НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

Кафедра «Вычислительные системы и технологии»

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Тема I Множества
Тема II Комбинаторика

Н.Новгород
2013

Содержание

1. Теория множеств. Основные понятия и определения

1.1. Понятие множества

Что такое множество? С первого взгляда вопрос кажется простым, но по мере размышления над ним обнаруживается, что ответить на него не так просто, значительно проще проанализировать содержание этого понятия на примерах.

Объекты материального мира существуют в составе определенных совокупностей, которые и дают первые примеры множеств: стадо коров, отара овец, множество пальцев на руке и т.п. К примерам множеств, рассматриваемых в математике, относятся: множество всех целых чисел, множество решений данного уравнения, множество всех точек отрезка, множество всех треугольников и т.д.

В результате многократного использования в практической деятельности людей многочисленных примеров совокупностей сформировалось математическое понятие множества, как объединения отдельных объектов в нечто единое целое. Предметы, из которых состоит множество, называются его элементами. Множество считается заданным, если заданы его элементы, оно раз и навсегда определяется своими элементами. Своеобразный пример множества мы находим у Марка Твена, утверждавшего, что "в кармане у Тома Сойера оказалось: 12 мраморных шариков, свистулька, осколок синего бутылочного стекла, деревянная пушка, кусок мела, стеклянная пробка от графина, оловянный солдатик, пара головастиков, 6 хлопушек, одноглазый котенок, медная ручка от двери, собачий ошейник - только собаки не было, - рукоятка ножа, четыре апельсиновых корки и старая медная рамка от окошка с чердака". В этом отрывке дается списание множества вещей в кармане *у* Тома Сойера. Сами вещи являются элементами данного множества.

Можно ли дать строгое математическое определение понятию множества? Оказывается, что сделать этого нельзя. Понятие множества относится к числу неопределяемых понятий, таких как, например, понятие точки в геометрии. Определения математических объектов начинаются с указания рода, в который в качестве вида входят определяемые понятия.

Рассмотрим простой пример - определение ромба. *Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.* Родовым понятием для ромба является параллелограмм. Затем указываются видовые отличия, выделяющие данное понятие из родового. В нашем примере видовым отличием является равенство всех сторон. Однако все математические понятия нельзя определить через ближайший род и видовое отличие.

В самом деле, пусть понятие A_1 определяется через родовое понятие A_2, понятие A_2 - через родовое понятие A_3 и т.д. Возникает цепочка понятий $A_1, A_2, A_3, \ldots$, в которой каждое последующее понятие шире предыдущего. Последнее понятие в этой цепочке не может быть определено, для него нет более широкого родового понятия. Понятие множества является одним из таких предельно широких математических понятий и потому не может быть определено. Однако рассматриваемое во всей своей общности, это понятие исключительно полезно для математики, так как современная математика строится на его основе.

1.2. Историческая справка

Раздел математики, занимающийся множествами, называется теорией множеств. Возникла эта теория во второй половине XIX века, главным образом в трудах немецкого математика Г. Кантора (1845-1918). Кантор определял множество как "любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое". Однако это высказывание нельзя считать строгим математическим определением понятия множества, так как оно выражается через понятие совокупности, имеющего то же самое содержание, что и понятие множества.

Крупным достижением Кантора было создание метода, позволяющего сравнивать бесконечные множества. В 1874 году он доказал, что множество вещественных чисел больше множества натуральных чисел. Заметим, что более плотное расположение множества вещественных чисел на числовой оси по сравнению с множеством натуральных чисел еще не доказывает утверждения Кантора. Например, рациональные числа также расположены более плотно, чем натуральные, тем не менее, как показал Кантор, их не больше, чем натуральных. Исторически сложилось так, что идеи Кантора встретили резкое сопротивление со стороны современников, однако эти идеи впоследствии оказали огромное влияние на развитие математики.

В развитие теории множеств значительный вклад внесли советские математики Н.Н.Лузин, П.С.Александров, А.Н.Колмогоров.

1.3. Способы задания множества

Будем обозначать множества большими латинскими буквами: *A, B, C, ... X, Y, ...* . Элементы множеств принято обозначать малыми латинскими буквами *a, b, c, ... x, y, z*. Тот факт, что *a* является элементом множества *A*, символически записывают $a \in A$ или $A \ni a$ и читают: «*a* принадлежит *A*» или «*A* содержит *a* ». Если элемент *a* не принадлежит множеству *A*, то пишут: $a \notin A$.

Если множество состоит из конечного числа элементов, то оно называется конечным. В противном случае оно называется бесконечным. Конечное множество в принципе можно задавать перечислением всех его элементов. В этом случае в фигурных скобках записываются все элементы множества или их обозначения. Например, A={0, I, 2, 3, 4, 5} , B ={Арзамас, Богородск, Выкса}. Однако, если число элементов конечного множества очень велико, то задать его с помощью перечисления всех элементов практически невозможно. Рассмотрим, например, "книгу", страницы которой заполнены лишь двумя символами: 0 и 1. Пусть каждая страница содержит 50 строк, а каждая строка 60 знаков. Предположим, что эта "книга" содержит все страницы, которые можно составить из нулей и единиц, причем одинаковых страниц в ней нет. Такая "книга" состояла бы из 2^{3000} страниц. Это число столь велико, что его трудно представить. Оно значительно превышает число атомов всей видимой Вселенной, которое примерно равно $10^{73} = 2^{73\log_2 10} \approx 2^{24}$.

Если множество бесконечно, то задать его перечислением всех элементов нельзя и в теоретическом плане. Такие множества иногда можно задавать в виде $\{a, в, c, \ \ldots \ \}$, если по указанным до многоточия элементам можно судить об оставшихся элементах. Например, N= {1,2,3,...} есть множество всех натуральных чисел, K ={1, 4, 9, 25, 36, ...}есть множество всех квадратов натуральных чисел.

Наиболее универсальным способом задания множества является задание его с помощью некоторого характеристического свойства, т.е. такого свойства, которое имеет место для каждого элемента данного множества и которое не выполняется для любого элемента, не принадлежащего данному множеству.

Пусть P - некоторое свойство. Обозначим через $P(x)$ утверждение: "Элемент x обладает свойством P". Тогда множество всех элементов, обладающих свойством P, будем обозначать так: $\{ x \mid P(x) \}$. Например, X ={x |x - натуральное число, не делящееся на два} есть множество всех нечетных натуральных чисел. Если множество A конструируется из элементов некоторого множества B с помощью характеристического свойства P, то можно писать $A=\{x \mid x\in E$ и $P(x)\}$

но чаще пишут $A=\{x\in B \mid P(x)\}$.

Последняя запись читается так: *A* есть множество всех элементов из *B*, обладающих свойством *P*. Например, $X=\{x\in N \mid x^2\le 25\}$ есть множество {1, 2, 3, 4, 5}; множество всех натуральных чисел от 10 до 100 можно записать: $\{x\in N \mid 10\le x\le 100\}$. Рассмотрим еще пример. Пусть *S*(*O*,*r*)- окружность с центром в точке *O* и радиуса *r*, лежащая в плоскости α. Вспоминая определение окружности, получаем $S(O,r)=\{M\in\alpha \mid |OM|=r\}$.

1.4. Равенство множеств

В пункте 1 мы отмечали, что множество однозначно определяется своими элементами. Поэтому множества *A* и *B* следует считать равными лишь в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $a\in A$ тогда и только тогда, когда $a\in B$. Например, если *A*={*a, b, c, d*} и *B*={*b, d, c, a*}, то *A*=*B*. В частности, порядок расположения элементов в записи множеств при их сравнении во внимание не принимается. Рассмотрим еще пример. Пусть в плоскости α заданы две точки: А и В. Обозначим середину отрезка *AB* через *O*. Рассмотрим два множества: $X=\{M\in\alpha \mid OM\perp AB\}$ и $Y=\{M \mid |MA|=|MB|\}$. Очевидно, что *X*=*Y*, так как оба множества представляют собой множество точек срединного перпендикуляра к отрезку *AB*. Особо следует отметить, что каждый объект может быть элементом множества только один раз. Пусть, например, *X* ={*x*|*x* -гласный звук слова "математика"} . Выписывая все гласные звуки, получим: {а, е, а, и, а}. Звук "а" перечислен трижды. Вместе с тем ясно, что все звуки "а" тождественны, так что *X* ={а, е, и}. Имеем: {а, е , а ,и, а}={а, е, и }.

1.5. Пустое множество

Не существует ограничения в отношении того, насколько много или мало элементов может быть в одном множестве, множество может состоять из одного элемента, как, например, множество $X=\{x\in R\mid x^2-2x+1=0\}$, а может быть и бесконечным, как, например, $N=\{x\mid x$ — натуральное число$\}$. В математике оказывается удобным рассматривать так называемое пустое множество, т.е. такое множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом Ø. Очевидно, что $\varnothing=\{x\mid x\neq x\}$. Легко уяснить, что существует лишь одно пустое множество, хотя задано оно может быть различным образом. Так $\{x\in N\mid x^2+1=0\}=\varnothing$. Необходимость введения понятия пустого множества объясняется тем, что в противном случае при упоминании о пустом множестве нам всякий раз приходилось бы доказывать его существование. Нельзя было бы, например, говорить о множестве корней данного уравнения, не проверив, что оно на самом деле имеет корень. Вопрос о том, является ли множество, заданное с помощью характеристического свойства пустым, нередко представляет собой сложную математическую проблему.

Рассмотрим, например, множество $X=\{n\in N\mid n>2$ и найдутся такие $x\in N, y\in N, z\in N$, что $x^n+y^n=z^n\}$. Пусто множество *X* или нет? Другими словами, имеет ли уравнение $x^n+y^n=z^n$ решение в натуральных числах при $n>2$? Великий французский математик П.Ферма записал в 1630 году, что он нашел удивительное доказательство неразрешимости данного уравнения, т.е. того, что множество *X* пусто. За прошедшие более чем 300 лет эту задачу решали многие великие математики, и хотя был достигнут некоторый прогресс, до сегодняшнего дня неизвестно, пусто множество *X* или нет. Заметим, что при показателе $n=2$ уравнение разрешимо, например, [illegible].

1.6. Числовые множества

Математика изучает главным образом такие множества, элементами которых являются математические объекты: точки, линии, формулы, уравнения, функции и т.п. Множества, элементами которых является числа, называются числовыми. Рассмотрим обозначения наиболее употребительных множеств: N - множество всех натуральных чисел, N_0- множество всех целых неотрицательных чисел, Q- множество всех рациональных чисел, Q^+ - множество всех рациональных положительных чисел, Z - множество всех целых чисел, R - множество всех вещественных чисел, R^+- множество всех положительных вещественных чисел.

Приведем еще множества, являющиеся числовыми промежутками. Пусть $a<b$. Отрезок [illegible]. Интервал [illegible] Полуинтервал $[a, b)$, замкнутый слева: [illegible]. Полуинтервал $(a, b]$ замкнутый справа: [illegible] Замкнутый луч: [illegible] Открытый луч: [illegible]

1.7. Подмножество

Множество A называется подмножеством множества X, если в A нет таких элементов, которые не принадлежали бы X. Если A - подмножество X, то пишут $A \subset X$ или $X \supset A$ и читают: "A включено в X" или "X включает A". Пустое множество является подмножеством любого множества, так как оно вообще не содержит элементов, а потому и таких элементов, которые не принадлежали бы X. Имеем: $\varnothing \subset X$.

Если A не является подмножеством X, то пишут: $A \subseteq X$ или $X \supseteq A.$. Этот же факт можно записать и так: $A \not\subset X$ или $X \supset A.$ В целях наглядности удобно произвольные множества схематически изображать некоторыми фигурами плоскости, например кругами. Это позволяет строить наглядные диаграммы, иллюстрирующие различные отношения между множествами. На рис.1 приведена диаграмма, иллюстрирующая отношение включения $A \subset X$ между множествами A и X.

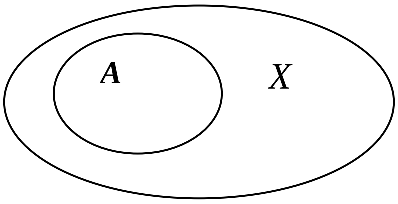


Рис.1

Из определения легко вытекают следующие свойства отношения включения:

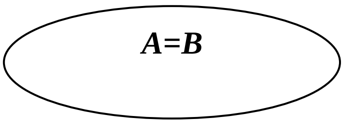
1. $X \subset X$, т.е всякое множество является подмножеством самого себя;

2. A=X тогда и только тогда, когда $A \subset X$ и $X \subset A$;

3. Если $A \subset X$ и $X \subset Y$, то $A \subset Y$.

Говорят, что A является собственным подмножеством множества X, если $A \subset X$ и $A \neq X$. Например, числовые промежутки являются собственными подмножествами множества вещественных чисел R. Множество простых чисел является собственным подмножеством множества натуральных чисел N .

Пусть $x \in X.$. Множество $\{x\}$ является подмножеством X, т.е. $\{x\} \in X$. Заметим, что следует различать элемент x и одноэлементное множество *{x)*. Так, если $X=\{x, y, \{x, y\}\}$, то $\{\{x,y\}\}$- подмножество, содержащее один элемент $\{x, y\}$, а $\{x, y\}$ - подмножество, содержащее два элемента x и y . Ясно, что $\{\{x ,y\}\} \neq \{x, y\}$. Приведем теперь диаграммы всевозможных связей между множествами A и B по отношению к включению.

1. 

$A \subset B$
$B \subset A$

Рис.2 В этом случае A=B

2.

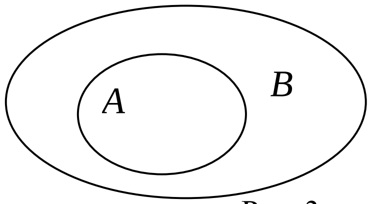


Рис.3

$A \subset B$

$B \not\subset A$

A есть собственное подмножество *B*

3.

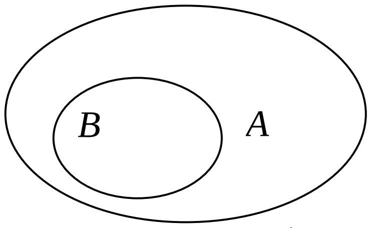


Рис.4

$B \subset A$

$A \not\subset B$

B есть собственное подмножество *A*

4.

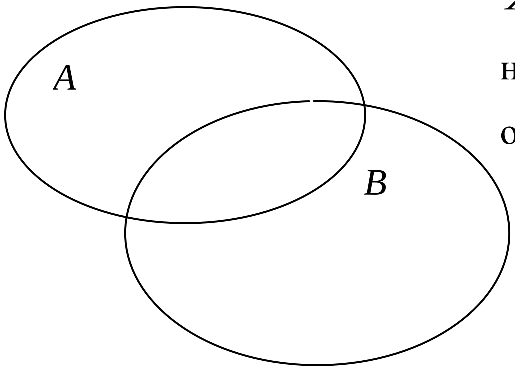


Рис.5

$A \not\subset B, B \not\subset A$,

но множества *A* и *B* имеют общие элементы

5.

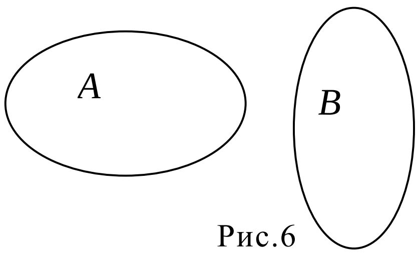


Рис.6

$A \not\subset B$ и $B \not\subset A$

и нет общих элементов

1.8. Булеан

Элементы множества сами могут быть некоторыми множествами. Например, элементами множества студенческих групп являются студенческие группы, которые, в свою очередь, являются множествами студентов. Большое применение в математике находит множество, элементами которого являются подмножества какого-либо множества.

Пусть X - некоторое множество. Множество всех подмножеств множества X называется булеаном X (в честь ирландского математика и логика Дж.Буля (1815-1864)). Булеан обозначается символом $B(X)$. Итак, $B(X)=\{A \mid A \subset X\}$. Заметим, что подмножество $A \subset X$ является элементом $B(X)$. В частности, $\varnothing \in B(X)$.

Пример.

Укажем булеан множества $X=\{0, 1, 2\}$, выписав все его элементы: $B(X)=\{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. Мы видим, что число элементов булеана в случае, когда множество X имеет 3 элемента, равно 8, т.е. 2^3 . Выпишем все элементы, содержащие 0 и не содержащие 0: $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}$;

$\{1,2\}, \{2\}, \{1\}, \varnothing$.

Случайно ли, что их число одинаково? Каждому множеству A, содержащему 0, сопоставляется одно и только одно множество, не содержащее нуля, состоящее из всех таких элементов, входящих в X, которые не входят в A. Поэтому подмножеств, содержащих 0 и не содержащих 0 - одинаковое количество.

Можно доказать, что если множество X состоит из n элементов, то оно содержит 2^n подмножеств. Обозначив через $m(X)$ число элементов конечного множества X, можно записать $m(D(X))=2^{m(X)}$.

1.9. Универсальное множество

Предположим, что изучается некоторая область знаний. Множество, состоящее из всех элементов исследуемой области, называется универсальным. Например, универсальным числовым множеством, рассматриваемым в математике начальной школы, является множество рациональных чисел. Универсальным числовым множеством нашего математического курса является множество вещественных чисел. Заметим, что универсальное множество зависит от того вопроса, который рассматривается, например, при выборе актива группы универсальным множеством является множество студентов группы. Мы будем обозначать универсальное множество символом *U*. На диаграммах универсальное множество обычно изображается множеством точек некоторого прямоугольника плоскости, а принадлежащие ему подмножества - кругами или овалами внутри прямоугольника

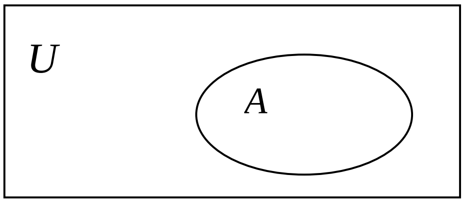


Рис 7

1.10. Примеры решения задач и упражнений

1) Запишите в символической форме следующие множества:

а) множество всех положительных рациональных корней уравнения;

$$x^7-8x^3-3=0;$$

б) множество всех целых корней уравнения $f(x)=0$;

в) множество всех равносторонних треугольников;

г) множество всех прямых, параллельных данной прямой;

д) множество всех хорд окружности;

е) множество всех квадратных уравнений с вещественными коэффициентами, имеющими единицу своим корнем;

ж) множество всех окружностей радиуса 5, центры которых принадлежат прямой l;

Решение

а) $A=\{x|\ x\in Q,\ x^7\text{-}8*x^3\text{-}3=0,\ x>0\}$;

б) $A=\{x|\ x\in N,\ f(x)=0\}$;

в) $A=\{\Delta(a,b,c)|\ a=b=c\}$;

г) $A=\{a|a||c\}$;

д) $A=\{a|a\leq r\}$;

е) $A=\{ax^2+bx+c=0|\text{x}=1\}$;

ж) $A=\{(x-a)^2+(y-b)^2=25|(a;b)\in l\}$.

2) Найти числовое множество A такое, что $\{x\in A \mid x>0\}=\{x\in A \mid x<0\}$.

Решение

$A=\{|x| \,|x\neq 0\}$

3) В каких отношениях находятся между собой множества $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{x\in R \mid x^2-3x+2=0\}$, $C=\{x\in Z \mid x\leq 3\}$.

Решение

Так как решением уравнения $x^2-3x+2=0$ являются корни $x_1=2$, $x_2=1$, то множество B имеет вид $B=\{1,2\}$. Отсюда получаем , что $B\subset A\subset C$.

4) Пусть X_1 и X_2 – множество студентов двух групп, а M – множество юношей, обучающихся в этих группах. Запишите с помощью включения следующие условия:

а) все юноши обучаются в первой группе;

б) в первой группе нет юношей;

в) вторая группа состоит из юношей;

г) все юноши обучаются в одной группе;

д) на курсе обучаются только юноши;

д) на курсе обучаются только девушки.

Решение

а) $M\subset X_1$

б) $M\not\subset X_1$

в) $M=X_2$

г) $M\subset X_1$ или $M\subset X_2$

д) $U=M$

д) $M=\varnothing$

5) Докажите, что если $A1\subset\varnothing$, то $A1=\varnothing$. Существуют ли другие множества, кроме пустого, обладающие этим свойством?

Доказательство

Запись $A \subset B$ означает, что в множестве A столько же или меньше элементов, чем в множестве B. Так как в пустом множестве $\varnothing$ нет элементов, то и в A тоже нет ни одного элемента. Поэтому A будет являться пустым множеством ($A=\varnothing$).

1.11. Задачи для решения

1) Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношением включения? Изобразите их на числовой прямой:

а)$A=\{x|x \in N, x>3\}$, $B=\{y|y \in N, y>2\}$;

б) $A=\{x|x \in R, x \leq 2\}$, $B=\{y|y \in R, y \leq 4\}$;

в) $A=\{x|x \in R, -2< x \leq 4\}$, $B=\{y|y \in R, 1 \leq y<2\}$;

г) $A=\{x|x \in N, 1< x \leq 5\}$, $B=\{y|y \in R, 1< y \leq 5\}$;

2) Верны ли записи:

а) $\{1; 4\} \subseteq \{\{1; 4; 3\},\{1; 2\}, 4; 1\}$;

б) $\{1; 4\} \in \{\{1; 4; 3\},\{1; 2\}, 1\}$;

в) $\{1; 3\} \in \{\{1; 2; 3\},\{1; 3\}, 1\}$;

г)$\{1; 5\} \subseteq \{\{1; 2; 5\},\{1; 5\}, 1; 2\}$

3) Выпишите пары равных множеств:

а) $A=\{$ф; в; с$\}$, $B=\{$в; ф; с$\}$;

б) $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{\mathrm{I}; \mathrm{II}; \mathrm{III}\}$;

в) $A= N$, B - множество натуральных чисел первого миллиона;

г) $A=[2; 3]$, $B= \{2; 3\}$;

д) $A=\{x|x \in N, 2<x<10\}$, $B=\{y|y \in Z, 2<y<10\}$;

е) $A=\{x|x \in Z, -3<x<5\}$, $B=\{y|y \in R,-3< y<5\}$;

ж) A - множество всех квадратов, B - множество всех прямоугольников с равными смежными сторонами;

з) A=(-2; 3], B=(-2; 3).

4) Перечислите элементы булеана множества $A=\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

Проверьте, что A и $B(A)$ имеют общий элемент.

5) Докажите, что если $A1\subset A2\subset\ldots\subset An\subset A1$, то $A1=A2=\ldots=An$.

6) Пусть $A=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$:

а) подсчитайте число элементов множества A;

б) покажите, что каждый элемент из A является его подмножеством.

7) В группе 25 студентов. Некоторые из них могут отсутствовать на занятиях. Сколько вариантов отсутствия студентов на занятиях возможно?

8) Для написания почтового индекса используется шесть ячеек. Сколько элементов содержит множество возможных почтовых отделений?

2. Операции над множествами

Операции над множествами позволяют из имеющихся множеств конструировать новые множества. Рассмотренное выше построение булеана $B(X)$ по множеству X является примером такого конструирования. Рассмотрим теперь операции над множествами, в известной степени аналогичные алгебраическим операциям над числами.

2.1 Объединение множеств

Начнем с примера. Пусть a и b - натуральные числа. Если число b делится на a, то будем писать $a|b$ ил $b{:}a$. Эти записи читаются так: $a|b$ “a делит b”; $b{:}a$ “b делится на a”

Рассмотрим два множества: X - множество всех четных чисел и Y -множество всех чисел, кратных трем, т.е. $X=\{x\in N|2|x\}$ и $Y=\{x\in N|3|x\}$. Образуем из множеств X и Y новое множество, в которое входили бы все элементы множества X, все элементы множества Y и только они. Это множество естественно назвать объединением множеств X и Y. В нашем примере это будет множество всех чисел, кратных двум или трем, т.е. $\{x\in N|2|\, x$ или $3|\, x\}$.

Определение. Объединением данных множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.

Если взяты два множества, например X и Y, то их объединение обозначается символом $X \cup Y$. Здесь $\cup$ - символ объединения. Итак, $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

Здесь союз "или" употреблен в неразделительном смысле, т.е. элементы, содержащиеся одновременно в X и Y, входят в их объединение. Согласно общему принципу образования множества, эти элементы входят в $X \cup Y$ только один раз. Например, если $X=\{I, 2, 3, 4\}$, $Y=\{2, 4, 6\}$, то $X \cup Y=\{1, 2, 3, 4, 6\}$. На рис. 8 показана диаграмма, иллюстрирующая объединение двух множеств.

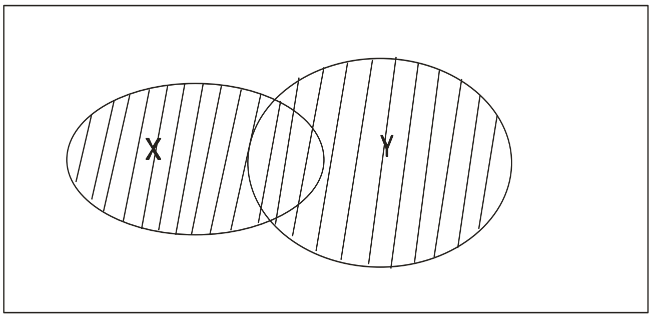


Рис. 8

Приведем некоторые свойства операции $\cup$. Ниже X, Y, Z - произвольные множества.

1. Идемпотентность объединения : $X \cup X = X$.
2. Коммутативность объединения : $X \cup Y = Y \cup X$.
3. Ассоциативность объединения: $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.
4. $X \cup \varnothing = X$.

Свойства 1, 2 и 4 непосредственно вытекают из определения объединения. Докажем ассоциативность.

Пусть $x \in (X \cup Y) \cup Z$. Тогда $x \in X \cup Y$ или $x \in Z$. Предположим сначала, что $x \in X \cup Y$, т.е. $x \in X$ или $x \in Y$. Если $x \in X$, то $x \in X \cup (Y \cup Z)$. Если же $x \in Y$, то $x \in Y \cup Z$, а потому $x \in X \cup (Y \cup Z)$. Предположим теперь, что $x \in Z$. Тогда $x \in Y \cup Z$, а потому $x \in X \cup (Y \cup Z)$. Итак, если $x \in (X \cup Y) \cup Z$, то $x \in X \cup (Y \cup Z)$, т.е. $(X \cup Y) \cup Z \subset X \cup (Y \cup Z)$. Докажем обратное включение. Пусть

$x \in X \cup (Y \cup Z)$, т.е. $x \in X$ или $x \in Y \cup Z$. Пусть $x \in X$. Тогда $x \in X \cup Y$, а потому $x \in (X \cup Y) \cup Z$. Предположим теперь, что $x \in Y \cup Z$, т.е. $x \in Y$ или $x \in Z$. Если $x \in Y$, то $x \in X \cup Y$, а потому $x \in (X \cup Y) \cup Z$. Если же $x \in Z$, то $x \in (X \cup Y) \cup Z$. Таким образом, если $x \in X \cup (Y \cup Z)$, то $x \in (X \cup Y) \cup Z$, т. е. $(X \cup Y) \cup Z \supset X \cup (Y \cup Z)$. Итак, мы видим, что $(X \cup Y) \cup Z \subset X \cup (Y \cup Z)$ и $X \cup (Y \cup Z) \subset (X \cup Y) \cup Z$. Поэтому $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.

В силу свойства ассоциативности порядок объединения множеств X,Y и Z несущественен, поэтому объединение этих множеств записывается в виде: $X \cup Y \cup Z$. Порядок расположения множеств в объединении тоже несущественен (в силу свойства коммутативности). Поэтому $X \cup Y \cup Z = Z \cup X \cup Y = Y \cup Z \cup X$ и т. д.

Образовывать объединение множеств приходится при решении многих математических задач.

Пример 1.

Рассмотрим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0. \end{array}\right.$

Пусть M - множество всех решений этой совокупности, M_1 - множество решений уравнения $f_1(x)=0$, а M_2 - множество решений уравнения $f_2(x)=0$. Тогда $M=M_1 \cup M_2$. Заметим, что к совокупности уравнений может сводится одно уравнение. Пусть нам требуется решить одно уравнение: $f(x)=x^6 -5x^4+6x^3+8x^2+40x+48=0$. Имеем: $f(x)=x^3(x^2-5x+6)+8(x^2-5x+6)=(x^3 +8)(x^2-5x+6)$. Ясно, что данное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x^3+8=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right.$

Находим: $M_1=\{x|\ x^3 +8\}=\{-2\}$, $M_2=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2;3\}$. Отсюда $M=\{x|f(x)=0\}=\{-2;2;3\}$.

2.2. Пересечение множеств

Пересечением данных множеств называется множество всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств. В случае, если даны два множества X и Y, то их пересечение обозначается $X \cap Y$, где $\cap$ - символ, обозначающий операцию пересечения. Итак, $X \cap Y = \{x | x \in X$ и $x \in Y\}$. Пересечение двух множеств на диаграмме изображается общей частью кругов, изображающих пересекаемые множества (рис. 9).

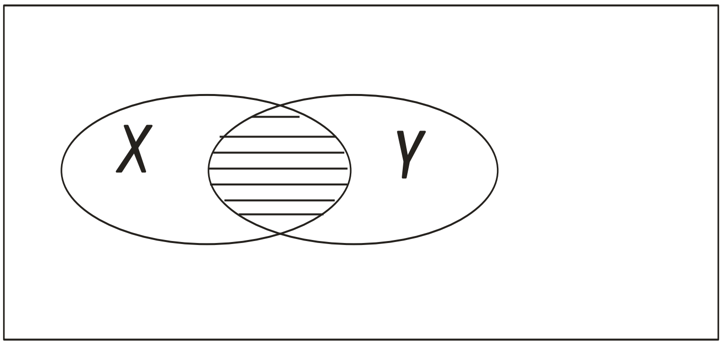


Рис.9

Если $X \cap Y = \varnothing$, то говорят, что множества X и Y не пересекаются.

Пример 1. Пусть X - множество всех ромбов, Y - множество всех прямоугольников. Тогда $X \cap У$ - множество всех квадратов

Пример 2. Обозначим через P - множество всех простых чисел, пусть $A = \{7x | x \in N\}$. Тогда $P \cap A = \{7\}$

Приведем основные свойства операции пересечений. Пусть X, Y, - произвольные множества.

I. Пересечение включено в каждое из пересекаемых множеств: $X \cap Y \subset X$, $X \cap Y \subset Y$.

2. $Z \subset X \cap Y$, тогда и только тогда, когда $Z \subset X$ и $Z \subset Y$.

3. Идемпотентность: $X \cap X = X$.

4. Коммутативность: $X \cap Y = Y \cap X$.

5. Ассоциативность: $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

Операция пересечения связана с объединением законами дистрибутивности: $\cup$

6. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

7. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cap Z)$.

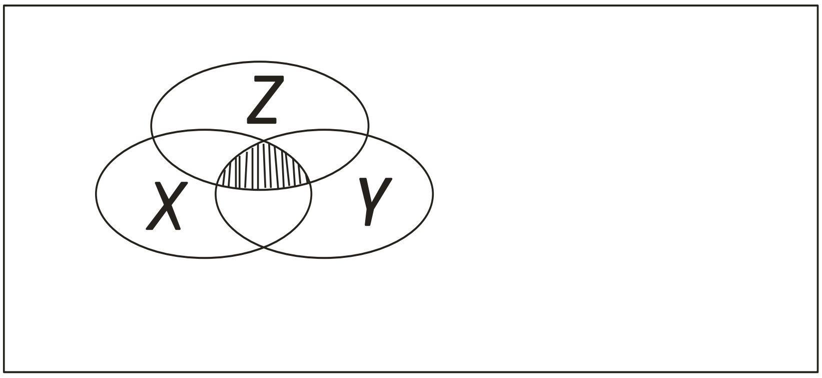
Они аналогичны дистрибутивному (распределительному) закону, связывающему операции сложения и умножения чисел: $x(y+z)=xy+xz$.

Свойства 1-4 непосредственно следуют из определения пересечения. Докажем ассоциативность. Применим для этого несколько другой прием, чем при доказательстве ассоциативности объединения.

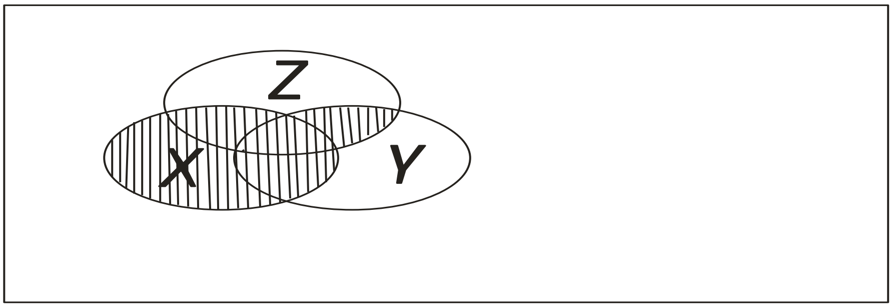
Пусть $P=X\cap(Y\cap Z)$, $Q=(X\cap Y)\cap Z$. По свойству 1: $P\subset X$ и $P\subset Y\cap Z$, а по свойству 2: $P\subset Y$ и $P\subset Z$. Так как $P\subset X$ и $P\subset Y$, то $P\subset X\cap Y$, а поскольку $P\subset Z$, то $P\subset(X\cap Y)\cap Z$. Итак, $P\subset Q$. Аналогично доказывается, что $Q\subset P$, значит $P=Q$.

Докажем дистрибутивный закон 6. Пусть $x\in X\cap(Y\cup Z)$. По определению пересечения $x\in X$ и $x\in Y\cup Z$, т.е. $x\in X$ и $x\in Y$ или $x\in X$ и $x\in Z$. Если $x\in Y$, то $x\in X\cap Y$, а поэтому $x\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$. Если же $x\in Z$, то $x\in X\cap Z$, откуда $x\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$. Таким образом, если $x\in X\cap(Y\cap Z)$, то $x\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$, т.е $X\cap(Y\cup Z)\subset(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$. Этим же приемом можно показать обратное включение.

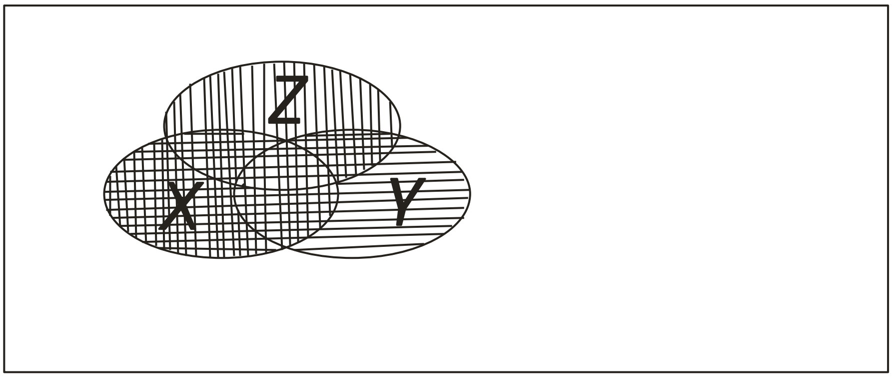
При изучении свойств операций над множествами полезно использовать круги Эйлера. Проиллюстрируем, например, дистрибутивный закон 7.



||| $Z\cap$Y Рис.10



||| $X\cup(Y\cap Z)$ Рис.11



_ $X\cup Y$ ||| $X\cup Z$ Рис.12

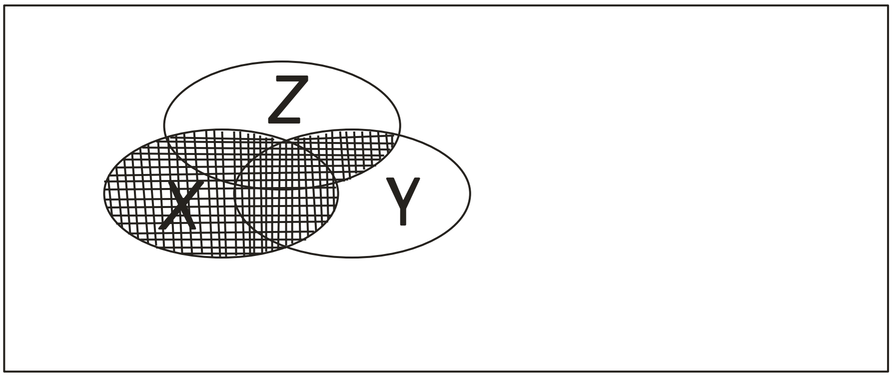


Рис.13

$(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

Пересечение множеств используется при решении многих математических задач.

Пример 3.

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0. \end{cases}$

Пусть M – множество решений этой системы, M_1(M_2) – множество решений уравнения $f_1(x)=0$ $(f_1(x)=0)$. Тогда $M= M_1\cap M_2$.

Рассмотрим, например, систему: $\begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases}$

Имеем: $M_1=\{2,3\}$, $M_2=\{1,3\}$, $M= M_1\cap M_2=\{3\}$.

Пример 4.

Обозначим через $D(f)$ область определения вещественной функции f. Легко проверить, что $D(fg)=D(f)\cap D(g)$, $D(f+g)=D(f)\cap D(g)$

2.3. Разность и дополнение

Пример 1. Тренер по плаванию был предупрежден, что студенты 15 группы не смогут придти на тренировку, так как на это время им назначена контрольная работа по математике. Его интересует, кто же из студентов, занимающихся плаванием, может быть на тренировке. Взяв список группы по плаванию, тренер вычеркивает из него студентов 15 группы. В результате он получает нужный ему список. Операция, проделанная тренером, в теории множеств называется вычитанием. Вычитание обозначается символом \ . Пусть X - множество студентов, занимающихся плаванием, Y - множество студентов 15 группы. Тогда $X\backslash Y$ – множество студентов, которые могут придти на тренировку.

Определение. Разностью множеств X и Y называется множество всех элементов из X, не принадлежащих Y. Разность обозначается $X\backslash Y$ (читается: "X минус Y"). Согласно определения $X\backslash Y=\{x\in X|\ x\notin Y\}$.

На рис.14 показано изображение разности с помощью кругов Эйлера, причем множество X\Y заштриховано.

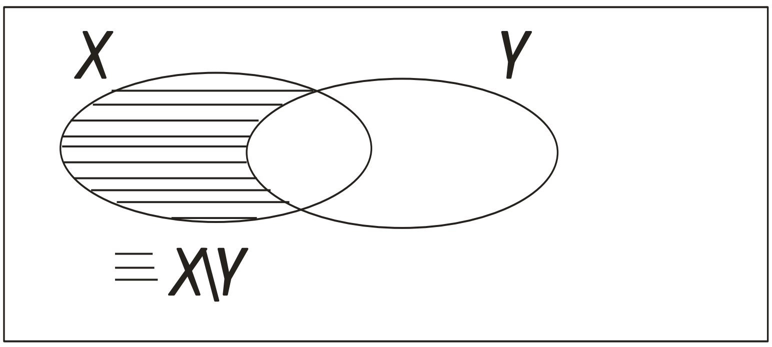


Рис.14

Приведем некоторые свойства операции вычитания.

1. $A\backslash \varnothing=A$, $\varnothing\backslash A=\varnothing$.

2. $A \setminus A = \varnothing$.

3. $X \setminus Y \subset X$.

4. $(X \setminus Y) \cup Y = X \cup Y$.

5. $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$.

Проиллюстрируем на кругах Эйлера свойство 5.

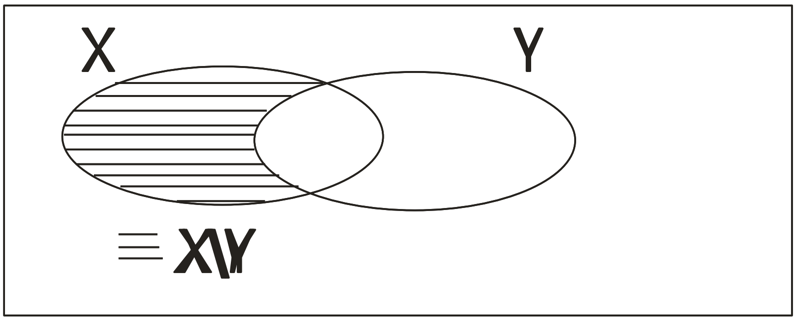


Рис.15

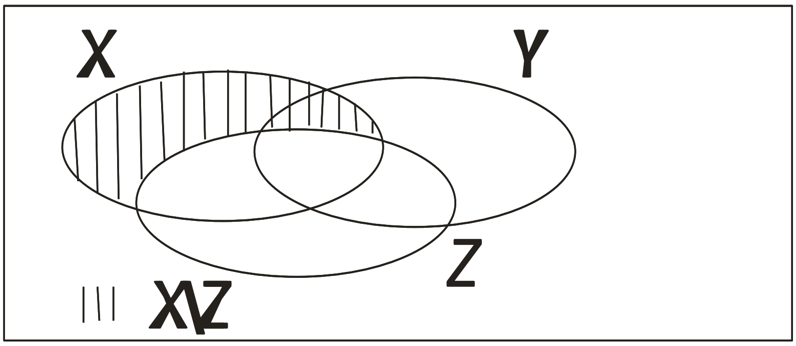


Рис.16

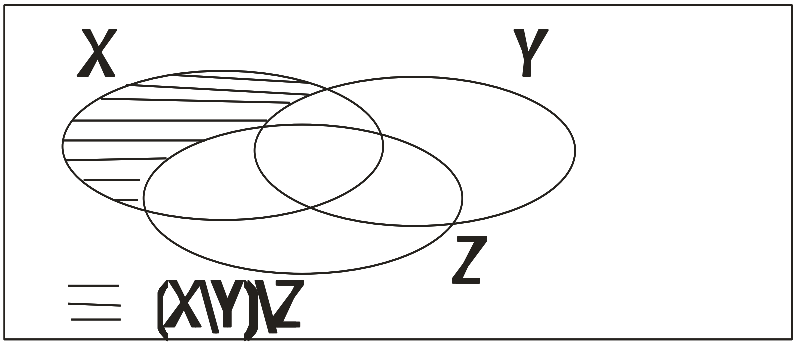


Рис.17

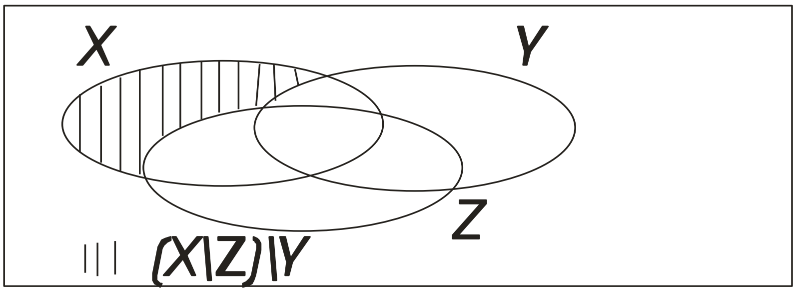


Рис.18

Если $Y\subset X$, го разность $X\backslash Y$ называют дополнением множества Y до множества X. Дополнение принято обозначать C_XY. Графическое изображение дополнения приведено на рис. 19.

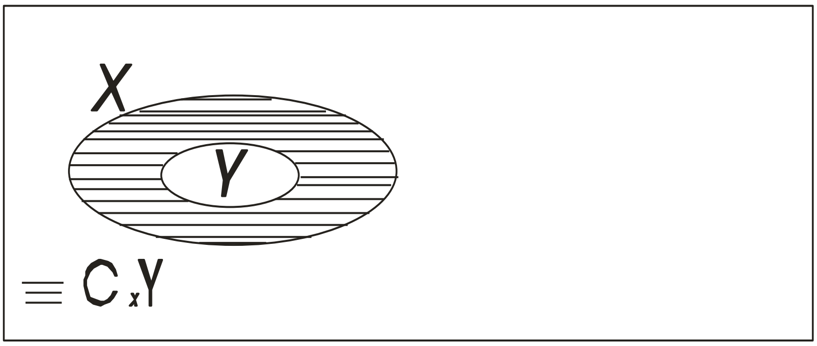


Рис.19

Если из контекста ясно, до какого множества проводится дополнение, то используется обозначение CY или $\bar{Y}$. Эти обозначения будут использоваться в дальнейшем. Если при этом в тексте не будет содержаться прямых указаний на множество, до которого производится дополнение, то это будет означать, что оно производится до универсального множества.

Рассмотрим важнейшие свойства дополнения.

1. Инволютивность дополнения: $\bar{\bar{X}} = X$
2. Если $X\subset Y$, то $\bar{Y}\subset\bar{X}$
3. Если $X\cap Y=\emptyset$, то $X\subset\bar{Y}$ и $Y\subset\bar{X}$
4. Законы де Моргана: $\overline{X\cup Y}=\bar{X}\cap\bar{Y}$, $\overline{X\cap Y}=\bar{X}\cup\bar{Y}$.

Докажем свойство 2.

Возьмем $x\in\bar{Y}$, тогда $x\notin Y$. Но $Y\supset X$, так что $x\notin X$, а поэтому $x\in\bar{X}$. Значит $\bar{Y}\subset\bar{X}$.

Докажем первый закон де Моргана. Ясно, что $X\subset X\cup Y$, $Y\subset X\cup Y$. По свойству 2 $\overline{X\cup Y}\subset\bar{X}$ и $\overline{X\cup Y}\subset\bar{Y}$. Отсюда по свойству 2 п.10.2 $\overline{X\cup Y}\subset\bar{X}\cap\bar{Y}$. Докажем обратное включение. Поскольку $X\cap(\bar{X}\cap\bar{Y})=(X\cap\bar{X})\cap\bar{Y}=\emptyset\cap\bar{Y}=\emptyset$, то $(X\cup Y)\cap(\bar{X}\cap\bar{Y})=(X\cap(\bar{X}\cap\bar{Y}))\cup(Y\cap(\bar{X}\cap\bar{Y}))=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$. По свойству 3 $\bar{X}\cap\bar{Y}\subset\overline{X\cup Y}$. Следовательно, $\overline{X\cup Y}=\bar{X}\cap\bar{Y}$.

Докажем второй закон де Моргана. Поскольку в первом законе де Моргана X и Y произвольны, то можно заменить X и Y на $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Тогда получим: $\overline{\overline{X}\cup\overline{Y}}=\overline{\overline{X}}\cap\overline{\overline{Y}}$. По закону инволютивности получаем отсюда $\overline{\overline{X}\cup\overline{Y}}=X\cap Y$. Следовательно, $\overline{\overline{\overline{X}\cup\overline{Y}}}=\overline{X\cap Y}$. Применяя еще раз закон инволютивности, получим $\overline{X}\cup\overline{Y}=\overline{X\cap Y}$.

2.4 Число элементов объединения и дополнения

Пусть U - конечное множество и $A=U$. Ясно, что множества A и $\overline{A}$ - конечны. Множество $\overline{A}=C_u A$ содержит те и только те элементы из U, которые не содержатся в A. Поэтому $n(A)+n(\overline{A})=n(U)$, так что

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$.

Эта формула позволяет вычислить число элементов множества $\overline{A}$, если известно число элементов U и A. Рассмотрим еще множество $B\subset U$. Вычислим число элементов $A\cup B$ (см. рис.7).

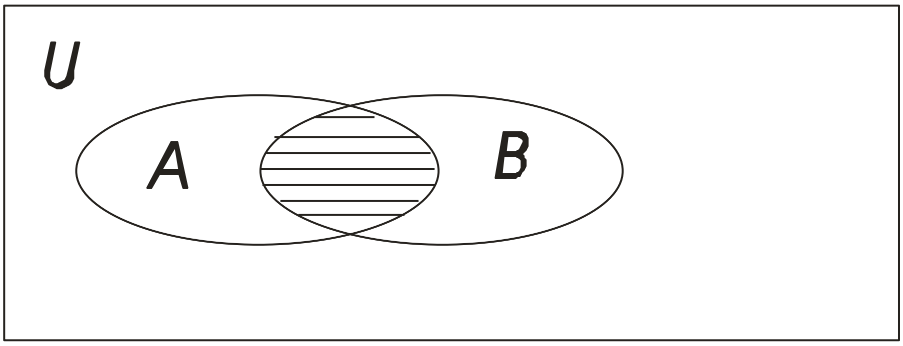


Рис.20

В множество $A\cup B$ могут входить 3 типа элементов:

1) элементы, входящие только в A;

2) элементы, входящие только в B;

3) элементы, входящие и в A, и в B.

Элементов первого типа войдет $n(A)-n(A\cap B)$, элементов второго типа $n(B)-n(A\cap B)$, а элементов третьего типа $m(A\cap B)$. Следовательно,

$$n(A\cup B)=(n(A)-n(A\cap B))+(n(B)-n(A\cap B))+n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Итак, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

2.5. Разбиение множеств

Пример 1. Пусть X – множество фамилий учащихся некоторого класса, обозначим через J множество всех букв, с которых начинаются эти фамилии. Если $A \in X$, т.е. в классе есть ученик, фамилия которого начинается с "A", то обозначим через K_A множество всех фамилий из X, начинающихся с "A". Аналогично вводим $K_{Б, \ldots} K_Я$. Рассмотрим семейство множеств $\{K_\alpha\}\ \alpha \in J$. Очевидно, что множества семейства $\{K\alpha\}$ обладают следующими свойствами.

1. Каждое $\{K\alpha\}$ есть подмножество X.
2. Каждое $\{K\alpha\}$ не пусто.
3. Объединение всех $\{K\alpha\}$ совпадает с X.
4. Любые два различных множества K_α и K_β не пересекаются.

В случае выполнения этих условий говорят, что семейство $\{K\alpha\}$ является разбиением множества X, а подмножество K_α - классами данного разбиения. При составлении списка в алфавитной порядке осуществляется разбиение множества фамилий на классы, рассмотренные нами в примере.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть X - непустое множество, семейство $\{K_\alpha, K_\beta, \ldots, K_\gamma\}$ называется разбиением множества X, .если

1. $K_i \subset X$ для всех $i \in \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$
2. $K_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$
3. $K_\alpha \cup K_\beta \cup \ldots \cup K_\gamma = X$
4. Если $K_i \neq K_j$, то $K_i \cap K_j = \varnothing$ для всех $i, j \in \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$.

Множество $J = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$ принято называть множеством индексов.

Пример 2. Рассмотрим множество вещественных чисел R. Пусть [illegible]. Семейство $\{R_-, R_0, R_+\}$ есть разбиение. Множество {-,0,+} есть множество индексов.

Пример 3. Пусть T - множество всех треугольников. Положим: T_0 -

множество остроугольных треугольников, $T_{п}$ - множество прямоугольных треугольников, $T_{т}$ - множество тупоугольных треугольников, семейство $\{T_{о}, T_{п}, T_{т}\}$ есть разбиение множества T, {о, п, т} – множество индексов.

Понятие разбиения множества на классы лежит в основе понятия классификации. Классификация проводится следующим образом. Выделяются некоторые признаки предметов данного рода, опираясь на которые производится разбиение исходного множества на классы. Каждый из приведенных выше примеров, являясь примером разбиения, является и примером классификации. В примере 1 классификация проведена по начальной букве фамилии, в примере 2 - по знаку числа, в примере 3 -по величине максимального угла треугольника. Примерами классификаций из других областей являются : библиотечно-библиографические классификации, связанные с разбиением множества книг в библиотеке на классы по признакам содержания, формы издания и др.; классификация языков мира по различным признакам, классификация животного и растительного мира в биологии. Особенно большое значение имеют классификации, в основу которых берутся главные, наиболее существенные признаки. Такие классификации являются источником развития науки. Так, менделеевская классификационная таблица химических элементов стала могучим орудием не только химии, но и всего естествознания, она сыграла огромную роль в разрешении вопроса о строении атома.

2.6. Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть X и Y - некоторые множества и $x \in X$, $y \in Y$. Располагая элементы x и y в определенном порядке, например, считая x первым элементом, а y вторым, мы получим упорядоченную пару (x,y). Элемент x называют первой координатой упорядоченной пары (x,y), а элемент y - второй координатой. Две упорядоченные пары считаются равными тогда и только тогда, когда равны их первые и вторые координаты, т.е. $(x,y)=(u,v)$ тогда и только тогда, когда $x=u$ и $y=v$.

Некоторые объекты в математике, имеющие важное теоретическое и прикладное значение, являются упорядоченными парами.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x^2 - y=1$. Его решением является упорядоченная пара (x_0, y_0) такая, что $x_0^2 - y_0=1$. Упорядоченные пары (1,0), (2,3), (3,8), (-2,3), являются решениями. Пара (3, 2) не является решением, так как $3^2-2\neq1$.

Декартовым или прямым произведением множества X на множество Y называется множество всех упорядочение пар (x,y), где $x\in X$, $y\in Y$. Обозначается прямое произведение символом $X\times Y$. Таким образом

$X\times Y=\{(x,y)|x\in X$ и $y\in Y\}$.

По определению полагают, что $X\times\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\times Y=\varnothing$. Декартово произведение множества X на себя называют декартовым (или прямым) квадратом. При этом полагают $X\times X=X^2$. Имеем: $X^2=\{(x,y)|x\in X, y\in X\}$.

Пример 2. Пусть $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2\}$. Зададим множество $X\times Y$ перечислением его элементов. Имеем $X\times Y=\{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$. Перемножим множества X и Y в обратном порядке: $Y\times X=\{(1,a), (2,a), (1,b), (2,b), (1,c), (2,c)\}$. Замечаем, что $X\times Y\neq Y\times X$. Следовательно, декартово произведение не обладает свойством коммутативности (переместительности).

Приведем теперь некоторые свойства, связывающие рассмотренные выше операции над множествами с операцией декартова произведения. Дистрибутивность прямого произведения относительно объединения:

$$(X\cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z); \qquad (1)$$

$$X\times (Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z); \qquad (2)$$

дистрибутивность прямого произведения относительно пересечения:

$$(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z); \quad (3)$$

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z); \quad (4)$$

дистрибутивность прямого произведения относительно вычитания:

$$(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z); \quad (5)$$

$$X \setminus (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z). \quad (6)$$

2.7. Примеры решения задач и упражнений

1) Найти дополнение множества A до множества X.

а) $X=\{3,8,7,4,2,1\}$, $A=\{2,7\}$; б) $X=\{10^n \mid n \in N\}$, $A=\{100^n \mid n \in N\}$;

в) $X=\{3x+1 \mid x \in N\}$, $A=\{3x+4 \mid x \in N\}$;

г) $X=\{x^2+x+1 \mid x \in N\}$, $A=\{x^2+5x+7 \mid x \in N\}$.

Решение

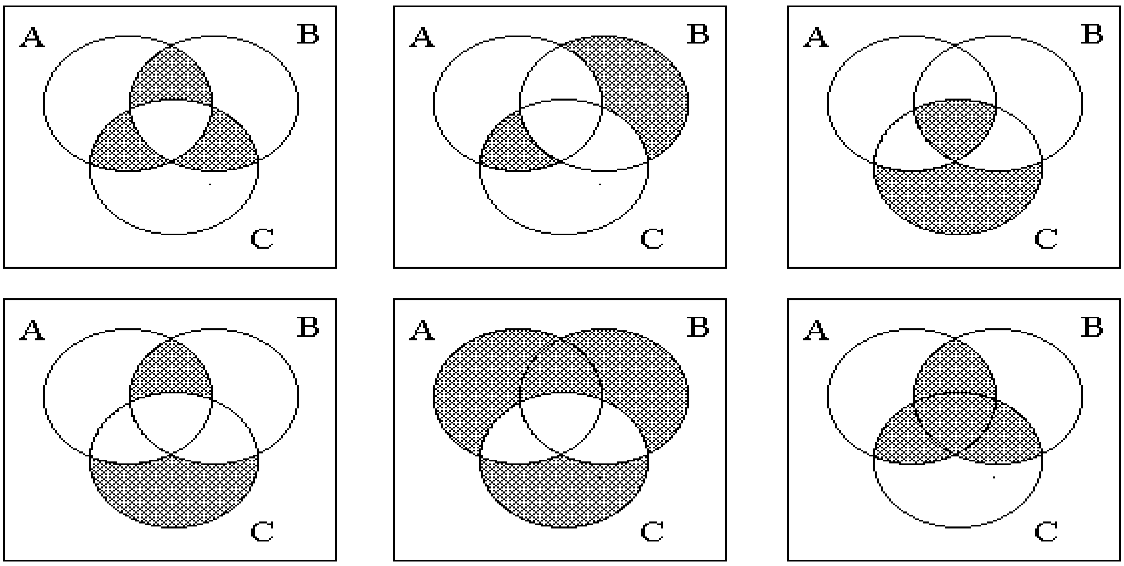
а) $B=\{3,8,4,1\}$;

б) $B=\{10^n \mid n=2k+1, k \in N\}$;

в) $B=\{1\}$;

г) $B=\{1,3\}$.

2) Запишите с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям.



Решение

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\backslash ABC;$

$(B\cup AC)\backslash(BC\cup AB);$

$C\backslash(A\cup B)\cup ABC;$

$C\cup(AB\backslash AC);$

$A\cup B\cup C\backslash(AC\cup BC);$

$AB\cup AC\cup BC.$

3) Пусть универсальное множество U состоит из 100 элементов, его подмножество A и B соответственно из 64 и 42 элементов. Определить минимально возможное число элементов следующих множеств:
а) $A\cup B$, б) $A\cap B$, в) $A\backslash B$, г) $\bar{A}\backslash B$, д) $\bar{A}\backslash(A\cup B)$.

Решение

а) Минимально возможное число элементов $A\cup B$ будет тогда, когда $B\subset A$, т.е. 64 элемента.

б) Минимально возможное число элементов $A\cap B$ будет тогда, когда $A\cup B=U$, т.е. (64+42)-100=6

в) Минимально возможное число элементов $A\backslash B$ будет тогда, когда $B\subset A$ и равно 64-42=22.

г) Минимально возможное число элементов $\overline{A}\backslash B$ будет тогда, когда $B\subset A$, т.е. равно 0.

д) Минимально возможное число элементов $\overline{A}\backslash(A\cup B)$ будет тогда, когда $B\subset\overline{A}$, т.е. $\overline{A}\backslash(A\cup B)= A\backslash A$ и равно 0.

4) Найти $A\times B$, если а) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2\}$; б) $A=\{a1,a2,a3\}$, $B=\{b1,b2,b3,b4\}$; в) $A=\{0,\Delta,\square\}$, $B=\{a,b,\Delta\}$;

Решение

а) $A\times B=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;

б)$A\times B=\{(a1,b1),(a1,b2),(a1,b3),(a1,b4),(a2,b1),(a2,b2),(a2,b3),(a2,b4),$
$(a3,b1), (a3,b2), (a3,b3),(a3,b4)\}$;

в) $A\times B=\{(0,a),(0,b),(0,\Delta),(\Delta,a),(\Delta,b),(\Delta,\Delta),(\square,a),(\square,b),(\square,\Delta)\}$.

2.8. Задачи для решения

1) Пусть A - множество всех натуральных делителей числа 18; B - множество всех натуральных делителей числа 24. Найти множество общих делителей чисел 18 и 24; найти самый большой общий делитель.

2) Найдите для каждой тройки множеств A, B, C результаты операции:

$A\cap(B\cup C)$; $A\cup(B\cap C)$; $(A\cup B)\cap C$; $(A\cap C)\cup(A\cap B)$; $(A\cup C)\cap B$; $(A\cap B)\cup C$, если:

а) $A=\{2; 3; 4\}$, $B=\{3; 6\}$, $C=N$;

б) $A=N$, $B=Z$, $C=\{-1; 0; 1\}$;

в) $A=\{1; 3; 5; ...\}$, $B=\{2; 4; 6; ...\}$, $C=N$;

г) $A=Z$, $B=N$, $C=\{3; 6; 9; ...\}$;

д) $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{2; 4\}$, $C=[2; 8]$;

е) $A=[2; 3]$, $B=(0; 4]$, $C=\{1; 2; 3; 4\}$;

ж) $A=(2; 5)$, $B=(0; 6]$, $C=[-1; 3)$.

3) Пусть A,B,C – подмножества множества X. Доказать, что

а) $X\backslash(X\backslash A)=A$; б) $X\backslash B\subset X\backslash A$ тогда и только тогда, когда $A\subset B$;

в) $A\backslash B=A\cap(X\backslash B)$; г) $A\cap B=X\backslash((X\backslash A)\cup(X\backslash B))$.

4) Найти разности $A\backslash B$ и $B\backslash A$ множеств A и B, если:

а) $A=\{1; 2; 3; ...; 10\}$, $B=\{5; 6; ...; 12\}$;

б) A - множество натуральных делителей числа 18; B - множество натуральных делителей 24;

в) A - множество правильных многоугольников, B - множество прямоугольников;

г) $A=\{x|x\in R,\ 2\le x\le 6\}$, $B=\{x|x\in R,\ 3\le x\le 7\}$;

д) $A=\{x|x\in R,\ 1<x\le 4\}$, $B=\{x|x\in R,\ 2<x\le 8\}$;

е) $A=\{x|x\in R,\ 0<x<2\}$, $B=\{x|x\in R,\ 1<x\le 3\}$;

ж) $A=\{x|x\in R,\ -2<x<3\}$, $B=\{x|x\in R,\ 0<x<5\}$;

з) $A=\{x|x\in R,\ -\infty<x\le 2\}$, $B=\{x|x\in R,\ 1\le x<5\}$;

и) $A=\{x|x\in R,\ -\infty<x<5\}$, $B=\{x|x\in R,\ 0<x\le 6\}$;

к) $A=[3; 5]$, $B=[4; 8]$;

л) A=(3; 6), B=(4; 8];

м) A=(3; 8), B=(2; 9];

н) A=(-2; 1), B=[0; 3);

о) A=N, B=[0; 4];

п) A=(0; 2), B=N;

р) A=N_0, B=[0; 5).

5) Проверить, что $A\times B\neq B\times A$ для множеств A=[0,1], B=[0,2].

6) Проверить, что $A\times B=B\times A$ тогда и только тогда, когда $A=B$.

7) Пусть даны множества A,B,C и $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ - дополнения соответствующих множеств A, B, C до универсального множества U. Изобразите при помощи кругов Эйлера следующие множества: ($A\cap B\cap C\neq\varnothing$):

а) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$; ж) $(B\setminus\overline{C})\cup A$;

б) $(A\cup\overline{B})\cap\overline{C}$; з) $\overline{A\cap B\cap C}$;

в) $(A\setminus B)\cap C$; и) $(A\cup B)\setminus\overline{C}$;

г) $(\overline{A\cup B})\cap C$; к) $(\overline{B\setminus A})\cap\overline{C}$;

д) $\overline{A}\setminus(B\cap C)$; л) $(B\cup\overline{C})\setminus A$;

е) $(\overline{A\setminus C})\cup B$; м) $\overline{A\cup B\cup C}$.

8) Доказать, что

а) $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A\cup B=B$;

б) $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A\cap B=A$;

в) $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A\setminus B=\varnothing$

9) Пусть A и B – данные множества. Решить уравнение:

а) $A\setminus X=B$;

б) $A\cup X=B$;

в) $A\cap X=B$;

10) Пусть $A\subset B\subset C$. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} B\setminus X=A \\ B\cup X=C \end{cases}$$

11) Пусть $B \subset A \subset D$. Показать, что множество $B \cup (D \setminus A)$ является решением системы $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = D. \end{cases}$

12) Пусть $B \subseteq A,\ A \cap D = \emptyset.$ Будет ли множество $D \cup (A \setminus B)$ решением системы $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = D \end{cases}$?

3. Элементарная комбинаторика

1.1. Историческая справка

Вопросами, которые можно отнести к комбинаторике, математики занимались еще в античные времена.

О создании комбинаторики как некоторой научной дисциплины можно говорить лишь, начиная с XVII столетия. Значительный вклад в развитие этой теории внесли французские математики Б.Паскаль (1623-1662) и П.Ферма (1601-1665). В 1666 году немецкий математик В.Г. Лейбниц (1646-1716) в трактате "Рассуждение о комбинаторном искусстве" строит научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Отсюда эта ветвь математики и получила свое название. В одной их своих работ, вышедших в 1676 году, французский математик Френкиль де Бесси изучал перестановки с повторениями. Размещения появляются и изучаются в 1713 году в работе Я.Бернулли. Ряд комбинаторных задач, сыгравших значительную роль в развитии целых отраслей математики, рассмотрел Л. Эйлер.

Комбинаторные методы находили применение еще в эпоху своего становления. Одной из областей их применения явилось использование в расшифровке тайнописи - криптографии. Известен, например, такой исторический факт. В период гражданской войны в Англии (середина XVIIв.) большую помощь в борьбе с монархистами оказала Кромвелю расшифровка планов заговорщиков, которая была выполнена знаменитым математиком Валлисом на основе комбинаторных методов. Заговорщики думали, что их планы были выданы тайным агентом Кромвеля. Истина стала известна лишь после реставрации Стюартов. Особенно большое значение получили комбинаторные методы после появления ЭВМ и связанного с этим быстрого развития конечной математики. В настоящее время эти методы находят применение в статистике, вычислительной математике, программировании, планировании экспериментов, при решении задач оптимизации.

В математике комбинаторика с успехом используется в таких областях, как комбинаторная геометрия, конечные геометрии и др. Комбинаторные задачи приходится решать биологам, физикам, химикам, экономистам и другим специалистам.

3.2. Понятие о комбинаторной задаче

Пусть X – конечное множество, $m(X)=n$. Множество X называется упорядоченным, если его элементы каким-либо образом занумерованы числами 1, 2,3, n-1, n. Легко видеть, что упорядоченное множество - это кортеж, в котором нет одинаковых элементов. На практике часто встречаются задачи, когда требуется из данного множества X выбрать r -элементное подмножество, обладающее определенными свойствами, которое может быть как упорядоченным, так и неупорядоченным. Такие задачи называются комбинаторными: в понятие решения комбинаторной задачи входит доказательство существования требуемой выборки, а также подсчет числа всех выборок, удовлетворяющих условию задачи.

Пример 1. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами можно сделать выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

В данной задаче следует сделать выборку упорядоченного четырехэлементного множества из 25 элементов. Для выбора президента имеется 25 возможностей. После его выбора остается 24 возможности для выбора вице-президента, затем 23 возможности для выбора ученого секретаря и 22 возможности для выбора казначея. Следовательно, имеется 25*24*23*22=303600 способа выбора. В примере 1 нас интересовали упорядоченные выборки.

Пример 2. В бригаде 20 рабочих. Сколько существует способов выбора бюро бригады, если в него по решению совета собрания должно входить 3 человека?

По условию задачи из 20-элементного множества требуется выбрать 3-элементное, причем неупорядоченное. Если бы мы производили упорядоченные выборки, то, рассуждая как и в примере 1, получили бы, что их 20*19*18. Если в этих выборках не принимать во внимание порядок, а лишь входящие в них элементы, то выборки (a,b,c), (b,c,a), (c,a,b), (b,a,c), (a,c,b), (c,b,a) следует считать за одну. Таким образом, возможны $\frac{20*19*18}{6}=11$ способов выборки бюро бригады.

Для подсчета числа упорядоченных или неупорядоченных выборок имеются общие формулы, к выводу которых мы и переходим.

3.3. Правило суммы и произведения

Правило суммы можно сформулировать следующим образом. Предположим, что производятся выборки из множества X и множества Y, причем X и Y могут и совпадать, но среди выборок из X и Y нет одинаковых. Тогда общее число выборок из X и Y равно сумме чисел выборок из X и выборок из Y. В самом деле, обозначим через $\tilde{X}$ множество всех требуемых выборок из X, а через $\tilde{Y}$ - множество всех возможных по условию задачи выборок из Y. Так как общих выборок нет, то $\tilde{X}\cap\tilde{Y}=\varnothing$. Поэтому число всех выборок равно

$$r(\tilde{X}\cup\tilde{Y})=r(\tilde{X})+r(\tilde{Y}).$$

Пример 1. В старшей группе детского сада 8 мальчиков и 10 девочек. Для приветствия родителей на утреннике нужно составить группу из 3 воспитанников, причем в эту группу должны входить и мальчики и девочки. Сколько имеется возможностей для составления такой группы?

Ясно, что возможны два вида выборок: 1) в группе 2 девочки и мальчик и 2) в группе 2 мальчика и девочка. Поскольку одинаковых среди этих выборок нет, то можно применить правило суммы. Двух мальчиков из 8 можно выбрать 28 способами, поэтому выборок (мальчик, мальчик, девочка) будет 28*10=280. Двух девочек из 10 можно выбрать 45 способами, поэтому выборок (мальчик, девочка, девочка) будет 45*8 = 360, следовательно, имеется 640 способов составления требуемой группы.

Правило суммы распространяется на любое конечное число множеств выборок. Пусть производятся выборки из множеств X_1, X_2…, X_k в количестве r_1, r_2,…,r_k . Если среди этих выборок нет совпадающих, то общее число выборок из X_1, X_2…, X_k будет $r=r_1+r_2+\ldots+r_k$.

Правило произведения формулируется следующим образом. Предположим, что элемент x_1, можно выбрать n_1 способами, после выбора x_1, элемент x_2 можно выбрать n_2 способами, после выбора x_2. элемент x_3 можно выбрать n_3 способами и т.д.; после выбора элемента x_{k-1}, элемент x_k можно выбрать n_k способами. Тогда кортеж $(x_1,\ldots x_k)$ можно выбрать $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Докажем правило произведения. Пусть элемент x_i выбирается из множества X_i , т.е. $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ -причем $m(X_1)=n_1,\ldots,m(X_k)=n_k$. Тогда кортеж $(x_1,\ldots x_k)$ является элементом декартова произведения $X_1\times X_2\times\ldots\times X_k$. Поэтому число выборов кортежа $(x_1, x_2,\ldots x_k)$ равно числу элементов множества $X_1\times X_2\times\ldots\times X_k$.

Но $m(X_1\times X_2\times\ldots\times X_k)=m(X_1)m(X_2)\ldots m(X_k)=n_1 n_2\ldots n_k$.

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Первую цифру трехзначного числа можно выбрать 9 способами, так как 0 не может стоять на первом месте. Вторую цифру можно выбрать 10 способами, а после ее выбора третью цифру можно выбрать 10 способами. Поэтому трехзначных чисел 9*10*10=900 штук.

3.4. Перестановки

Конечное упорядоченное множество называется перестановкой. Пусть множество X имеет k элементов. Ясно, что элементы множества X можно упорядочить по-разному и тем самым получить различные перестановки.

Обозначим число перестановок k -элементного множества через P_k. Ясно, что P_k зависит только от числа элементов множества X, т.е. если множества X и Y имеют одинаковое число элементов n, то число перестановок для X и Y одинаково. Добавим к множеству X еще один элемент α, не принадлежащий X. Получим множество $Y=X\cup\{\alpha\}$, причем $m(Y)=k+1$. Возьмем какую-либо перестановку σ из X и будем добавлять к ней элемент α, получая перестановки из Y. Можем поставить α перед первым элементом σ, между первым и вторым элементами σ, между вторым и третьим элементами σ и т.д. Наконец, мы можем поставить α за последним (.т.е. k –м) элементом σ. Тем самым мы получим $k+1$ перестановку из Y. Поскольку для выбора σ имеется P_n возможностей, а при каждом выборе σ получаем $k+1$ перестановку, то число всех перестановок Y равно $P_k(k+1)$. Итак, $P_{k+1}=(k+1)P_k$.

Давая в этой формуле k значения $1,2,\ldots,n$-1, получаем:

$P_2=2P_1$, $P_3=3P_2$, … $P_n=nP_{n-1}$.

Если перемножить левые и правые части, то получим $P_2P_3\ldots P_{n-1}P_n=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot nP_1P_2\ldots P_{n-1}$ Сократим обе части на $P_2P_3\ldots P_{n-1}$. После сокращения находим $P_n=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot nP_1$. Но $P_1=1$, так что

$P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots(n-1)n$. Число $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ обозначают $n!$ И называют «n-факториал”. Таким образом $P_n=n!$

Пример. Рассмотрим задачу коммивояжера. Коммивояжер (бродячий торговец) должен объехать несколько городов и вернуться в свой город. Предположим, что кроме своего города, он должен посетить 14 городов, причем побывать в каждом из них один раз. Предположим также, что между любыми двумя городами есть прямое сообщение. Коммивояжер должен выбрать последовательность посещения городов. Ясно, что каждый такой выбор производит упорядочение городов, в результате чего возникает перестановка из 14 элементов, следовательно, число решений задачи коммивояжера равно $P_{14}=14!$. Это число очень велико. Если даже предположить, что коммивояжер будет путешествовать мысленно и каждый маршрут по городам осуществлять за одну секунду, то на перебор всех возможностей потребуется 2764 года. В связи с этим возникает новый аспект комбинаторных задач. Требуется из множества всех решений выбрать такое решение, которое было бы наилучшим в отношении определенных требований, т.е. найти оптимальное решение. В задаче коммивояжера можно требовать, чтобы время, затраченное на дорогу, было наименьшим, для чего надо знать время, необходимое для проезда между любыми двумя городами; можно потребовать, чтобы стоимость проезда оказалась минимальной. Задачи такого рода имеют громадное практическое значение.

3.5. Размещения

Пусть $m(X)=n$, $k\leq n$. Упорядоченная выборка k элементов из X называется размещением из n по k. Ясно, что перестановка есть размещение из n по n. Число всех размещений из n по k обозначается A_n^k. Ясно, что это число зависит от n и k, и не зависит от конкретного вида элементов множества X. Подсчитаем число A_n^k. Сначала сделаем это на примере. Пусть требуется вычислить A_5^2, причем $X=\{a,b,c,d,e\}$. Возьмем некоторое размещение из 5 по 2, например (d,b). Рассмотрим все перестановки, начинающиеся с d,b. Так как, кроме d и b, имеется еще три элемента a,c,e, то таких перестановок будет 3!=6: (d,b,a,c,e), (d,b,c,e,a), (d,b,e,a,c), (d,b,a,e,c), (d,b,e,c,a), (d,b,c,a,e).

Разобьем теперь множество всех перестановок на классы. К одному классу будем относить те перестановки, которые имеют общее размещение из двух начальных элементов. Число классов будет A_5^2, в каждом классе по P_3=3!=6 элементов. Значит, по правилу умножения $P_5= A_5^2 P_3$ или $5!= A_5^2\, 3!$, т.е $A_5^2=\frac{5!}{3!}=\frac{5!}{(5-2)!}$.

В общем случае: $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{P_n}{P_{n-k}}$.

Пример. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы сначала сосчитаем все трехзначные числа, имеющие попарно различные цифры из указанного набора. Каждое число, например 437, соответствует размещению (для нашего примера (4, 3, 7)). Поэтому чисел с попарно различными цифрами будет $A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=7\cdot6\cdot5=210$. Кроме указанных, будут еще числа, содержащие две одинаковые цифры, например, 535. С парой (5,5) связано 18 чисел, которые получаются, если цифру, отличную от 5, ставить в начало, середину или конец пары, например, 355, 535, 553. Так как цифр, кроме 5, у нас 6, а с каждой цифрой связаны 3 числа, то всего их будет 18. Но пар одинаковых цифр 7. Поэтому указанных чисел будет 7•18=126. Будут еще числа, состоящие из трех одинаковых цифр, их 7. Итак, можно составить 210+126+7=343 числа.

3.6. Сочетания

Пусть $m(X)=n$ и $k \le n$. Неупорядоченная выборка k элементов из X называется сочетанием из n по k. Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k. Это число зависит только от n и k. Для подсчета C_n^k рассмотрим все размещения из n по k. Их A_n^k. Пусть λ - некоторое сочетание из n по k. Производя упорядочения λ, мы получим из него P_k размещений, причем каждое размещение получается указанным образом из некоторого сочетания. Значит, множество всех размещений разбивается на C_n^k классов, в каждом из которых содержится P_k элементов. По правилу произведения $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$, так как $C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример. На кафедре математики 8 преподавателей. Для работы на УКП требуется 3 преподавателя, сколькими способами можно составить группу преподавателей для работы на УКП?

Поскольку требуется неупорядоченная выборка из трех преподавателей, то их общее число будет

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)} = 56.$$

Приведем теперь некоторые формулы, имеющие место для числа C_n^k. Для любых n и k имеют место формулы:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

3.7. Соединения с повторениями

Перестановки, размещения и сочетания называются соединениями. В этом пункте мы рассмотрим понятие соединений с повторениями.

Пусть X - конечное множество и $m(X)=n$. Кортеж длины k из элементов множества X называется размещением с повторениями из n элементов по k. Подсчитаем число размещений с повторениями из n по k, обозначив его через $\overline{A_n^k}$. Каждое размещение с повторениями из n по k есть элемент прямого произведения X^n, поэтому $\overline{A_n^k}=m(X^n)$. Но мы видели, что $m(X^n)=m(X)^n=n^k$. Итак, $\overline{A_n^k}=n^k$. Применим эту формулу к примеру из п.3.3.

Требовалось узнать, сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ясно, что каждое трехзначное число определяется размещением из 7 элементов по 3, например, 565 определяется размещением с повторениями (.5, 6, 5). Поэтому число различных трехзначных чисел будет $\overline{A_7^3}=7^3=34$.

Если размещение с повторениями из n по k содержит все элементы множества X, то оно называется перестановкой с повторениями. Перестановки с повторениями могут отличаться друг от друга по составу. Упорядочим как-либо множество X, пусть $X=\{x_1,x_2,..x_n\}$. Обозначим через p_1 число вхождений элемента x_1, в перестановку с повторениями σ, через p_2 – число вхождений элемента x_2 в σ и т.д. Тогда кортеж $(p_1,p_2,...p_n)$ называют составом σ. Ясно, что $p_1+p_2+\ldots+p_n=k$.

Пример 1. Пусть $X=\{a,b,c,d\}$, $\sigma=\{a,b,b,a,a,c,d,d\}$. Тогда σ будет перестановкой с повторениями из 4 по 8 состава (3,2,1,2). Число перестановок с повторениями из n элементов по k состава $(p_1,p_2,...,p_n)$ будем обозначать через $P(p_1,p_2,...,p_n)$.

Подсчитаем это число. Сначала рассмотрим пример. Пусть $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Подсчитаем число перестановок с повторениями из трех элементов по 9 состава (2,4,3). Рассмотрим одну из таких перестановок:

$(\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta,\gamma,\gamma,\gamma)$. Снабдим все входящие в нее буквы индексами, после чего получим $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

Теперь все элементы в перестановке отличаются друг от друга, так что число всех перестановок будет $P_9=9!$. Если в каждой из них убрать индексы, то получим перестановку с повторениями состава (2,4,3). Сколько перестановок даст одну и ту же перестановку с повторениями данного состава? Очевидно, две перестановки дают одну и ту же перестановку с повторениями состава (2,4,3), если они отличаются перестановкой символов α_1,α_2, перестановкой символов $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ или перестановкой символов $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. Поэтому их $P_2P_3P_4=2!3!4!$. Значит, всех перестановок с размещениями из 3 по 9 состава (2,4,3) будет $P(2,4,3)=\frac{9!}{2!4!3!}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Если снабдить все элементы, входящие в перестановку с повторениями, индексами, то все они будут различаться между собой. Поэтому перестановок станет $P_k=k!$

Возьмем перестановку с повторениями состава $(p_1,p_2,\dots p_n)$. После "стирания" индексов в одну и ту же перестановку с повторениями состава $(p_1,p_2,\dots p_n)$ будет переходить $p_1!p_2!\dots p_n!$ перестановок из k элементов. Поэтому

$$P(p_1,p_2,\dots,p_n)=\frac{k!}{p_1!p_2!\dots p_n!}.$$

Заметим, что $k=p_1+p_2+\dots+p_n$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$P(p_1,p_2,\dots,p_n)=\frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)!}{p_1!p_2!\dots p_n!}.$$

Пример 2. У мальчика имеются календари 4 видов: 5- с изображением автомобиля, 4 - с изображением ракеты, 3 - с изображением спутников, 2 - с изображением собаки. Для обмена мальчик располагает их в определенном порядке. Сколько существует способов расположения календариков ? Легко видеть, что каждое расположение календариков есть перестановка с повторениями состава (5,4,3,2). Поэтому число расположения

$$P(5,4,3,2)=\frac{(5+4+3+2)!}{5!4!3!2!}=\frac{14!}{5!4!3!2!}.$$

Рассмотрим теперь понятие сочетания с повторениями. Пусть $m(X)=n$. Предположим, что имеется достаточно много экземпляров каждого элемента из X. Выборка из X называется сочетанием с повторениями из n элементов по k, если для каждого элемента $x\in A$ указано число P_x , показывающее, сколько экземпляров элемента x взято, причем сумма всех чисел P_x, $x\in A$ равна k.

Пример 3. Пусть $X=\{a,b,c\}$, $k=7$. Здесь $m(X)=3$. Возьмем 3 экземпляра элемента a и 4 экземпляра элемента b, т.е. $P(a)=3$, $P(b)=4$. Тогда получим сочетание с повторениями, которое можно записать $\{a,a,a,b,b,b,b\}$ или $\{a,b\}$, $P_a=3$, $P_b=4$. Для подсчета числа сочетаний с повторениями из n по k упорядочим множество X. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$. Каждому сочетанию с повторениями сопоставим упорядоченный набор из нулей и единиц так, что каждому элементу x_i; сопоставляется P_{xi} единиц, а между единицами, соответствующими P_{xi-1} и P_x ставится 0. Например, пусть $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $k=10$. Рассмотрим сочетания с повторениями $\{x_1,x_2,x_4,x_4,x_3,x_3,x_1,x_4,x_3,x_3\}$. Имеем: $P_{x1}=2$, $P_{x2}=1$, $P_{x3}=4$, $P_{x4}=3$. Данному сочетанию с повторениями сопоставляется кортеж (1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1). Заметим, что сумма единиц равна $P_{x1}+P_{x2}+P_{x3}+P_{x4}=k=10$. Число нулей в кортеже равно $3=4-1=n-1$. В общем случае будем иметь: сумма единиц в кортеже равна k, а число нулей равно $n-1$. Обозначим число сочетаний с повторениями из n элементов по k символом $\overline{C_n^k}$. Мы видим, что $\overline{C_n^k}$ равно числу всех кортежей, содержащих k единиц и $n-1$ нулей, т.е. $\overline{C_n^k}=P_{(k,n-1)}$. Но $P_{(k,n-1)}=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$; и $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=C_{k+n-1}^k$. Итак, $\overline{C_n^k}=C_{k+n-1}^k=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$.

Пример 4. Имеется 4 сорта конфет, из которых составляются наборы по 10 конфет в каждом. Сколько можно составить различных наборов?

Чтобы ответить на вопрос, заметим, что каждый набор представляет собой сочетание из 4 элементов (сортов конфет) по 10 элементов (число конфет в наборе). Поэтому различных наборов будет $\overline{C}_4^{10}=286$. В заключение приведем таблицу основных формул для вычисления соединений с повторениями и без повторений.

Соединение Тип	Перестановки	Размещения	Сочетания
Без повторений	$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
С повторениями	$P_{(n_1,\dots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$	$\overline{A}_n^k = n^k$	$\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-k)!}$

3.8. Примеры решения задач и упражнений

1. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого–9 книг. Сколькими способами они могут обменять две книги одного на две книги другого?

Решение

Первый может выбрать книги для обмена $C(7,2)$ способами, а второй $C(9,2)$ способами. Всего же способов обмена по правилу произведения будет $C(7,2)*C(9,2)=21*36=756$.

2. Расписание среды содержит 4 пары уроков. Определить количество таких расписаний, при выборе из 9 предметов (при учете, что в этот день нет повторяющихся пар).

Решение

Порядок уроков в расписании важен и пары уроков не повторяются, поэтому количество расписаний на среду можно определить как число размещений без повторений из 9 элементов по 4: $A(9,4)=3024$.

3.Сколькими способами можно переставить буквы слова “обороноспособность” так, чтобы две буквы “о” не шли подряд?

Решение

Сначала расставим все буквы слова “обороноспособность”(18 букв) отличные от буквы “о”. Так как букв “с”-3, “б”-2, “н”-2, “п”-1, “т”-1, “ь”-1, “р”-1, получим $P(3,2,2,1,1,1,1)$ способов расстановки. После этого выбираем 18-11=7 из 12 мест, на которые можно вставить буквы “о”, т.е. $C(12,7)$. Всего по правилу произведения получаем $P(3,2,2,1,1,1,1)*C(12,7)$ способов.

4. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Можно выбрать двух, трех или четырех женщин. Поскольку нас интересует лишь состав элементов в комбинации, а не порядок элементов, то используем формулу для числа сочетаний.

Таким образом, двух женщин можно выбрать $C(4,2)$ способами. После этого надо выбрать 4 мужчин, что можно сделать $C(7,4)$ способами. По правилу произведения получаем $C(4,2)*C(7,4)$ способов. Аналогично, выбирая 3 женщин и 3 мужчин, получают $C(4,3)*C(7,3)$ способов, а выбирая 4 женщин и 2 мужчин, получают $C(4,4)*C(7,2)$ способов. По правилу суммы всего $C(4,2)*C(7,4)+C(4,3)*C(7,3)+C(4,4)*C(7,2)=371$ способ.

5. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используются все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

Решение

На первом месте у автомобильного номера может быть любая из 30 букв. Следовательно, первая буква может быть выбрана 30 способами. На втором месте также может находиться любая из 30 букв, поэтому первые две буквы номера могут быть выбраны 30^2 способами. Ясно, что три буквы можно выбрать 30^3 способами. Аналогично рассуждая, получаем, что четыре цифры можно выбрать 10^4 способами. Таким образом, всего может быть занумеровано $30^3 \cdot 10^4 = 27 \cdot 10^7$ автомобилей.

6. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

Решение

Чтобы найти число способов, которыми могут быть расставлены чашки, надо найти число размещений без повторений из 4 элементов по 3, блюдца - число размещений из 5 элементов по 3, ложки - число размещений из 6 элементов по 3. В решении используется формула размещений без повторений, так как здесь играет роль, какая из ложек (чашек, блюдец) будет выбрана, так как все чайные приборы отличаются друг от друга. Число способов, которыми могут быть выбраны 3 чашки, блюдца и ложки находится по правилу произведения: $A(4,3)*A(5,3)*A(6,3)=4*3*2*5*4*3*6*5*4 =172800$ способов.

3.9 Задачи

1. Имеется шесть видов конвертов, три вида марок и три вида почтовой бумаги. Сколькими способами можно выбрать конверт, марку, бумагу для отправки письма?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "геометрия"?

3. Из города А в город В можно ехать поездом, автобусом и лететь самолетом. Из города В в город С пассажирские самолеты не летают, но ходят автобусы и поезда. Из города С в города Д можно проехать только на автобусе и по реке на теплоходе. Сколько существует возможностей проезда из А в Д с остановками в городах В и С?

4. У цветочницы по 10 тюльпанов трех цветов: красного, розового и желтого. Она составляет для продажи букеты из трех цветов разного цвета. Сколько имеется возможностей для составления букета? Сколько возможностей не реализуется?

5. В корзине 20 груш, 15 яблок, 10 апельсинов. Сколько имеется возможностей для: а) выбора груши и яблока; б) выбора одного плода; в) выбора груши или апельсина; г) выбора двух груш; д) выбора двух плодов?

6. Секретный замок автоматической камеры хранения состоит из шести дисков, на первые два диска нанесены по 12 букв, а на последние четыре - цифры от 0 до 9. Сколько шифров имеет такой замок? Сколько шифров начинаются с буквы А и имеют хотя бы одну цифру 9?

7. Десять выпускников обменялись фотокарточками. Сколько фотокарточек было сделано?

8. Если лист с записью 1961 повернуть на 180°, то эта запись не изменится. Сколько существует четырехзначных чисел, обладающих этим свойством?

9. Сколькими способами могут разместиться шесть покупателей в очередь?

10. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9 (без повторений)?

11. Сколькими способами можно посадить на скамейку пять человек?

12. Фотограф размещает группу для фотографирования из 8 человек. Сколькими способами он может это сделать?

13. В соревновании участвуют семь спортсменов. Сколько существует возможностей распределения между ними мест?

14. Сколькими способами можно упорядочить множество $X=\{x,y,z,a,b,c,d\}$ так, чтобы элементы a и b стояли рядом и в алфавитном порядке?

15. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 человек? А n человек?

16. На собрании должны выступить студенты А, В, С, Д. Сколькими способами можно составить список выступающих, если С не может выступить раньше, чем А?

17. Студент сдает 5 экзаменов в течение 15 дней, сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если перед каждым экзаменом на подготовку дается два дня?

18. Сколькими способами модно упорядочить множество $X=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ так, чтобы элементы x_1,x_2,x_3 стояли рядом и в указанном здесь порядке?

19. На кафедре математики 8 преподавателей. Каждый преподаватель должен провести консультацию в один из 8 предложенных дней. Сколькими способами можно составить расписание консультаций, если в день проходит только одна консультация?

20. Найти сумму цифр во всех четырехзначных числах, составленных без повторений из цифр 1, 2, 5, 7.

21. Найти сумму всех четырехзначных чисел, составленных без повторений их цифр: а) 1, 2, 5, 7; б) 2, 3, 4, 0.

22. Сколькими способами из 25 студентов группы можно выбрать делегацию, состоящую из 4 человек?

23. В комнате четыре лампочки. Сколько всего различных способов освещения комнаты возможны?

24. Сколько имеется пятизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

25. В выпуклом девятиугольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке, на сколько частей разделится пятиугольник?

26. На окружности взяты 9 точек, сколько хорд можно провести, соединяя эти точки?

27. На окружности взяты 8 точек. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

28. В группе 25 студентов. Встретившись пред занятием, они обменялись рукопожатиями, сколько рукопожатий било сделано?

29. У одного филателиста 10 марок, а у другого - 8. Все марки различны, сколькими способами они могут обменяться четырьмя марками?

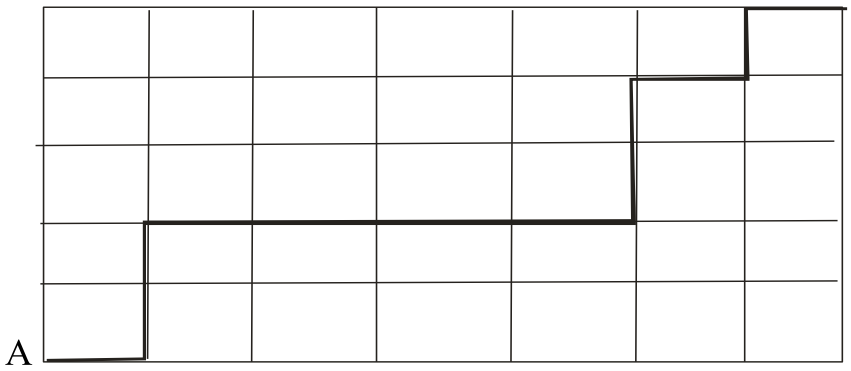
30. В студенческой группе 13 девушек и 12 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них делегацию, состоящую из семи человек, если в нее должны входить не менее 5 девушек?

31. На студенческом вечере 20 юношей и 18 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 7 танцевальных пар?

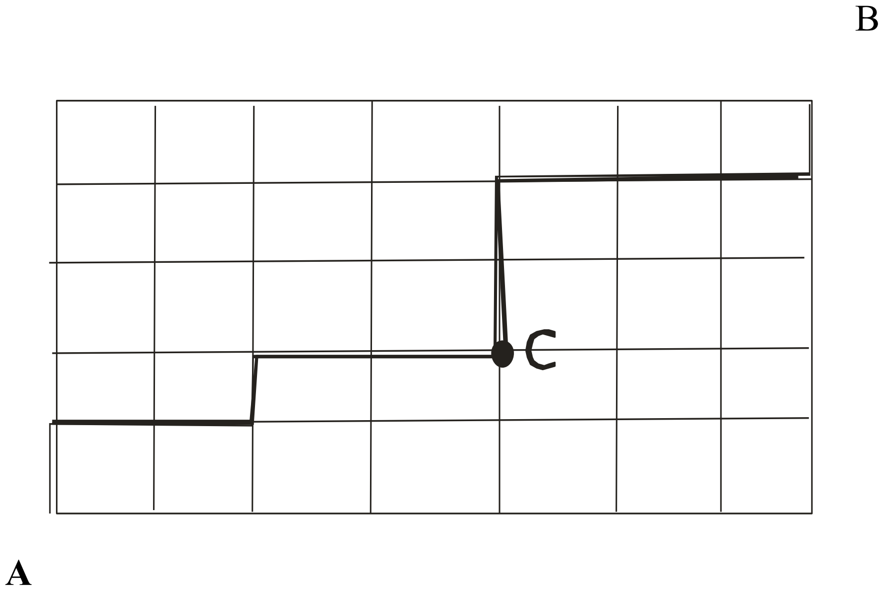
32. Лаборатория изучает 10 типов минеральных удобрений. Необходимо провести опыты по изучению совместного влияния любой четверки удобрений, причем на проведение одного опыта требуется участок площадью 0,2 га. Весь опытный участок лаборатории составляет 25 га, каждый опыт длится год. Сколько лет потребуется на проведение всех опытов?

33. Чему равно число всех кратчайших путей на данной сетке, ведущих из точки А в точку В?

B



34. Чему равно число всех кратчайших путей из A в B, проходящих через C?



35. Для какой точки C данной сетки число кратчайших путей из A в B, проходящих через C минимально? Максимально?

36. Сколькими способами можно рассадить 5 человек на 20 местах?

37. Студенту на то, чтобы сдать 5 экзаменов дается 15 дней, сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в день сдается не более одного экзамена? А если последний экзамен сдается я последний день?

38. Студенты изучают 10 предметов. В первый день занятий у них 4 пары. Сколькими способами можно составить расписание занятий на этот день?

39. Сколько существует различных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами?

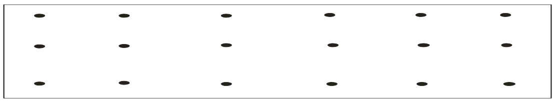
40. Сколькими способами можно закрасить 4 квадрата с помощью набора красок, содержащего 12 цветов?

41. В президиум собрания избрано 8 человек, сколькими способами можно выбрать из них председателя собрания и секретаря?

42. В группе 25 студентов. Необходимо выделить 5 участников эстафеты, состоящей из 5 этапов. Сколькими способами можно это сделать?

43. Найти число перестановок из букв слова "математика"?

44. Компостер в троллейбусе может пробивать отверстие на любом из указанных на рисунке мест. Сколько различных троллейбусов могут использовать компостер указанного типа?



45. В азбуке Брайля для слепых на каждый символ отводится шесть мест, на некоторых из которых имеются выпуклости, легко определяемые с помощью осязания (на схеме выпуклости обозначены *)

*	•	*	•	*	*
●	•	*	•	*	*
●	•	•	•	*	•
А		Б		Ч	

Сколько различных символов может быть в азбуке Брайля?

46. Ячейка памяти одной ЭВМ содержит 40 двоичных разрядов. Размещая на эти 40 мест цифры 0 или 1, получаем машинное слово. Сколько различных машинных слов возможно разместить в ячейке памяти этой машины?

47. Сколько ожерелий можно составить из 5 красных, 5 синих и 5 желтых бусинок?

48. В почтовом отделении продаются открытки 8 видов. Сколькими способами можно выбрать 10 открыток?

49. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр 3,5,7,8,9?

Список литературы

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
2. Горбатов А.И. Основы дискретной математики. – М.: ЮНИТИ, 2001.
3. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П.Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. -744 с.
4. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.
5. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Дискретная математика: Учебник.– 2-е изд., - М.: ИНФРА – М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. - 256 с.
6. М.: Наука, 1977.