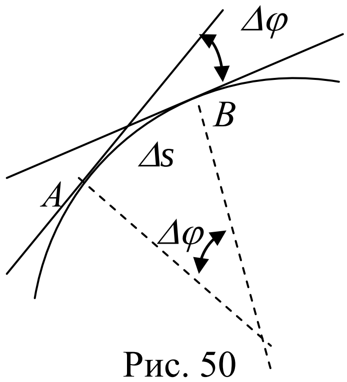


Рис. 50

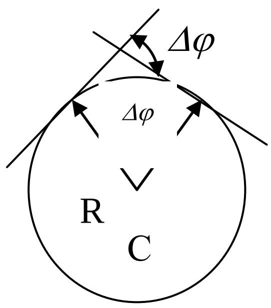


Рис. 51

Предел, к которому стремится средняя кривизна дуги $\breve{A}\breve{B}$, когда точка B неограниченно приближается к точке A, называется ***кривизной данной линии в точке*** A**.** Если обозначить кривизну через K, то получаем

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \left[\frac{1}{\text{м}}\right]. \tag{34}$$

Величина обратная кривизне называется **радиусом кривизны данной кривой в точке** A. Обозначим радиус кривизны через ρ, тогда

$$\rho = \frac{1}{K} \;\; [\text{м}], \quad \text{или} \quad K = \frac{1}{\rho}\,. \tag{35}$$

Рассмотрим частные случаи: чему равен радиус кривизны для прямой линии и окружности радиуса R.

1. Для прямой линии кривизна равна нулю $\Delta\varphi = 0$, $K = 0$, $\rho = \infty$.

2. Для окружности радиуса R (рис. 51) $K = \lim_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, но $\Delta s = R\Delta\varphi$, $K = \dfrac{1}{R}$, тогда $\rho = R$.

Получили, что радиус кривизны окружности равен ее радиусу. Отсюда замечаем, что радиус кривизны кривой линии есть радиус такой окружности, которая имеет с данной кривой в данной точке одинаковую кривизну.

Если траектория точки есть плоская кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, то радиус кривизны в произвольной точке этой кривой можно определить по общей формуле, которая выводится в дифференциальном исчислении

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}. \tag{36}$$

Естественные оси, естественный трехгранник

Рассмотрим траекторию движения точки (рис. 52). Положение точки M на траектории будем определять дуговой координатой s, отсчитываемой от произвольно выбранной на траектории неподвижной точки O.

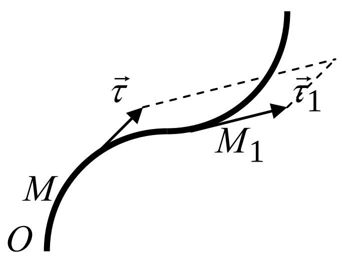


Рис. 52

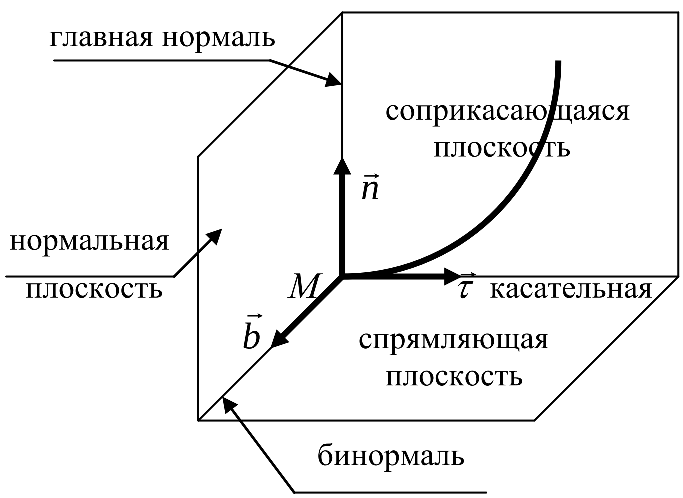


Рис. 53

Проведем через точку M касательную к траектории и будем определять положительное направление этой касательной единичным вектором $\vec{\tau}$, направленным по касательной в сторону возрастания дуговой координаты s и равным по модулю единице. Этот вектор $\vec{\tau}$ называется *ортом касательной*. Если провести через точку M плоскость, перпендикулярную к касательной в этой точке, то такая плоскость называется *нормальной* (рис. 53). Любая прямая, проведенная через точку M в нормальной плоскости, перпендикулярна к касательной $\vec{\tau}$ и является нормалью траектории в точке M.

Теперь возьмем на траектории точку M_1, близкую к точке M (рис. 52). Орт касательной в этой точке обозначим $\vec{\tau}_1$. Построим плоскость, проходящую через два вектора $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$, а затем будем точку M_1 неограниченно приближать к точке M так, чтобы в пределе эти точки совпали. Так как при этом направление вектора $\vec{\tau}_1$ будет при этом изменяться, то будет изменяться и положение этой плоскости. Очевидно, что она будет вращаться вокруг вектора $\vec{\tau}$, приближаясь к некоторому предельному положению. Плоскость, представляющая собой предельное положение плоскости, построенной на векторах $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$, при стремлении точки M_1 к точке M называется *соприкасающейся плоскостью* данной кривой в точке M (рис. 53). Из этого определения следует, что касательная в точке M лежит в соприкасающейся плоскости, и для случая плоской траектории соприкасающаяся плоскость совпадает с той плоскостью, в которой расположена эта траектория. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, т.е. линия пересечения нормальной и соприкасающихся плоскостей, называется *главной нормалью* данной кривой в точке M.

За положительное направление главной нормали принимается направление от точки M в сторону *вогнутости* траектории, и это направление определяют единичным вектором $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ называется *ортом главной нормали* (рис. 53). Нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*, а ее направление определяется орт вектором $\vec{b}$ (рис. 53). Плоскость, построенная на касательной и бинормали, называется *спрямляющей плоскостью*.

Три оси, имеющие начало в точке M и направленные по касательной, главной нормали и бинормали к траектории в этой точке, называются ***естественными осями***, и являются ребрами триэдра, или ***естественного трехгранника***.

Естественный трехгранник представляет собой прямоугольную систему координат, отличающуюся от декартовой тем, что за начало координат здесь принимается движущаяся точка, т.е. естественный трехгранник с течением времени меняет свое положение в пространстве, двигаясь с точкой M.

Проекции ускорения точки на естественные оси

Пусть точка движется по криволинейной траектории, и в момент времени t она занимает положение M и имеет скорость $\vec{V}$, а в момент $t+\Delta t$ - положение M_1 и имеет скорость $\vec{V}_1$. Длину элементарной дуги $\overset{\cup}{MM_1}$ обозначим Δs.

Представив скорость как $\vec{V} = V\vec{\tau}$ и учитывая зависимость (26) получаем выражение для ускорения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Выясним кинематический смысл слагаемых правой части. С первой составляющей все понятно, модуль этого составляющего ускорения равен $\dfrac{dV}{dt}$, и направлен этот вектор по направлению орт вектора $\vec{\tau}$, т.е. по касательной. Эта составляющая ускорения называется ***касательным, или тангенциальным ускорением*** и обозначается

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau},\ \ a_\tau = \frac{dV}{dt}. \tag{37}$$

Рассмотри вторую составляющую, т.е. определяем модуль и направление вектора $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$. $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{\tau}$ - разность векторов $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}$, построенных в точках M_1 и M. Чтобы найти вектор $\Delta\vec{\tau}$, перенесем вектор $\vec{\tau}_1$, не изменяя его направления из точки M_1 в точку M. Соединив концы векторов $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}$, достроим ΔMAB до параллелограмма $MABC$ (рис. 54).

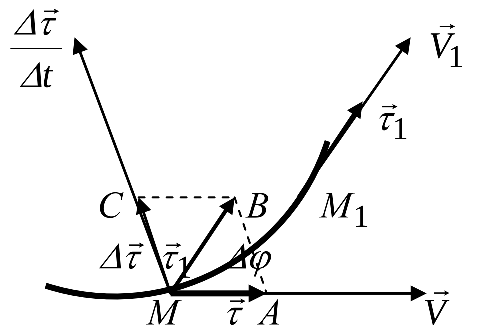


Рис. 54

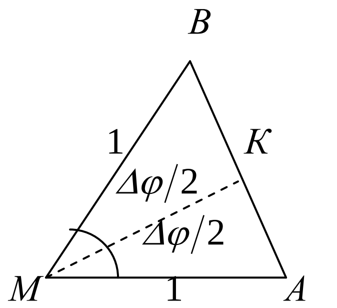


Рис. 55

Вектор $\overrightarrow{MC}$ представляет собой разность векторов $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}$, т.е. $\overrightarrow{MC} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau} = \Delta\vec{\tau}$. Разделив $\Delta\vec{\tau}$ на промежуток времени Δt, получим новый вектор $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$, направленный по прямой MC. Выясним направление этого вектора в пределе при $\Delta t \to 0$.

Как было указано в предыдущем параграфе, плоскость параллелограмма $MABC$ в пределе при $\Delta t \to 0$ превращается в соприкасающуюся плоскость траектории в точке M. Отсюда следует, что вектор $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ лежит в *соприкасающейся плоскости*.

Найдем величину угла между векторами $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ и $\vec{\tau}$, т.е. угол AMC. Треугольник ΔMAB является равнобедренным, так как $MA = \tau = 1$, $MB = \tau_1 = 1$ (рис. 55). Угол при вершине M равен углу смежности $\Delta\varphi$. Получаем $< MBA =< MAB = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\varphi}{2}$, а поэтому $< AMC =< AMB + < BMC = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\Delta\varphi}{2}$. Отсюда заключаем, что в пределе при $\Delta\varphi \to 0$ угол AMC становится прямым, а, следовательно, направление вектора $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ совпадает с положительным направлением главной нормали, т.е. с направлением орт вектора $\vec{n}$, значит $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d\tau}{dt}\vec{n}$. Определяем модуль этого вектора $\dfrac{d\tau}{dt}$. Из треугольника ΔMAB

(рис.55) $\Delta\tau = AB = 2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$, тогда $\dfrac{\Delta\tau}{\Delta t} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}$.

Переходим к пределу $\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \dfrac{d\tau}{dt}$.

Тогда $\dfrac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\dfrac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = 1\frac{1}{\rho}V = \frac{V}{\rho}.$$

Окончательно $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{V}{\rho}\vec{n}$. Тогда $V\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n}$. Этот вектор также полностью определен, по модулю он равен $\dfrac{V^2}{\rho}$ и направлен по главной нормали к *центру кривизны*, с учетом орт вектора $\vec{n}$.

Эта составляющая ускорения называется ***нормальным, или центростремительным ускорением*** и обозначается

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}, \; a_n = \frac{V^2}{\rho}. \qquad (38)$$

Оба вектора $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ лежат в *соприкасающейся плоскости*, значит и итоговый вектор $\vec{a}$ лежит в этой же плоскости, а проекция этого вектора на бинормаль равна нулю $\vec{a}_b = 0$.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (39)$$

Таким образом, проекция ускорения на направление скорости равна производной от модуля скорости по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна отношению квадрату скорости к радиусу кривизны траектории в той же точке, где в данный момент находится движущаяся точка.

Рассмотрим, как определяется ускорение точки для частных случаев движения.

1. *Равномерное прямолинейное движение:* $\vec{V} = \text{const}$, $\rho = \infty$, $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = 0$,

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0, \; a = 0.$$

2. *Неравномерное прямолинейное движение:* $V = \text{var}$, $\rho = \infty$, $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} \neq 0$,

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0, \; a = a_\tau = \frac{dV}{dt}, \; \vec{a} = \vec{a}_\tau.$$

3. *Равномерное криволинейное движение:* $V = \text{const}$, $\rho = \text{var}$, $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = 0$,

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0, \; a = a_n = \frac{V^2}{\rho}, \; \vec{a} = \vec{a}_n.$$

4.Неравномерное криволинейное движение: $\vec{V} = \text{var}$, $\rho = \text{var}$, $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} \neq 0$,

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0, \; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \; \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Используя связь между координатным и естественным способами задания движения точки, можно вывести зависимости, связывающие проекции ускорения на естественные и декартовые оси. Из зависимости (37):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2V_x a_x + 2V_y a_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \qquad (40)$$

Из зависимости (38), с учетом (32) и (39), получаем выражение для нормального ускорения точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - \frac{\left(V_x a_x + V_Y a_y\right)^2}{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{\left|V_x a_y - V_y a_x\right|}{V}. \quad (41)$$

Из зависимости (38), с учетом (41), получим выражение для радиуса кривизны

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^3}{\left|V_x a_y - V_y a_x\right|}. \quad (42)$$

Тема 10. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, неизменно связанная с этим телом, остается параллельной своему начальному положению.

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый данный момент имеют равные по модулю и направлению скорости и ускорения.

Доказательство. Проведем через две точки A и B, поступательно движущегося тела отрезок AB и рассмотрим движение этого отрезка в положении $A_n B_n$. При этом точка A описывает траекторию $AA_1A_2A_n$, а точка B – траекторию $BB_1B_2B_n$ (рис. 56).

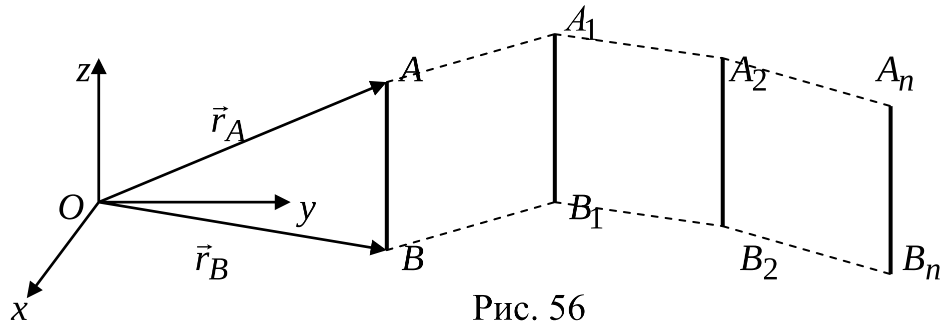


Рис. 56

Учитывая, что отрезок AB перемещается параллельно самому себе, и длина его не меняется, можно установить, что траектории точек A и B будут одинаковы. Значит, первая часть теоремы доказана. Будем определять положение точек A и B векторным способом относительно неподвижного начала координат O. При этом эти радиусы – вектора находятся в зависимости $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{BA}$. Так как. ни длина, ни направление отрезка BA не меняется при движении тела, то вектор $\overrightarrow{BA} = \text{const}$. Переходим к определению скоростей по зависимости (24):

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{BA}\right)}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{V}_B, \text{ получаем } \vec{V}_A = \vec{V}_B.$$

Переходим к определению ускорений по зависимости (26):

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt},\ \ \vec{a}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt}, \text{ получаем } \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Из доказанной теоремы следует, что поступательное движение тела будет вполне определено, если известно движение только одной какой- нибудь точки. Поэтому изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения одной его точки, т.е. к задаче кинематики точки.

Тема 11. Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором две его точки остаются неподвижными за все время движения. При этом прямая, проходящая через эти две неподвижные точки, называется *осью вращения*.

Каждая точка тела, не лежащая на оси вращения, описывает при таком движении окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, и центр ее лежит на этой оси.

Проводим через ось вращения неподвижную плоскость I и подвижную плоскость II, неизменно связанную с телом и вращающуюся вместе с ним (рис. 57). Положение плоскости II, а соответственно и всего тела, по отношению к плоскости I в пространстве, вполне определятся углом φ. При вращении тела вокруг оси z этот угол является непрерывной и однозначной функцией времени. Следовательно, зная закон изменения этого угла с течением времени, мы сможем определить положение тела в пространстве:

$\varphi = f(t)$ - **закон вращательного движения тела**. (43)

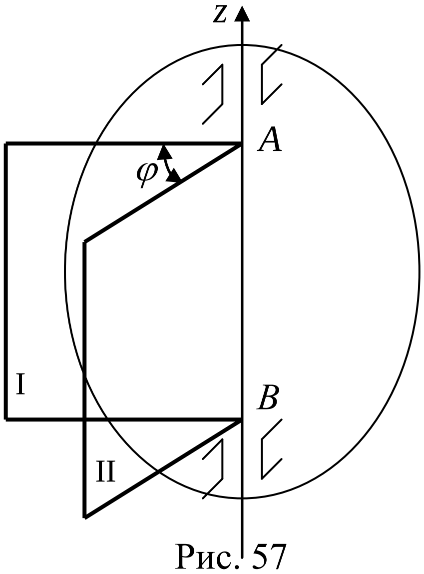


Рис. 57

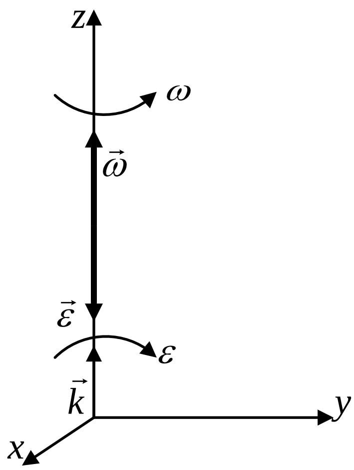


Рис. 58

При этом будем полагать, что угол φ отсчитывается от неподвижной плоскости в направлении обратном движению часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси z. Так как положение тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется одним параметром, то говорят, что такое тело имеет одну степень свободы.

Угловая скорость

Изменение угла поворота тела с течением времени называется угловой ***скоростью тела*** и обозначается ω (омега):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f_1(t)\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]. \qquad (44)$$

Угловая скорость так же, как и линейная скорость, есть величина векторная, и этот вектор $\vec{\omega}$ строят на оси вращения тела. Он направляется вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы, смотря с его конца на его начало, видеть вращение тела против хода часовой стрелки (рис. 58). Модуль этого вектора определяется зависимостью (44). Точку приложения $\vec{\omega}$ на оси можно выбирать произвольно, так как вектор можно переносить вдоль линии его действия. Если обозначить орт-вектор оси вращения через $\vec{k}$, то получим векторное выражение угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}. \qquad (45)$$

Угловое ускорение

Быстрота изменения угловой скорости тела с течением времени называется ***угловым ускорением*** тела и обозначается ε (эпсилон):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f_2(t)\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right]. \qquad (46)$$

Угловое ускорение есть величина векторная, и этот вектор $\vec{\varepsilon}$ строят на оси вращения тела. Он направляется вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы, смотря с его конца на его начало, видеть направление вращение эпсилон против хода часовой стрелки (рис. 58). Модуль этого вектора определяется зависимостью (46). Точку приложения $\vec{\varepsilon}$ на оси можно выбирать произвольно, так как вектор можно переносить вдоль линии его действия.

Если обозначить орт-вектор оси вращения через $\vec{k}$, то получим векторное выражение углового ускорения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k}. \qquad (47)$$

Если угловые скорость и ускорения одного знака, то тело вращается *ускоренно*, а если разного – *замедленно*. Пример замедленного вращения показан на рис. 58.

Рассмотрим частные случаи вращательного движения.

1. Равномерное вращение: $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, d\varphi = \omega dt, \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega\int\limits_0^t dt, \omega = \text{const}, \varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{48}$$

2. Равнопеременное вращение: $\varepsilon = \text{const}$.

$$\frac{d\omega}{dt} = \pm\varepsilon, \qquad d\omega = \pm\varepsilon dt, \qquad \int\limits_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \pm\varepsilon\int\limits_0^t dt, \qquad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

$$d\varphi = \omega_0 dt \pm \varepsilon t dt, \quad \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0\int\limits_0^t dt \pm \varepsilon\int\limits_0^t t dt, \ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\varepsilon = \text{const}, \ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{49}$$

Связь линейных и угловых параметров

Рассмотрим движение произвольной точки M вращающегося тела. При этом траектория движения точки будет окружность, радиуса $OM = \rho$, расположенная в плоскости перпендикулярной оси вращения (рис. 59,*а*).

Допустим, что в момент времени t точка находится в положении M. Предположим, что тело вращается в положительном направлении, т.е. в направлении возрастания угла φ. В момент времени $t + \Delta t$ точка займет положение M_1. Обозначим дугу $\overset{\smile}{MM_1} = \Delta s$. Следовательно, за промежуток времени Δt точка прошла путь Δs. Ее средняя скорость $V_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а при $\Delta t \to 0$, $V = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Но, из рис. 59,*б*, видно, что $\Delta s = \rho\Delta\varphi$. Тогда $V = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\rho\Delta\varphi}{\Delta t} = \rho\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \rho\dfrac{d\varphi}{dt}$. Окончательно получаем

$$V = \omega\rho. \tag{50}$$

Здесь V - линейная скорость точки M. Как было получено ранее, эта скорость направлена по касательной к траектории в данной точке, т.е. по касательной к окружности.

Таким образом, модуль линейной (окружной) скорости точки вращающегося тела равен произведению абсолютного значения угловой скорости на расстояние от этой точки до оси вращения.

Теперь свяжем линейные составляющие ускорения точки с угловыми параметрами.

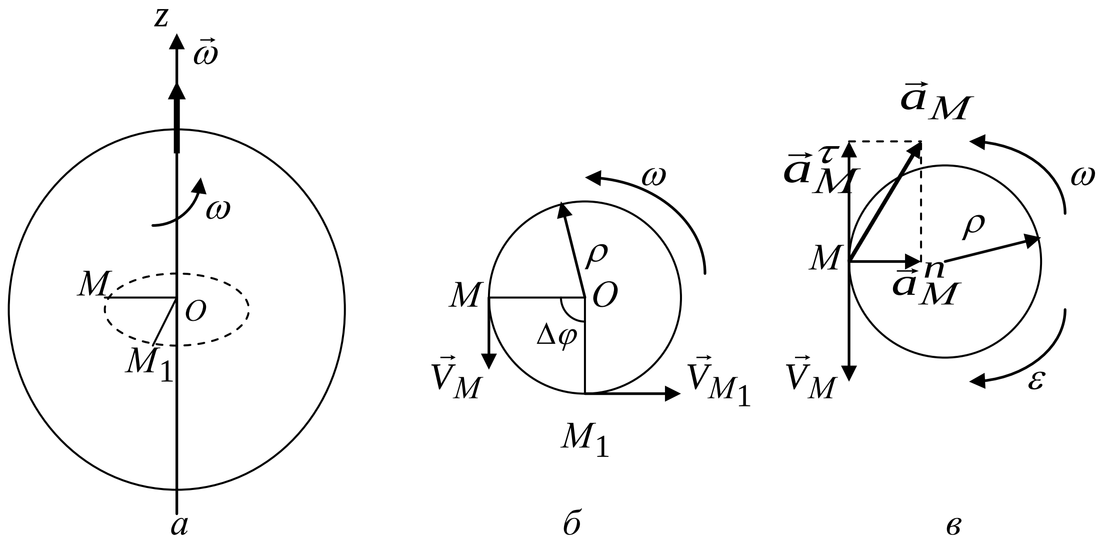


Рис. 59

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\rho) = \rho\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon\rho\,, \quad a_\tau = \varepsilon\rho\,. \qquad (51)$$

Модуль касательного ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению углового ускорения тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\omega\rho)^2}{\rho} = \omega^2\rho\,,\ a_n = \omega^2\rho\,. \qquad (52)$$

Модуль нормального ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Тогда выражение для полного ускорения точки принимает вид

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (53)$$

Направления векторов $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$ показаны на рисунке 59,*в*.

Тема 12. Плоское движение твердого тела

Плоским движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. Примеры такого движения:

- движение любого тела, основание которого скользит по данной неподвижной плоскости;
- качение колеса по прямолинейному участку пути (рельсу).

Получим уравнения плоского движения. Для этого рассмотрим плоскую фигуру, движущуюся в плоскости листа (рис. 60). Отнесем это движение к неподвижной системе координат Oxy, а с самой фигурой свяжем подвижную систему координат Cx_1y_1, которая перемещается вместе с ней.

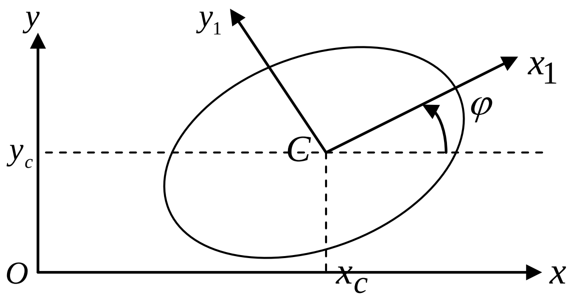


Рис. 60

Очевидно, что положение движущейся фигуры на неподвижной плоскости определяется положением подвижных осей Cx_1y_1 относительно неподвижных осей Oxy. Такое положение определяется положением подвижного начала координат C, т.е. координатами x_C, y_C и углом поворота φ, подвижной системы координат, относительно неподвижной, который будем отсчитывать от оси x в направлении обратном движению часовой стрелки.

Следовательно, движение плоской фигуры в ее плоскости будет вполне определено, если для каждого момента времени будут известны значения x_C, y_C, φ, т.е. уравнения вида:

$$x_C = f_1(t),\ y_C = f_2(t),\ \varphi = f_3(t). \tag{54}$$

Уравнения (54) являются уравнениями плоского движения твердого тела, так как если эти функции известны, то для каждого момента времени можно из этих уравнений найти соответственно x_C, y_C, φ, т.е. определить положение движущейся фигуры в данный момент времени.

Рассмотрим частные случаи:

1. $\varphi = \text{const}$, тогда движение тела будет поступательным, так как подвижные оси перемещаются, оставаясь параллельными своему начальному положению.
2. $x_C = \text{const}$, $y_C = \text{const}$. При таком движении меняется только угол поворота φ, т.е. тело будет вращаться относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку C.

Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное

Рассмотрим два последовательных положения I и II, которые занимает тело в моменты времени t и $t + \Delta t$ (рис. 61). Тело из положения I в положение II можно перенести следующим образом. Перенесем сначала тело *поступательно*. При этом отрезок AB переместится параллельно самому себе в положение A_1B_1', а затем *повернем* тело вокруг точки (полюса) A_1 на угол $\Delta\varphi$ до совпадения точек B_1' и B_1.

Следовательно, ***любое плоское движение можно представить как сумму поступательного движения вместе с выбранным полюсом и вращательного движения, относительно данного полюса.***

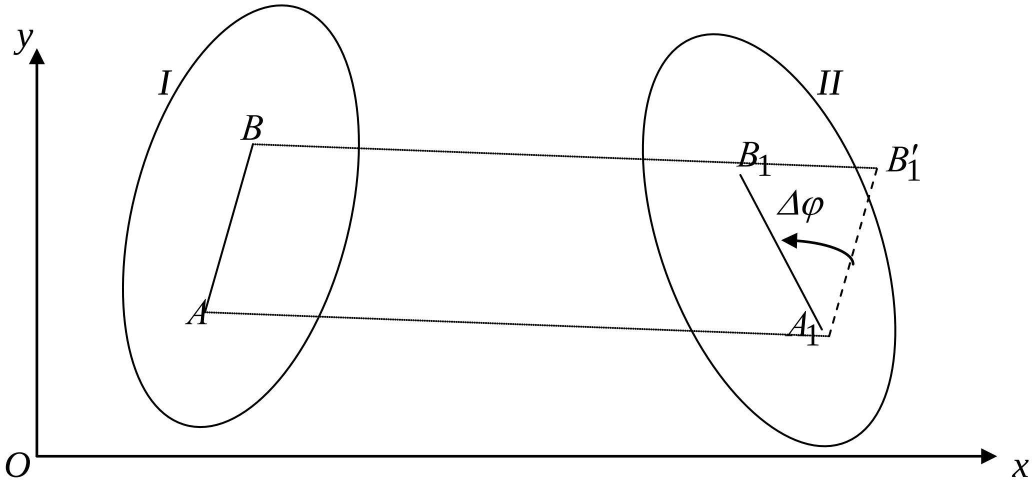


Рис. 61

Определение скоростей точек плоской фигуры

Рассмотрим методы, с помощью которых можно определить скорости точек тела, совершающего плоское движение.

1. Метод полюса. Этот метод основывается на полученном разложении плоского движения на поступательное и вращательное. *Скорость любой точки плоской фигуры можно представить в виде двух составляющих: поступательной, со скоростью равной скорости произвольно выбранной точки –* ***полюса****, и вращательной вокруг этого полюса.*

Рассмотрим плоское тело (рис. 62). Уравнения движения имеют вид:
$x_c = f_1(t),\ y_c = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$

Определяем из этих уравнений скорость точки C (как при координатном способе задания)

$$V_{Cx} = \frac{dx_c}{dt},\ V_{Cy} = \frac{dy_c}{dt},\ V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx_c}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{dt}\right)^2}\ .$$

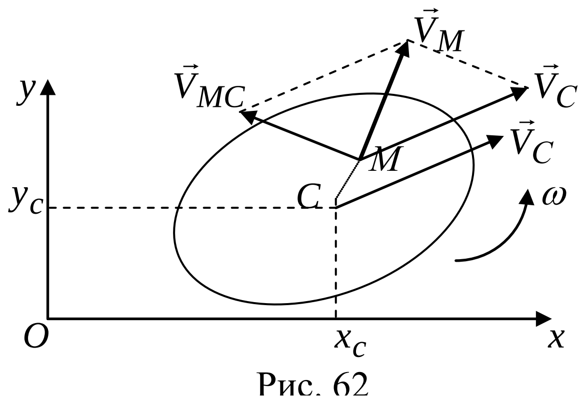


Рис. 62

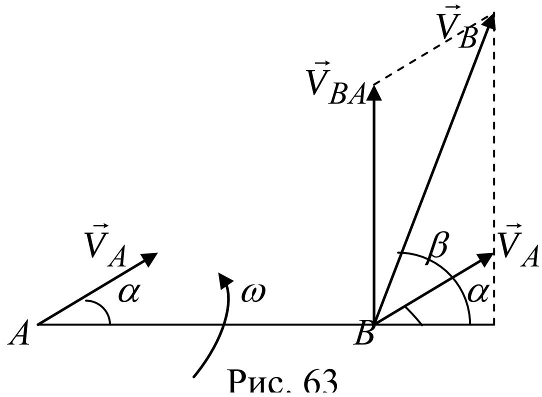


Рис. 63

Таким образом, скорость точки C - величина известная. Принимаем эту точку за полюс и определим скорость произвольной точки M тела.

Скорость $\vec{V}_M$ будет складываться из поступательной составляющей $\vec{V}_C$, при движении вместе с точкой C, и вращательной $\vec{V}_{MC}$, при вращении точки M относительно точки C. Скорость точки C перенесем в точку M параллельно самой себе, так как при поступательном движении скорости всех точек равны как по величине, так и по направлению. Скорость $\vec{V}_{MC}$ определится по зависимости (50) $V_{MC} = \omega MC$, и направлен этот вектор перпендикулярно радиусу MC по направлению вращения ω. Вектор $\vec{V}_M$ будет направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_{MC}$, а его модуль определиться зависимостью:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}, \; V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2 + 2V_C V_{MC} \cos(V_C, V_{MC})}. \qquad (55)$$

2. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Рассмотрим две точки тела A и B (рис. 63). Принимая точку A за полюс, определим направление $\vec{V}_B$ по зависимости (55): $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$. Проектируем это векторное равенство на линию AB и, учитывая, что $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярно AB, получаем

$$AB: \quad V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta. \qquad (56)$$

3. Мгновенный центр скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Покажем, что если тело движется не поступательно, то такая точка в каждый момент времени существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B тела, лежащие в сечении s, имеют скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, не параллельные друг другу (рис. 64). Тогда точка C_V, лежащая на пересечении перпендикуляров к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, и будет МЦС, так как $\vec{V}_{C_V} = 0$.

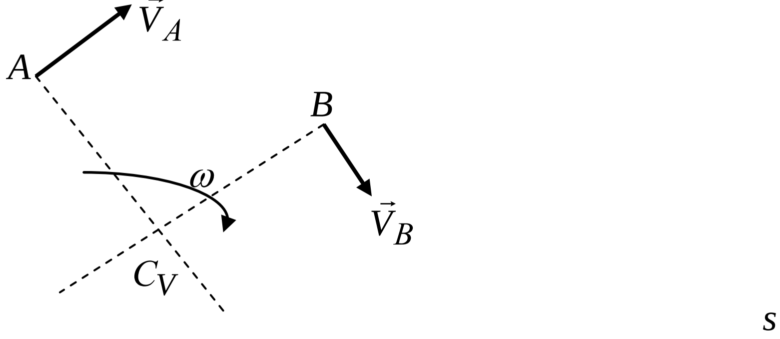


Рис. 64

Действительно, если допустить, что $\vec{V}_{C_V} \neq 0$, то по теореме (56), вектор $\vec{V}_{C_V}$ должен быть одновременно перпендикулярен AC_V и BC_V, что невозможно. Из этой же теоремы видно, что никакая другая точка сечения s в этот момент времени не может иметь скорость равную нулю.

Применяя метод полюса C_V - полюс, определим скорость точки A (55):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{C_V} + \vec{V}_{AC_V} = \vec{V}_{AC_V}, \text{ т.к. } \vec{V}_{C_V} = 0,\ V_A = V_{AC_V} = \omega AC_V. \tag{57}$$

Аналогичный результат можно получить для любой другой точки тела. Следовательно, скорость любой точки тела равна ее вращательной скорости относительно МЦС:

$V_A = V_{AC_V} = \omega AC_V$, $V_B = V_{BC_V} = \omega BC_V$, $\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{AC_V}{BC_V}$, т.е. скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС.

Из рассмотренных трех способов определения скоростей точек плоской фигуры видно, что предпочтительным является МЦС, так как здесь скорость сразу определяется как по модулю, так и по направлению одной составляющей. Однако этот способ можно применять, если нам известен или мы можем определить для тела положение МЦС.

Определение положения МЦС

1. Если нам известны для данного положения тела направления скоростей двух точек тела, то МЦС будет точкой пересечения перпендикуляров к этим векторам скоростей.

2. Скорости двух точек тела антипараллельны (рис. 65,*а*). В этом случае перпендикуляр к скоростям будет общим, т.е. МЦС находится где-то на этом перпендикуляре. Чтобы определить положение МЦС, надо соединить концы векторов скоростей. Точка пересечения этой линии с перпендикуляром будет искомым МЦС. При таком случае МЦС находится между этими двумя точками.

3. Скорости двух точек тела параллельны, но не равны по величине (рис.65,*б*). Процедура получения МЦС аналогична описанной в пункте 2.

г) Скорости двух точек равны как по величине, так и по направлению (рис.65,*в*). Получаем случай мгновенно поступательного движения, при котором скорости всех точек тела равны. Следовательно, угловая скорость тела в данном положении равна нулю:

$$\omega = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = 0,\ \ AC_V = BC_V = \infty.$$

4. Определим МЦС для колеса, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности (рис. 65,*г*). Так как движение происходит без скольжения, то в точке контакта колеса с поверхностью скорость будет одинакова и равна нулю, так как поверхность неподвижна. Следовательно, точка контакта колеса с неподвижной поверхностью будет являться МЦС.

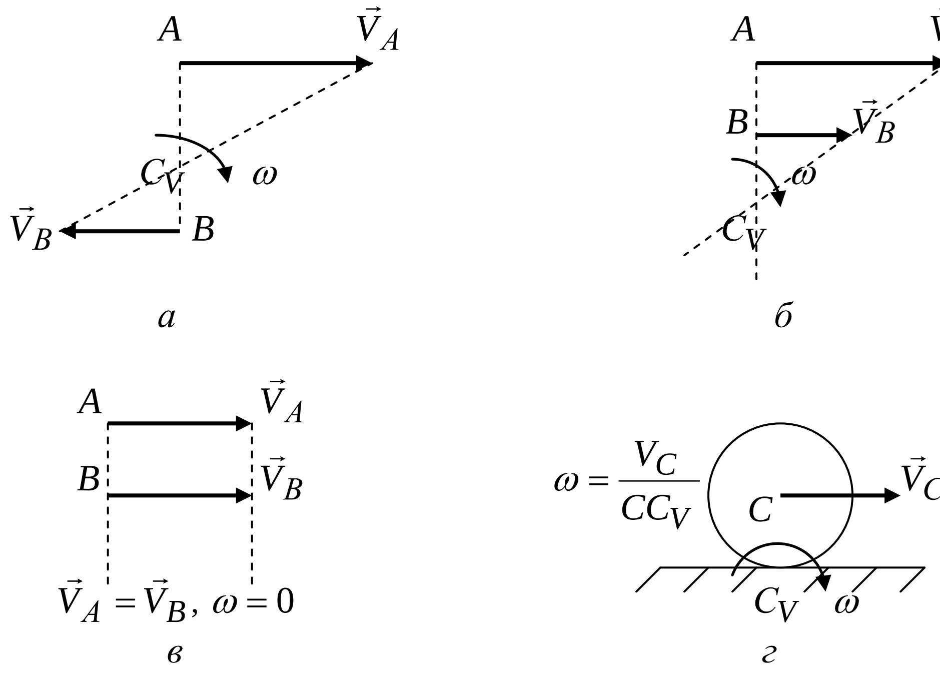


Рис. 65

Определение ускорений точек плоской фигуры

При определении ускорений точек плоской фигуры прослеживается аналогия с методами определения скоростей.

1. Метод полюса. Так же, как и при определении скоростей, принимаем за полюс произвольную точку тела, ускорение которой нам известно, или мы можем его определить. Тогда *ускорение любой точки плоской фигуры равно сумме ускорений полюса и ускорения во вращательном движении вокруг этого полюса:*

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}. \qquad (58)$$

При этом составляющая $\vec{a}_{BA}$ определяет ускорение точки B при ее вращении вокруг полюса A. При вращении траектория движения точки будет криволинейной, а значит $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$ (рис. 66).

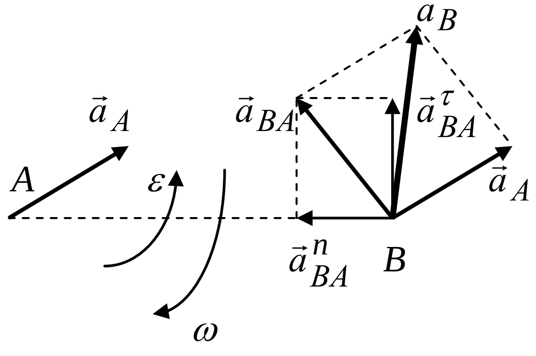


Рис. 66

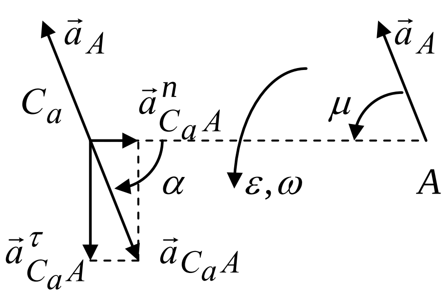


Рис. 67

Тогда зависимость (58) принимает вид $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,\tau}_{BA} + \vec{a}^{\,n}_{BA}$. (59)

Учитывая зависимости (51) и (52), получаем $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon AB$, $a^{n}_{BA} = \omega^2 AB$.

2. Мгновенный центр ускорений.

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Покажем, что в каждый данный момент времени такая точка существует. Принимаем за полюс точку A, ускорение которой $\vec{a}_A$ нам известно. Находим угол μ, лежащий в пределах $-\frac{\pi}{2} \le \mu \le \frac{\pi}{2}$, и удовлетворяющий условию $tg\ \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$. Если $\varepsilon \rangle 0$, то $\mu \rangle 0$ и наоборот, т.е. угол μ откладывается по направлению ε. Отложим от точки A под углом μ к вектору $\vec{a}_A$ отрезок $AC_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (рис. 67). Полученная такими построениями точка C_a будет МЦУ.

Действительно, ускорение точки C_a равно сумме ускорений $\vec{a}_A$ полюса A и ускорения $\vec{a}_{C_aA}$ во вращательном движении вокруг полюса A: $\vec{a}_{C_aA} = \vec{a}^{\,\tau}_{C_aA} + \vec{a}^{\,n}_{C_aA}$.

$a^{\tau}_{C_aA} = \varepsilon AC_a$, $a^{n}_{C_aA} = \omega^2 AC_a$. Тогда $a_{C_aA} = AC_a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A$. С другой стороны, ускорение $\vec{a}_{C_aA}$ образует с направлением отрезка AC_a угол α, который удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a^{\tau}_{C_aA}}{a^{n}_{C_aA}} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\operatorname{tg}\mu$. Знак минус поставлен перед тангенсом угла μ, так как вращение $\vec{a}^{\,\tau}_{C_aA}$ относительно полюса A против хода часовой стрелки, а угол α откладывается по ходу часовой стрелке. Тогда $\alpha = -\mu$.

Следовательно, $\vec{a}_{C_aA} = -\vec{a}_A$ и тогда $\vec{a}_{C_a} = 0$.

Частные случаи определения МЦУ

1. $\omega = 0, \varepsilon = 0$. Тогда $AC_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty$, и, следовательно, МЦУ не существует. В этом случае тело движется поступательно, т.е. скорости и ускорения всех точек тела равны.

2. $\omega \neq 0, \varepsilon = 0$. Тогда $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 0$, $\mu = 0$. Значит, МЦУ лежит на пересечении линий действия ускорений точек тела (рис.68,*а*).

3. $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$. Тогда, $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty$, $\mu = 90^0$. Значит, МЦУ лежит на пересечении перпендикуляров к ускорениям точек тела (рис.68,*б*).

4. $\omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$. Тогда $\mu = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, $\mu = \operatorname{arctg}\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$. Значит, МЦУ лежит на пересечении лучей, проведенных к ускорениям точек тела под углом μ (рис.68,*в*).

Из рассмотренных частных случаев можно сделать вывод: *если принять точку C_a за полюс, то ускорение любой точки плоской фигуры определится ускорением во вращательном движении вокруг МЦУ:*

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{AC_a} + \vec{a}^{n}_{AC_a} \,. \tag{60}$$

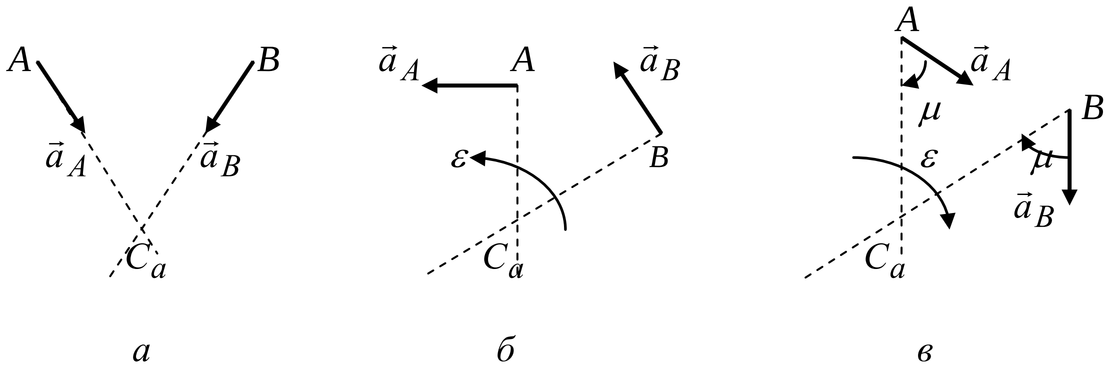


Рис. 68

Тема 13. Сложное движение точки

Сложным движением точки называется такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях. При таком движении положение точки определяют относительно подвижной и относительно неподвижной систем отсчета.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета называется ***относительным движением точки***. Параметры относительного движения условимся обозначать $s_r, \vec{V}_r, \vec{a}_r$.

Движение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка относительно неподвижной системы отсчета, называется ***переносным движением точки***. Параметры переносного движения условимся обозначать $s_e, \vec{V}_e, \vec{a}_e$.

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется ***абсолютным (сложным) движением точки***. Параметры абсолютного движения условимся обозначать $s_a, \vec{V}_a, \vec{a}_a$.

В качестве примера сложного движения, можно рассмотреть движение человека в движущемся транспорте (трамвай). В этом случае движение человека отнесено к подвижной системе координат – трамваю и к неподвижной системе координат – земле (дороге). Тогда исходя из данных выше определений, движение человека относительно трамвая – относительно, движение вместе с трамваем относительно земли – переносное, а движение человека относительно земли – абсолютное.

Теорема о сложении скоростей точек в сложном движении

Будем определять положение точки M радиусами – векторами относительно подвижной $Cx_1y_1z_1$ и неподвижной $Oxyz$ систем координат (рис. 69). Введем обозначения: $\vec{r}_1$ - радиус-вектор, определяющий положение точки M относительно подвижной системы координат $Cx_1y_1z_1$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$; $\vec{r}_C$ - радиус-вектор, определяющий положение начала подвижной системы координат (точки C) относительно неподвижной системы координат (точки O); $\vec{r}$ - радиус – вектор, определяющий положение точки M относительно неподвижной системы координат $Oxyz$; $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_C$, $\vec{r} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + \vec{r}_C$.

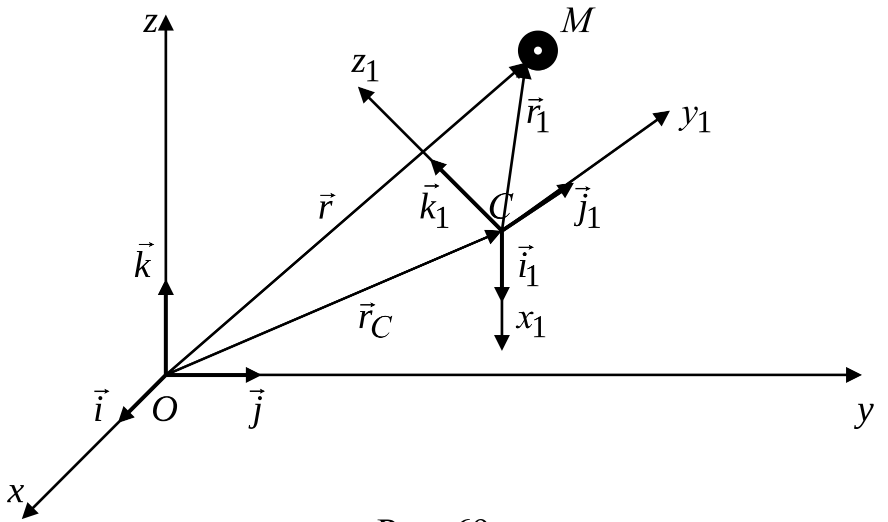


Рис. 69

Получим условия (ограничения), соответствующие относительному, переносному и абсолютному движениям.

1. При рассмотрении относительного движения будем считать, что точка M перемещается относительно подвижной системы координат $Cx_1y_1z_1$, а сама подвижная система координат $Cx_1y_1z_1$ относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ не перемещается.

Тогда координаты точки M будут меняться в относительном движении, а орт-вектора подвижной системы координат изменяться по направлению не будут:

$$x_1 = \text{var}, y_1 = \text{var}, z_1 = \text{var},\ \vec{i}_1 = \text{const},\ \vec{j}_1 = \text{const},\ \vec{k}_1 = \text{const}.$$

2. При рассмотрении переносного движения, будем считать, что координаты точки M по отношению к подвижной системе координат зафиксированы, и точка перемещается вместе с подвижной системой координат $Cx_1y_1z_1$ относительно неподвижной $Oxyz$:

$$x_1 = \text{const},\ y_1 = \text{const},\ z_1 = \text{const},\ \vec{i}_1 = \text{var}, \vec{j}_1 = \text{var}, \vec{k}_1 = \text{var}.$$

3. При абсолютном движении точка движется и относительно $Cx_1y_1z_1$ и вместе с системой координат $Cx_1y_1z_1$ относительно неподвижной $Oxyz$:

$$x_1 = \text{var}, y_1 = \text{var}, z_1 = \text{var}, \vec{i}_1 = \text{var}, \vec{j}_1 = \text{var}, \vec{k}_1 = \text{var}.$$

Тогда выражения для скоростей, с учетом (27), имеют вид

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \overset{1}{=} \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1,\ \vec{V}_e = \frac{d\vec{r}}{dt} \overset{2}{=} \frac{d\vec{r}_C}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt},$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} \overset{3}{=} \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Сравнивая эти зависимости, получаем выражение для абсолютной скорости:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \tag{61}$$

Получили теорему о сложении скоростей точки в сложном движении: ***абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной составляющих скорости.***

Теорема о сложении ускорений точек в сложном движении

Используя зависимость (31), получаем выражения для ускорений:

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \overset{1}{=} \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1,$$

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{V}_e}{dt} \overset{2}{=} \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2},$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} \overset{3}{=} \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + 2\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + 2\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + 2\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}.$$

Сравнивая эти зависимости, получаем выражение для абсолютного ускорения:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right).$$

Получили, что абсолютное ускорение точки не равно геометрической сумме относительной и переносной составляющих ускорений. Определим составляющую абсолютного ускорения, стоящую в скобках, для частных случаев.

1. Переносное движение точки поступательное $(\omega_e = 0)$. В этом случае оси подвижной системы координат $Cx_1y_1z_1$ перемещаются все время параллельно самим себе, тогда. $\vec{i}_1 = \text{const}$, $\vec{j}_1 = \text{const}$, $\vec{k}_1 = \text{const}$, $\frac{d\vec{i}_1}{dt} = 0$, $\frac{d\vec{j}_1}{dt} = 0$, $\frac{d\vec{k}_1}{dt} = 0$, тогда $\left(\frac{dx_C}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_C}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_C}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right) = 0$. Окончательно получаем

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e. \qquad (62)$$

Если переносное движение точки поступательное, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительной и переносной составляющей ускорения.

2. Переносное движение точки непоступательное. Значит, в этом случае подвижная система координат $Cx_1y_1z_1$ вращается вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью ω_e (рис. 70). Обозначим точку на конце вектора $\vec{i}_1$ через A. Тогда, используя векторный способ задания (15), получаем вектор скорости этой точки $\vec{V}_A = \frac{d\vec{i}_1}{dt}$.

С другой стороны, $\vec{V}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1$. Приравнивая правые части этих векторных равенств, получаем: $\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1$. Поступая аналогично, для остальных орт векторов, получаем: $\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$, $\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1$.

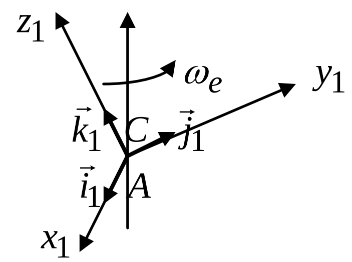


Рис. 70

$$2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right) = 2\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1\right) = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right),$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right). \qquad (63)$$

В общем случае абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительной и переносной составляющей ускорения плюс удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор линейной скорости относительного движения.

Ускорение Кориолиса

Удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор линейной скорости относительного движения называется ***ускорением Кориолиса*** и обозначается

$$\vec{a}_{cor} = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right). \qquad (64)$$

Ускорение Кориолиса характеризует изменение относительной скорости в переносном движении и изменение переносной скорости в относительном движении.

Направляется $\vec{a}_{cor}$ по правилу векторного произведения. Вектор ускорения Кориолиса всегда направлен перпендикулярно плоскости, которую образуют вектора $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$, таким образом, чтобы, смотря с конца вектора $\vec{a}_{cor}$, видеть поворот $\vec{\omega}_e$ к $\vec{V}_r$, через наименьший угол, против хода часовой стрелки.

Модуль ускорения Кориолиса равен:

$$a_{cor} = 2\omega_e V_r \sin\left(\omega_e, V_r\right). \qquad (65)$$

4. ОПИСАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1

по теме 2 «Система сходящихся сил»

Дано. Два одинаковых цилиндра I весом $\vec{P}$ подвешены на нитях к точке O (рис. 71,*а*). Сверху на них положили цилиндр II весом $\vec{Q}$, так что цилиндры I не касаются друг друга. Определить зависимость между углом α, образованным нитью и вертикалью, и углом β, образованным линией соединяющей центры цилиндров I и II, при которой система находится в равновесии.

Решение. Система, состоящая из нескольких тел, находится в равновесии. Значит, каждое из тел, входящее в систему также находится в равновесии. Выделяем в рассмотрение цилиндр II. Применяем к нему принцип освобождаемости от связей. Связями для него являются два нижних цилиндра. Так как контакт происходит через точку, то нормальные реакции будут пересекать центры цилиндров I и II (рис. 71,*б*). Получаем систему сходящихся сил в точке C. Данную систему можно решать графическим способом, т.к. сил всего три, т. е. силовой многоугольник получается в виде треугольника, кроме того, в силу симметрии этот треугольник будет равнобедренным (рис. 71,*в*).

Из треугольника $CE = DE$. т.е. $\vec{N}_1 = \vec{N}_2 = \vec{N}$. $CD = 2KC$, $Q = 2N\cos\beta$. Теперь рассматриваем цилиндр I. Активной силой для этого цилиндра является его вес $\vec{P}$, а связями для него является цилиндр II и нить. Реакция связи со стороны цилиндра II будет по модулю равна N, но направлена в обратную сторону (аксиома 4). Реакция нити $\vec{T}$ будет направлена вдоль самой нити.

В результате получаем, что цилиндр I находится в равновесии под

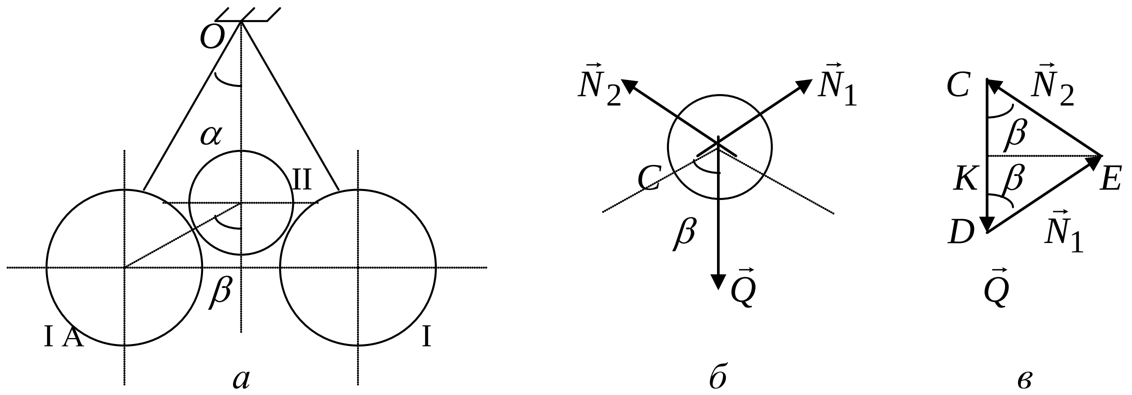


Рис. 71

действием трех сил: $\vec{P}, \vec{N}$ и $\vec{T}$. Причем силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ пересекаются в точке A, но тогда, по правилу трех сил, сила $\vec{T}$ также должна проходить через эту точку (рис. 72).

Решение системы, показанной на рис. 72, лучше вести аналитически, так

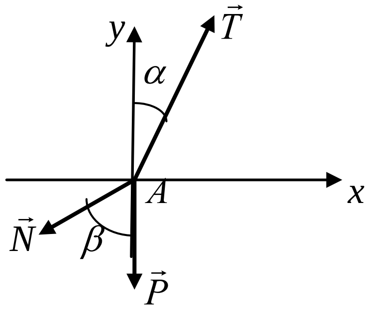


Рис. 72

как силовой треугольник получается произвольной формы.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = T\sin\alpha - N\sin\beta = 0, \quad T\sin\alpha = N\sin\beta,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = T\cos\alpha - N\cos\beta - P = 0, \quad T\cos\alpha = N\cos\beta + P,$$

$$\operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{N\cos\beta + P}{N\sin\beta} = \operatorname{ctg}\,\beta + \frac{2P\cos\beta}{Q\sin\beta} = \left(1 + \frac{2P}{Q}\right)\operatorname{ctg}\,\beta.$$

При выполнении последнего равенства, система будет находиться в состоянии равновесия.

Ответ: $\operatorname{ctg}\,\alpha = \left(1 + \frac{2P}{Q}\right)\operatorname{ctg}\,\beta$.

Список рекомендуемой литературы

1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Ф.Г. Будник. М., «Высшая школа», 1987.
2. Колесников, К.С. Сборник задач по теоретической механике, К.С. Колесников. М., «Наука», 1989.
3. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Н.А. Бражниченко. М., «Высшая школа», 1974.

Практическое занятие 2
по теме 6 «Плоская система сил»

Дано. Размеры: $AB = 6\,[\text{м}]$, $AK = 3\,[\text{м}]$, $BE = 9\,[\text{м}]$, $EC = 6\,[\text{м}]$, $\alpha = 30^0$. Определить реакции опор балки изображенной на рисунке 73,а и находящейся под действием сосредоточенной силы $F = 5\,[\text{Н}]$, пары сил с моментом $m = 4\,[\text{Нм}]$ и распределенной нагрузки интенсивности $q = 2\,\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$, изменяющейся по закону треугольника и трапеции.

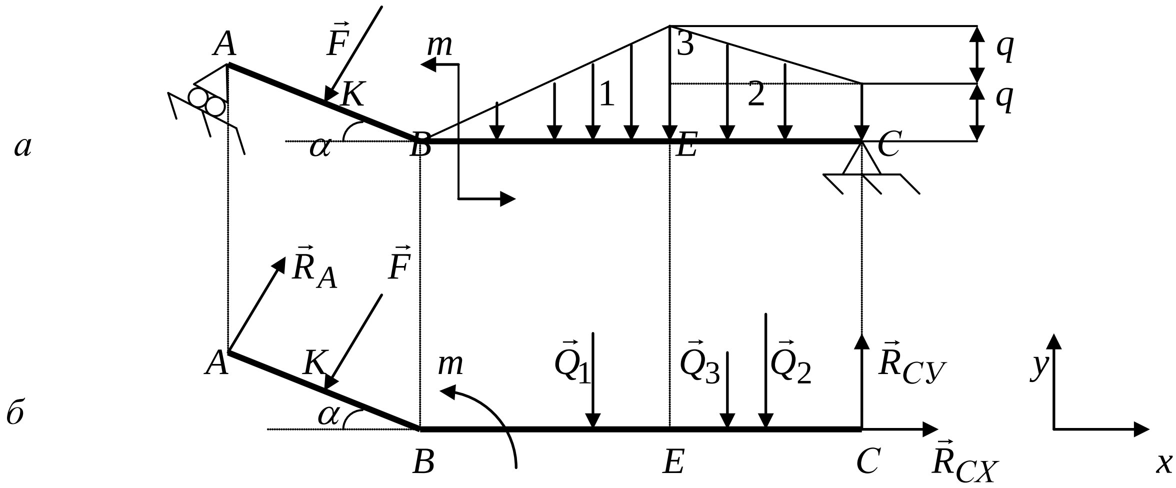


Рис. 73

Решение. Переходим от общего вида на рис. 73,*а* к расчетной схеме на рис. 73,*б*. Для этого выделяем в рассмотрение балку AC и показываем все внешние силы, действующие на нее, и реакции со стороны отброшенных связей.

Распределенную нагрузку разбиваем на три простейшие фигуры: 1 и 3 – прямоугольные треугольники, 2 – прямоугольник. В результате получаем три сосредоточенные силы от каждой из этих простейших фигур:

$Q_1 = \frac{1}{2} BE\, 2q = 18\,[\text{Н}]$, $Q_2 = EC\, q = 12\,[\text{Н}]$, $Q_3 = \frac{1}{2} EC\, q = 6\,[\text{Н}]$. Затем определяем точки приложения этих сил.

Известно, что линии действия сил $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ проходят через центры тяжести соответствующих фигур, таким образом, из геометрии сила $\vec{Q}_1$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}BE = 6\,[\text{м}]$ от точки B, сила $\vec{Q}_2$ проходит на расстоянии $\frac{1}{2}EC = 3\,[\text{м}]$ от точки C и сила $\vec{Q}_3$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}EC = 4\,[\text{м}]$ от точки C. Теперь расставим реакции со стороны отброшенных связей. В точке A показана шарнирно подвижная опора, которая препятствует перемещению балки по направлению перпендикулярному к AB. Следовательно, реакция $\vec{R}_A$ направляется перпендикулярно к AB. В точке C стоит шарнирно неподвижная опора. Для такого типа опоры известно только то, что реакция будет проходить через точку C, но как она будет направлена неизвестно. В этом случае приходится показывать эту реакцию в виде двух взаимоперпендикулярных составляющих $\vec{R}_{CX}$ и $\vec{R}_{CY}$. В результате на рис. 73,*б* получаем расчетную схему, для которой составляем условия равновесия по одной из форм рассмотренных ранее:

$$\sum_{k=1}^{3} F_{kx} = R_{CX} - F\sin\alpha + R_A \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{6} F_{ky} = R_{CY} - Q_2 - Q_3 - Q_1 - (F - R_A)\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{6} m_C(F_k) = Q_2 \frac{1}{2}EC + Q_3 \frac{2}{3}EC + Q_1\left(EC + \frac{1}{3}BE\right) + m + F(BC\cos\alpha + KB) - R_A(BC\cos\alpha + AB) = 0,$$

$$R_A = \frac{36 + 24 + 162 + 4 + 80}{22} = 13.91\,[\text{Н}], \quad R_{CY} = 36 - 7.71 = 28.3\,[\text{Н}],$$

$$R_{CX} = -4.45\,[\text{Н}].$$

Ответ: $R_A = 13.91\,[\text{Н}]$, $R_{CX} = -4.45\,[\text{Н}]$, $R_{CY} = 28.3\,[\text{Н}]$. Реакция R_{CX} получена со знаком минус. Это говорит о том, что она направлена в противоположную сторону.

Список рекомендуемой литературы

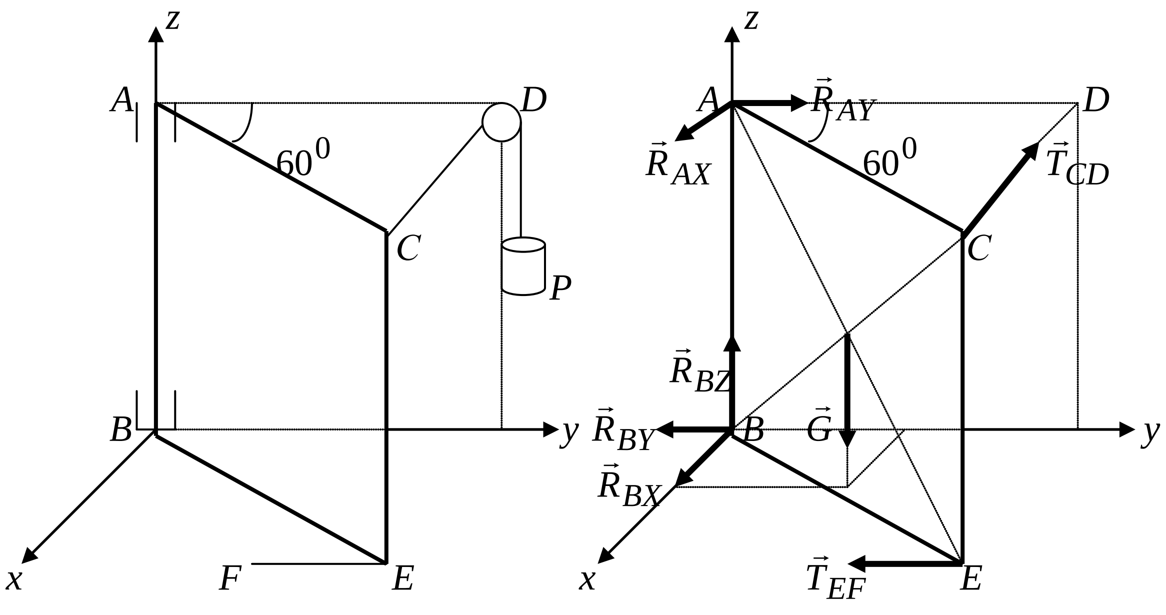
1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Ф.Г. Будник. М., «Высшая школа», 1987.
2. Колесников, К.С. Сборник задач по теоретической механике, К.С. Колесников. М., «Наука», 1989.
3. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Н.А. Бражниченко. М., «Высшая школа», 1974.

Практическое занятие 3

по теме 7 «Пространственная система сил»

Дано. Прямоугольная дверь $ABCE$, имеющая вертикальную ось вращения AB, открыта на угол $CAD = 60^0$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна, CD, перекинута через блок D и натягивается грузом $P = 320\,[\text{Н}]$, а другая, EF, привязана к точке F пола. Вес двери $G = 640\,[\text{Н}]$, ее размеры – ширина $AC = AD = 1.8\,[\text{м}]$, высота $AB = 2.4\,[\text{м}]$. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение $\vec{T}_{EF}$ веревки EF, а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B.

Решение. Делаем переход от общего вида (рис. 74,*а*) к расчетной схеме



а *б*

Рис. 74

(рис.74,*б*). Выделяем в рассмотрение дверь $ABCE$, показывая активные силы и реакции со стороны отброшенных связей. В точке B стоит опора подпятник, которая препятствует любому отрыву двери от оси вращения, т.е. составляющие реакции будут направлены вдоль осей x, y, z. В точке A реакции будут направлены только вдоль осей x и y, так как при желании дверь можно снимать с петель. Кроме того, для пространственных схем выбор осей координат имеет важное значение при составлении условий равновесия. Исходя из свойств момента силы относительно оси, сила не будет создавать момент относительно оси, если она пересекает ось, либо ей параллельна. Таким образом, оси лучше проводить так, чтобы большее количество сил пересекало эти оси, либо были им параллельны.

Учитываем, что $T_{CD} = P = 320\,[\text{Н}]$, $AC = AD$ и угол $CAD = 60^0$, значит треугольник ACD - равносторонний. Тогда условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = R_{AX} + R_{BX} - T_{CD}\sin 60^0 = 0,\quad R_{BX} = T_{CD}\sin 60^0 - R_{AX} = 208\,[\text{Н}],$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_{AY} - R_{BY} - T_{EF} + T_{CD}\cos 60^0 = 0,$$

$$R_{BY} = -T_{EF} + T_{CD}\cos 60^0 + R_{Ay} = -440\,[\text{Н}],$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = R_{BZ} - G = 0,\ R_{BZ} = G = 640\,[\text{Н}].$$

Теперь рассмотрим уравнения моментов. Относительно оси x, моменты не будут давать силы $\vec{R}_{AX}$, $\vec{R}_{BX}$, $\vec{R}_{BY}$, $\vec{R}_{BZ}$, $\vec{T}_{EF}$, так как они по отношению к ней либо параллельны, либо пересекают ось x.

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = -R_{AY}AB - T_{CD}\cos 60^0 AB - G\frac{BE}{2}\cos 60^0 = 0,\quad R_{AY} = -280\,[\text{Н}].$$

Относительно оси y, моменты не будут давать силы $\vec{R}_{AY}$, $\vec{T}_{EF}$, $\vec{R}_{BX}$, $\vec{R}_{BY}$, $\vec{R}_{BZ}$, так как они по отношению к ней либо параллельны, либо пересекают ось y.

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) = R_{AX}AB - T_{CD}\sin 60^0 AB + G\frac{BE}{2}\sin 60^0 = 0,\quad R_{AX} = 69\,[\text{Н}].$$

Относительно оси z, моменты не будут давать силы $\vec{G}, \vec{R}_{AX}, \vec{R}_{AY}$, $\vec{R}_{BX}$, $\vec{R}_{BY}$, $\vec{R}_{BZ}$, так как они по отношению к ней либо параллельны, либо пересекают.

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = -T_{EF}BE\sin 60^0 + T_{CD}AC\sin 60^0 = 0,\ T_{EF} = T_{CD} = 320\,[\text{Н}].$$

Ответ: $R_{AX} = 69\,[\text{Н}]$, $R_{AY} = -280\,[\text{Н}]$, $R_{BX} = 208\,[\text{Н}]$, $R_{BY} = -440\,[\text{Н}]$, $R_{BZ} = 640\,[\text{Н}]$, $T_{EF} = 320\,[\text{Н}]$. Реакции $\vec{R}_{AY}$, $\vec{R}_{BY}$ получены со знаком «-», который указывает на то, что эти реакции направлены в обратную сторону.

Список рекомендуемой литературы

1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Ф.Г. Будник. М., «Высшая школа», 1987.
2. Колесников, К.С. Сборник задач по теоретической механике, К.С. Колесников. М., «Наука», 1989.
3. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Н.А. Бражниченко. М., «Высшая школа», 1974.

Практическое занятие 4
по теме 9 «Кинематика точки»

Дано. Точка, имея начальную скорость $54\left[\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right]$, прошла $600\,[\text{м}]$ в первые $30\,[\text{с}]$. Считая движение точки равнопеременным, определить скорость и ускорение точки в конце $30-$й секунды, если рассматриваемое движение точки происходит по закруглению радиуса $R=1000\,[\text{м}]$.

Решение. Поскольку траектория движения точки криволинейная и скорость величина переменная, то общее ускорение будет складываться из нормального и касательного. Кроме того, сказано, что движение равнопеременное, т.е. ускорение, характеризующее изменение скорости с течением времени, есть величина постоянная $a_\tau=\text{const}$. Такой частный случай движения рассматривался, поэтому воспользуемся готовыми зависимостями для определения закона изменения скорости и перемещения точки (22): $V=V_0\pm a_\tau t$, $s=s_0+V_0t\pm\frac{a_\tau t^2}{2}$. По условиям задачи, в нашем случае $s_0=0$, $V_0=54\left[\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right]=15\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, $s=600\,[\text{м}]$, $t=30\,[\text{с}]$, $V=V_A$, получаем и решаем систему уравнений, при этом полагаем, что движение ускоренное (если мы не правы, то a_τ получим со знаком минус): $600=15\cdot 30+\frac{a_\tau\cdot 900}{2}$, $a_\tau=\frac{1}{3}\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]=\text{const}$, $V_A=15+a_\tau\cdot 30=25\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$. Нормальное ускорение в положении A, определим, воспользовавшись зависимостью (52): $a_n^A=\frac{{V_A}^2}{\rho}=0.625\left[\frac{м}{c^2}\right]$, где $\rho=R=1000\,[\text{м}]$. Полное ускорение в положении A определим по зависимости (53), а вектора показаны на рис. 75: $a_A=\sqrt{a_\tau^2+\left(a_n^A\right)^2}=0.708\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$.

Ответ: $V_A=25\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, $a_A=0.708\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$.

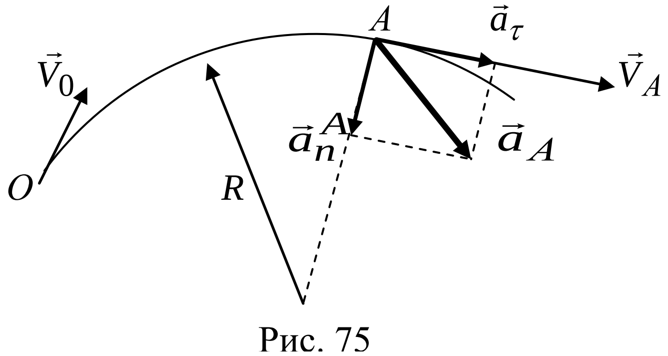


Рис. 75

Список рекомендуемой литературы

1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Ф.Г. Будник. М., «Высшая школа», 1987.
2. Колесников, К.С. Сборник задач по теоретической механике, К.С. Колесников. М., «Наука», 1989.
3. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Н.А. Бражниченко. М., «Высшая школа», 1974.

Практическое занятие 5
по теме 11 «Вращательное движение твёрдого тела»

Дано. Колесо радиуса $R = 2\,[\text{м}]$ вращается равноускоренно из состояния покоя. Через $t_1 = 10\,[\text{с}]$ точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью $V_1 = 100\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента $t_2 = 15\,[\text{с}]$.

Решение. Из условия задачи получаем частный случай движения – равноускоренное, т.е. $\varepsilon = \text{const}$, $a_\tau = \text{const}$. Следовательно, для решения задачи можно воспользоваться зависимостями (49), (50). Из (50) определим угловую скорость вращения тела в момент $t_1 = 10\,[\text{с}]$: $\omega_1 = \frac{V_1}{R} = 50\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$. Подставляем начальные и конечные условия в (49): $t_1 = 10\,[\text{с}]$, $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 50\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$, $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1$, $50 = 10\varepsilon$, $\varepsilon = 5\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right] = \text{const}$. При $t_2 = 15\,[\text{с}]$, $\omega_0 = 0$, $\omega = \omega_2$, $\omega_2 = \omega_0 + \varepsilon t_2$, $\omega_2 = 15 \cdot 5 = 75\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$. Тогда $V_2 = \omega_2 R = 150\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, $a_\tau = \varepsilon R = 10\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right] = \text{const}$,
$a_2^n = \omega_2{}^2 R = 11250\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$. Начальные и итоговые вектора показаны на рисунках 76,*а* и 76,*б* соответственно.

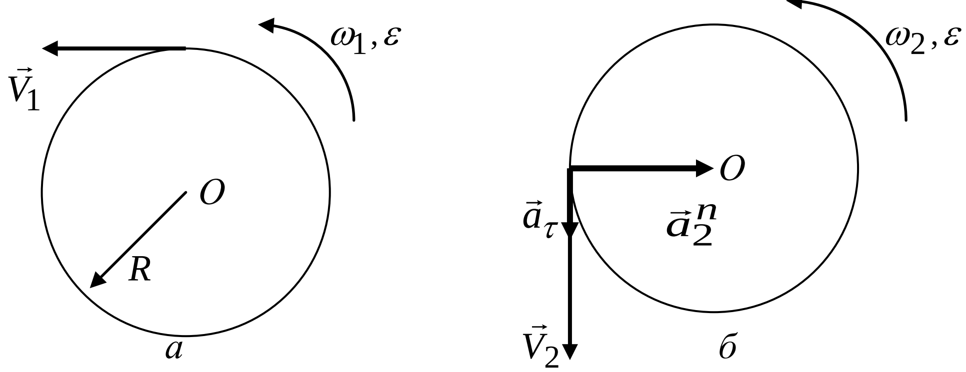


Рис. 76

Ответ: $V_2 = 150\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, $a_\tau = 10\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right] = \text{const}$, $a_2^n = 11250\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$.

Список рекомендуемой литературы

1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Ф.Г. Будник. М., «Высшая школа», 1987.
2. Колесников, К.С. Сборник задач по теоретической механике, К.С. Колесников. М., «Наука», 1989.
3. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Н.А. Бражниченко. М., «Высшая школа», 1974.

Практическое занятие 6
по теме 12 «Плоское движение твёрдого тела»

Дано. Кривошип OA, кривошипно – ползунного механизма, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 10\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right] = \text{const}$ (рис.77,*а*). Определить ускорение ползуна B, если в данном положении кривошип образует с направляющей ползуна угол $\varphi = 60^0$. Размеры даны: $OA = 0.4\,[\text{м}]$, $AB = 1\,[\text{м}]$.

Решение. При определении ускорения воспользуемся либо методом полюса (59), либо МЦУ (60). Независимо от того, каким методом мы будем пользоваться при решении задачи, нам потребуются параметры вращательного движения (угловая скорость, угловое ускорение). Следовательно, задачу на определение ускорений придется решать начиная с определения скоростей, чтобы определить угловые скорости звеньев. Сначала определяем все углы в треугольнике OAB. По теореме синусов: $\frac{OA}{\sin\phi} = \frac{AB}{\sin\varphi}$, $\sin\phi = \frac{OA}{AB}\sin\varphi = 0.346$, $\phi = \arcsin 0.346 = 20^0$. Тогда угол $\angle OAB = 180^0 - \phi - \varphi = 100^0$ (рис. 77,*б*). Рассматривая точку A, как принадлежащую звену OA, отмечаем, что для звена OA точка O является МЦС (точка O - опора, тогда $\vec{V}_O = 0$). Тогда с учетом (57) $V_A = \omega_{OA} OA = 4\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, и направлен вектор $\vec{V}_A$ перпендикулярно звену OA.

Ползун B движется по направляющей, значит, его скорость $\vec{V}_B$ будет направлена горизонтально влево (с учетом направления вектора $\vec{V}_A$). Тогда, проводя перпендикуляры к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, строим МЦС для звена AB (рис. 77,*б*).

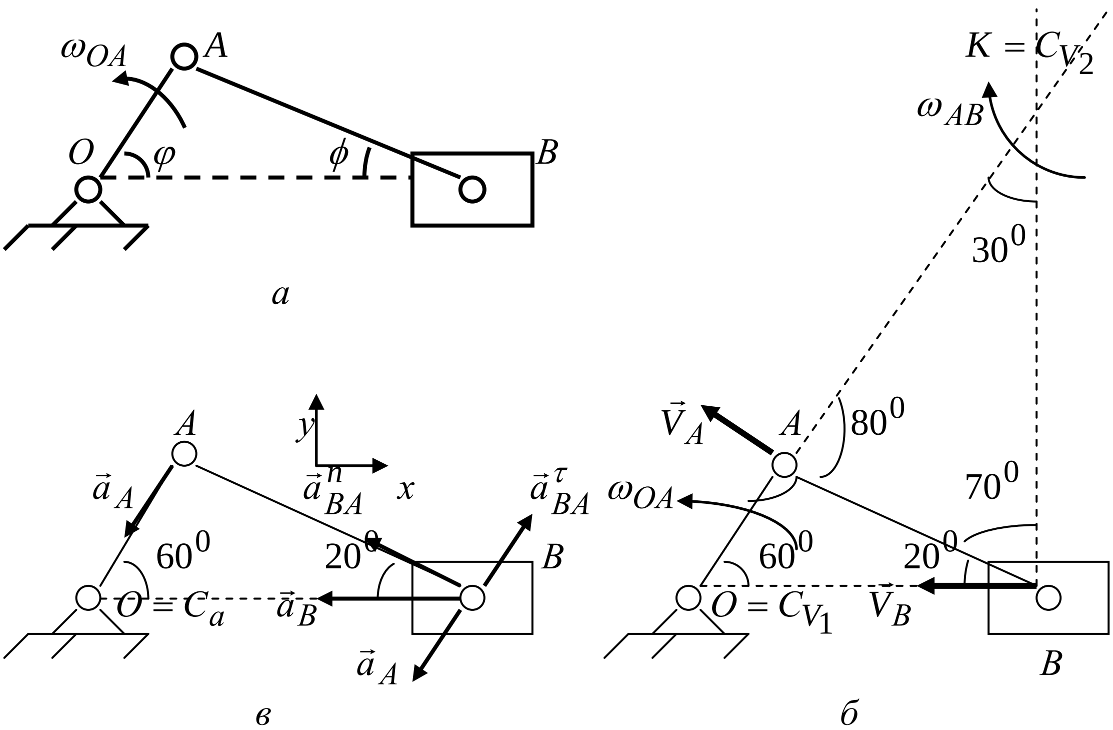


Рис. 77

Из схемы видно, что угловая скорость ω_{AB} звена AB будет вращать звено по ходу часовой стрелки, так как направление вращения угловых и линейных параметров должны совпадать. Из зависимости (57): $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AK} = \dfrac{V_B}{BK}$. Размеры AK и BK определим из треугольника ABK по теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin 30} = \dfrac{AK}{\sin 70} = \dfrac{BK}{\sin 80}$, $AK = 1.88\,[\text{м}]$, $BK = 1.97\,[\text{м}]$. Тогда $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AK} = 2.13\left[\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$, $V_B = \dfrac{BK}{AK}V_A = 4.2\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]$.

Начинаем определять ускорения. При определении ускорений по методам (59) или (60) нам должно быть известно полное ускорение точки звена AB. Определим ускорение точки A, которая принадлежит как звену AB, так и звену OA. Рассматривая точку A как принадлежащую звену OA, отмечаем, что для звена OA точка O является МЦУ (точка O - опора, тогда $\vec{a}_O = 0$). Тогда с учетом (60): $\vec{a}_A = \vec{a}^\tau_{AO} + \vec{a}^n_{AO}$, где $a^\tau_{AO} = \varepsilon_{OA} OA = 0$, так как $\varepsilon_{OA} = \dfrac{d\omega_{OA}}{dt} = 0$, $a^n_{AO} = \omega^2_{OA} OA = 40\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$, $\vec{a}_A = \vec{a}^n_{AO}$, $a_A = a^n_{AO} = 40\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$ и направлен этот вектор из точки A в точку O (рис. 77,*в*).

Поскольку угловое ускорение звена AB нам неизвестно, то для определения $\vec{a}_в$ воспользуемся зависимостью (59).

Принимаем точку A за полюс и в соответствии с (59) получаем $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} AB = ?$, $a^{n}_{BA} = \omega^2_{AB} AB = 4.54 \left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$.

Расставляем эти вектора на схеме (рис. 77,*в*). Ускорение полюса учитывает поступательную часть движения, т.е. $\vec{a}_A$ переносим в точку B параллельно самому себе. При вращении точки B относительно точки A нормальная составляющая $\vec{a}^{n}_{BA}$ будет направлена к центру, вдоль звена AB из точки B к точке A, а касательная составляющая $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярна $\vec{a}^{n}_{BA}$, т.е. перпендикулярно AB. Направляем $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ предположительно, так как мы не знаем направление вращения ε_{AB}. Ускорение $\vec{a}_B$ может быть направлено либо влево, либо вправо (ползун B перемещается только по горизонтали). Направляем влево. Если при расчете $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ или $\vec{a}_B$ получаем со знаком минус, значит, направление этого вектора было выбрано неверно. Затем вводим плоскую систему координат и проектируем векторное равенство (59) на оси:

$$y: \quad 0 = -a_A \sin 60 + a^{\tau}_{BA} \sin 70 + a^{n}_{BA} \sin 20, \; a^{\tau}_{BA} = 35.2 \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right],$$

$$x: \quad -a_B = -a_A \cos 60 + a^{\tau}_{BA} \cos 70 - a^{n}_{BA} \cos 20, \; a_B = 12.3 \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right].$$

Знаки у векторов $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ и $\vec{a}_B$ получены положительные, следовательно, на рис. 77,*в* показано их истинное направление.

Ответ: $V_B = 4.2 \left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]$, $a_B = 12.3 \left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$.

Список рекомендуемой литературы

1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Ф.Г. Будник. М., «Высшая школа», 1987.
2. Колесников, К.С. Сборник задач по теоретической механике, К.С. Колесников. М., «Наука», 1989.
3. Бражниченко, Н.А. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов, Н.А. Бражниченко. М., «Высшая школа», 1974.

5. ЗАДАНИЕ И ВАРИАНТЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ. УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

5.1. Контрольные работы по разделу «Статика»

Исходные данные определяются по таблице № 1 в соответствии с указаниями преподавателя.

Таблица № 1. Исходные данные

Цифра шифра		А, Б	В, Г, Д	Е, Ж, З	И, К	Л, М	Н, О	П, Р	С, Т	У,Ф, Х,Ц,Ч	Ш,Щ,Ъ, Ы,Ь,Э,Ю,Я
1-я	$\|AD\|$, м	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
	$\|DC\|$, м	1,0	0,8	0,6	1,0	0,8	0,6	0,8	0,6	1,0	0,8
	$\|CB\|$, м	1,4	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,8	1,6	2,0	2,2
2-я	α, град	45	30	60	120	135	150	210	225	240	300
3-я	β, град	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
4-я	f	0,10	0,15	0,20	0,25	0,20	0,15	0,10	0,20	0,15	0,20
	F, Кн	4,0	4,1	5,2	4,3	4,4	5,5	4,6	5,7	4,8	4,9
	m_1, Кн · м	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
	m_2, Кн · м	2,0	1,0	1,5	3,0	2,0	1,0	1,5	3,0	2,0	1,0
	$q(x)$, Кн/м	$2x^2$	x^3	$3x^2$	$2x^{1/2}$	$2x^{1/3}$	$3x^{1/3}$	$2x^2$	$3x^3$	$2x^{1/2}$	$3x^{1/3}$
5-я	№ опоры в точке *A* (рис. 78,*г*)*	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	№ опоры в точке *A* (рис. 78,*д*)**	3	1	2	3	4	3	1	2	3	4

Здесь f – коэффициент трения скольжения нити;

F – величина силы, приложенной в точке D;

$\overline{G}$ – сила тяжести груза и плиты (принять $G = F$);

m_1 – величина момента пары сил;

m_2 – величина векторного момента пары $\overline{m_2}$;

$q(x)$ – интенсивность распределенной нагрузки.

Связи (рис. 78, *г*):

1 – цилиндрическая шарнирно-подвижная опора;
2 – цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора;
3 – гладкая поверхность;
4 – жесткая заделка;
5 – невесомый стержень.

Связи (рис. 78, *д*):

1 – подшипник;
2 – опорно-упорный подшипник;
3 – шаровой шарнир;
4 – жесткая заделка;
5 – невесомый стержень.

---

*К заданию № 1 и № 2.

**К заданию № 3.

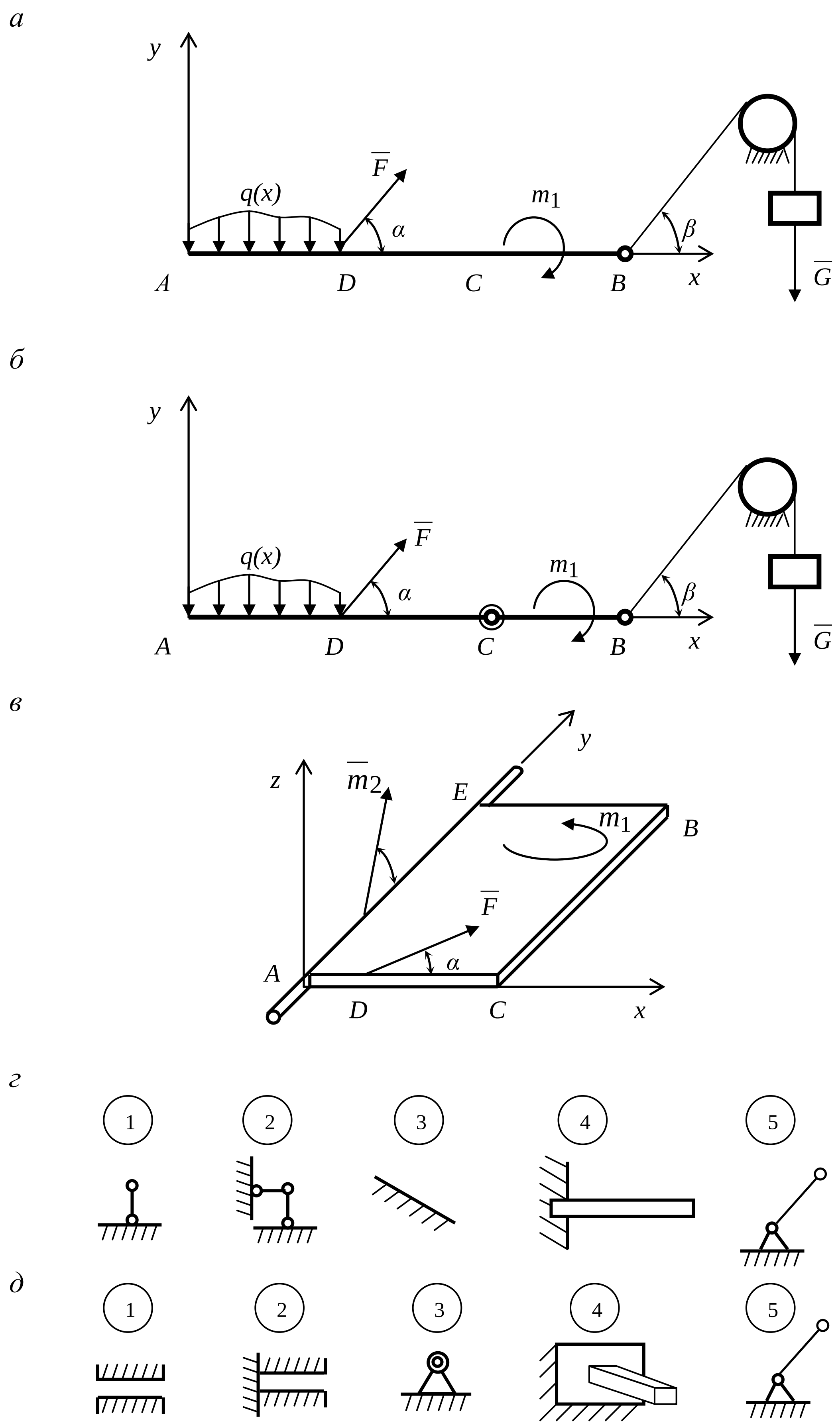


Рис. 78. Схемы к исходным данным по статике

5.2. Указания к выполнению расчетно-графических работ по разделу «Статика»

5.2.1. Задание № 1. Определить реакции опор твердого тела при действии плоской системы произвольно распложенных сил.

Указания к выполнению:

1. Закрепляем твердое тело с помощью опор.

Указание. *Твердое тело (рис. 78, а) закрепить в точке А с помощью опоры (рис. 78, г), выбранной в соответствии с заданным вариантом. При необходимости поставить опоры (рис. 78, г) в других точках. Тело должно быть полностью закреплено. Показать закрепленное тело с нагрузкой на рисунке.*

2. Составляем расчетную схему.

Указание. *Показать конструкцию в масштабе, заданные углы не искажать. Использовать принцип освобождаемости от связей. Показать заданные силы и реакции связей, учитывая, что силы, распределенная нагрузка и пара сил действуют в вертикальной плоскости. Распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой. Точку приложения равнодействующей распределенной нагрузки определить, используя теорему Вариньона.*

3. Составляем уравнения равновесия.

Указание. *Выбрать условия равновесия и по ним составить уравнения равновесия. Проверить, является ли задача статически определимой.*

4. Определяем реакции опор.

Указание. *Из решения системы уравнений равновесия определить выражения для реакций опор и провести вычисления.*

5. Проводим проверку результатов расчета.

Указание. *Проверить выполнение условий равновесия.*

5.2.2. Задание № 2. Определить реакции опор составной конструкции при действии плоской системы произвольно распложенных сил (рис. 78, *б*).

Указания к выполнению:

1. Закрепляем конструкцию с помощью опор.

Указание. *Система тел (рис. 78, б) соединена в точке С цилиндрическим шарниром. Конструкцию закрепить в точке А с помощью опоры (рис. 78, г), выбранной в соответствии с заданным вариантом. При необходимости закрепить конструкцию в других точках опорами (рис. 78, г). Конструкция должна быть полностью закреплена. Показать закрепленную конструкцию с нагрузкой на рисунке.*

2. Составляем расчетную схему.

Указание. *Составить расчетную схему. Показать конструкцию в масштабе, заданные углы не искажать. Использовать принцип освобождаемости от связей. Показать заданные силы и реакции связей, учитывая, что, силы, распределенная нагрузка и пара сил действуют в вертикальной плоскости. Распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой. Точку приложения равнодействующей распределенной нагрузки определить с помощью теоремы Вариньона.*

3. Составляем уравнения равновесия.

Указание. *Выбрать условия равновесия и по ним составить уравнения равновесия. Проверить, является ли задача статически определимой.*

4. Определяем реакции опор.

Указание. *Из решения системы уравнений равновесия определить выражения для реакций опор и провести вычисления.*

5. Проводим проверку результатов расчета.

Указание. *Проверяем выполнение условий равновесия.*

5.2.3. Задание № 3. Определить реакции опор твердого тела при действии пространственной системы произвольно распложенных сил (рис. 78, *в*).

Указания по выполнению

1. Закрепляем твердое тело с помощью опор.

Указание. *Твердое тело (рис. 78, в) закрепить в точке А с помощью опоры (рис. 78, д), выбранной в соответствии с заданным вариантом. При необходимости закрепить тело опорами (рис. 78, д) в других точках. Тело должно быть полностью закреплено. Показать закрепленное тело с нагрузкой на рисунке.*

2. Составляем расчетную схему.

Указание. *Использовать принцип освобождаемости от связей. Показать заданные силы и реакции связей.*

3. Составляем уравнения равновесия.

Указание. *Сила $\overline{F}$ действует в плоскости Axz, пара сил с моментом m_1 действует в плоскости Axy, векторный момент пары $\overline{m}_2$ расположен в плоскости Ayz. Выбрать условия равновесия и по ним составить уравнения равновесия. Проверить, является ли задача статически определимой.*

4. Определяем реакции опор.

Указание. *Из решения системы уравнений равновесия определить выражения для реакций опор и провести вычисления.*

5. Проводим проверку результатов расчета.

Указание. *Проверяем выполнение условий равновесия.*

6. Определяем, к какому частному случаю приведения системы сил относится система заданных сил.

Указание. *Находим главный вектор и главный момент заданных сил. Центр приведения - точка А. Находим статические инварианты.*

5.3. Контрольные работы по разделу «Кинематика»

Исходные данные определяются по табл. № 2 в соответствии с указаниями преподавателя.

Таблица № 2. Исходные данные

Цифра шифра		А, Б	В, Г, Д	Е. Ж, З	И, К	Л, М	Н, О	П, Р	С, Т	У,Ф, Х,Ц, Ч	Ш,Щ,Ъ, Ы,Ь,Э, Ю,Я
1-я	Схема (рис. 2)	5	4	2	3	6	1	8	7	6	5
2-я	b, м	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
3-я	$\|AM\|/\|AB\|$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
4-я	ω, рад/с	0,4	0,6	0,8	0,5	0,7	0,9	0,6	0,4	0,5	0,7
5-я	t_1, с	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45

Уравнения движения точки *A* (рис. 79)

Для схемы 1 $y(t) = b\sin(\omega t)$.

Для схемы 2 $x(t) = b\sin(\omega t)$.

Для схем 3, 4 $x(t) = b(\omega t - \sin(\omega t))$,
$y(t) = b(1 - \cos(\omega t))$.

Для схем 5, 6, 7 и 8 $x(t) = b\cos(\omega t)$,
$y(t) = b\sin(\omega t)$.

Размеры механизма

Для схем 1, 2 $|AB| = b$.

Для схем 3, 4 $|O_1A| = b$, $|AB| = 5b$.

Для схем 5, 6 $|OA| = b$, $|AB| = 5b$.

Для схем 7, 8 $|OA| = b$, $|AB| = 5b$, $|O_1B| = 2b$.

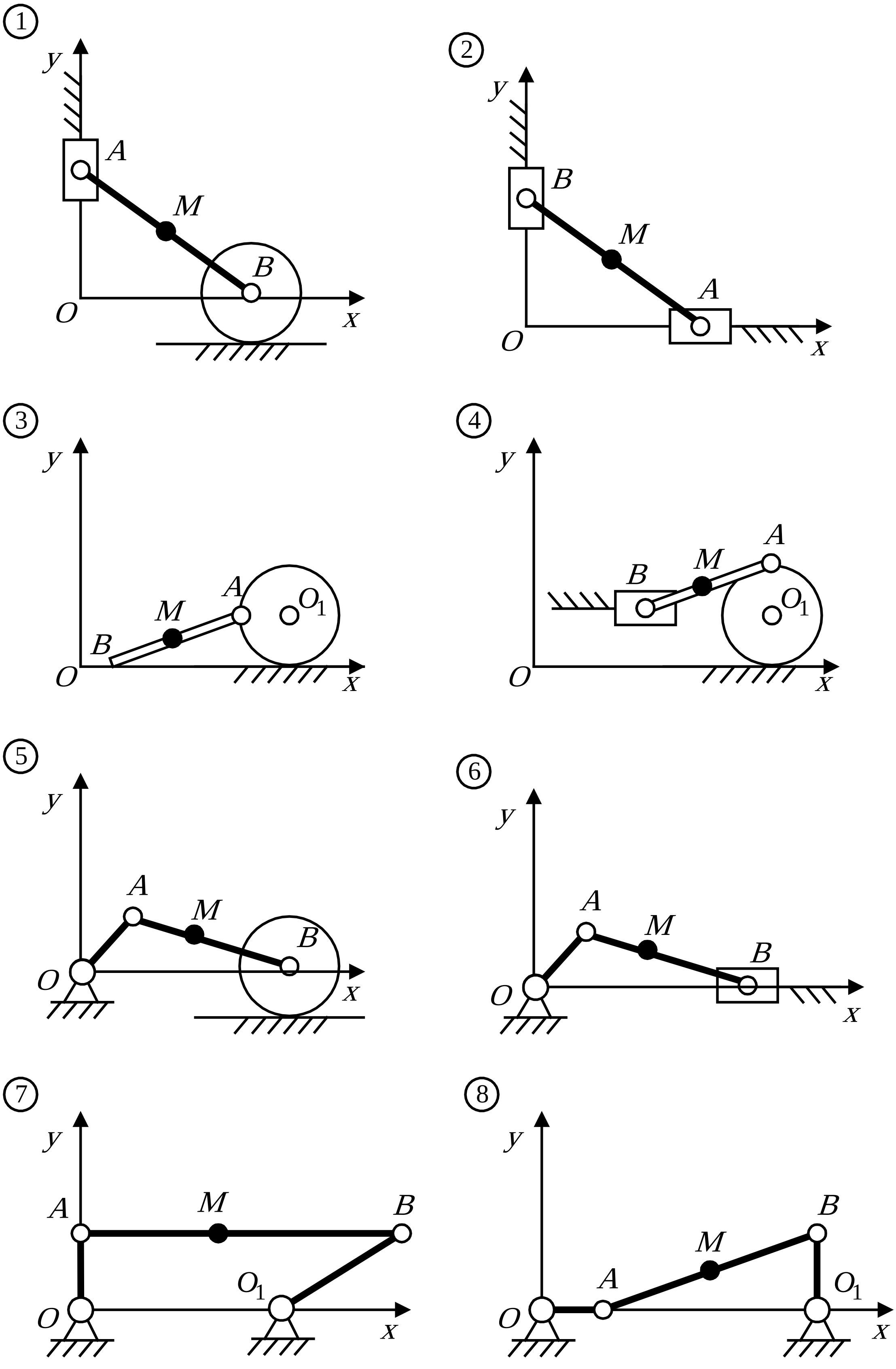


Рис. 79. Схемы к исходным данным по кинематике

5.4. Указания к выполнению контрольных работ по разделу «Кинематика»

5.4.1. Задание № 4. По заданному закону движения определить скорость и ускорение точки.

Указания к выполнению:

1. Записываем уравнения движения точки.

Указание. *В соответствии с заданным вариантом записать декартовы координаты точки А как функции времени (рис. 79).*

2. Находим скорость точки.

Указание. *Найти проекции скорости точки на оси неподвижной декартовой системы координат. Найти модуль скорости.*

3. Находим ускорение точки.

Указание. *Найти проекции ускорения точки на оси неподвижной декартовой системы координат. Найти модуль ускорения.*

4. Вычисляем кинематические характеристики движения точки.

Указание. *Вычислить положение, скорость и ускорение точки для момента времени* t_1.

5. Вычисляем касательное и нормальное ускорения точки.

Указание. *Использовать зависимости касательного и нормального ускорений точки от проекций скорости и ускорения на оси декартовой системы координат. Вычислить касательное и нормальное ускорения для момента времени* t_1.

6. Находим траекторию движения точки.

Указание. *Записать уравнения траектории в параметрической форме. Провести вычисления для промежутка времени от нуля до* t ($t>t_1$).

7. Проводим построения.

Указание. *Строим в масштабе траекторию движения точки. Показываем положение точки на траектории в момент времени* t_1. *Обязательно указываем точку начала и направление движения* ($t = 0$). *Строим вектор скорости и ускорения точки, а также составляющие касательного и нормального ускорений (в соответствующих масштабах) для заданного момента времени* t_1.

5.4.2. Задание № 5. Определить кинематические характеристики плоского механизма

Указания по выполнению:

1. Изображаем плоский механизм.

Указание. *В соответствии с заданным вариантом показать в масштабе механизм (рис. 79) для момента времени* t_1.

2. Показываем направления скоростей точек звеньев механизма.

Указание. *Показать скорости точек А и В для соответствующего положения механизма.*

3. Определяем положение мгновенного центра скоростей.

Указание. *Найти положение мгновенного центра скоростей для звена АВ, совершающего плоское движение. Если мгновенный центр скоростей* *звена AB не существует, то воспользоваться другими способами определения скоростей точек механизма.*

4. Показываем направления угловых скоростей звеньев механизма.

Указание. *Показать направления угловых скоростей звеньев механизма и скорость точки M.*

5. Проводим вычисление скоростей.

Указание. *Вычислить угловые скорости всех звеньев механизма и скорости точек B и M.*

6. Показываем направления ускорений точек плоского механизма.

Указание. *За полюс принять точку A и построить многоугольник векторов ускорений для определения ускорения точки B.*

7. Проводим вычисление ускорений.

Указание. *Вычислить ускорение точки B, угловое ускорение звена AB и ускорение точки M.*

5.4.3. Задание № 3. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.

Указания по выполнению:

1. Определяем положение механической системы.

Указание. *Положение механической системы (рис. 79) определить для момента времени* t_1*, используя уравнения движения точки A. Считать, что точка M совершает относительное движение вдоль прямой AB, а положение точки M в момент времени* t_1 *задано (см. табл. 79).*

2. Показываем положение механической системы.

Указание. *Показать на рисунке в масштабе положение механической системы в момент времени* t_1.

3. Определяем переносную скорость точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *найти переносную скорость точки, мысленно закрепив точку M.*

4. Определяем относительную скорость точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *выбрать направление относительной скорости точки M. Величину этой скорости принять равной величине переносной скорости.*

5. Показываем векторы скоростей.

Указание. *Показать на схеме механической системы для момента времени* t_1 *векторы относительной, переносной и абсолютной скоростей.*

6. Определяем абсолютную скорость точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *найти модуль абсолютной скорости точки M.*

7. Определяем переносное ускорение точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *найти переносное ускорение, мысленно закрепив точку M.*

8. Определяем относительное ускорение точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *найти направление относительного ускорения точки М, учитывая, что движение точки замедленное. Величину этого ускорения принять равной величине переносного ускорения.*

9. Определяем кориолисово ускорение точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *найти кориолисово ускорение точки М.*

10. Показываем векторы ускорений.

Указание. *Показать на схеме механической системы для момента времени* t_1 *векторы относительного, переносного, кориолисова и абсолютного ускорений точки М.*

11. Определяем абсолютное ускорение точки.

Указание. *Для момента времени* t_1 *найти модуль абсолютного ускорения точки М.*

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

6.1. Пример решения и оформления расчетно-графической работы № 1.

1. Задание

Определить реакции опор твердого тела (рис. 80) при действии плоской системы произвольно распложенных сил.

2. Исходные данные

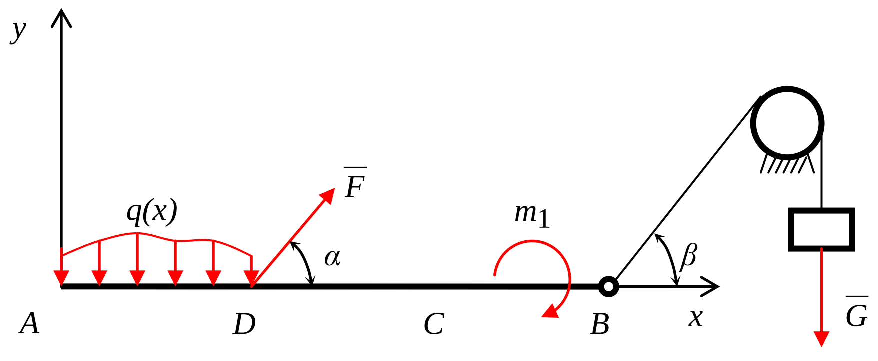


Рис. 80. Заданная конструкция

2.1. В точке «*A*» балка закреплена при помощи жесткой заделки.

2.2. Вес груза $G = 2{,}3$ кН.

2.3. Момент пары сил $m_1 = 2{,}5$ кН $\cdot$ м.

2.4. Сила $F = 2{,}3$ кН приложена в точке «*D*» под углом $\alpha = 60^0$.

2.5. Распределенная нагрузка с интенсивностью $q = 2x^{1/2}$ кН/м, приложена на участке «*AD*».

2.7. Груз закреплен с помощью невесомой нити, расположенной под углом $\beta = 45^0$ к оси *x*.

2.8. Коэффициент трения нити по неподвижной цилиндрической поверхности $f = 0{,}25$.

2.9. Длина участка «*AD*» $l_1 = 0{,}8$ м.

2.10. Длина участка «DC_1» $l_2 = 0{,}92$ м.

2.11. Длина участка «C_1B» $l_3 = 1{,}8$ м.

3. Решение

3.1 Рассмотрим равновесие балки «*ADCB*» (рис. 81).

3.2 Составим расчетную схему (рис. 82).

3.2.1 Введем систему координат.

3.2.2 Действие связей заменим реакциями.

- В точке «*A*» действие жесткой заделки заменим реакциями $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Ay}$ и моментом заделки M_3.

- Действие абсолютно нерастяжимой гибкой и невесомой нити заменим реакцией $\overline{T}_B$, направленной вдоль нити.

Определим эту реакцию по формуле

$$T_B = Ge^{-f\varphi},$$

где $\varphi = 90^0 + \beta = 90^0 + 45^0 = 135^0 = 2{,}36$ (рад) – угол обхвата,

тогда $T_B = 2{,}3 \cdot 2{,}7^{(-0{,}25 \cdot 2{,}36)} = 1{,}280$ (кН).

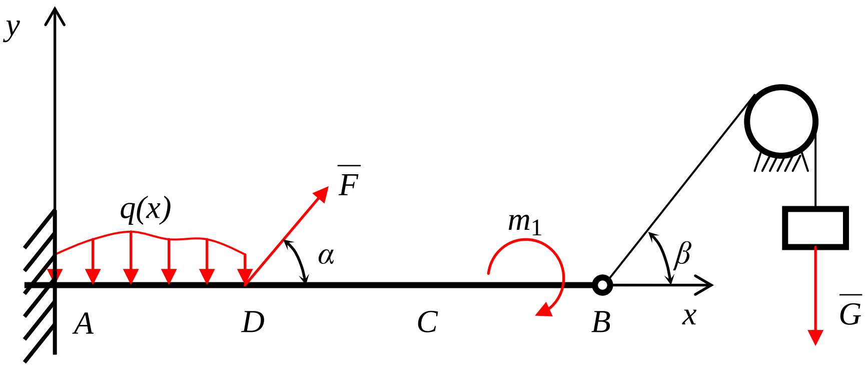


Рис. 81. Закрепленная конструкция

3.2.3 Определим равнодействующую распределенной нагрузки и точку ее приложения:

$$Q = \int_0^{l_1} q(x)dx \int_0^{l_1} 2x^{1/2}dx = \left.\frac{2x^{3/2}}{3/2}\right|_0^{l_1} = \left.\frac{4\sqrt{x^2}}{3/2}\right|_0^{0,8} = \frac{4\sqrt{0{,}8^3}}{3} = 0{,}954(\text{кН}).$$

$$AC_1 = h = \frac{\int_0^{l_1} x \cdot q(x)dx}{Q} = \frac{\int_0^{l_1} 2 \cdot x^{3/2}dx}{Q} = \frac{\left.\frac{2x^{5/2} \cdot 2}{5}\right|_0^{0,8}}{Q} = \frac{4\sqrt{0{,}8^5}}{5 \cdot 0{,}954} = 0{,}48(\text{м}).$$

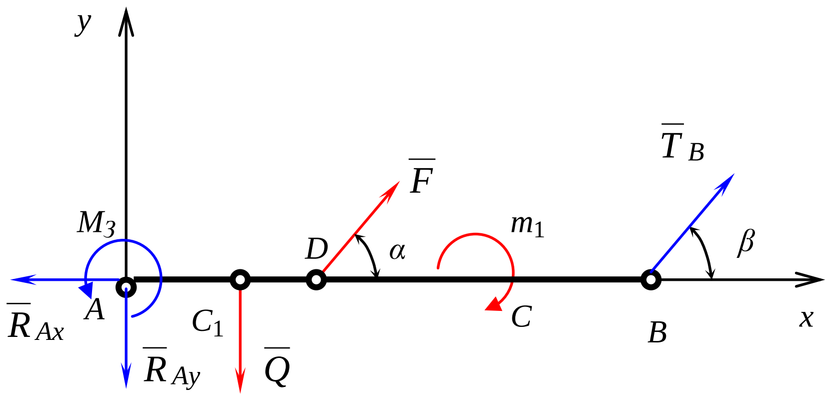


Рис. 82. Расчетная схема

3.3 На балку действует плоская система произвольно расположенных сил. Условия равновесия для такой системы сил имеют вид

1) $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$,

2) $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$,

3) $\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0$.

3.4 Составим систему уравнений равновесия.

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array} \begin{cases} T_B \cos\beta + F\cos\alpha - R_{Ax} = 0, \\ T_B \sin\beta + F\sin\alpha - R_{Ay} - Q = 0, \\ T_B(l_1 + l_2 + l_3)\sin\beta - m_1 - Qh + Fl_1 \sin\alpha + M_3 = 0. \end{cases}$$

3.5 Проводим вычисления.

Из уравнения (1)

$$R_{Ax} = T_B \cos\beta + F\cos\alpha = 1{,}280 \cdot \cos 45^0 + 2{,}3 \cdot \cos 60^0 = 2{,}055 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения (2)

$$R_{Ay} = T_B \sin\beta + F\sin\alpha - Q = 1{,}280 \cdot \sin 45^0 + 2{,}3 \cdot \sin 60^0 - 0{,}954 = 1{,}942 (\text{кН}).$$

Из уравнения (3)

$$M_3 = T_B(l_1 + l_2 + l_3)\sin\beta - m_1 - Qh + Fl_1 \sin\alpha =$$

$$= 1{,}280(0{,}8 + 0{,}92 + 1{,}8)\sin 45^0 - 2{,}5 - 0{,}954 \cdot 0{,}48 + 2{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot \sin 60^0 = 1{,}821 (\text{кН}).$$

4. Ответ:

$R_{Ax} = 2{,}055$ (кН),

$R_{Ay} = 1{,}942$ (кН),

$M_3 = 1{,}821$ (кН).

6.2. Пример решения и оформления расчетно-графической работы № 2

1. Задание

Определить реакции опор составной конструкции при действии плоской системы произвольно распложенных сил (рис. 84).

2. Исходные данные

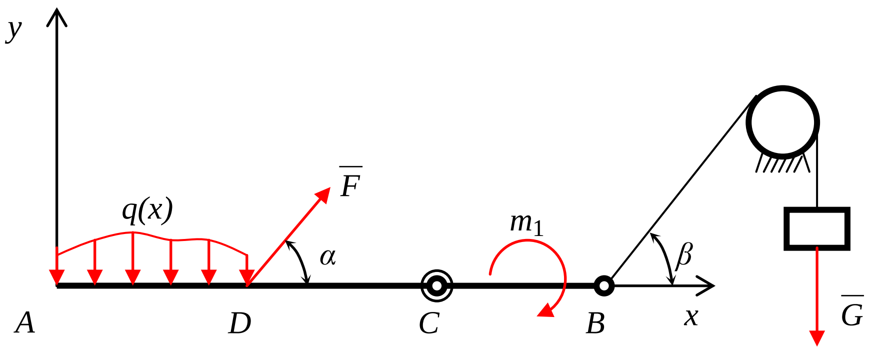


Рис. 83. Составная конструкция

2.1. В точке «*A*» установлена гладкая поверхность под углом $\gamma = 45^0$.

2.2. В точке «*C*» установлен шарнир.

2.3. Вес груза $G = 2{,}3$ кН.

2.4. Момент пары сил $m_1 = 2{,}5$ кН $\cdot$ м.

2.5. Сила $F = 2{,}3$ кН приложена в точке «*D*» под углом $\alpha = 60^0$.

2.6. Распределенная нагрузка с интенсивностью $q = 2x^{1/2}$ кН/м, приложена на участке «*AD*».

2.7. Груз закреплен с помощью невесомой нити, расположенной под углом $\beta = 45^0$ к оси *x*.

2.8. Коэффициент трения нити по неподвижной цилиндрической поверхности $f = 0{,}25$.

2.9. Длина участка «*AD*» $l_1 = 0{,}8$ м.

2.10. Длина участка «DC_1» $l_2 = 0{,}92$ м.

2.11. Длина участка «C_1B» $l_3 = 1{,}8$ м.

3. Решение

3.1. Рассмотрим равновесие составной конструкции. Для того чтобы конструкция находилась в равновесии, дополнительно закрепим ее при помощи шарнирно-неподвижной опоры в точке «*D*» и шарнирно-подвижной опоры в точке «*B*» (рис. 84).

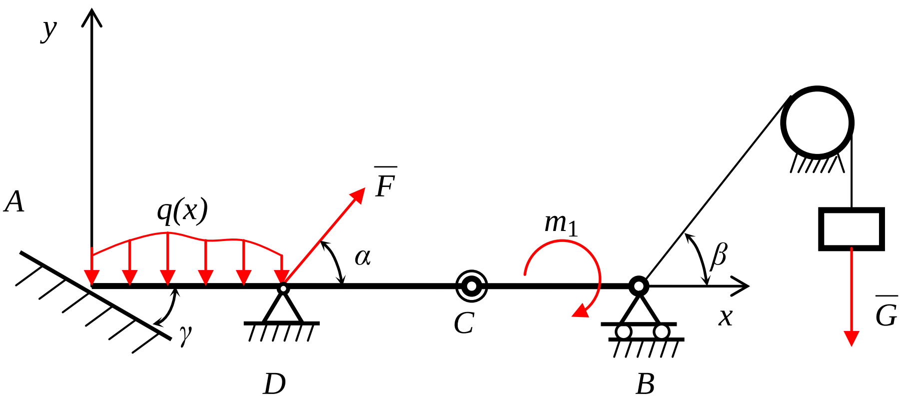


Рис. 84. Закрепленная составная конструкция

3.2. Составим расчетную схему.

3.2.1 Мысленно разделим конструкцию на балку «*ADC*» и «*CB*» (рис.85).

3.2.2 Введем систему координат.

3.2.3 Действие связей заменим реакциями:

- в точке «А» действие абсолютно гладкой твердой поверхности заменим нормальной реакцией $\overline{N}_A$,
- в точке «*D*» действие шарнирно-неподвижной опоры заменим силами $\overline{R}_{Dx}$ и $\overline{R}_{Dy}$ направленными соответственно вдоль осей *Ox* и *Oy*,
- в точке «*B*» действие шарнирно-подвижной опоры заменим силой $\overline{R}_B$, направленной вертикально,
- действие абсолютно нерастяжимой гибкой и невесомой нити заменим реакцией $\overline{T}_B$, направленной вдоль нити.

Определим эту реакцию по формуле

$$T_B = Ge^{-f\varphi},$$

где $\varphi = 90^0 + \beta = 90^0 + 45^0 = 135^0 = 2{,}36$ (рад) – угол обхвата,

тогда $R_B = 2{,}3 \cdot 2{,}7^{(-0{,}25 \cdot 2{,}36)} = 1{,}280$ (кН),

- действие балки «*CB*» на балку «*ADC*» заменим внутренними силами $\overline{R}^{/}_{Cx}$ и $\overline{R}^{/}_{Cy}$, направленными вдоль осей *Ox* и *Oy*.
- действие балки «*ADC*» на балку «*CB*» заменим внутренними силами $\overline{R}^{//}_{Cx}$ и $\overline{R}^{//}_{Cy}$, направленными вдоль осей *Ox* и *Oy*.
- запишем условие взаимодействия:

$$\overline{R}^{/}_{Cx} = -\overline{R}^{//}_{Cx};$$
$$\overline{R}^{/}_{Cy} = -\overline{R}^{//}_{Cy}.$$

3.2.4 Определим равнодействующую распределенной нагрузки и точку ее приложения:

$$Q = \int_0^{l_1} q(x)dx = \int_0^{l_1} 2\cdot x^{1/2}dx = \left.\frac{2x^{3/2}}{3/2}\right|_0^{0,8} = \left.\frac{4\sqrt{x^3}}{3}\right|_0^{0,8} = \frac{4\sqrt{0,8^3}}{3} = 0,954 \text{ (кН)},$$

$$AC_1 = h = \frac{\int_0^{l_1} x\cdot q(x)dx}{Q} = \frac{\int_0^{l_1} 2\cdot x^{3/2}dx}{Q} = \frac{\left.\frac{2x^{5/2}\cdot 2}{5}\right|_0^{0,8}}{Q} = \frac{4\sqrt{0,8^5}}{5\cdot 0,954} = 0,48 \text{ (м)}.$$

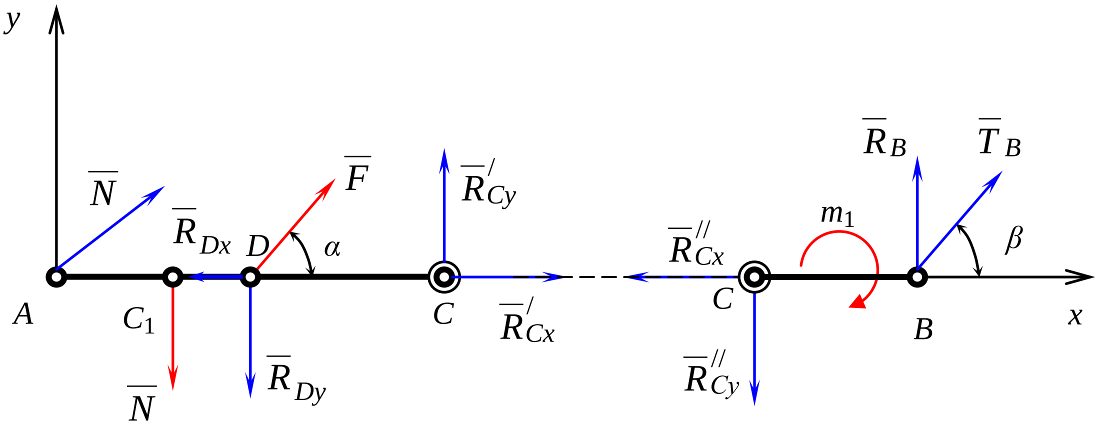


Рис. 85. Расчетная схема

3.3. На конструкцию действует плоская система произвольно расположенных сил. Условия равновесия для такой системы сил имеют вид:

для части «*CB*»

$$\begin{cases} 1)\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ 2)\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ 3)\ \sum_{i=1}^{n} M_C(\overline{F}_i) = 0. \end{cases}$$

для части «*AC*»

$$\begin{cases} 4)\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ 5)\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ 6)\ \sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0. \end{cases}$$

3.4. Составим систему уравнений равновесия.

Для балки «*CB*»:

$$\begin{cases} 1)\ -R_{Cx}^{//} + T_B\cos\beta = 0, \\ 2)\ -R_{Cy}^{//} + R_B + T_B\sin\beta = 0, \\ 3)\ -m_1 + R_B l_3 + T_B l_3 \sin\beta = 0. \end{cases}$$

Для балки «ACD»:

$$\begin{cases} N\sin\gamma + F\cos\alpha - R_{Dx} + R'_{Cx} = 0, & (4)\\ N\cos\gamma - R_{Dy} + F\sin\alpha + R'_{Cy} - Q = 0, & (5)\\ R'_{Cy}(l_1 + l_2) - Qh + Fl_1\sin\alpha - R_{Dy}l_1 = 0. & (6) \end{cases}$$

Учитываем условия взаимодействия:

$$\overline{R}'_{Cx} = -\overline{R}''_{Cx}, \qquad \left|\overline{R}'_{Cx}\right| = \left|\overline{R}''_{Cx}\right|,$$

$$\overline{R}'_{Cy} = -\overline{R}''_{Cy}, \qquad \left|\overline{R}'_{Cy}\right| = \left|\overline{R}''_{Cy}\right|.$$

3.5. Проводим вычисления.

Из уравнения (3)

$$R_B = \frac{m_1 - T_B l_3 \cdot \sin\beta}{l_3} == \frac{2{,}5 - 1{,}280 \cdot 1{,}8 \cdot \sin 60^0}{1{,}8} = 0{,}280 \text{ (кН).}$$

Из уравнения (2)

$$R''_{Cy} = R_B + T_B \cdot \sin\beta = 0{,}280 + 1{,}280 \cdot \sin 45^0 = 1{,}185 \text{ (кН).}$$

Из уравнения (1)

$$R''_{Cx} = T_B \cos\beta = 1{,}280 \cdot \cos 45^0 = 0{,}905 \text{ (кН).}$$

Из уравнения (6)

$$R_{Dy} = \frac{Fl_1\sin\alpha + R'_{Cy}(l_1 + l_2) - Qh}{l_1} =$$

$$= \frac{2{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot \sin 60^0 + 1{,}185(0{,}8 + 0{,}92) - 0{,}954 \cdot 0{,}48}{0{,}8} = 3{,}966 \text{ (кН).}$$

Из уравнения (5)

$$N = \frac{Q + R_{Dy} - F\sin\alpha - R'_{Cy}}{\cos\gamma} =$$

$$= \frac{0{,}954 + 3{,}966 - 2{,}3 \cdot \sin 60^0 - 1{,}185}{\cos 45^0} = 1{,}743 \text{ (кН).}$$

Из уравнения (4)

$$R_{Dx} = R'_{Cx} + F\cos\alpha + N\sin\gamma =$$

$$= 0{,}905 + 2{,}3 \cdot \cos 45^0 + 1{,}743 \cdot \sin 45^0 = 3{,}764 \text{ (кН).}$$

4. Ответ:

$R_B = 0{,}280$ (кН), $R_{Dx} = 3{,}764$ (кН),

$R'_{Cx} = 0{,}905$ (кН), $R_{Dy} = 3{,}966$ (кН),

$R'_{Cy} = 1{,}185$ (кН), $N = 1{,}743$ (кН).

6.3. Пример решения и оформления расчетно-графической работы № 3

1. Задание

Определить реакции опор твердого тела при действии пространственной системы произвольно распложенных сил (рис. 86).

2. Исходные данные

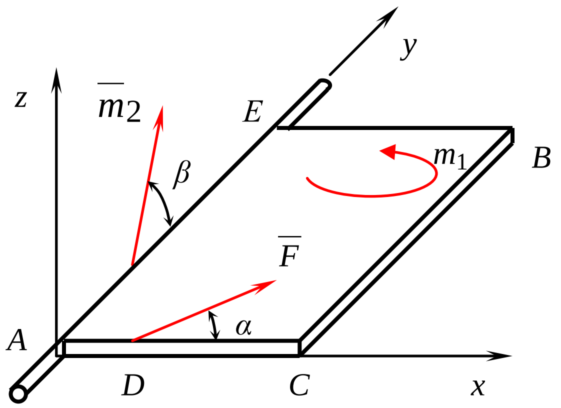


Рис. 86. Заданная конструкция

2.1. В точке «*A*» установлена жесткая заделка.

2.2. Вес плиты $G = 2{,}3$ кН.

2.3. Сила $F = 2{,}3$ кН (действует в плоскости плиты) приложена в точке «*D*» под углом $\alpha = 60^0$.

2.4. Момент пары сил $m_1 = 2{,}5$ кН, действует в плоскости плиты.

2.6. Векторный момент величиной $m_2 = 3$ кН · м, расположен в плоскости *Azy* под углом $\beta = 45^0$ к оси *Ay*.

2.7. Длина участка «*AD*» $l_1 = 0{,}8$ м.

2.9. Длина участка «*DC*» $l_2 = 0{,}92$ м.

2.10. Длина участка «*CB*» $l_3 = 1{,}8$ м.

3. Решение

3.1. Рассмотрим равновесие плиты (рис. 87).

3.2. Составим расчетную схему (рис. 88).

3.2.1 Введем систему координат.

3.2.2 Покажем заданные силы, действующие на плиту.

3.2.3 Действие связей заменим реакциями.

В точке «*A*» действие жесткой заделки заменим реакциями $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$, $\overline{R}_z$ и моментами M_x, M_y и M_z.

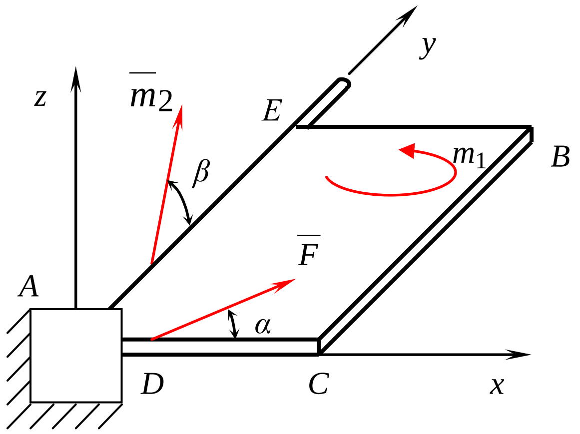


Рис. 87. Закрепленная конструкция

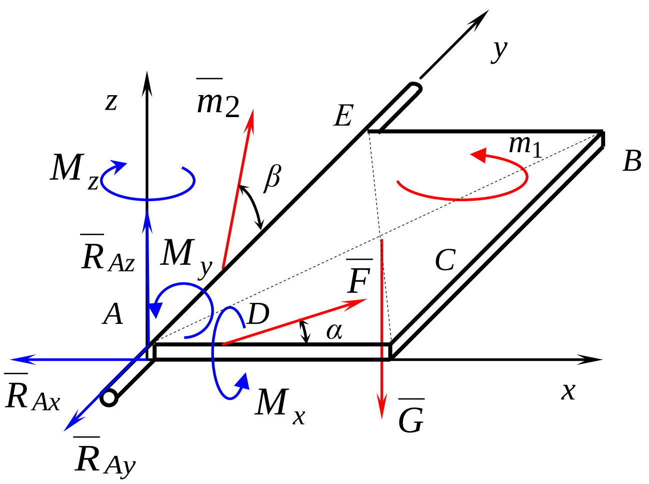


Рис. 88. Расчетная схема

3.3. На плиту действует пространственная система произвольно расположенных сил. Условия равновесия для такой системы сил имеют вид

1) $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$, 4) $\sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_i) = 0$,

2) $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$, 5) $\sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_i) = 0$,

3) $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$, 6) $\sum_{i=1}^{n} M_z(\overline{F}_i) = 0$.

3.4. Составим систему уравнений равновесия.

$$\begin{cases} -R_{Ax} + F\cos\alpha = 0, & 1) \\ -R_{Ay} + F\sin\alpha = 0, & 2) \\ R_{Az} - G = 0, & 3) \\ M_x - G\dfrac{l_3}{2} = 0, & 4) \\ -M_y + G\dfrac{l_1 + l_2}{2} + m_2\cos\beta = 0, & 5) \\ -M_z + Fl_1\sin\alpha + m_2\sin\beta + m_1 = 0. & 6) \end{cases}$$

3.5. Проводим вычисления.

Из уравнения (1)

$R_{Ax} = F\cos\alpha = 2{,}3\cdot\cos 60^0 = 1{,}15$ (кН).

Из уравнения (2)

$R_{Ay} = F\sin\alpha = 2{,}3\cdot\sin 60^0 = 1{,}992$ (кН).

Из уравнения (3)

$R_{Az} = G = 2{,}3$ (кН).

Из уравнения (4)

$M_x = G\dfrac{l_3}{2} = 2{,}3\dfrac{0{,}8}{2} = 0{,}92$ (кН · м).

Из уравнения (5)

$M_y = G\dfrac{l_1 + l_2}{2} + m_2\cos\beta = 2{,}3\dfrac{0{,}8 + 0{,}92}{2} + 3\cdot\cos 45^0 = 4{,}099$ (кН · м).

Из уравнения (6)

$M_z = Fl_1\sin\alpha + m_2\sin\beta + m_1 =$

$= 2{,}3\cdot 0{,}8\cdot\sin 60^0 + 3\cdot\sin 45^0 + 2{,}5 = 6{,}214$ (кН · м).

4. Ответ:

$R_{Ax} = 1{,}15$ (кН),

$R_{Ay} = 1{,}992$ (кН),

$R_{Az} = 2{,}3$ (кН),

$M_x = 0{,}92$ (кН · м),

$M_y = 4{,}099$ (кН · м),

$M_z = 6{,}214$ (кН · м).

6.4. Пример решения и оформления расчетно-графической работы № 4

1. Задание

По заданному закону движения определить скорость и ускорение точки.

2. Исходные данные

закон движения: $\begin{cases} x(t) = b\cos(\omega t), \\ y(t) = b\sin(\omega t). \end{cases}$

$b = 0{,}7$ м,

$\omega = 1{,}0$ рад/с,

$t_1 = 1{,}05$ с.

3. Решение

3.1. Записываем уравнения движения точки:

$$x(t) = b\cos(\omega t),$$

$$y(t) = b\sin(\omega t).$$

3.2. Находим скорость точки «A» и ее проекции:

$$V_{Ax} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} b\cos(\omega t) = -b\omega\sin(\omega t),$$

$$V_{Ay} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} b\sin(\omega t) = b\omega\cos(\omega t),$$

$$V_A = \sqrt{V^2{}_{Ax} + V^2{}_{Ay}} = \sqrt{b^2\omega^2\sin^2(\omega t) + b^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = b\omega.$$

3.3. Находим ускорение точки «A» и его проекции:

$$a_{Ax} = \frac{dV_{Ax}}{dt} = \frac{d}{dt}(-b\omega\sin(\omega t)) = -b\omega^2\cos(\omega t),$$

$$a_{Ay} = \frac{dV_{Ay}}{dt} = \frac{d}{dt}(b\omega\cos(\omega t)) = -b\omega^2\sin(\omega t),$$

$$a_A = \sqrt{a^2{}_{Ax} + a^2{}_{Ay}} = \sqrt{b^2\omega^4\cos^2(\omega t) + b^2\omega^4\sin^2(\omega t)} = b\omega^2.$$

3.4. Вычисляем кинематические характеристики точки «A» для момента времени $t_1 = 1{,}05$ с:

$$x(t) = b\cos(\omega t) = 0{,}7\cdot\cos(1\cdot 1{,}05) = 0{,}35 \text{ (м)},$$

$$y(t) = b\sin(\omega t) = 0{,}7\cdot\sin(1\cdot 1{,}05) = 0{,}6 \text{ (м)},$$

$$V_{Ax} = -b\omega\sin(\omega t) = -0{,}7\cdot 1\cdot\sin(1\cdot 1{,}05) = -0{,}6 \text{ (м/с)},$$

$$V_{Ay} = b\omega\cos(\omega t) = 0{,}7\cdot 1\cdot\cos(1\cdot 1{,}05) = 0{,}35 \text{ (м/с)},$$

$$V_A = \sqrt{V^2{}_{Ax} + V^2{}_{Ay}} = \sqrt{b^2\omega^2\sin^2(\omega t) + b^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = b\omega = 0{,}7\cdot 1 = 0{,}7 \text{ (м/с)},$$

$$a_{Ax} = -b\omega^2\cos(\omega t) = -0{,}7\cdot 1^2\cdot\cos(1\cdot 1{,}05) = -0{,}35 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_{Ay} = -b\omega^2\sin(\omega t) = -0{,}7\cdot 1^2\cdot\sin(1\cdot 1{,}05) = -0{,}6 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_A=\sqrt{a^2{}_{Ax}+a^2{}_{Ay}}=\sqrt{b^2\omega^4\cos^2(\omega t)+b^2\omega^4\sin^2(\omega t)}=$$

$$=b\cdot\omega^2=0{,}7\cdot 1^2=0{,}7\ \text{(м/с}^2\text{)}.$$

3.5. Вычисляем касательное и нормальное ускорение точки «*А*»:

$$a_\tau=\frac{V_{Ax}a_{Ax}+V_{Ay}a_{Ay}}{V_A}=\frac{b^2\omega^3\cos\omega t\cdot\sin\omega t-b^2\omega^3\cos\omega t\cdot\sin\omega t}{b\omega}=0,$$

$$a_n=\frac{\left|V_{Ax}a_{Ay}-V_{Ay}a_{Ax}\right|}{V_a}=\frac{\left|b^2\omega^3\sin^2\omega t+b^2\omega^3\cos^2\omega t\right|}{b\omega}=b\omega^2=0{,}7\cdot 1^2=0{,}7\left(\text{м / с}^2\right)$$

3.6. Определяем траекторию движения точки «*А*»:

$$x(t)=b\cos\omega t,$$

$$y(t)=b\sin\omega t,$$

$$x^2+y^2=b^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t=b^2.$$

Траекторией движения точки «*А*» является окружность радиуса $b=0{,}7$ (м) (рис. 89).

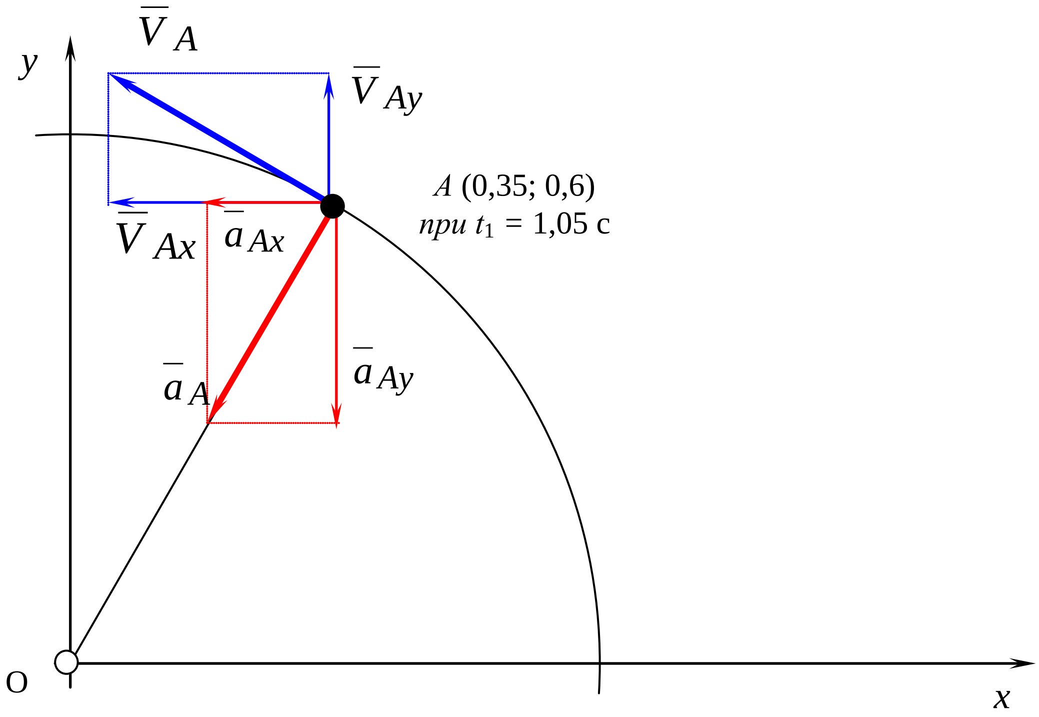


Рис. 89. Скорость и ускорение точки «*А*»

4. Ответ:

$x(t)=0{,}35$ (м),	$a_{Ax}=-0{,}35$ (м/с^2),
$y(t)=0{,}6$ (м),	$a_{Ay}=-0{,}6$ (м/с^2),
$V_{Ax}=-0{,}6$ (м/с),	$a_A=0{,}7$ (м/с^2),
$V_{Ay}=0{,}35$ (м/с),	$a_\tau=0,$
$V_A=0{,}7$ (м/с),	$a_n=0{,}7$ (м/с^2).

6.5. Пример решения и оформления расчетно-графической работы № 5

1. Задание

Определить кинематические характеристики плоского механизма (рис. 90)

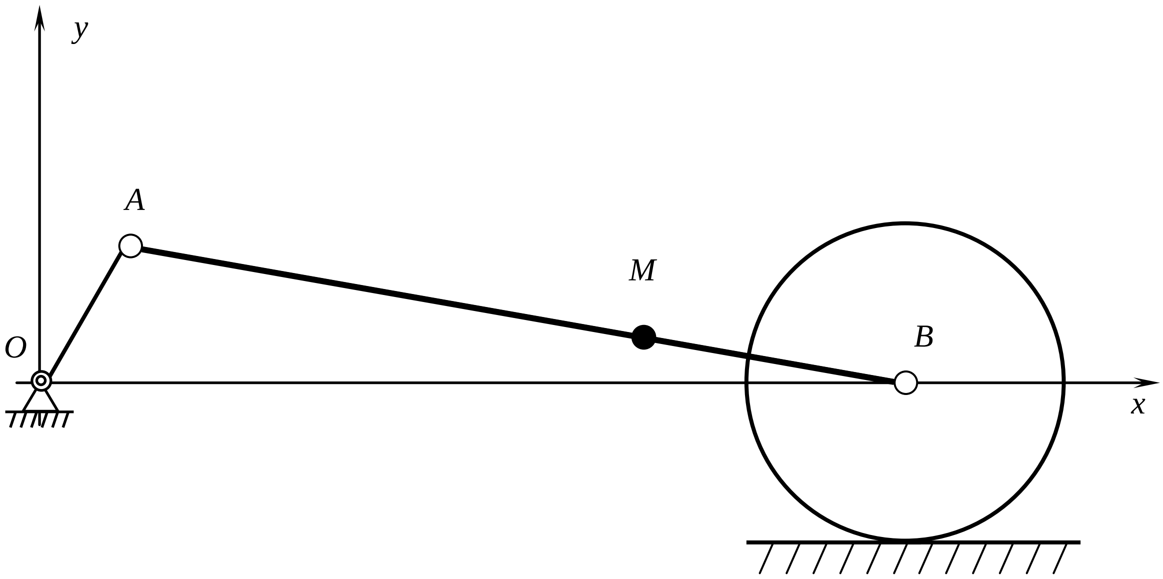


Рис. 90. Схема механизма

2. Исходные данные

$x_A = 0{,}35$ м,	$OA = b$,	$\upsilon_A = 0{,}75$ м/с,
$y_A = 0{,}6$ м,	$b = 0{,}7$ м,	$a_{Ax} = -0{,}35$ м/с,
$\dfrac{AM}{AB} = 0{,}65$,	$\upsilon_{Ax} = -0{,}6$ м/с,	$a_{Ay} = -0{,}6$ м/с^2,
$AB = 5b$,	$\upsilon_{Ay} = 0{,}35$ м/с,	$a_A = 0{,}7$ м/с^2.

3. Решение

3.1. Определим положение мгновенного центра скоростей для звена «*AB*» (рис. 91).

Определим угол наклона кривошипа «*OA*» к горизонтальной оси *Ox*:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_A}{x_A} = \frac{0{,}6}{0{,}35} = 1{,}714,$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}1{,}714 \approx 60^0.$$

Определим угол наклона шатуна «*AB*» к горизонтальной оси *Ox*.

Определим длину кривошипа «*OA*» и длину шатуна «AB»:

$OA = b = 0{,}7$ (м),

$AB = 5b = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$ (м).

Рассматривая треугольник «OAB» (рис. 91) и применяя теорему синусов, получим

$$\frac{\sin\alpha}{AB}=\frac{\sin\beta}{OA},$$

$$\sin\beta=\frac{OA}{AB}\sin\alpha=\frac{0{,}7}{3{,}5}\sin 60^0=0{,}173,$$

$$\beta=10^0.$$

Определим положение мгновенного центра скоростей для звена «AB»

Точка «A» движется по окружности радиусом «OA», ее скорость направлена по касательной к этой окружности (рис. 91). Проведем перпендикуляр к скорости точки «A».

Точка «B» движется поступательно вдоль оси Ox, так как точка «B» принадлежит ползуну. Проведем перпендикуляр к скорости точки «B».

Точка пересечения построенных перпендикуляров является мгновенным центром скоростей «C_υ^{AB}» для звена «AB».

Определим расстояние от точки «A» до мгновенного центра скоростей «C_υ^{AB}».

Определим угол φ (рис. 91):

По теореме о сумме углов треугольника получим

$$\varphi+90^0+\alpha=180^0,$$

$$\varphi=180^0-90^0-\alpha=180^0-90^0-60^0=30^0.$$

Определим угол γ (рис. 2):

$$\gamma=90^0-\beta=90^0-10^0=80^0.$$

Рассматривая треугольник «AC_υ^{AB}B» (рис. 91) и применяя теорему синусов, получим

$$\frac{\sin\varphi}{AB}=\frac{\sin\gamma}{AC_\upsilon^{AB}},$$

$$AC_\upsilon^{AB}=\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}AB=\frac{\sin 80^0}{\sin 30^0}3{,}5=6{,}894\,(\text{м}).$$

Определим расстояние от точки «B» до мгновенного центра скоростей «C_υ^{AB}».

Определим угол θ (рис. 91).

По теореме о сумме углов треугольника получим,

$$\theta+\gamma+\varphi=180^0,$$

$$\theta=180^0-\gamma-\varphi=180^0-80^0-30^0=70^0.$$

Рассматривая треугольник «$AC_{\upsilon}^{AB}B$» (рис. 91) и применяя теорему синусов, получим

$$\frac{\sin\varphi}{AB} = \frac{\sin\theta}{BC_{\upsilon}^{AB}}$$

$$BC_{\upsilon}^{AB} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}AB = \frac{\sin 70^0}{\sin 30^0}3{,}5 = 6{,}58\,(\text{м}).$$

Определим расстояние от точки «*M*» до мгновенного центра скоростей «C_{υ}^{AB}».

Определим расстояние «*AM*»:

$$\frac{AM}{AB} = 0{,}65, \qquad AM = 0{,}65\cdot AB = 0{,}65\cdot 3{,}5 = 2{,}275\,(\text{м}).$$

Рассматривая треугольник «$AC_{\upsilon}^{AB}M$» (рис. 91) и применяя теорему косинусов, получим:

$$MC_{\upsilon}^{AB} = \sqrt{AM^2 + \left(AC_{\upsilon}^{AB}\right)^2 - 2AM\cdot AC_{\upsilon}^{AB}\cdot\cos\theta},$$

$$MC_{\upsilon}^{AB} = \sqrt{2{,}275^2 + 6{,}895^2 - 2\cdot 2{,}275\cdot 6{,}895\cdot\cos 70^0} = 6{,}48\,(\text{м}).$$

3.2. Определим угловую скорость звена «*AB*»

$$\upsilon_A = \omega_{AB}AC_{\upsilon}^{AB},$$

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AC_{\upsilon}^{AB}} = \frac{0{,}7}{6{,}895} = 0{,}102\,(\text{рад/с}).$$

3.3. Определим скорости точек «*B*» и «*M*» (рис. 91):

$$\upsilon_B = \omega_{AB}BC_{\upsilon}^{AB} = 0{,}102\cdot 6{,}58 = 0{,}67\,(\text{м/с}),$$

$$\upsilon_M = \omega_{AB}MC_{\upsilon}^{AB} = 0{,}102\cdot 6{,}48 = 0{,}66\,(\text{м/с}).$$

3.4. Определим ускорение точки «*B*»

Используем теорему сложения ускорений при плоском движении.

Примем точку «*A*» за полюс (рис. 92):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}. \qquad (1)$$

Определим нормальное ускорение точки «*B*» в ее движении по отношению к полюсу «*A*»:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 0{,}102^2\cdot 3{,}5 = 0{,}0364\,\left(\text{м/с}^2\right).$$

Спроецируем уравнение (1) на оси *Ox* и *Oy*:

$$Ox:\quad a_{\text{Bx}} = a_{Ax} - a_{BA}^n\cos\beta + a_{BA}^{\tau}\sin\beta, \qquad (2)$$

$$Oy:\quad a_{\text{By}} = a_{Ay} + a_{BA}^n\sin\beta + a_{BA}^{\tau}\cos\beta. \qquad (3)$$

Так как точка «*B*» совершает поступательное движение вдоль оси *Ox*, очевидно, что $a_{By} = 0$.

Тогда из уравнения (3) получим

$$a_{BA}^{\tau}=\frac{-a_{Ay}-a_{BA}^{n}\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{0{,}6-0{,}0364\cdot\sin 10^{0}}{\cos 10^{0}}=0{,}603\left(\text{м/с}^{2}\right)$$

Из уравнения (2):

$$a_{B}=\left|a_{B_x}\right|=\left|a_{Ax}-a_{BA}^{n}\cos\beta+a_{BA}^{\tau}\sin\beta\right|=$$

$$=\left|-0{,}35-0{,}0364\cos 10^{0}+0{,}603\sin 10^{0}\right|=0{,}28\left(\text{м/с}^{2}\right).$$

Определим угловое ускорение звена «*AB*»:

$$a_{BA}^{\tau}=\varepsilon_{AB}AB,\quad \varepsilon_{\text{AB}}=\frac{a_{BA}^{\tau}}{AB}=\frac{0{,}603}{3{,}5}=0{,}172\ \left(\text{рад}/\text{с}^{2}\right).$$

3.5. Определим ускорение точки «*M*»

Примем за полюс точку «*A*», тогда по теореме сложения ускорений при плоском движении имеем

$$\vec{a}_{M}=\vec{a}_{A}+\vec{a}_{MA}^{n}+\vec{a}_{MA}^{\tau}\ , \tag{4}$$

где

$$a_{MA}^{n}=\omega_{AB}^{2}MA=0{,}102^{2}\cdot 2{,}275=0{,}0237\ \left(\text{м}/\text{с}^{2}\right).$$

$$a_{MA}^{\tau}=\varepsilon_{AB}MA=0{,}172\cdot 2{,}275=0{,}391\ \left(\text{м}/\text{с}^{2}\right).$$

Спроецируем уравнение (4) на оси *Ox* и *Oy*:

$$Ox:\quad a_{Mx}=a_{Ax}-a_{MA}^{n}\cos\beta+a_{BA}^{\tau}\sin\beta, \tag{5}$$

$$Oy:\quad a_{My}=a_{Ay}+a_{MA}^{n}\sin\beta+a_{MA}^{\tau}\cos\beta. \tag{6}$$

Из уравнения (5):

$$a_{Mx}=-0{,}35-0{,}0237\cos 10^{0}+0{,}396\sin 10^{0}=-0{,}304\left(\text{м/с}^{2}\right).$$

Из уравнения (6):

$$a_{My}=-0{,}6+0{,}0237\sin 10^{0}+0{,}396\cos 10^{0}=-0{,}206\left(\text{м/с}^{2}\right).$$

Определим модуль ускорения точки «*M*»:

$$a_{M}=\sqrt{a_{Mx}{}^{2}+a_{My}{}^{2}}=\sqrt{(-0{,}3024)^{2}+(0{,}2125)^{2}}=0{,}367\left(\text{м/с}^{2}\right).$$

4. Ответ:

$\omega_{AB}=0{,}102\ 2$(рад/с),	$a_{M}=0{,}367$ (м/с^2),
$\upsilon_{B}=0{,}67$ (м/с),	$a_{MA}^{n}=0{,}0237$ (м/с^2),
$\upsilon_{M}=0{,}66$ (м/с),	$a_{MA}^{\tau}=0{,}391$ (м/с^2),
$a_{BA}^{n}=0{,}0364$ (м/с^2),	$a_{Mx}=-0{,}304$ (м/с^2),
$a_{BA}^{\tau}=0{,}603$ (м/с^2),	$a_{My}=-0{,}206$ (м/с^2).
$a_{B}=0{,}28$ (м/с^2),	
$\varepsilon_{\text{AB}}=0{,}172$ (рад/с^2),	

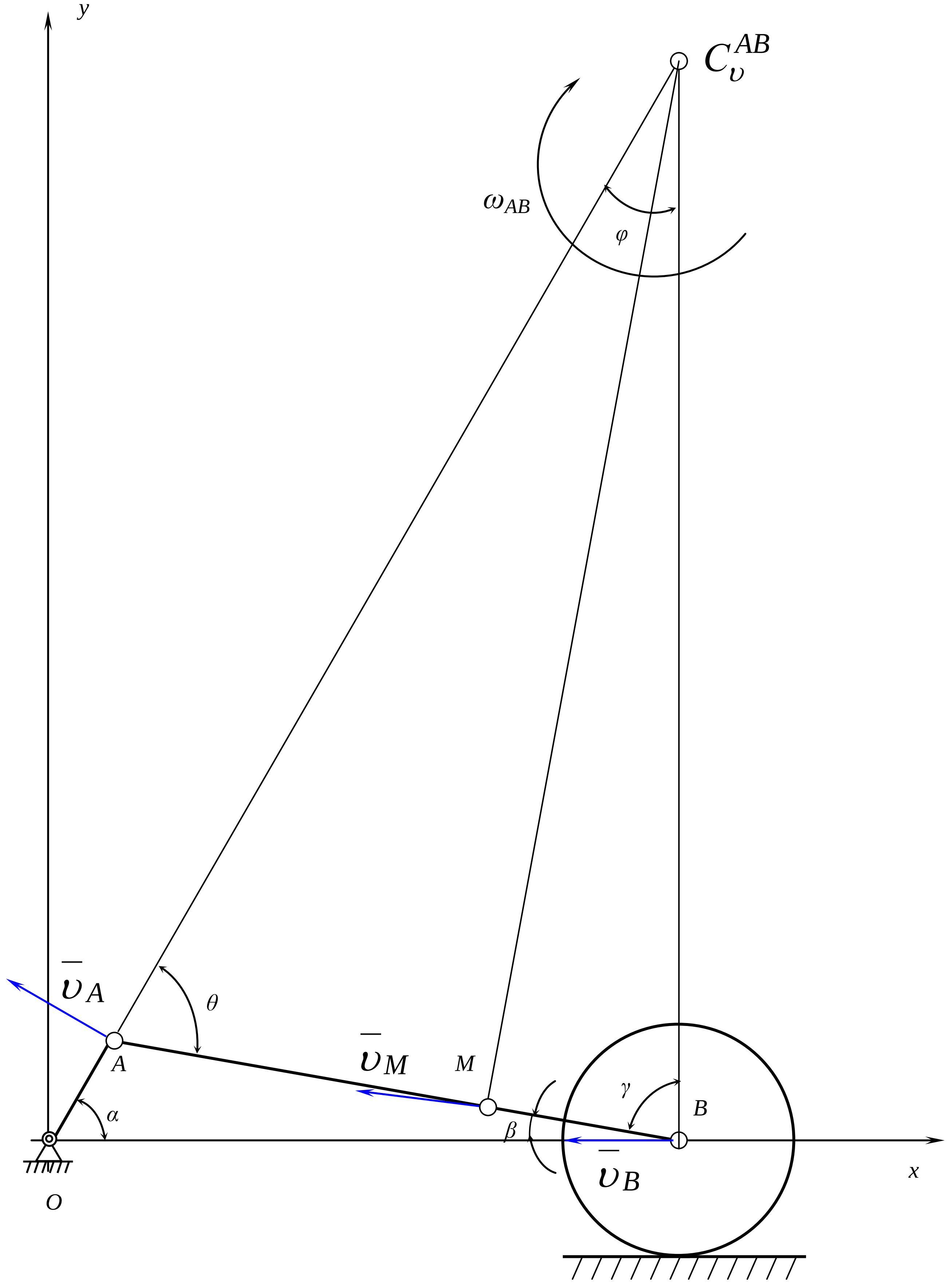


Рис. 91. Определение скоростей

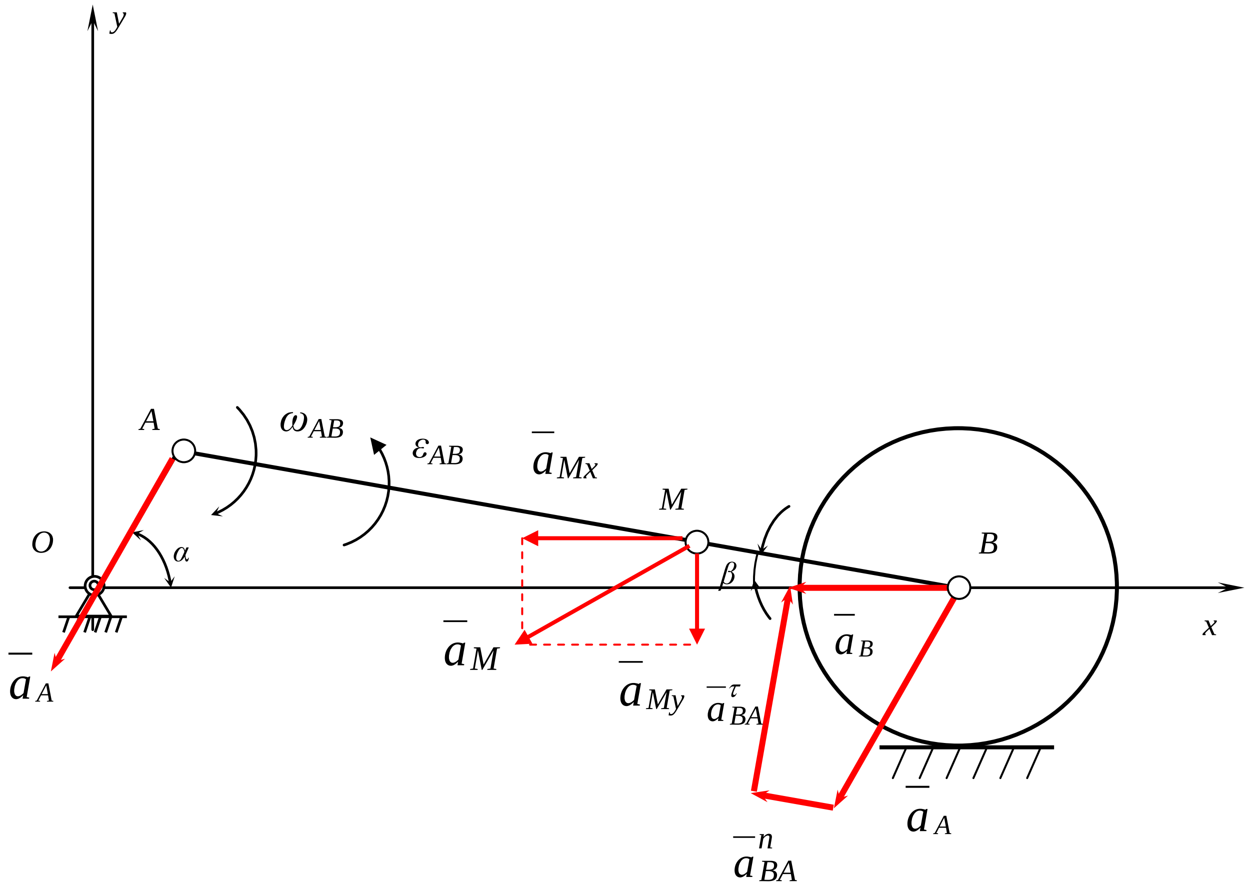


Рис. 92. Определение ускорений

6.6. Пример решения и оформления расчетно-графической работы № 6

1. Задание

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.

2. Исходные данные

$x_A = 0{,}35$ (м),	$\theta = 70^0$,	$\upsilon_M = 0{,}66$ (м/с),	$a_M = 0{,}367$ (м/с^2),
$y_A = 0{,}6$ (м),	$AC_\upsilon^{AB} = 6{,}895$ (м),	$\upsilon_e = \upsilon_r$,	$a_e = a_r$.
$\alpha = 60^0$,	$MC_\upsilon^{AB} = 6{,}48$ (м),	$a_{M_x} = -0{,}304$ (м/с^2),	
$\beta = 10^0$,	$\omega_{AB} = 0{,}102$ (рад/с),	$a_{M_y} = -0{,}206$ (м/с^2),	

3. Решение

3.1 Рассмотрим сложное движение точки «*М*».

Переносное движение – движение звена «*АВ*» (мгновенное вращение звена «*АВ*» вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью ω_{AB}).

$$\omega_e = \omega_{AB} = 0{,}102 \text{ (рад/с)},$$
$$\upsilon_e = \upsilon_M = 0{,}66 \text{ (м/с)},$$
$$a_e = a_M = 0{,}371 \text{ (м/с}^2\text{)},$$
$$a_{e_x} = a_{M_x} = -0{,}304 \text{ (м/с}^2\text{)},$$
$$a_{e_y} = a_{M_y} = -0{,}206 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Относительное движение – движение точки «*М*» вдоль звена «*АВ*» со скоростью υ_r и ускорением a_r.

$$\upsilon_r = \upsilon_e = 0{,}66 \text{ (м/с)},$$
$$a_r = a_e = 0{,}367 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Абсолютное движение – это движение точки «*М*» относительно неподвижных осей Ox и Oy.

3.2 Определим абсолютную скорость точки «*М*» (рис. 93)

Применим теорему синусов и определим угол ψ

$$\frac{AC_\upsilon^{AB}}{\sin\psi} = \frac{MC_\upsilon^{AB}}{\sin\theta},$$

$$\sin\psi = \frac{AC_\upsilon^{AB}}{MC_\upsilon^{AB}}\sin\theta = \frac{6{,}895}{6{,}48}\sin 70^0 = 0{,}999,$$

$$\psi = 89^0.$$

Определим угол между вектором переносной скорости $\bar{\upsilon}_e$ и вектором относительной скорости $\bar{\upsilon}_r$:

$$\widehat{\bar{\upsilon}_e, \bar{\upsilon}_r} = 90^0 - 89^0 = 1^0.$$

Используя теорему косинусов, определим абсолютную скорость точки «M» по теореме сложения скоростей при сложном движении:

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_e + \overline{\upsilon}_r,$$

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2 + 2\upsilon_e\upsilon_r \cos\left(\overline{\upsilon}_e, \overline{\upsilon}_r\right)} = \sqrt{0{,}66^2 + 0{,}66^2 + 2 \cdot 0{,}66 \cdot 0{,}66 \cos 1^0} = 1{,}319 (\text{м/с}).$$

3.3 Определим абсолютное ускорение точки «M» (рис. 94)

Определим ускорение Кориолиса:

$$\overline{a}_{\text{cor}} = 2\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r,$$

$$a_{\text{cor}} = 2\omega_e\upsilon_r \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r\right) = 2 \cdot 0{,}102 \cdot 0{,}66 \cdot \sin 90^0 = 0{,}135 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Применим теорему сложения ускорений при сложном движении точки:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_{\text{cor}}.$$

Спроецируем последние выражение на оси координат Ox и Oy:

$$a_{a_x} = a_{e_x} + a_r \cos\beta + a_{\text{cor}} \sin\beta =$$

$$= -0{,}304 + 0{,}367 \cdot \cos 10^0 + 0{,}135 \sin 10^0 = 0{,}081 \left(\text{м/с}^2\right),$$

$$a_{a_y} = a_{e_y} - a_r \sin\beta + a_{\text{cor}} \cos\beta =$$

$$= -0{,}206 - 0{,}367 \cdot \sin 10^0 + 0{,}135 \cos 10^0 = -0{,}137 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Определим модуль абсолютного ускорения

$$a_a = \sqrt{a^2{}_{ax} + a_{ay}^2} = \sqrt{0{,}081^2 + (-0{,}137)^2} = 0{,}159 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

4. Ответ:

$$\upsilon_a = 1{,}319 \text{ (м/с)},$$

$$a_a = 0{,}159 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

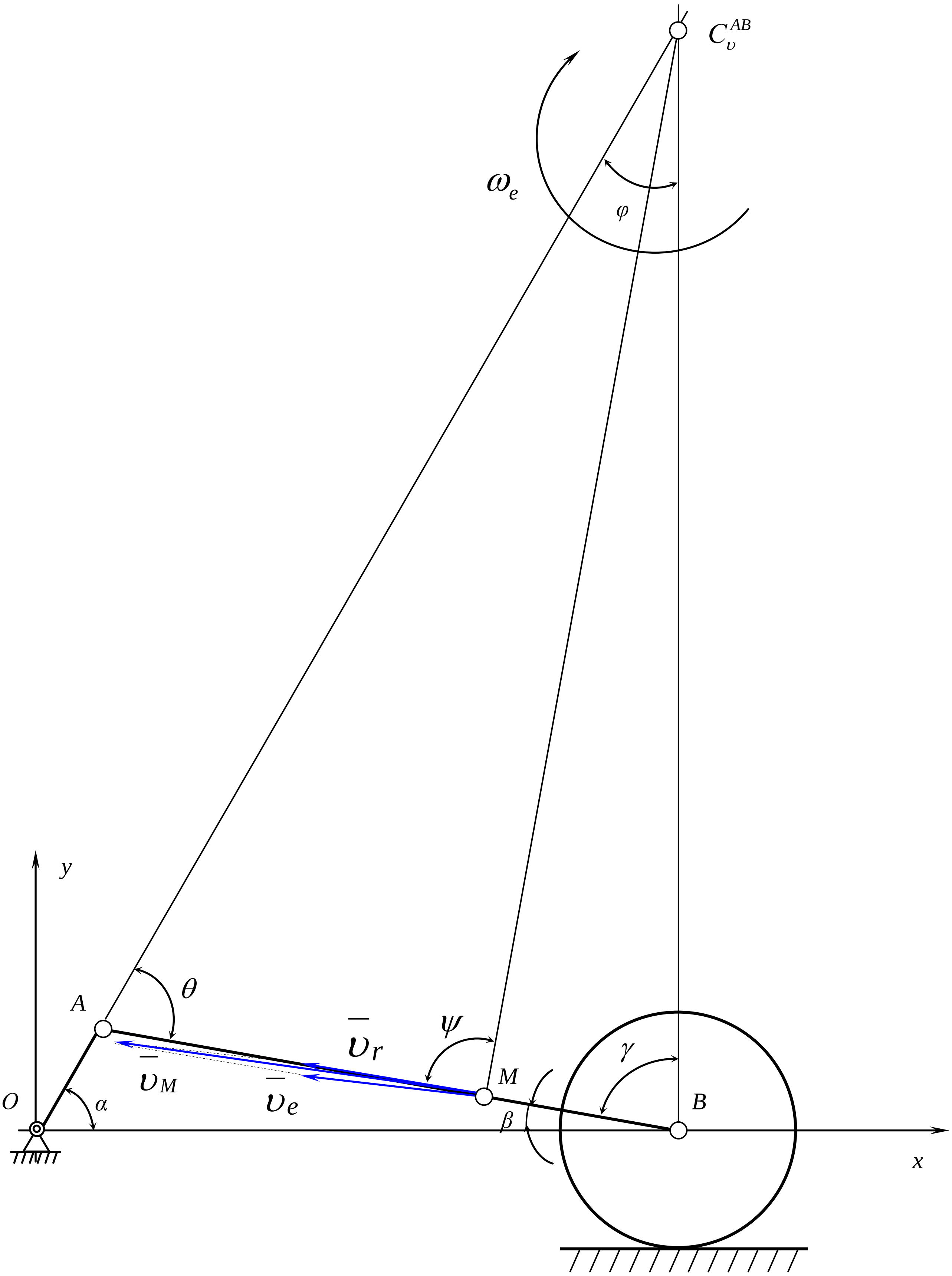


Рис. 93. Определение абсолютной скорости точки «*M*»

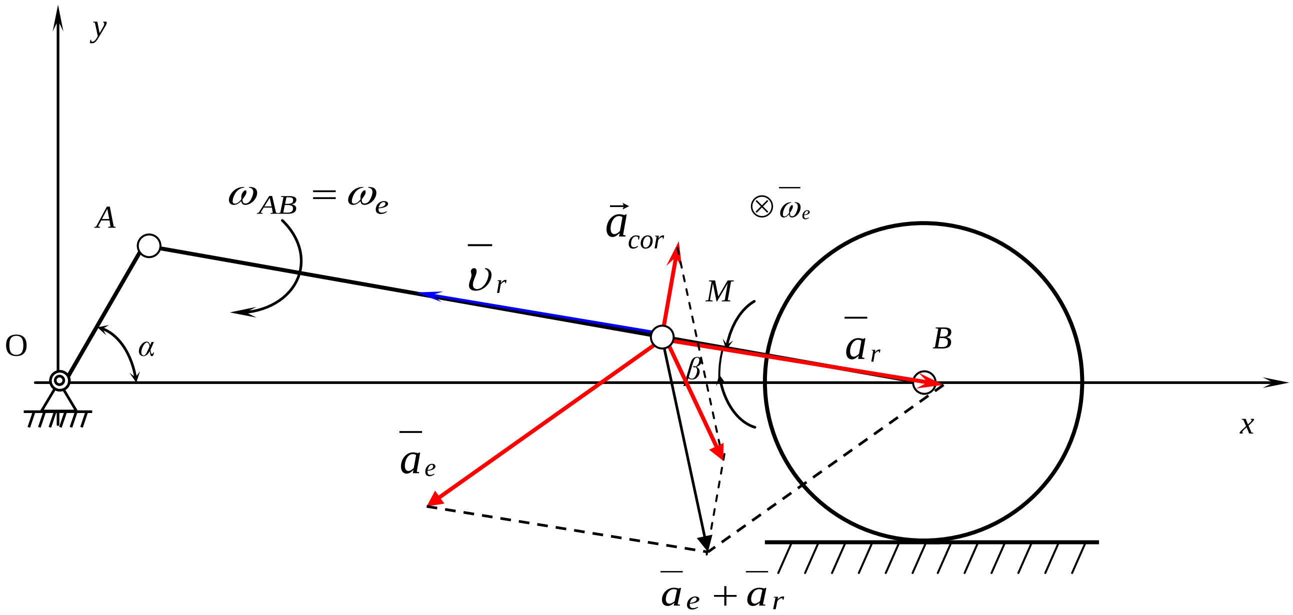


Рис. 94. Определение абсолютного ускорения точки «*M*»

7. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

7.1. Перечень тем и вопросов к экзамену по разделу «Статика»

1. Сила и пара сил.
2. Момент силы относительно точки.
3. Момент силы относительно оси.
4. Векторный момент пары сил.
5. Момент пары сил относительно оси.
6. Аксиомы статики.
7. Теорема о трех силах.
8. Теорема о сумме моментов сил пары.
9. Теорема об эквивалентности двух пар.
10. Теорема о сложении двух пар.
11. Приведение силы к центру.
12. Основная теорема статики.
13. Главный вектор и главный момент системы сил.
14. Зависимость главного вектора и главного момента системы сил от положения центра приведения.
15. Условия равновесия в векторной форме.
16. Условия равновесия в аналитической форме.
17. Статические инварианты и частные случаи приведения.
18. Теорема Вариньона.
19. Распределенные нагрузки.
20. Внутренние и внешние связи.
21. Равновесие тела при действии плоской системы сил.
22. Равновесие тела при действии пространственной системы сил.
23. Равновесие тела при наличии трения.
24. Центр параллельных сил.
25. Центр тяжести.

7.2. Перечень тем и вопросов к экзамену по разделу «Кинематика»

1. Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки.
2. Скорость точки при векторном, координатном и естественном способе задания движения.
3. Ускорение точки при векторном, координатном и естественном способе задания движения.
4. Поступательное движение твердого тела.
5. Вращательное движение твердого тела.
6. Угловая скорость и угловое ускорение.
7. Определение скорости точки тела при вращательном движении.
8. Определение ускорения точки тела при вращательном движении.
9. Плоское движение твердого тела.
10. Способы определения скорости точки тела при плоском движении.

11. Мгновенный центр скоростей.
12. Определение положения мгновенного центра скоростей.
13. Определение ускорения точки твердого тела при плоском движении.
14. Мгновенный центр ускорений.
15. Сферическое движение твердого тела.
16. Движение свободного твердого тела.
17. Сложное движение точки.
18. Относительное, переносное и абсолютное движение.
19. Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки.
20. Теорема о сложении ускорений при сложном движении точки (Теорема Кориолиса).
21. Правило Жуковского (для определения направления ускорения Кориолиса).
22. Сложное движение твердого тела.
23. Сложение поступательных движений.
24. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.
25. Сложение вращений вокруг параллельных осей.

7.3. Перечень тем и вопросов, знание которых необходимо для выполнения расчетно-графических работ по разделу «Статика».

1. Распределенные нагрузки.
2. Момент силы. Момент пары сил.
3. Теорема Вариньона.
4. Принцип освобождаемости от связей.
5. Условия равновесия плоской системы сил.
6. Внешние и внутренние связи.
7. Внешние и внутренние силы.
8. Варианты расчетной схемы для составной конструкции.
9. Условие, которому удовлетворяют усилия взаимодействия отдельных частей составного тела.
10. Статически определимые и статически неопределимые задачи.
11. Момент силы относительно оси.
12. Момент силы относительно координатных осей.
13. Момент пары сил относительно координатных осей.
14. Условия равновесия пространственной системы сил.
15. Приведение системы сил к заданному центру. Частные случаи приведения.

7.4. Перечень тем и вопросов, знание которых необходимо для выполнения контрольных домашних заданий по разделу «Кинематика».

1. Способы задания движения точки.
2. Скорость точки при координатном способе задания движения.
3. Ускорение точки при координатном способе задания движения.

4. Скорость точки при естественном способе задания движения.
5. Ускорение точки при естественном способе задания движения.
6. Скорость точки тела при плоском движении.
7. Теорема о сложении скоростей.
8. Теорема о проекциях скоростей на ось, проходящую через две точки.
9. Мгновенный центр скоростей.
10. Ускорение точки тела при плоском движении.
11. Относительная, переносная и абсолютная скорости.
12. Относительное, переносное и абсолютное ускорения.
13. Направление кориолисова ускорения.
14. Величина кориолисова ускорения.
15. Условия, при которых величина кориолисова ускорения равна нулю.

8. ГЛОССАРИЙ

1. Статика – раздел теоретической механики, в котором рассматриваются и изучаются механические взаимодействия между материальными телами, а также условия равновесия материальных тел.
2. Механическое воздействие одного материального тела на другое – это такое воздействие, при котором пренебрегают изменениями в химической структуре и физическом состоянии (нагреве, охлаждении) взаимодействующих тел.
3. Абсолютно твердое тело – материальное тело, геометрическая форма и размеры которого не изменяются ни при каких механических воздействиях, а расстояния между любыми двумя его точками остается постоянным.
4. Материальная точка – материальное тело, размерами которого можно пренебречь.
5. Сила – основная количественная мера механического взаимодействия тел. Сила является векторной физической величиной, которая характеризуется численным значением, направлением и точкой тела, в которой приложена.
6. Система сил – группа нескольких сил, приложенных к одному твердому телу в его точках.
7. Эквивалентные системы сил – системы сил, которые, действуя отдельно на одно и то же покоящееся тело, могут сообщить ему одно и то же движение.
8. Уравновешенная система сил (система сил эквивалентная нулю) – система сил, которая будучи приложенной к покоящемуся телу, не изменит его состояния покоя.
9. Равнодействующая сила – сила, действие которой эквивалентно действию рассматриваемой системы сил.
10. Свободное твердое тело – тело на положение и движение которого не наложено никаких ограничений.
11. Свободное твердое тело – тело, имеющее возможность получать любое движение из рассматриваемого положения под действием соответствующей системы сил.
12. Связи – условия, которые накладывают определенные ограничения на положение и (или) движение изучаемого тела.
13. Реакции связей – силы, выражающие только действие связей.
14. Система сходящихся сил – группа сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.
15. Условия равновесия – условия, при выполнении которых система активных сил и реакций связей является уравновешенной.
16. Векторный момент силы относительно точки – это вектор, являющийся результатом векторного произведения радиус-вектора (проведенного из моментной точки в точку приложения силы) на вектор силы.

17. Алгебраический момент силы относительно точки – это алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо этой силы относительно моментной точки, взятая со знаком плюс или минус.
18. Плечо силы относительно моментной точки – это кратчайшее расстояние между моментной точкой и линией действия силы, то есть длина отрезка перпендикуляра опущенного из моментной точки на линию действия силы.
19. Момент силы относительно оси – это алгебраический момент проекции силы на плоскость перпендикулярную к рассматриваемой оси, относительно точки пересечения оси и плоскости.
20. Пара сил – система двух равных по величине параллельных сил, не лежащих на одной прямой и направленных в противоположные стороны.
21. Векторный момент пары сил – это вектор, равный по величине произведению силы пары на ее плечо. Векторный момент пары сил направлен перпендикулярно к плоскости действия пары сил так, чтобы с направления этого вектора видеть стремление пары сил вращать тело против движения часовой стрелки.
22. Алгебраический момент пары сил – это произведение величины одной из сил пары на плечо пары, взятое со знаком плюс или минус.
23. Плоскость действия пары – плоскость, в которой расположены силы пары.
24. Плечо пары сил – это кратчайшее расстояние межу линиями действия сил, входящих в состав пары.
25. Главный вектор – вектор, равный геометрической сумме всех сил системы и приложенный в центре приведения системы сил.
26. Главный момент – вектор, равный векторной сумме векторных моментов всех сил системы, относительно центра приведения.
27. Статические инварианты системы сил относительно изменения ее центра приведения – характеристика системы сил не зависящая от выбора центра приведения.
28. Первый статический инвариант – главный вектор системы сил.
29. Второй статический инвариант – скалярное произведение главного вектора и главного момента системы сил.
30. Статически определимые задачи – задачи, в которых число неизвестных не превышает число уравнений равновесия.
31. Статически неопределимые задачи – задачи, в которых число неизвестных превышает число уравнений равновесия.
32. Центр тяжести – это точка, являющаяся центром системы параллельных сил тяжести приложенных к отдельным частям твердого тела.
33. Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение точки или твердых тел независимо от причин, которые вызвали это движение.

34. Закон движения точки – это условия, позволяющие определить положение точки в любой момент времени, относительно системы отсчета.
35. Скорость точки – важнейшая характеристика движения точки, определяемая как первая производная по времени от радиус-вектора движущейся точки.
36. Ускорение точки – важнейшая характеристика движения точки, определяемая как вторая производная по времени от радиус-вектора движущейся точки.
37. Поступательное движение твердого тела – такое движение твердого тела, при котором любая прямая в теле остается параллельной своему первоначальному положению.
38. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси – такое движение твердого тела, при котором две его точки остаются неподвижными.
39. Угловая скорость твердого тела – одна из основных характеристик вращательного движения твердого тела, определяемая как первая производная по времени от угла поворота.
40. Угловое ускорение твердого тела – одна из основных характеристик вращательного движения твердого тела, определяемая как вторая производная по времени от угла поворота.
41. Плоское движение твердого тела – это такое движение твердого тела, при котором, каждая его точка движется все время в одной плоскости, то есть траектории всех точек твердого тела при таком движении являются плоскими кривыми в параллельных плоскостях.
42. Мгновенный центр скоростей – единственная точка плоской фигуры, совершающей плоское движение при не равной нулю угловой скорости, скорость которой в каждый момент времени равна нулю.
43. Сложное (составное) движение точки – движение точки, состоящее из нескольких движений.
44. Переносное движение – движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной.
45. Относительное движение – движение точки по отношению к подвижной системе отсчета.
46. Абсолютное (составное) движение – это движение точки по отношению к неподвижной абсолютной системе отсчета.
47. Относительная скорость точки – скорость точки по отношению к подвижной системе отсчета.
48. Переносная скорость точки – скорость точки подвижного пространства, в которой в данный момент времени находится изучаемая движущаяся точка по отношению к неподвижной абсолютной системе отсчета.
49. Абсолютная скорость точки – скорость точки по отношению к неподвижной абсолютной системе отсчета, равная векторной сумме векторов переносной и относительной скорости.

50. Относительное ускорение точки – ускорение точки по отношению к подвижной системе отсчета.
51. Переносное ускорение точки – ускорение точки подвижного пространства, в которой в данный момент времени находится изучаемая движущаяся точка по отношению к неподвижной абсолютной системе отсчета.
52. Ускорение Кориолиса – одно из составляющих абсолютного ускорения точки, совершающей сложное движение, выражающее результат взаимодействия относительного движения любого характера и переносного движения, имеющего вращательный характер. Ускорение Кориолиса определяется как удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор относительной скорости точки или по правилу Жуковского.
53. Абсолютное ускорение точки - ускорение точки по отношению к неподвижной абсолютной системе отсчета, равное векторной сумме векторов переносного, относительного и кориолисового ускорений.
54. Мгновенный центр ускорений – единственная точка твердого тела, совершающего плоское движение, ускорение которой в каждый момент времени равно нулю.

9. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для вузов.-6-е изд., перераб. и доп / Н.Н. Никитин. М.: Высшая школа. 2003.
2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов.- 12-е изд.,стер.- 416 с.: ил / С.М. Тарг. М.: Высшая школа. 2001.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.; под общ. ред. А.А. Яблонского.-7-е изд., испр. М.: Интеграл. 2001.
4. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И.В. Мещерский / под ред. В. А. Пальмова, Д.Р.Меркина.-40-е изд., стер. СПб.: Лань, 2004.
5. Лабораторно-демонстрационный комплекс по теоретической механике: метод. указ. для студ. мех. спец. всех форм обучения / НГТУ; сост.: А.Ю.Панов и др.- 23 с.: ил. Н. Новгород. 2001.
6. Лабораторно-демонстрационный комплекс по кинематике: метод. указ. для студ. мех. спец. всех форм обучения / НГТУ; Каф. «Теоретическая механика»; сост.: А.Ю.Панов и др.-Н.Новгород:, 2002.- 48 с.: ил.
7. Лабораторно-демонстрационный комплекс по динамике: метод. указ. для студ. мех. спец. всех форм обучения / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов, Р.Л.Шиберт. Н. Новгород. 2003.
8. Равновесие твердых тел. Рабочая тетрадь №1 по теоретической механике / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов, Н.Ф. Ершов, Р.Л. Шиберт, Д.А. Смирнов; Н.Новгород, 2006.
9. Кинематические характеристики плоских механизмов. Рабочая тетрадь №2 по теоретической механике / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов, Н.Ф Ершов, Р.Л. Шиберт, Д.А. Смирнов; Н.Новгород, 2006.