Козырев Олег Рамазанович

Куркин Андрей Александрович

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Редактор Т.В. Третьякова
Компьютерная верстка А.А. Куркин

Подписано в печать . 11.2000. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная
Печать офсетная. Усл. печ. л 4,6. Уч.-изд. л 3,8. Тираж 200 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет
603600, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
Типография Нижегородского государственного университета
603000, Нижний Новгород, ул. Б.-Покровская, 37

1. Криволинейные интегралы

1.1. Криволинейные интегралы по длине дуги (криволинейные интегралы I рода)

Рассмотрим дугу AB пространственной кусочно-гладкой* кривой L (рис. 1) и определенную на ней непрерывную функцию $f(x, y, z) \equiv f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка кривой. Дугу AB произвольным образом разобьем точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$), длины которых обозначим соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\overline{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i\ , \qquad (1)$$

называемую *интегральной суммой* функции $f(x, y, z)$ по длине дуги AB.

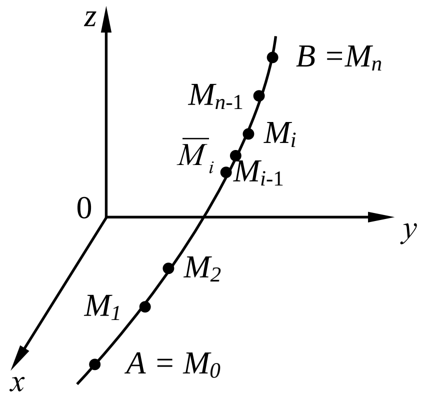


Рис. 1

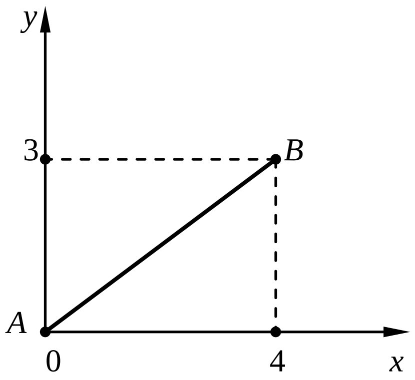


Рис. 2

Криволинейным интегралом по длине дуги AB от функции $f(x, y, z)$ (или *криволинейным интегралом I рода*) называется предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$ и $\max \Delta l_i \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i$$

(dl – дифференциал дуги).

На дуге AB, целиком лежащей в плоскости Oxy, функция f не зависит от координаты z , поэтому по определению

---

* Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой. Кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется кусочно-гладкой.

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i \ .$$

Если подынтегральную функцию $f > 0$ рассматривать как переменную линейную плотность кривой интеграции L, то криволинейный интеграл I рода $\int_{AB} f(x,y,z)dl$ представляет собой массу дуги AB кривой L (простейшее физическое истолкование).

Если $f(x, y) \ge 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int_{AB} f(x,y)dl$ численно равен площади части цилиндрической поверхности, у которой направляющая AB лежит в плоскости Oxy, а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу плоскостью Oxy (геометрическое истолкование).

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Действительно, если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int_{L} f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt, \qquad (2)$$

так как в этом случае дифференциал дуги $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$.

Если кривая L лежит в плоскости Oxy, то

$$\int_{L} f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \qquad (3)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, имеем $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$, поэтому

$$\int_{L} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f[x, y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \qquad (4)$$

$$\int_{L} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} \frac{f[x, y(x)]}{|\cos\alpha|}dx,$$

где α - угол между касательной к кривой и осью Ox.

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$ и

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta\,. \qquad (5)$$

Приведем далее *основные свойства криволинейного интеграла I рода*:

1. По определению криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \int\limits_{BA} f(x, y, z)dl\,;$$

2. $\int\limits_L [f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z)]dl = \int\limits_L f_1(x, y, z)dl \pm \int\limits_L f_2(x, y, z)dl\,;$

3. $\int\limits_L cf(x, y, z)dl = c\int\limits_L f(x, y, z)dl$, где c = const;

4. Если путь (контур) интегрирования разбит на n частей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то

$$\int\limits_L f(x, y, z)dl = \int\limits_{L_1} f(x, y, z)dl + \int\limits_{L_2} f(x, y, z)dl + \ldots + \int\limits_{L_n} f(x, y, z)dl\,.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy^2 dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(0, 0)$, $B(4, 3)$.

Прямолинейный отрезок AB лежит в плоскости Oxy (рис. 2), на нем задана функция $f(x, y) = xy^2$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x$. Так как $y' = \frac{3}{4}$, то $dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{5}{4}dx$.

По формуле (4) получаем

$$\int\limits_L xy^2 dl = \int\limits_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2 \frac{5}{4}dx = \int\limits_0^4 \frac{45}{64}x^3 dx = \frac{45}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^4 = \frac{45}{64}\cdot\frac{4^4}{4} = 45\,.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^5 + 8xy)dl$, где L – дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$, $x = 2$.

Поскольку $y' = x^3$, $dl = \sqrt{1 + x^6}\,dx$ и на дуге кривой $4y = x^4$ функция $f(x, y) \equiv (x^5 + 8xy) = x^5 + 4y\,2x = x^5 + x^4\,2x = 3x^5$, то по формуле (4)

$$\int\limits_L (x^5+8xy)dl=\int\limits_0^2 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx=3\int\limits_0^2\left(1+x^6\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}d(1+x^6)=\frac{1}{2}\left.\frac{\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2=\frac{1}{3}\left(65\sqrt{65}-1\right).$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками, для которых $y = 0$, $y = 1$.

Так как кривая задана уравнением $x = x(y)$, то дифференциал ее дуги выражается формулой $dl=\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy$.

Криволинейный интеграл вычислим по формуле

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_c^d f\left[x(y),y\right]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy. \qquad (6)$$

В данном случае $c = 0$, $d = 1$, $x = x(y) = \ln y$, $x'_y=\frac{1}{y}$, $dl=\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy=$

$=\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}dy=\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy$, поэтому

$$\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}dl=\int\limits_0^1 y\sqrt{y^2+1}\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy=\int\limits_0^1 (y^2+1)dy=\left.\left(\frac{y^3}{3}+y\right)\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (2x+y)dl$, где L – контур треугольника ABO (рис. 3) с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $O(0, 0)$.

В соответствии с четвертым свойством криволинейного интеграла I рода

$$\int\limits_L (2x+y)dl=\int\limits_{AB}(2x+y)dl+\int\limits_{BO}(2x+y)dl+\int\limits_{OA}(2x+y)dl.$$

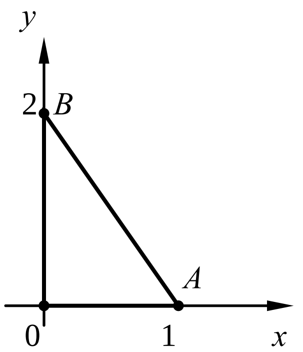


Рис. 3

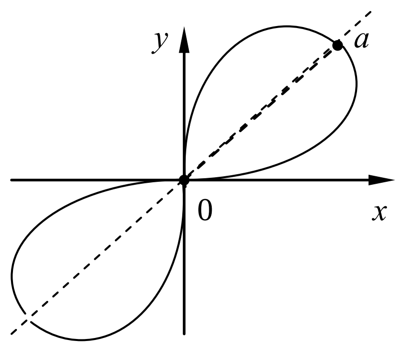


Рис. 4

На отрезке AB $y = -2x + 2$, поэтому $y' = -2$, $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{5}dx$.

На отрезке BO $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1 + x'^2}\,dy = dy$, на отрезке OA $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = dx$. Принимая во внимание первое свойство криволинейного интеграла и используя формулы (4) и (6), получаем

$$\int_L (2x + y)dl = \int_0^1 2\sqrt{5}dx + \int_0^2 ydy + \int_0^1 2xdx = 2\sqrt{5}x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^1 = 3 + 2\sqrt{5}.$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x + y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$, расположенный в первом координатном углу (рис. 4).

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (5).

Так как $\rho' = a\dfrac{1}{2\sqrt{\sin 2\theta}}\cos 2\theta\, 2 = \dfrac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, то

$$dl = \sqrt{a^2 \sin 2\theta + \frac{a^2\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}}d\theta = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta = \frac{a^2 d\theta}{a\sqrt{\sin 2\theta}} = \frac{a^2 d\theta}{\rho}.$$

Заметив, что $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, по формуле (5) получим

$$\int_L (x + y)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\frac{a^2 d\,\theta}{\rho} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \rho\sin\theta)d\theta =$$

$$= a^2(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xdl$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

Применим формулу (3). Для первой арки циклоиды (рис. 5) $0 \le t \le 2\pi$, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Поскольку $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$ и

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2 - 2\cos t}dt =$$

$$= a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt,$$

по формуле (3)

$$\int_L x\,dl = \int_0^{2\pi} a(t-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2,$$

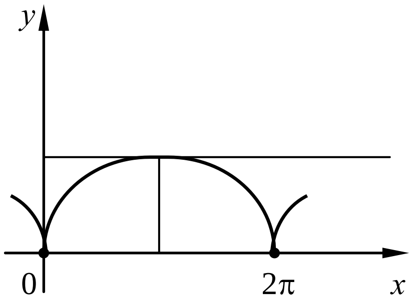


Рис. 5

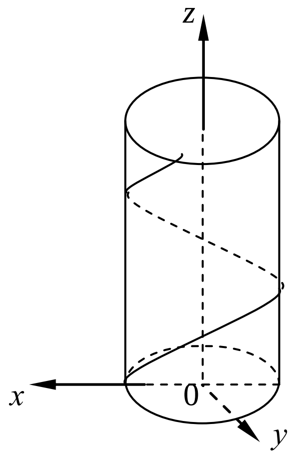


Рис. 6

так как

$$\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt = -2\int_0^{2\pi} t\,d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -\,2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt = -2\left(2\pi\cos\pi - 0\cos 0\right) +$$

$$+\,4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

и

$$\int_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = 4\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+4y-4z+7)\,dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8, 9, 3)$, $M_2(6, 10, 5)$.

Составим сначала уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2}\,(=t).$$

Таким образом, получены параметрические уравнения прямой: $x = 8 - 2\,t$, $y =$

$= 9 + t$, $z = 3 + 2t$; точка M пробегает отрезок M_1M_2, когда t изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{4+1+4}\,dt = 3dt$.

По формуле (2)

$$\int_L (2x + 4y - 4z + 7)dl = \int_0^1 \big(2(8-2t) + 4(9+t) - 4(3+2t) + 7\big)3dt = 3\int_0^1 (47 - 8t)dt =$$

$$= 3(47t - 4t^2)\Big|_0^1 = 3(47 - 4) = 129.$$

Пример 8. Вычислить $\int_L (x^2 + y^2)dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (рис. 6), ограниченная точками, для которых $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Применяем формулу (2). Поскольку $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$$

и

$$\int_L (x^2 + y^2)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t\big)\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = a^2\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= a^2\sqrt{a^2 + b^2}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Пример 9. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + 2z^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = z$.

В данном случае линия задана пересечением двух поверхностей: сферы и плоскости. Составим параметрические линии, положив $z = t$. Тогда $y = t$ и $x = \pm\sqrt{R^2 - 2t^2}$ (получено из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с учетом равенств $y = z = t$).

Из параметрических уравнений линии $x = \pm\sqrt{R^2 - 2t^2}$, $y = t$, $z = t$ находим $x' = \mp\dfrac{2t}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}$, $y' = 1$, $z' = 1$, поэтому

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{\frac{4t^2}{R^2 - 2t^2} + 1 + 1}\,dt = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\,dt\,.$$

Из равенств $x = \pm\sqrt{R^2 - 2t^2}$ определим пределы изменения t, положив $x = 0$, или $R^2 - 2t^2 = 0$, откуда $t_1 = \frac{-R}{\sqrt{2}}$, $t_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Заметим, что на данной линии $x^2 + 2z^2 = R^2$ или $\sqrt{x^2 + 2z^2} = R$, по формуле (2)

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + 2z^2}\,dl = \int\limits_{\frac{-R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} R\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\,dt = R^2\int\limits_{\frac{-R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{R^2 - \left(\sqrt{2}t\right)^2}} = R^2 \arcsin\frac{\sqrt{2}t}{R}\Bigg|_{\frac{-R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} =$$

$$= R^2\left[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right] = R^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi R^2.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным уравнением вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$:

1. $\int\limits_L x^2 y^3\,dl$, где L – отрезок прямой AB, где $A(4, 3)$, $B(6, 7)$;

2. $\int\limits_L \sqrt{1 + x^2}\,dl$, где L – дуга кривой $x^2 = 2y$ $(1 \le x \le 3)$;

3. $\int\limits_L y\,dl$, где L – дуга кривой $y = x^3$ между точками $A(0, 0)$, $B(1, 1)$;

4. $\int\limits_L y^2\,dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками $A(0, 1)$, $B(1, e)$;

5. $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}\,dl$, где L – дуга косинусоиды $y = \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

6. $\int\limits_L \sin x\sqrt{1 + \sin^4 x}\,dl$, где L – дуга кривой $y = \operatorname{ctg} x$ $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

7. $\int\limits_L \sin^4 x \cos x\,dl$, где L – дуга кривой $y = \ln\cos x$ $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$.

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным уравнениями в полярных координатах:

8. $\int\limits_L y^2\,dl$, где L – верхняя полуокружность $\rho = R$;

9. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$;

10. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – дуга лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

11. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)^2 dl$, где L – дуга кривой $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным параметрическими уравнениями:

12. $\int\limits_L xy^2\,dl$, где L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, лежащая в первой четверти;

13. $\int\limits_L y\,dl$, где L – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$;

14. $\int\limits_L (x + 2y - 3z)\,dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(1, 3, -1)$, $B(3, 5, -1)$;

15. $\int\limits_L \sqrt{1+\dfrac{x}{2}}\,dl$, где L – дуга кривой $x = 2\sin^2 t$, $y = 2\sin t\cos t$, $z = 2\cos t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

16. $\int\limits_L \sqrt{1+4y+9xz}\,dl$, где L – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Вычислить следующие криволинейные интегралы I рода:

17. $\int\limits_L ye^{-x}\,dl$, где L – дуга кривой $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t + 8$ между точками, для которых $t = 0$, $t = 1$;

18. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, где L – дуга кривой $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

19. $\int\limits_L xy\,dl$, где L – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, лежащая в первом квадранте;

20. $\int\limits_L \sqrt{2x^2+y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = x$;

21. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$;

22. $\int\limits_L z dl$, где L – дуга конической винтовой линии $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le \pi)$.

1.2. Криволинейные интегралы по координатам (криволинейные интегралы II рода)

Пусть дана дуга пространственной кусочно-гладкой кривой L, ограниченная точками A и B (см. рис.1), и определенные на ней непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Дугу AB разобьем точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, …, $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$). На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $\overline{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, и значения функций в этой точке $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv P(\overline{M}_i)$, $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv Q(\overline{M}_i)$, $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv R(\overline{M}_i)$ умножим не на длину дуги $M_{i-1}M_i$ (как это было в случае криволинейного интеграла I рода), а на проекции этой дуги соответственно на оси Ox, Oy, Oz, которые обозначим через Δx_i, Δy_i, Δz_i, причем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Из полученных произведений составим сумму

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i \right], \tag{7}$$

называемую *интегральной суммой* по координатам для функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Криволинейным интегралом по координатам (или *криволинейным интегралом II рода*) от выражения $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ по направленной дуге AB гладкой кривой L называется предел интегральной суммы (7) при $n \to \infty$, $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$, $\max \Delta z_i \to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \lim_{n \to \infty} T_n = \int\limits_{AB} P(x, y, z)dx +$$

$$+ \int\limits_{AB} Q(x, y, z)dy + \int\limits_{AB} R(x, y, z)dz,$$

где $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$ - криволинейный интеграл по координате x; $\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy = \lim\limits_{\max \Delta y_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i$ - криволинейный интеграл по координате y; $\int\limits_{AB} R(x,y,z)dz = \lim\limits_{\max \Delta z_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$ - криволинейный интеграл по координате z.

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Oxy, функции P, Q, R не зависят от z, $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы F на координатные оси, то криволинейный интеграл II рода выражает работу силы $F = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, точка приложения которой описывает дугу AB кривой L (механическое истолкование).

Основные свойства криволинейного интеграла II рода:

1. Криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx + \\ + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

2. $$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + \\ + \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{AB} R(x,y,z)dz.$$

Остальные свойства аналогичны свойствам интеграла I рода.

Вычисление криволинейного интеграла II рода также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ и значению t_1 соответствует точка A, значению t_2 – точка B, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt. \qquad (8)$$

В частности, для кривой L, лежащей в плоскости Oxy,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \qquad (9)$$

Если плоская кривая L задана уравнением $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\right]dx. \qquad (10)$$

Существование и величина криволинейного интеграла $\oint_C Pdx + Qdy$ по замкнутому контуру не зависит от того, какую точку контура выбрать за начало интегрирования. Если путь интегрирования C есть простая замкнутая кривая, то $\oint_C Pdx + Qdy$ берется по этому контуру в направлении против хода часовой стрелки (положительное направление).

Пример 10. Вычислить криволинейный интеграл II рода

$$\int_L x^2 dx + xydy,$$

где L – отрезок прямой от точки $A(0, 1)$ до точки $B(1, 2)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB $dy = dx$. Подставляя в подынтегральную функцию вместо y его выражение через x ($y = x + 1$) и замечая, что при перемещении от A к B x меняется от 0 до 1, по формуле (10) получаем

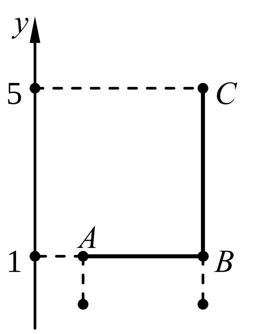
$$\int_L x^2 dx + xydy = \int_0^1 x^2 dx + x(x+1)dx = \int_0^1 (x^2 + x^2 + x)dx = \int_0^1 (2x^2 + x)dx =$$

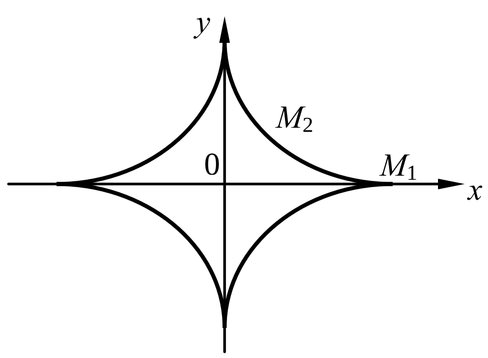
$$= \left(\frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Пример 11. Вычислить $\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, где L – ломаная ABC (рис. 7), причем $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 5)$.

Так как контур интегрирования L состоит из отрезков AB и BC, то

$$\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int_{AB} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy + \int_{BC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy.$$





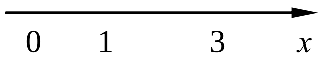


Рис. 7 **Рис. 8**

На отрезке AB, уравнение которого $y = 1$, $dy = 0$; на отрезке BC, уравнение которого $x = 3$, $dx = 0$, поэтому

$$\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int_1^3 (x^3 + 1)dx + (x + 1)\,0 + \int_1^5 (3^3 + y)\,0 + (3 + y^3)dy =$$

$$= \int_1^3 (x^3 + 1)dx + \int_1^5 (3 + y^3)dy = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_1^3 + \left(3y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5 = 190.$$

Пример 12. Вычислить $\int_L x^2 dx + \frac{dy}{y^2}$, где L – дуга кривой $x = \frac{1}{y}$ от точки $A(1,\, 1)$ до точки $B\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Линия L задана уравнением вида $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$. В этом случае вместо формулы (10) целесообразно применить формулу

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d \left[P\big(x(y), y\big)x'(y) + Q\big(x(y), y\big)\right]dy.$$

Поскольку в данном примере $c = 1$, $d = \frac{1}{4}$, $x'(y) = -\frac{1}{y^2}$, то

$$\int_L x^2 dx + \frac{dy}{y^2} = \int_1^{\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}\right]dy = \int_1^{\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2}\right)dy = \left(\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^{\frac{1}{4}} = 18.$$

Замечание. В данном случае можно пользоваться и формулой (10), так как уравнение линии L записывается в виде $y = \frac{1}{x}$, причем $1 \le x \le 4$:

$$\int_L x^2 dx + \frac{dy}{y^2} = \int_1^4 \left[x^2 + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]dx = \int_1^4 \left(x^2 - 1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^4 = 18.$$

Пример 13. Вычислить $\int_L ydx + xdy$, где L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ от точки $M_1(t_1)$ до точки $M_2(t_2)$, для которых $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$ (рис. 8).

Применим формулу (9), так как плоская кривая здесь задана параметрическими уравнениями. Из уравнений линии находим

$$dx = -3a\cos^2 t \sin t dt, \quad dy = 3a\sin^2 t \cos t dt.$$

Следовательно,

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[a\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right) + a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t\right]dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^4 t\sin^2 t - \cos^2 t\sin^4 t\right)dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2t}{4}\cos 2tdt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2td(\sin 2t) = \frac{3a^2}{8}\cdot\left.\frac{\sin^3 2t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{8}.$$

Пример 14. Вычислить $\int\limits_L y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1, 0, 2)$ до точки $B(3, 1, 4)$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2}(=t).$$

Из параметрических уравнений прямой $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 + 2t$, получаем $dx = 2dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1, т.е. пределы интегрирования в формуле (8), которой здесь нужно пользоваться, соответственно $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

По формуле (8) находим

$$\int_L y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz = \int_0^1 t^2 2dt + \left[(1+2t)^2 + (2+2t)\right]dt +$$

$$+\left[(1+2t) + t + (2+2t)^2\right]2dt = \int_0^1\left(2t^2 + \left[1+4t+4t^2+2+2t\right] + 2\left[1+3t+4+8t+4t^2\right]\right)dt =$$

$$= \int_0^1\left[14t^2+28t+13\right]dt = \left.\left(\frac{14t^3}{3}+14t^2+13t\right)\right|_0^1 = \frac{95}{3}.$$

Пример 15. Вычислить $\int\limits_L (y^2+z^2)dx - yzdy + xdz$, где L – дуга винтовой линии $x = t$, $y = 2\cos t$, $z = 2\sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку $dx = dt$, $dy = -2\sin t\,dt$, $dz = 2\cos t\,dt$, то

$$\int_L (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2 t + 4\sin^2 t\right)dt - 4\sin t\cos t\left(-2\sin tdt\right) +$$

$$+ 2t\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2t\cos t + 8\sin^2 t\cos t + 4\right)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 td(\sin t) +$$

$$+ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi + \frac{2}{3}.$$

Замечание. Интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt$ вычислен с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} td(\sin t) = t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin tdt = t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль данных плоских кривых в указанных направлениях:

23. $\int_L x^3dx + x^2dy$, L – дуга кривой $y = x^2$ от $A(1, 1)$ до $B(3, 9)$;

24. $\int_L \cos^2 xdx + \frac{dy}{y^2}$, L – дуга кривой $y = \operatorname{tg} x$ от $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{3}$;

25. $\int_L \cos^3 xdx + ydy$, L – дуга кривой $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$;

26. $\int_L (x^2 + y^2)dx + xydy$, L – дуга кривой $y = e^x$ от $A(0, 1)$ до $B(1, e)$.

Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль указанных плоских кривых в направлении возрастания параметра:

27. $\int_L xy^2dx + x^2ydy$, L – дуга кривой $x = t^2$, $y = t$ $(1 \le t \le 2)$;

28. $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

29. $\int\limits_L ydx - xdy$, L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

30. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, L – первая арка циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

2. Криволинейные интегралы

2.1. Криволинейные интегралы по длине дуги (криволинейные интегралы I рода)

Рассмотрим дугу AB пространственной кусочно-гладкой* кривой L (рис. 1) и определенную на ней непрерывную функцию $f(x, y, z) \equiv f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка кривой. Дугу AB произвольным образом разобьем точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$), длины которых обозначим соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\overline{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i\,, \qquad (1)$$

называемую *интегральной суммой* функции $f(x, y, z)$ по длине дуги AB.

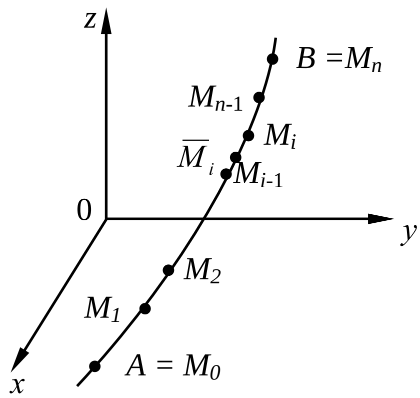


Рис. 1

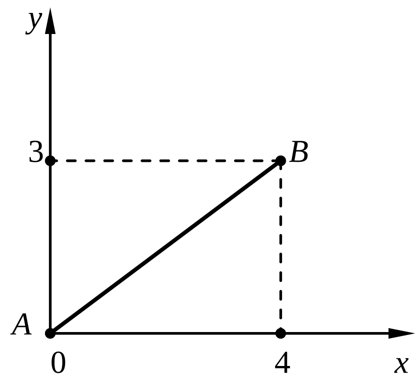


Рис. 2

Криволинейным интегралом по длине дуги AB от функции $f(x, y, z)$ (или

* Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой. Кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется кусочно-гладкой.

криволинейным интегралом I рода) называется предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$ и $\max \Delta l_i \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i$$

(dl – дифференциал дуги).

На дуге AB, целиком лежащей в плоскости Oxy, функция f не зависит от координаты z , поэтому по определению

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i \,.$$

Если подынтегральную функцию $f > 0$ рассматривать как переменную линейную плотность кривой интеграции L, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl$ представляет собой массу дуги AB кривой L (простейшее физическое истолкование).

Если $f(x, y) \geq 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$ численно равен площади части цилиндрической поверхности, у которой направляющая AB лежит в плоскости Oxy, а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу плоскостью Oxy (геометрическое истолкование).

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Действительно, если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$\int\limits_{L} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt\,, \qquad (2)$$

так как в этом случае дифференциал дуги $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$.

Если кривая L лежит в плоскости Oxy, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt\,. \qquad (3)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, где $a \leq x \leq b$, имеем $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$, поэтому

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \qquad (4)$$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b \frac{f[x, y(x)]}{|\cos\alpha|}dx,$$

где α - угол между касательной к кривой и осью Ox.

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$ и

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta. \qquad (5)$$

Приведем далее *основные свойства криволинейного интеграла I рода*:

1. По определению криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{BA} f(x,y,z)dl;$$

2. $\int_L [f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)]dl = \int_L f_1(x,y,z)dl \pm \int_L f_2(x,y,z)dl$;

3. $\int_L cf(x,y,z)dl = c\int_L f(x,y,z)dl$, где c = const;

4. Если путь (контур) интегрирования разбит на n частей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{L_1} f(x,y,z)dl + \int_{L_2} f(x,y,z)dl + \ldots + \int_{L_n} f(x,y,z)dl.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xy^2 dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(0, 0)$, $B(4, 3)$.

Прямолинейный отрезок AB лежит в плоскости Oxy (рис. 2), на нем задана функция $f(x, y) = xy^2$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x$. Так как $y' = \frac{3}{4}$, то $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{5}{4}dx$.

По формуле (4) получаем

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2 \frac{5}{4}dx = \int_0^4 \frac{45}{64}x^3 dx = \frac{45}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4 = \frac{45}{64}\cdot\frac{4^4}{4} = 45.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x^5 + 8xy)dl$, где L – дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$, $x = 2$.

Поскольку $y' = x^3$, $dl = \sqrt{1+x^6}\,dx$ и на дуге кривой $4y = x^4$ функция $f(x, y) \equiv (x^5 + 8xy) = x^5 + 4y\,2x = x^5 + x^4\,2x = 3x^5$, то по формуле (4)

$$\int_L (x^5 + 8xy)dl = \int_0^2 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx = 3\int_0^2 \left(1+x^6\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}d(1+x^6) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}\left(65\sqrt{65}-1\right).$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L y\sqrt{y^2+1}\,dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками, для которых $y = 0$, $y = 1$.

Так как кривая задана уравнением $x = x(y)$, то дифференциал ее дуги выражается формулой $dl = \sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy$.

Криволинейный интеграл вычислим по формуле

$$\int_L f(x,y)dl = \int_c^d f\left[x(y), y\right]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy. \qquad (6)$$

В данном случае $c = 0$, $d = 1$, $x = x(y) = \ln y$, $x'_y = \dfrac{1}{y}$, $dl = \sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy =$

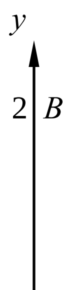
$= \sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}}\,dy = \dfrac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy$, поэтому

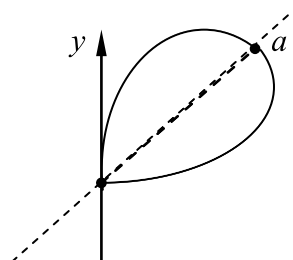
$$\int_L y\sqrt{y^2+1}\,dl = \int_0^1 y\sqrt{y^2+1}\,\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy = \int_0^1 (y^2+1)dy = \left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+y)dl$, где L – контур треугольника ABO (рис. 3) с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $O(0, 0)$.

В соответствии с четвертым свойством криволинейного интеграла I рода

$$\int_L (2x+y)dl = \int_{AB} (2x+y)dl + \int_{BO} (2x+y)dl + \int_{OA} (2x+y)dl.$$





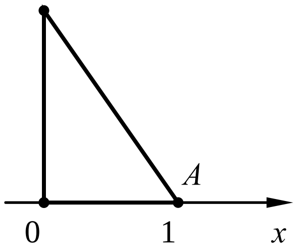


Рис. 3

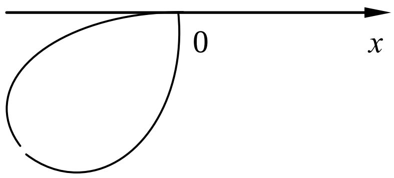


Рис. 4

На отрезке AB y = -2x + 2, поэтому y' = -2, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx$.

На отрезке BO x = 0, x' = 0, $dl = \sqrt{1+x'^2}dy = dy$, на отрезке OA y = 0, y' = 0, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = dx$. Принимая во внимание первое свойство криволинейного интеграла и используя формулы (4) и (6), получаем

$$\int\limits_L (2x+y)dl = \int\limits_0^1 2\sqrt{5}dx + \int\limits_0^2 ydy + \int\limits_0^1 2xdx = 2\sqrt{5}x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^1 = 3 + 2\sqrt{5}.$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$, расположенный в первом координатном углу (рис. 4).

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (5).

Так как $\rho' = a\dfrac{1}{2\sqrt{\sin 2\theta}}\cos 2\theta\, 2 = \dfrac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, то

$$dl = \sqrt{a^2\sin 2\theta + \frac{a^2\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}}d\theta = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta = \frac{a^2 d\theta}{a\sqrt{\sin 2\theta}} = \frac{a^2 d\theta}{\rho}.$$

Заметив, что $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, т.е. α = 0, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, по формуле (5) получим

$$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta\right)\frac{a^2 d\,\theta}{\rho} = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta + \rho\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= a^2\left(\sin\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xdl$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

Применим формулу (3). Для первой арки циклоиды (рис. 5) $0 \le t \le 2\pi$, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Поскольку $x_t' = a(1-\cos t)$, $y_t' = a\sin t$ и

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt\,,$$

по формуле (3)

$$\int\limits_L x\,dl = \int\limits_0^{2\pi} a(t-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int\limits_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt - 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2,$$

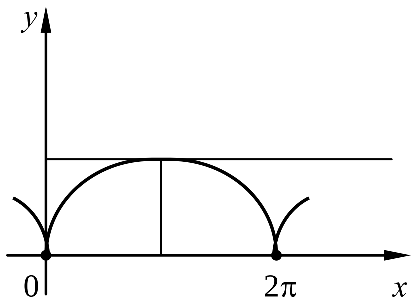


Рис. 5

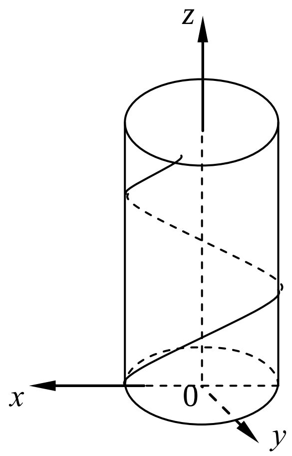


Рис. 6

так как

$$\int\limits_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt = -2\int\limits_0^{2\pi} t\,d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt = -2(2\pi\cos\pi - 0\cos 0) +$$

$$+4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

и

$$\int_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = 4\left.\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+4y-4z+7)dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8, 9, 3)$, $M_2(6, 10, 5)$.

Составим сначала уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} (= t).$$

Таким образом, получены параметрические уравнения прямой: $x = 8 - 2t$, $y = 9 + t$, $z = 3 + 2t$; точка M пробегает отрезок M_1M_2, когда t изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt = \sqrt{4+1+4}dt = 3dt$.

По формуле (2)

$$\int_L (2x+4y-4z+7)dl = \int_0^1 \big(2(8-2t)+4(9+t)-4(3+2t)+7\big)3dt = 3\int_0^1 (47-8t)dt =$$

$$= 3(47t-4t^2)\Big|_0^1 = 3(47-4) = 129.$$

Пример 8. Вычислить $\int_L (x^2+y^2)dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (рис. 6), ограниченная точками, для которых $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

Применяем формулу (2). Поскольку $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}dt$$

и

$$\int_L (x^2+y^2)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t\big)\sqrt{a^2+b^2}dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= a^2\sqrt{a^2+b^2}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = z$.

В данном случае линия задана пересечением двух поверхностей: сферы и плоскости. Составим параметрические линии, положив $z = t$. Тогда $y = t$ и $x = \pm\sqrt{R^2-2t^2}$ (получено из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с учетом равенств $y = z = t$).

Из параметрических уравнений линии $x = \pm\sqrt{R^2-2t^2}$, $y = t$, $z = t$ находим $x' = \mp\dfrac{2t}{\sqrt{R^2-2t^2}}$, $y' = 1$, $z' = 1$, поэтому

$$dl = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \sqrt{\frac{4t^2}{R^2-2t^2}+1+1}\,dt = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2-2t^2}}\,dt.$$

Из равенств $x = \pm\sqrt{R^2-2t^2}$ определим пределы изменения t, положив $x = 0$, или $R^2 - 2t^2 = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{-R}{\sqrt{2}}$, $t_2 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Заметим, что на данной линии $x^2 + 2z^2 = R^2$ или $\sqrt{x^2+2z^2} = R$, по формуле (2)

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl = \int\limits_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} R\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2-2t^2}}\,dt = R^2\int\limits_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{R^2-\left(\sqrt{2}t\right)^2}} = R^2\arcsin\frac{\sqrt{2}t}{R}\Bigg|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} =$$

$$= R^2\left[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right] = R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi R^2.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным уравнением вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$:

1. $\int\limits_L x^2y^3\,dl$, где L – отрезок прямой AB, где $A(4, 3)$, $B(6, 7)$;

2. $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}\,dl$, где L – дуга кривой $x^2 = 2y$ $(1 \le x \le 3)$;

27. $\int\limits_L y\,dl$, где L – дуга кривой $y = x^3$ между точками $A(0, 0)$, $B(1, 1)$;

28. $\int\limits_L y^2\,dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками $A(0, 1)$, $B(1, e)$;

29. $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, где L – дуга косинусоиды $y = \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

30. $\int\limits_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}dl$, где L – дуга кривой $y = \operatorname{ctg} x$ $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

31. $\int\limits_L \sin^4 x \cos x dl$, где L – дуга кривой $y = \ln \cos x$ $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$.

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным уравнениями в полярных координатах:

32. $\int\limits_L y^2 dl$, где L – верхняя полуокружность $\rho = R$;

33. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$;

34. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – дуга лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$;

35. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 dl$, где L – дуга кривой $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным параметрическими уравнениями:

36. $\int\limits_L xy^2 dl$, где L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, лежащая в первой четверти;

37. $\int\limits_L y dl$, где L – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$;

38. $\int\limits_L (x+2y-3z)dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(1, 3, -1)$, $B(3, 5, -1)$;

39. $\int\limits_L \sqrt{1+\frac{x}{2}}dl$, где L – дуга кривой $x = 2\sin^2 t$, $y = 2\sin t \cos t$, $z = 2\cos t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

40. $\int\limits_L \sqrt{1+4y+9xz}dl$, где L – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Вычислить следующие криволинейные интегралы I рода:

41. $\int\limits_L ye^{-x}dl$, где L – дуга кривой $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t + 8$ между точками, для которых $t = 0$, $t = 1$;

42. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$, где L – дуга кривой $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

43. $\int\limits_L xydl$, где L – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, лежащая в первом квадранте;

44. $\int\limits_L \sqrt{2x^2 + y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = x$;

45. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$;

46. $\int\limits_L zdl$, где L – дуга конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le \pi)$.

1.2. Криволинейные интегралы по координатам (криволинейные интегралы II рода)

Пусть дана дуга пространственной кусочно-гладкой кривой L, ограниченная точками A и B (см. рис.1), и определенные на ней непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Дугу AB разобьем точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, …, $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$). На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $\overline{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, и значения функций в этой точке $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv P(\overline{M}_i)$, $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv Q(\overline{M}_i)$, $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv R(\overline{M}_i)$ умножим не на длину дуги $M_{i-1}M_i$ (как это было в случае криволинейного интеграла I рода), а на проекции этой дуги соответственно на оси Ox, Oy, Oz, которые обозначим через Δx_i, Δy_i, Δz_i, причем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Из полученных произведений составим сумму

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i \right], \tag{7}$$

называемую *интегральной суммой* по координатам для функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Криволинейным интегралом по координатам (или *криволинейным* *интегралом II рода*) от выражения $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ по направленной дуге AB гладкой кривой L называется предел интегральной суммы (7) при $n \to \infty$, $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$, $\max \Delta z_i \to 0$:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \lim_{n\to\infty} T_n = \int_{AB} P(x,y,z)dx +$$
$$+ \int_{AB} Q(x,y,z)dy + \int_{AB} R(x,y,z)dz,$$

где $\int_{AB} P(x,y,z)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$ - криволинейный интеграл по координате x; $\int_{AB} Q(x,y,z)dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i$ - криволинейный интеграл по координате y; $\int_{AB} R(x,y,z)dz = \lim_{\max \Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$ - криволинейный интеграл по координате z.

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Oxy, функции P, Q, R не зависят от z, $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy\,.$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы F на координатные оси, то криволинейный интеграл II рода выражает работу силы $F = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, точка приложения которой описывает дугу AB кривой L (механическое истолкование).

Основные свойства криволинейного интеграла II рода:

1. Криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = -\int_{BA} P(x,y,z)dx +$$
$$+ Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

2. $$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{AB} P(x,y,z)dx +$$
$$+ \int_{AB} Q(x,y,z)dy + \int_{AB} R(x,y,z)dz.$$

Остальные свойства аналогичны свойствам интеграла I рода.

Вычисление криволинейного интеграла II рода также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \le t \le t_2$) и значению t_1 соответствует точка A, значению t_2 – точка B, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + \right. \tag{8}$$
$$\left. + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt.$$

В частности, для кривой L, лежащей в плоскости Oxy,

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right]dt. \tag{9}$$

Если плоская кривая L задана уравнением $y = y(x)$ ($a \le x \le b$), то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\right]dx. \tag{10}$$

Существование и величина криволинейного интеграла $\oint_C Pdx + Qdy$ по замкнутому контуру не зависит от того, какую точку контура выбрать за начало интегрирования. Если путь интегрирования C есть простая замкнутая кривая, то $\oint_C Pdx + Qdy$ берется по этому контуру в направлении против хода часовой стрелки (положительное направление).

Пример 10. Вычислить криволинейный интеграл II рода

$$\int_L x^2dx + xydy,$$

где L – отрезок прямой от точки $A(0, 1)$ до точки $B(1, 2)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB $dy = dx$. Подставляя в подынтегральную функцию вместо y его выражение через x ($y = x + 1$) и замечая, что при перемещении от A к B x меняется от 0 до 1, по формуле (10) получаем

$$\int_L x^2dx + xydy = \int_0^1 x^2dx + x(x+1)dx = \int_0^1 (x^2 + x^2 + x)dx = \int_0^1 (2x^2 + x)dx =$$
$$= \left.\left(\frac{2x^3}{3} + x\right)\right|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Пример 11. Вычислить $\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, где L – ломаная ABC (рис. 7), причем $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 5)$.

Так как контур интегрирования L состоит из отрезков AB и BC, то

$$\int_L (x^3+y)dx+(x+y^3)dy = \int_{AB}(x^3+y)dx+(x+y^3)dy+\int_{BC}(x^3+y)dx+(x+y^3)dy.$$

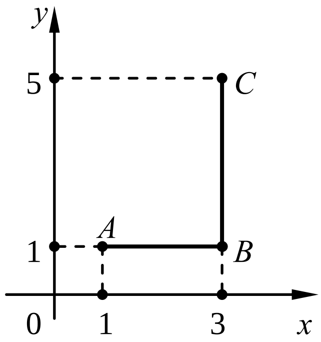


Рис. 7

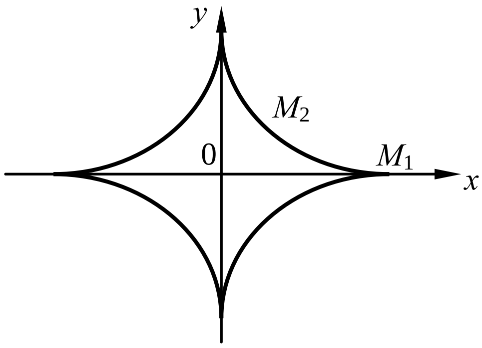


Рис. 8

На отрезке AB, уравнение которого $y = 1$, $dy = 0$; на отрезке BC, уравнение которого $x = 3$, $dx = 0$, поэтому

$$\int_L (x^3+y)dx+(x+y^3)dy = \int_1^3 (x^3+1)dx+(x+1)\,0+\int_1^5 (3^3+y)\,0+(3+y^3)dy =$$

$$=\int_1^3 (x^3+1)dx+\int_1^5 (3+y^3)dy = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^3+\left(3y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5=190.$$

Пример 12. Вычислить $\int_L x^2dx+\frac{dy}{y^2}$, где L – дуга кривой $x=\frac{1}{y}$ от точки $A(1,\,1)$ до точки $B\left(4,\frac{1}{4}\right)$.

Линия L задана уравнением вида $x = x(y)$ ($c \le y \le d$). В этом случае вместо формулы (10) целесообразно применить формулу

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_c^d \left[P\big(x(y),y\big)x'(y)+Q\big(x(y),y\big)\right]dy.$$

Поскольку в данном примере $c = 1$, $d = \frac{1}{4}$, $x'(y)=-\frac{1}{y^2}$, то

$$\int_L x^2dx+\frac{dy}{y^2}=\int_1^{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{y^2}\right]dy=\int_1^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^2}\right)dy=\left(\frac{1}{3y^3}-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^{\frac{1}{4}}=18.$$

Замечание. В данном случае можно пользоваться и формулой (10), так как уравнение линии L записывается в виде $y=\frac{1}{x}$, причем $1 \le x \le 4$:

$$\int\limits_L x^2dx+\frac{dy}{y^2}=\int\limits_1^4\left[x^2+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]dx=\int\limits_1^4\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_1^4=18.$$

Пример 13. Вычислить $\int\limits_L ydx+xdy$, где L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ от точки $M_1(t_1)$ до точки $M_2(t_2)$, для которых $t_1 = 0$, $t_2=\frac{\pi}{4}$ (рис. 8).

Применим формулу (9), так как плоская кривая здесь задана параметрическими уравнениями. Из уравнений линии находим

$$dx=-3a\cos^2 t\sin tdt,\quad dy=3a\sin^2 t\cos tdt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L ydx+xdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)+a\cos^3 t\,3a\sin^2 t\cos t\right]dt=$$

$$=3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^4 t\sin^2 t-\cos^2 t\sin^4 t\right)dt=3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)dt=$$

$$=3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2t}{4}\cos 2tdt=\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2td(\sin 2t)=\frac{3a^2}{8}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{8}.$$

Пример 14. Вычислить $\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1, 0, 2)$ до точки $B(3, 1, 4)$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{4-2}(=t).$$

Из параметрических уравнений прямой $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 + 2t$, получаем $dx = 2dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1, т.е. пределы интегрирования в формуле (8), которой здесь нужно пользоваться, соответственно $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

По формуле (8) находим

$$\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz=\int\limits_0^1 t^2\,2dt+\left[(1+2t)^2+(2+2t)\right]dt+$$

$$+\left[(1+2t)+t+(2+2t)^2\right]2dt=\int\limits_0^1\left(2t^2+\left[1+4t+4t^2+2+2t\right]+2\left[1+3t+4+8t+4t^2\right]\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left[14t^2+28t+13\right]dt=\left(\frac{14t^3}{3}+14t^2+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{95}{3}.$$

Пример 15. Вычислить $\int\limits_L (y^2+z^2)dx-yzdy+xdz$, где L – дуга винтовой линии $x = t, y = 2\cos t, z = 2\sin t$ $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку $dx = dt, dy = -2\sin t\,dt, dz = 2\cos t\,dt$, то

$$\int\limits_L (y^2+z^2)dx-yzdy+xdz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2 t+4\sin^2 t\right)dt-4\sin t\cos t\left(-2\sin tdt\right)+$$

$$+2t\cos tdt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2t\cos t+8\sin^2 t\cos t+4\right)dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt+8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 td(\sin t)+$$

$$+4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt=2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi+\frac{2}{3}.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt$ вычислен с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}td(\sin t)=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль данных плоских кривых в указанных направлениях:

47. $\int\limits_L x^3dx+x^2dy$, L – дуга кривой $y = x^2$ от $A(1, 1)$ до $B(3, 9)$;

48. $\int\limits_L \cos^2 x dx + \frac{dy}{y^2}$, L – дуга кривой $y =$ tg x от $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{3}$;

49. $\int\limits_L \cos^3 x dx + y dy$, L – дуга кривой $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$;

50. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + xydy$, L – дуга кривой $y = e^x$ от $A(0, 1)$ до $B(1, e)$.

Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль указанных плоских кривых в направлении возрастания параметра:

27. $\int\limits_L xy^2 dx + x^2 y dy$, L – дуга кривой $x = t^2$, $y = t$ $(1 \le t \le 2)$;

28. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$, L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

29. $\int\limits_L ydx - xdy$, L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

30. $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$, L – первая арка циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

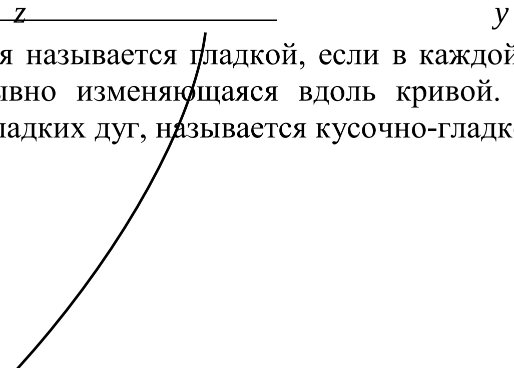
3. Криволинейные интегралы

3.1. Криволинейные интегралы по длине дуги (криволинейные интегралы I рода)

Рассмотрим дугу AB пространственной кусочно-гладкой* кривой L (рис. 1) и определенную на ней непрерывную функцию $f(x, y, z) \equiv f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка кривой. Дугу AB произвольным образом разобьем точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$), длины которых обозначим соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\overline{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i, \quad (1)$$

называемую *интегральной суммой* функции $f(x, y, z)$ по длине дуги AB.



* Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой. Кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется кусочно-гладкой.

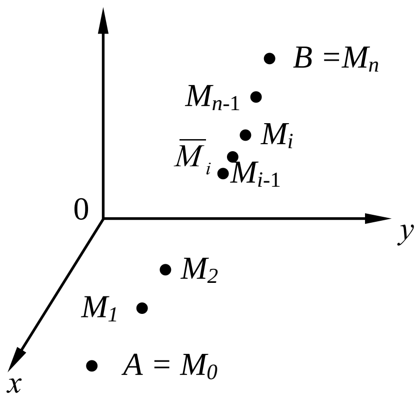


Рис. 1

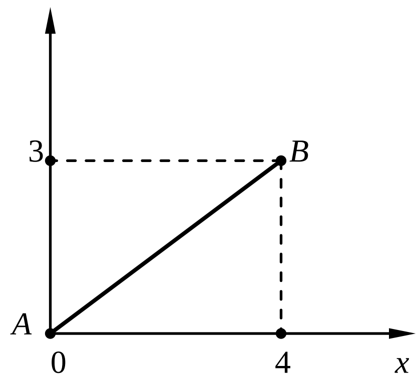


Рис. 2

Криволинейным интегралом по длине дуги AB от функции $f(x, y, z)$ (или *криволинейным интегралом I рода*) называется предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$ и $\max \Delta l_i \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i$$

(dl – дифференциал дуги).

На дуге AB, целиком лежащей в плоскости Oxy, функция f не зависит от координаты z , поэтому по определению

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i \,.$$

Если подынтегральную функцию $f > 0$ рассматривать как переменную линейную плотность кривой интеграции L, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$ представляет собой массу дуги AB кривой L (простейшее физическое истолкование).

Если $f(x, y) \geq 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$ численно равен площади части цилиндрической поверхности, у которой направляющая AB лежит в плоскости Oxy, а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу плоскостью Oxy (геометрическое истолкование).

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Действительно, если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt, \qquad (2)$$

так как в этом случае дифференциал дуги $dl = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$.

Если кривая *L* лежит в плоскости *Oxy*, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \qquad (3)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, имеем $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$, поэтому

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \qquad (4)$$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b \frac{f[x,y(x)]}{|\cos\alpha|}dx,$$

где α - угол между касательной к кривой и осью *Ox*.

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$ и

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta. \qquad (5)$$

Приведем далее *основные свойства криволинейного интеграла I рода*:

1. По определению криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{BA} f(x,y,z)dl;$$

2. $\int_L [f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)]dl = \int_L f_1(x,y,z)dl \pm \int_L f_2(x,y,z)dl$;

3. $\int_L cf(x,y,z)dl = c\int_L f(x,y,z)dl$, где c = const;

4. Если путь (контур) интегрирования разбит на *n* частей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{L_1} f(x,y,z)dl + \int_{L_2} f(x,y,z)dl + \ldots + \int_{L_n} f(x,y,z)dl.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xy^2 dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(0, 0)$, $B(4, 3)$.

Прямолинейный отрезок AB лежит в плоскости Oxy (рис. 2), на нем задана функция $f(x, y) = xy^2$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x$. Так как $y' = \frac{3}{4}$, то $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{5}{4}dx$.

По формуле (4) получаем

$$\int\limits_L xy^2 dl = \int\limits_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2 \frac{5}{4}dx = \int\limits_0^4 \frac{45}{64}x^3 dx = \frac{45}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4 = \frac{45}{64}\cdot\frac{4^4}{4} = 45.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^5 + 8xy)dl$, где L – дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$, $x = 2$.

Поскольку $y' = x^3$, $dl = \sqrt{1+x^6}\,dx$ и на дуге кривой $4y = x^4$ функция $f(x, y) \equiv (x^5 + 8xy) = x^5 + 4y\,2x = x^5 + x^4\,2x = 3x^5$, то по формуле (4)

$$\int\limits_L (x^5 + 8xy)dl = \int\limits_0^2 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx = 3\int\limits_0^2 \left(1+x^6\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}d(1+x^6) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}\left(65\sqrt{65}-1\right).$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}\,dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками, для которых $y = 0$, $y = 1$.

Так как кривая задана уравнением $x = x(y)$, то дифференциал ее дуги выражается формулой $dl = \sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy$.

Криволинейный интеграл вычислим по формуле

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_c^d f\left[x(y), y\right]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy. \qquad (6)$$

В данном случае $c = 0$, $d = 1$, $x = x(y) = \ln y$, $x'_y = \frac{1}{y}$, $dl = \sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy =$

$= \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\,dy = \frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy$, поэтому

$$\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}\,dl = \int\limits_0^1 y\sqrt{y^2+1}\,\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy = \int\limits_0^1 (y^2+1)dy = \left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (2x+y)dl$, где L – контур треугольника ABO (рис. 3) с вершинами A(1, 0), B(0, 2), O(0, 0).

В соответствии с четвертым свойством криволинейного интеграла I рода

$$\int\limits_L (2x+y)dl = \int\limits_{AB} (2x+y)dl + \int\limits_{BO} (2x+y)dl + \int\limits_{OA} (2x+y)dl .$$

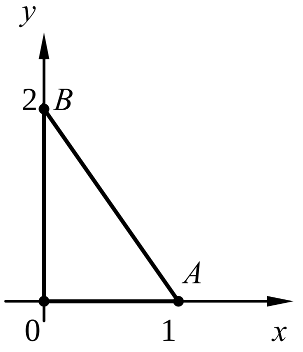


Рис. 3

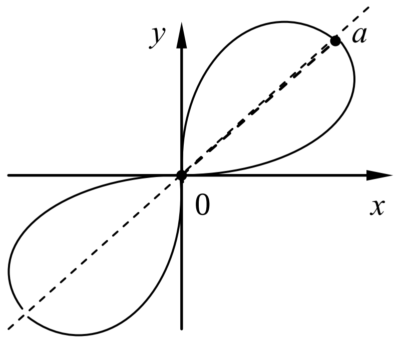


Рис. 4

На отрезке AB $y = -2x + 2$, поэтому $y' = -2$, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx$.

На отрезке BO $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1+x'^2}dy = dy$, на отрезке OA $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = dx$. Принимая во внимание первое свойство криволинейного интеграла и используя формулы (4) и (6), получаем

$$\int\limits_L (2x+y)dl = \int\limits_0^1 2\sqrt{5}dx + \int\limits_0^2 ydy + \int\limits_0^1 2xdx = 2\sqrt{5}x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^1 = 3 + 2\sqrt{5} .$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$, расположенный в первом координатном углу (рис. 4).

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (5).

Так как $\rho' = a\dfrac{1}{2\sqrt{\sin 2\theta}}\cos 2\theta\, 2 = \dfrac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, то

$$dl = \sqrt{a^2 \sin 2\theta + \frac{a^2\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}}d\theta = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta = \frac{a^2 d\theta}{a\sqrt{\sin 2\theta}} = \frac{a^2 d\theta}{\rho} .$$

Заметив, что $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, по формуле (5) получим

$$\int_L (x+y)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\frac{a^2 d\theta}{\rho} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \rho\sin\theta)d\theta =$$

$$= a^2(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x dl$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

Применим формулу (3). Для первой арки циклоиды (рис. 5) $0 \le t \le 2\pi$, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Поскольку $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$ и

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2 - 2\cos t}dt =$$

$$= a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt,$$

по формуле (3)

$$\int_L x dl = \int_0^{2\pi} a(t - \cos t)\, 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2,$$

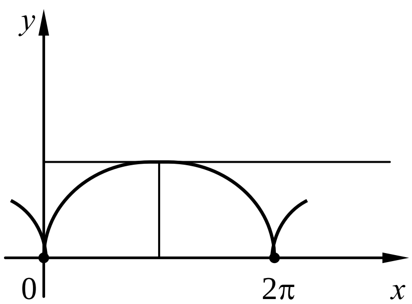


Рис. 5

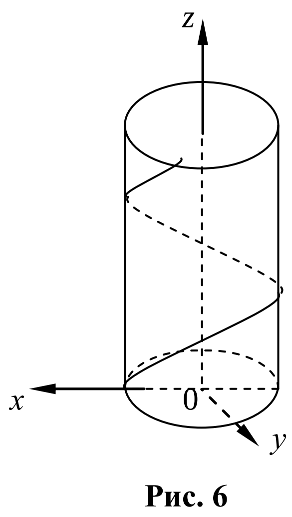


Рис. 6

так как

$$\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt = -2\int_0^{2\pi} td\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -2t\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt = -2\big(2\pi\cos\pi - 0\cos 0\big) +$$

$$+4\sin\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi$$

и

$$\int_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = 4\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (2x+4y-4z+7)dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8, 9, 3)$, $M_2(6, 10, 5)$.

Составим сначала уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2}(=t).$$

Таким образом, получены параметрические уравнения прямой: $x = 8 - 2t$, $y = 9 + t$, $z = 3 + 2t$; точка M пробегает отрезок M_1M_2, когда t изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt = \sqrt{4+1+4}dt = 3dt$.

По формуле (2)

$$\int\limits_L (2x+4y-4z+7)dl = \int_0^1 \big(2(8-2t)+4(9+t)-4(3+2t)+7\big)3dt = 3\int_0^1 (47-8t)dt =$$

$$= 3(47t - 4t^2)\Big|_0^1 = 3(47-4) = 129.$$

Пример 8. Вычислить $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (рис. 6), ограниченная точками, для которых $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

Применяем формулу (2). Поскольку $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}dt$$

и

$$\int_L (x^2+y^2)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= a^2\sqrt{a^2+b^2}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Пример 9. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = z$.

В данном случае линия задана пересечением двух поверхностей: сферы и плоскости. Составим параметрические линии, положив $z = t$. Тогда $y = t$ и $x = \pm\sqrt{R^2-2t^2}$ (получено из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с учетом равенств $y = z = t$).

Из параметрических уравнений линии $x = \pm\sqrt{R^2-2t^2}$, $y = t$, $z = t$ находим $x' = \mp\frac{2t}{\sqrt{R^2-2t^2}}$, $y' = 1$, $z' = 1$, поэтому

$$dl = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \sqrt{\frac{4t^2}{R^2-2t^2}+1+1}\,dt = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2-2t^2}}\,dt.$$

Из равенств $x = \pm\sqrt{R^2-2t^2}$ определим пределы изменения t, положив $x = 0$, или $R^2 - 2t^2 = 0$, откуда $t_1 = \frac{-R}{\sqrt{2}}$, $t_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Заметим, что на данной линии $x^2 + 2z^2 = R^2$ или $\sqrt{x^2+2z^2} = R$, по формуле (2)

$$\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl = \int_{\frac{-R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} R\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2-2t^2}}\,dt = R^2\int_{\frac{-R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{R^2-\left(\sqrt{2}t\right)^2}} = R^2\arcsin\frac{\sqrt{2}t}{R}\Bigg|_{\frac{-R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} =$$

$$= R^2\left[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right] = R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi R^2.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным уравнением вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$:

1. $\int_L x^2y^3\,dl$, где L – отрезок прямой AB, где $A(4, 3)$, $B(6, 7)$;

2. $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}\,dl$, где L – дуга кривой $x^2 = 2y$ $(1 \le x \le 3)$;

51. $\int\limits_L y\,dl$, где L – дуга кривой $y = x^3$ между точками $A(0, 0)$, $B(1, 1)$;

52. $\int\limits_L y^2\,dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками $A(0, 1)$, $B(1, e)$;

53. $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dl$, где L – дуга косинусоиды $y = \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

54. $\int\limits_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}\,dl$, где L – дуга кривой $y = \operatorname{ctg} x$ $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

55. $\int\limits_L \sin^4 x \cos x\,dl$, где L – дуга кривой $y = \ln\cos x$ $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$.

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным уравнениями в полярных координатах:

56. $\int\limits_L y^2\,dl$, где L – верхняя полуокружность $\rho = R$;

57. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$;

58. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – дуга лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$;

59. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 dl$, где L – дуга кривой $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Вычислить криволинейные интегралы I рода по указанным плоским кривым, заданным параметрическими уравнениями:

60. $\int\limits_L xy^2\,dl$, где L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, лежащая в первой четверти;

61. $\int\limits_L y\,dl$, где L – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$;

62. $\int\limits_L (x+2y-3z)\,dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(1, 3, -1)$, $B(3, 5, -1)$;

63. $\int\limits_L \sqrt{1+\frac{x}{2}}\,dl$, где L – дуга кривой $x = 2\sin^2 t$, $y = 2\sin t\cos t$, $z = 2\cos t$

$\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

64. $\int\limits_L \sqrt{1+4y+9xz}\,dl$, где L – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Вычислить следующие криволинейные интегралы I рода:

65. $\int\limits_L ye^{-x}dl$, где L – дуга кривой $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t + 8$ между точками, для которых $t = 0$, $t = 1$;

66. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$, где L – дуга кривой $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

67. $\int\limits_L xydl$, где L – дуга эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, лежащая в первом квадранте;

68. $\int\limits_L \sqrt{2x^2 + y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = x$;

69. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$;

70. $\int\limits_L zdl$, где L – дуга конической винтовой линии $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le \pi)$.

1.2. Криволинейные интегралы по координатам (криволинейные интегралы II рода)

Пусть дана дуга пространственной кусочно-гладкой кривой L, ограниченная точками A и B (см. рис.1), и определенные на ней непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Дугу AB разобьем точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, …, $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$). На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $\overline{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, и значения функций в этой точке $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv P(\overline{M}_i)$, $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv Q(\overline{M}_i)$, $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv R(\overline{M}_i)$ умножим не на длину дуги $M_{i-1}M_i$ (как это было в случае криволинейного интеграла I рода), а на проекции этой дуги соответственно на оси Ox, Oy, Oz, которые обозначим через Δx_i, Δy_i, Δz_i, причем

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Из полученных произведений составим сумму

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i \right], \tag{7}$$

называемую *интегральной суммой* по координатам для функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Криволинейным интегралом по координатам (или *криволинейным интегралом II рода*) от выражения $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ по направленной дуге AB гладкой кривой L называется предел интегральной суммы (7) при $n \to \infty$, $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$, $\max \Delta z_i \to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \lim_{n\to\infty} T_n = \int\limits_{AB} P(x, y, z)dx +$$
$$+ \int\limits_{AB} Q(x, y, z)dy + \int\limits_{AB} R(x, y, z)dz,$$

где $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$ - криволинейный интеграл по координате x; $\int\limits_{AB} Q(x, y, z)dy = \lim\limits_{\max \Delta y_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i$ - криволинейный интеграл по координате y; $\int\limits_{AB} R(x, y, z)dz = \lim\limits_{\max \Delta z_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$ - криволинейный интеграл по координате z.

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Oxy, функции P, Q, R не зависят от z, $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)dy\,.$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы F на координатные оси, то криволинейный интеграл II рода выражает работу силы $F = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, точка приложения которой описывает дугу AB кривой L (механическое истолкование).

Основные свойства криволинейного интеграла II рода:

1. Криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx + \\ + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

2. $$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + \\ + \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{AB} R(x,y,z)dz.$$

Остальные свойства аналогичны свойствам интеграла I рода.

Вычисление криволинейного интеграла II рода также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \le t \le t_2$) и значению t_1 соответствует точка A, значению t_2 – точка B, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + \\ + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\right]dt. \qquad (8)$$

В частности, для кривой L, лежащей в плоскости Oxy,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right]dt. \qquad (9)$$

Если плоская кривая L задана уравнением $y = y(x)$ ($a \le x \le b$), то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\right]dx. \qquad (10)$$

Существование и величина криволинейного интеграла $\oint\limits_C Pdx + Qdy$ по замкнутому контуру не зависит от того, какую точку контура выбрать за начало интегрирования. Если путь интегрирования C есть простая замкнутая кривая, то $\oint\limits_C Pdx + Qdy$ берется по этому контуру в направлении против хода часовой стрелки (положительное направление).

Пример 10. Вычислить криволинейный интеграл II рода

$$\int\limits_L x^2dx + xydy,$$

где L – отрезок прямой от точки $A(0, 1)$ до точки $B(1, 2)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB $dy = dx$. Подставляя в подынтегральную функцию вместо

y его выражение через x ($y = x + 1$) и замечая, что при перемещении от A к B x меняется от 0 до 1, по формуле (10) получаем

$$\int_L x^2dx + xydy = \int_0^1 x^2dx + x(x+1)dx = \int_0^1 (x^2 + x^2 + x)dx = \int_0^1 (2x^2 + x)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Пример 11. Вычислить $\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, где L – ломаная ABC (рис. 7), причем $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 5)$.

Так как контур интегрирования L состоит из отрезков AB и BC, то

$$\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int_{AB} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy + \int_{BC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy.$$

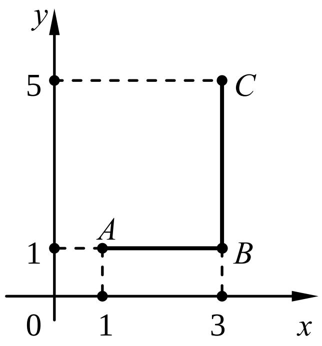


Рис. 7

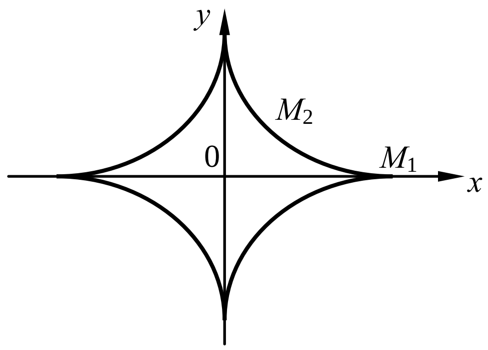


Рис. 8

На отрезке AB, уравнение которого $y = 1$, $dy = 0$; на отрезке BC, уравнение которого $x = 3$, $dx = 0$, поэтому

$$\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \int_1^3 (x^3 + 1)dx + (x+1)\,0 + \int_1^5 (3^3 + y)\,0 + (3 + y^3)dy =$$

$$= \int_1^3 (x^3 + 1)dx + \int_1^5 (3 + y^3)dy = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_1^3 + \left(3y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5 = 190.$$

Пример 12. Вычислить $\int_L x^2dx + \frac{dy}{y^2}$, где L – дуга кривой $x = \frac{1}{y}$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Линия L задана уравнением вида $x = x(y)$ ($c \le y \le d$). В этом случае вместо формулы (10) целесообразно применить формулу

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \left[P\big(x(y),y\big)x'(y) + Q\big(x(y),y\big)\right]dy .$$

Поскольку в данном примере $c = 1$, $d = \dfrac{1}{4}$, $x'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$, то

$$\int_L x^2 dx + \frac{dy}{y^2} = \int_1^{\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}\right]dy = \int_1^{\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2}\right)dy = \left.\left(\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{y}\right)\right|_1^{\frac{1}{4}} = 18 .$$

Замечание. В данном случае можно пользоваться и формулой (10), так как уравнение линии L записывается в виде $y = \dfrac{1}{x}$, причем $1 \le x \le 4$:

$$\int_L x^2 dx + \frac{dy}{y^2} = \int_1^4 \left[x^2 + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]dx = \int_1^4 \big(x^2 - 1\big)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right|_1^4 = 18 .$$

Пример 13. Вычислить $\int_L ydx + xdy$, где L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ от точки $M_1(t_1)$ до точки $M_2(t_2)$, для которых $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 8).

Применим формулу (9), так как плоская кривая здесь задана параметрическими уравнениями. Из уравнений линии находим

$$dx = -3a\cos^2 t\sin tdt , \quad dy = 3a\sin^2 t\cos tdt .$$

Следовательно,

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[a\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right) + a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t\right]dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^4 t\sin^2 t - \cos^2 t\sin^4 t\right)dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2t}{4}\cos 2tdt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2td(\sin 2t) = \frac{3a^2}{8}\cdot\left.\frac{\sin^3 2t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{8}.$$

Пример 14. Вычислить $\int_L y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1, 0, 2)$ до точки $B(3, 1, 4)$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{4-2}(=t).$$

Из параметрических уравнений прямой $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 + 2t$, получаем $dx = 2dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1, т.е. пределы интегрирования в формуле (8), которой здесь нужно пользоваться, соответственно $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

По формуле (8) находим

$$\int_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz=\int_0^1 t^2 2dt+\left[(1+2t)^2+(2+2t)\right]dt+$$

$$+\left[(1+2t)+t+(2+2t)^2\right]2dt=\int_0^1\left(2t^2+\left[1+4t+4t^2+2+2t\right]+2\left[1+3t+4+8t+4t^2\right]\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left[14t^2+28t+13\right]dt=\left(\frac{14t^3}{3}+14t^2+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{95}{3}.$$

Пример 15. Вычислить $\int\limits_L (y^2+z^2)dx-yzdy+xdz$, где L – дуга винтовой линии $x = t$, $y = 2\cos t$, $z = 2\sin t$ $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку $dx = dt$, $dy = - 2\sin t\,dt$, $dz = 2\cos t\,dt$, то

$$\int_L (y^2+z^2)dx-yzdy+xdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2 t+4\sin^2 t\right)dt-4\sin t\cos t\left(-2\sin tdt\right)+$$

$$+2t\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2t\cos t+8\sin^2 t\cos t+4\right)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt+8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 td(\sin t)+$$

$$+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi+\frac{2}{3}.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt$ вычислен с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} td(\sin t) = t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль данных плоских кривых в указанных направлениях:

71. $\int\limits_L x^3dx + x^2dy$, L – дуга кривой $y = x^2$ от $A(1, 1)$ до $B(3, 9)$;

72. $\int\limits_L \cos^2 xdx + \frac{dy}{y^2}$, L – дуга кривой $y = \operatorname{tg} x$ от $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{3}$;

73. $\int\limits_L \cos^3 xdx + ydy$, L – дуга кривой $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$;

74. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + xydy$, L – дуга кривой $y = e^x$ от $A(0, 1)$ до $B(1, e)$.

Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль указанных плоских кривых в направлении возрастания параметра:

27. $\int\limits_L xy^2dx + x^2ydy$, L – дуга кривой $x = t^2$, $y = t$ $(1 \le t \le 2)$;

28. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$, L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

29. $\int\limits_L ydx - xdy$, L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

30. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

2.2. Поверхностные интегралы II рода

Пусть в точках двусторонней поверхности σ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Выберем на поверхности определенную сторону. Разобьем поверхность σ сетью произвольно проведенных кривых на части $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. В пределах каждой части σ_I выберем произвольно по точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим в ней значение данной функции. Эти значения $f(x_i, y_i, z_i)$ умножим на проекцию D_i части σ_i на плоскость Oxy (а не на площадь σ_i, как это было в случае поверхностного интеграла I рода). При этом числу S_i приписывается определенный знак, а именно: если в точках σ_i нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности, составляет с осью Oz острый угол, то через S_i обозначаем площадь проекции σ_i, взятую со знаком плюс; если же упомянутая нормаль составляет с осью Oz тупой угол, то под S_i будем понимать площадь этой проекции, взятую со знаком минус. Составим сумму всех таких произведений:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i \,. \tag{33}$$

Поверхностным интегралом II рода называется предел суммы (33) при $\max d(\sigma_i) \to 0$:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dxdy = \lim_{\max d(\sigma_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i \,,$$

где $d(\sigma_i)$ – диаметр σ_i.

Аналогично определяются интегралы $\iint_{\sigma} f(x, y, z) dxdz$, $\iint_{\sigma} f(x, y, z) dydz$, причем для выбора знака проекции элемента служит угол между нормалью, отвечающей выбранной стороне поверхности, и осью Oy или Ox.

Наиболее общим видом поверхностного интеграла II рода служит интеграл

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy \,, \tag{34}$$

где P, Q, R – функции от x, y, z, определенные и непрерывные в точках двусторонней поверхности σ.

Поверхностный интеграл II рода обладает всеми свойствами поверхностного интеграла I рода, за исключением одного: при изменении стороны поверхности интеграл (34) меняет знак.

Поверхностные интегралы II рода вычисляются следующим образом. Если поверхность σ однозначно проектируется в область D_1 плоскости Oxy и $z = f(x, y)$ – ее уравнение, то

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_1} R[x, y, f(x, y)] dxdy \,, \tag{35}$$

где знак плюс берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma > 0$, и знак минус – если $\cos\gamma < 0$. Аналогично, если σ однозначно проектируется в область D_2 или D_3 на плоскости Oxz или Oyz, т.е. может быть задана уравнением $y = \varphi(x, z)$ или $x = \psi(y, z)$, то

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint_{D_2} Q[x,\varphi(x,z),z]dxdz\,; \tag{36}$$

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_3} P[\psi(y,z),y,z]dydz\,, \tag{37}$$

где в случае (36) берется тот же знак, что и у cos β, а в случае (37) – знак cos α.

Для вычисления интеграла общего вида (34) используются те же формулы (35) – (37), если поверхность σ однозначно проектируется на все три плоскости. В более сложных случаях σ разбивается на части, обладающие указанными свойствами, а интеграл (34) – на сумму интегралов по этим частям.

Поверхностные интегралы обоих типов связаны формулой

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma\,, \tag{38}$$

где cos α, cos β, cos γ - направляющие косинусы нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл II рода.

Пример 38. Вычислить поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)dxdy$, где σ - верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = b$ (рис. 19).

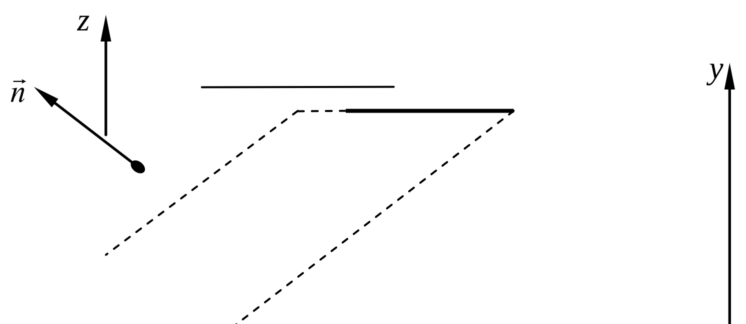
Нормаль $\vec{n}$ в точке *M*, соответствующая указанной стороне поверхности, составляет с осью *Oz* острый угол (точнее, $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$), поэтому в формуле (35), которой следует воспользоваться, нужно взять знак плюс. Проекцией D_1 данной поверхности на плоскость *Oxy* является прямоугольник *ABCD* (рис. 20), определяемый неравенствами $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

По формуле (35) находим

$$\iint_{\sigma} (y^2+z^2)dxdy = \iint_{D_1} \left(y^2 + \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right)dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{b} (y^2 + a^2 - x^2)dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(\frac{y^3}{3} + a^2 y - x^2 y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} dy = \int_{-a}^{a}\left(\frac{b^3}{3} + a^2 b - x^2 b\right)dx = \left(\frac{b^3}{3}x + a^2 bx - b\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{2}{3}ab\left(b^2 + 2a^2\right).$$



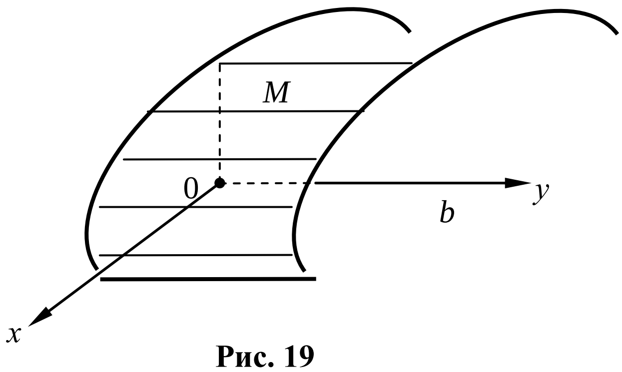


Рис. 19

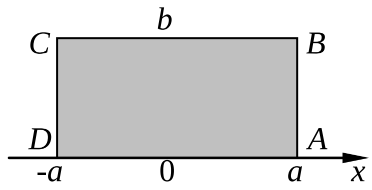


Рис. 20

Замечание. Если бы рассматривалась нижняя (внутренняя) сторона поверхности, то нормаль, соответствующая ей, образовывала бы с осью Oz тупой угол, в формуле (35) следовало бы взять знак минус.

Пример 39. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(ax^2+by+cz^2)dxdz$, где σ - внутренняя сторона поверхности $x^2 = 2py$ ($p > 0$), отсеченной плоскостями $y = 2p$, $z = 0$, $z = q$ (рис. 21).

Проекцией D_2 данной поверхности (части параболического цилиндра) на плоскость Oxz является прямоугольник $ABCD$ (рис. 22), определенный неравенствами $-2p \le x \le 2p$, $0 \le z \le q$.

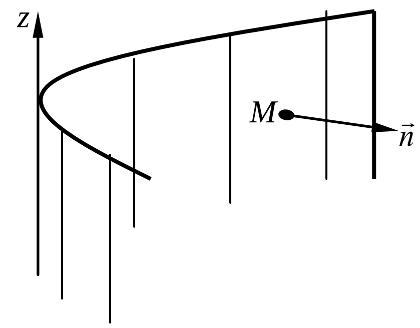
Так как нормаль $\vec{n}$ в произвольной точке M данной поверхности, соответствующая ее внутренней стороне, образует с положительным направлением оси Oy острый угол, то в формуле (36), нужно взять знак плюс. Замечая, что $y=\dfrac{x^2}{2p}$ (следует из уравнения поверхности), по указанной формуле находим

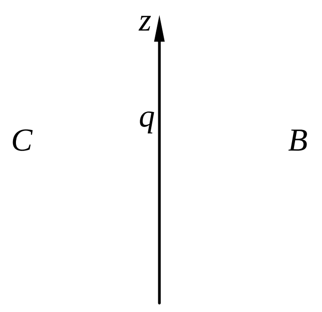
$$\iint\limits_{\sigma}(ax^2+by+cz^2)dxdz=\iint\limits_{D_2}\left(ax^2+b\frac{x^2}{2p}+cz^2\right)dxdz=\iint\limits_{D_2}\left(\left[a+\frac{b}{2p}\right]x^2+cz^2\right)dxdz=$$

$$=\int\limits_{-2p}^{2p}dx\int\limits_{0}^{q}\left(\left[a+\frac{b}{2p}\right]x^2+cz^2\right)dz=\int\limits_{-2p}^{2p}\left(\left[a+\frac{b}{2p}\right]x^2z+\frac{cz^3}{3}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=q}dx=$$

$$=\int\limits_{-2p}^{2p}\left(q\left[a+\frac{b}{2p}\right]x^2+\frac{cq^3}{3}\right)dx=\left(q\left[a+\frac{b}{2p}\right]\frac{x^3}{3}+\frac{cq^3}{3}x\right)\Bigg|_{-2p}^{2p}=$$

$$=\frac{16}{3}p^3q\left(a+\frac{b}{2p}\right)+\frac{4}{3}pcq^3.$$





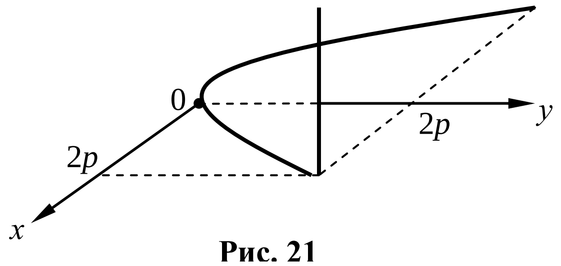


Рис. 21

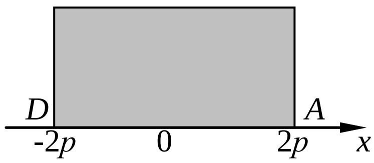


Рис. 22

Пример 40. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(x^2+ay^2+z^2)dxdz$, где σ - внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = b$ (рис. 23).

Нормаль к поверхности в точке M образует с осью Oy тупой угол, поэтому в формуле (36) следует взять знак минус.

Проекцией D_2 данной поверхности на плоскость Oxz является круг $x^2+z^2\le b^2$. По формуле (36)

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+ay^2+z^2)dxdz=-\iint\limits_{D_2}(x^2+a\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2+z^2)dxdz=$$

$$=-\iint\limits_{D_2}(x^2+z^2)(a+1)dxdz=-(a+1)\iint\limits_{D_2}(x^2+z^2)dxdz.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, находим

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+z^2)dxdz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{b}\rho^2\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^b d\theta=\frac{2\pi b^4}{4}=\frac{\pi b^4}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+ay^2+z^2)dxdz=-(a+1)\iint\limits_{D_2}(x^2+z^2)dxdz=-\frac{\pi(a+1)b^4}{2}.$$

Пример 41. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(ax^2+by^2+bz^2)dydz$, где σ - внутренняя сторона части полусферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вырезанной конусом $x=\sqrt{y^2+z^2}$.

В формуле (37), которой надлежит пользоваться, следует взять знак минус, так как нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, составляет с положительным направлением оси Ox тупой угол:

$$\iint\limits_{\sigma}(ax^2+by^2+bz^2)dydz=-\iint\limits_{D_3}[a(R^2-y^2-z^2)+by^2+bz^2]dydz=$$

$$=-\iint\limits_{D_3}[aR^2+(b-a)(y^2+z^2)]dydz.$$

Так как D_3 есть круг $y^2+z^2 \le \dfrac{R^2}{2}$ (получено из уравнений $x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$), то, вводя полярные координаты, находим

$$\iint\limits_{D_3} [aR^2+(b-a)(y^2+z^2)]dydz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} [aR^2+(b-a)\rho^2]\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} [aR^2\rho+(b-a)\rho^3]d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left[aR^2\frac{\rho^2}{2}+(b-a)\frac{\rho^4}{4} \right]\Bigg|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} d\theta =$$

$$= 2\pi\left[\frac{aR^4}{2}+(b-a)\frac{R^4}{19} \right] = \frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$$

Итак, $\iint\limits_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)dydz = \dfrac{\pi R^4}{8}(b+3a)$.

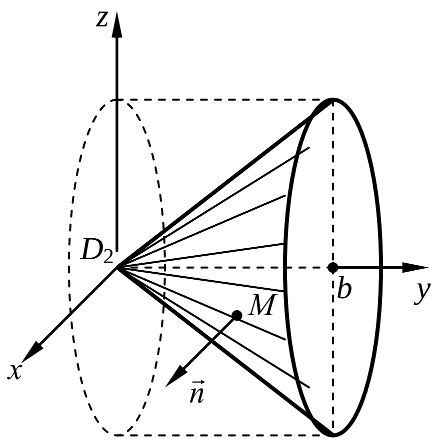


Рис. 23

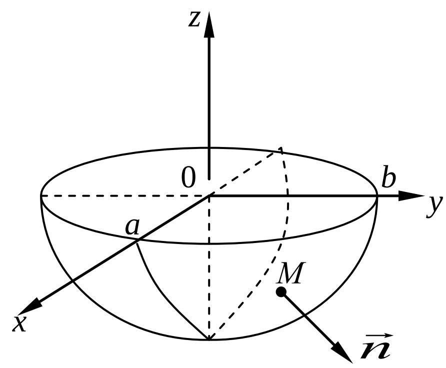


Рис. 24

Пример 42. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+kz \right) dxdy$, где σ - внешняя сторона нижней половины эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис.24).

Нижняя половина эллипсоида $z=-c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$. Проекцией D_1 этой половины эллипсоида на плоскость Oxy является эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Так как нормаль $\vec{n}$, отвечающая внешней стороне поверхности, составляет с осью Oz тупой угол, то

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy=-\iint_{D_1}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy=$$

$$=\iint_{D_1}\left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy.$$

Введя новые координаты по формулам $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, находим

$$\iint_{D_1}\left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(kc\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)ab\rho d\rho=$$

$$=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(kc\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^3\right)d\rho=2\pi ab\left[-\frac{kc}{2}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{\rho^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=2\pi ab\left(\frac{kc}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

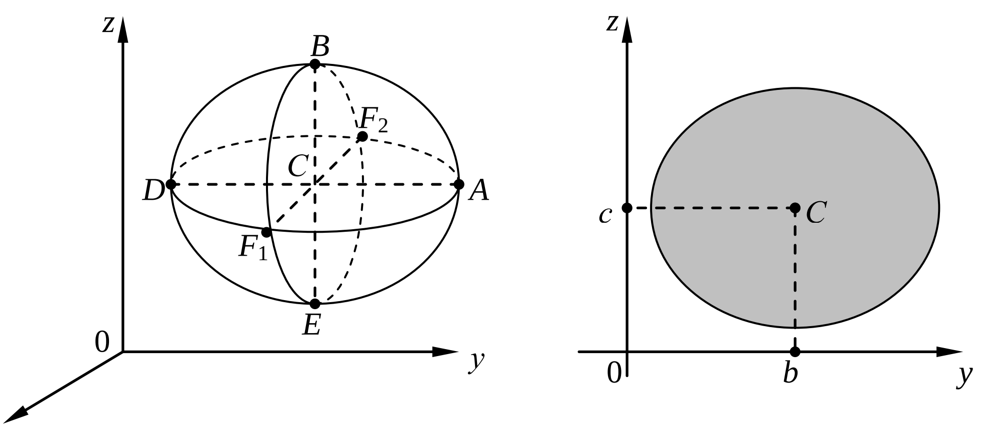
Пример 43. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где σ - внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Этот интеграл представляет собой сумму трех интегралов. Вычислим первый из них: $I_1=\iint\limits_{\sigma}x^2dydz$. Уравнение сферы будет

$$x-a=\pm\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2},$$

где знак плюс отвечает одной полусфере (ближней), а минус – другой (дальней). Подынтегральную функцию представим в виде

$$x^2=(x-a)^2+a^2+2a(x-a).$$



x **Рис. 25** **Рис. 26**

Обозначим через σ_1 внешнюю сторону ближней полусферы $ABDEF_1$ (рис. 25), через σ_2 – внешнюю сторону дальней полусферы $ABDEF_2$, через D_3 – проекцию каждой полусферы на плоскость Oyz (это круг, ограниченный окружностью $(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, рис. 26).

Принимая во внимание, что выражение $x - a$ меняет знак при переходе от одной полусферы к другой, по формуле (37) находим

$$I_1=\iint\limits_{\sigma}x^2dydz=\iint\limits_{\sigma_1}\left[(x-a)^2+a^2+2a(x-a)\right]dydz-\iint\limits_{\sigma_2}\left[(x-a)^2+a^2-2a(x-a)\right]dydz=$$

$$=4a\iint\limits_{D_3}(x-a)dydz=4a\iint\limits_{D_3}\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}\,dydz=4a\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho=$$

$$=\frac{8}{3}\pi aR^3.$$

При вычислении двойного интеграла осуществлен переход к полярным координатам по формулам $y - b = \rho\cos\theta$, $z - c = \rho\sin\theta$.

Аналогично вычисляются и другие два интеграла:

$$I_2=\iint\limits_{\sigma}y^2dzdx=\frac{8}{3}\pi bR^3,\quad I_3=\iint\limits_{\sigma}z^2dydx=\frac{8}{3}\pi cR^3.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=I_1+I_2+I_3=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

Пример 44. Вычислить $I=\iint\limits_{\sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, где σ - верхняя сторона поверхности, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2ax$ из сферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$ $(R>a, z>0)$.

Воспользуемся формулой (38), связывающей поверхностные интегралы обоих типов. По этой формуле

$$I=\iint\limits_{\sigma}[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]d\sigma.$$

Далее, поскольку $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2Rx$, то

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2x - 2R}{2\sqrt{(x-R)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x-R}{R};$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{y}{R};\ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{z}{R},$$

и $I = \iint\limits_{\sigma} (z - y) d\sigma$.

Так как поверхность симметрична относительно плоскости Oxz, то $\iint\limits_{\sigma} y d\sigma = 0$, а $I = \iint\limits_{\sigma} z d\sigma$.

Переходя снова к интегралу II рода, получаем

$$I = \iint\limits_{\sigma} \frac{z}{\cos\gamma} dxdy = \iint\limits_{\sigma} \frac{z}{\frac{z}{R}} dxdy = R\iint\limits_{\sigma} dxdy = \pi R a^2.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить следующие поверхностные интегралы II рода:

90. $\iint\limits_{\sigma} (5x^2 + 5y^2 + z^2) dxdy$, где σ - внешняя сторона части верхней полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, вырезанной конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

91. $\iint\limits_{\sigma} (x^4 + y^4 + 2z^2) dxdy$, где σ - внутренняя (нижняя) сторона поверхности $z = xy$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$), вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = 6xy$;

92. $\iint\limits_{\sigma} (x^2 - 2y^2 + 6z) dxdy$, где σ - нижняя (внешняя) сторона поверхности $y^2 = 6z$, отсеченной плоскостями $z = 6$, $x = 0$, $x = 3$;

93. $\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{3x^2}{4} + \frac{6y^2}{9} + z + 1\right) dxdy$, где σ - верхняя сторона поверхности $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ ($y \ge 0$), вырезанной цилиндром $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$;

94. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+z^2)dydz$, где σ - внешняя сторона поверхности $x=\sqrt{9-y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$, $z = 2$;

95. $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdz$, где σ - внутренняя сторона поверхности $y=b^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$, отсеченной плоскостью $y = 0$;

96. $\iint\limits_{\sigma}(Ax^2+By^2+Bz^2)dydz$, где σ - внутренняя сторона поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $x = a$;

97. $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy$, где σ - внешняя сторона поверхности $z=c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, отсеченной плоскостью $z = 0$;

98. $\iint\limits_{\sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$, где σ - внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2.3. Формула Стокса. Формула Остроградского – Гаусса

Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемы и L – замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно-гладкую двустороннюю поверхность σ, то справедлива формула Стокса

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$
$$=\iint\limits_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma, \qquad (39)$$

где cos α, cos β, cos γ - направляющие косинусы нормали к поверхности σ, причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура L совершался бы против часовой стрелки (в правой системе координат).

Формула Стокса может быть записана в следующем символическом виде:

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma .$$

Если σ - кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области $V + \sigma$, то справедлива формула Остроградского – Гаусса:

$$\iint_\sigma \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz ,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ.

Пример 45. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл $\oint_L ydx + zdy + xdz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox. Проверить результат непосредственным вычислением.

В данном примере $P(x, y, z) = y$, $Q(x, y, z) = z$, $R(x, y, z) = x$, поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

По формуле (39) $\oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_\sigma (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma)d\sigma$, где σ - часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченная данной окружностью.

Приводя уравнение плоскости $x + y + z = 0$ к нормальному виду, находим

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Таким образом, $\oint_L ydx + zdy + xdz = -\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\sigma d\sigma = -\pi a^2\sqrt{3}$, где a – радиус круга, ограниченного указанной окружностью.

Проверим полученный результат непосредственным вычислением данного криволинейного интеграла, для чего предварительно линию L представим параметрическими уравнениями. Из уравнений $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ получаем $z = -x - y$, $x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = a^2$, откуда $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}$.

Из последнего уравнения находим y как функцию от x:

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{2a^2 - 3x^2}}{2}. \qquad (40)$$

Следовательно,

$$z = -x - y = -x - \frac{-x \pm \sqrt{2a^2 - 3x^2}}{2} = \frac{-x \mp \sqrt{2a^2 - 3x^2}}{2}. \qquad (41)$$

Отметим, что в выражениях для y и z знаки выбираются верхние или нижние (одновременно).

Так как рассматриваются только действительные значения координат, подкоренное выражение в полученных формулах для y и z не может быть отрицательным, т.е.

$$2a^2 - 3x^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad -a\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq a\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (42)$$

Полагая $x = t$, можно получить параметрические уравнения кривой L. Введем другую параметризацию, положив

$$x = a\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t. \qquad (43)$$

Формулы (40) и (41) в этом случае принимают вид

$$y = \frac{-a\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t \pm a\sqrt{2}\cos t}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\sin t \pm \sqrt{3}\cos t\right); \qquad (44)$$

$$z = \frac{-a\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t \mp a\sqrt{2}\cos t}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\sin t \mp \sqrt{3}\cos t\right). \qquad (45)$$

Принимая во внимание соотношения (42), заключаем, что $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Окружность L разобьется на полуокружность L_1, лежащую выше плоскости Oxy, и на полуокружность L_2, лежащую ниже указанной плоскости. В соответствии с данным направлением обхода кривой приделы интегрирования в первом случае (по пути L_1) будут $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, во втором случае (по пути L_2) $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Из равенств (43) – (45) получаем

$$dx = a\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t dt\ ;\ dy = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\cos t \mp \sqrt{3}\sin t\right)dt\ ;\ dz = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\cos t \pm \sqrt{3}\sin t\right)dt\ .$$

Следовательно,

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \int_{L_1} ydx + zdy + xdz + \int_{L_2} ydx + zdy + xdz =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\sin t + \sqrt{3}\cos t\right)\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\sin t - \sqrt{3}\cos t\right)\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\cos t - \sqrt{3}\sin t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin t\,\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\cos t + \sqrt{3}\sin t\right)\right]dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\sin t - \sqrt{3}\cos t\right)\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\sin t + \sqrt{3}\cos t\right)\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\cos t + \sqrt{3}\sin t\right) + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin t\,\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\cos t - \sqrt{3}\sin t\right)\right]dt =$$

$$= \frac{a^2}{6}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin t\cos t + 2\sqrt{3}\cos^2 t + \sin t\cos t + \sqrt{3}\sin^2 t + \sqrt{3}\cos^2 t + 3\sin t\cos t - \right.$$

$$\left. - 2\sin t\cos t + 2\sqrt{3}\sin^2 t\right)dt + \frac{a^2}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin t\cos t - 2\sqrt{3}\cos^2 t + \sin t\cos t - \sqrt{3}\cos^2 t -$$

$$\left. - \sqrt{3}\sin^2 t + 3\sin t\cos t - 2\sin t\cos t - 2\sqrt{3}\sin^2 t\right)dt = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt -$$

$$- \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\pi a^2\sqrt{3}.$$

Итак, получен тот же результат, но более длинным путем (преимущества первого пути очевидны.

Пример 46. С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислить

$$\iint_\sigma (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma,$$

где σ - часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$; cos α, cos β, cos γ - направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Формула Остроградского − Гаусса применима в случае замкнутой поверхности. Чтобы получить замкнутую поверхность, присоединим к поверхности конуса соответствующую часть плоскости $z = h$ $(x^2 + y^2 \le z^2)$. Обозначая эту часть плоскости через σ_1, по формуле Остроградского − Гаусса можем написать:

$$\iint_{\sigma} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) d\sigma + \iint_{\sigma_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) d\sigma =$$

$$= \iiint_V (2x + 2y + 2z) dxdydz.$$

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить второй и третий интегралы. В случае области σ_1 cos α, cos β, cos γ - косинусы углов с осями координат нормали к плоскости $z = h$, а именно: cos α = 0, cos β = 0, cos γ = 1. Поэтому

$$\iint_{\sigma_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) d\sigma = \iint_{\sigma_1} z^2 \cos\gamma d\sigma = \iint_{\sigma_1} h^2 d\sigma = h^2 \pi h^2 = \pi h^4,$$

так как на плоскости σ_1 $z = h$ и двойной интеграл равен площади круга радиуса h, получающегося при пересечении конуса плоскостью.

Вычислим третий интеграл, произведя в нем сначала интегрирование по z от $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ до $z = h$ и вычислив затем двойной интеграл по области D в плоскости Oxy (эта область является кругом $x^2 + y^2 \le h^2$, $z = 0$; она получается проектированием объема V на плоскость Oxy).

Таким образом,

$$\iiint_V (2x + 2y + 2z) dxdydz = 2\iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} (x + y + z) dz \right] dxdy =$$

$$= 2\iint_D \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dxdy =$$

$$= 2\iint_D \left[(x + y)(h - \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{2}(h^2 - x^2 - y^2) \right] dxdy.$$

Обозначая последний интеграл через I и переходя к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, находим

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left[\rho\left(\cos\theta+\sin\theta\right)(h-\rho)+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}\rho^2\right]\rho d\rho d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{h^4}{3}(\cos\theta+\sin\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{h^4}{4}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{h^4}{4}-\frac{h^4}{8}\right]d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{h^4}{12}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{h^4}{8}\right]d\theta =$$

$$=\left[\frac{h^4}{12}(\sin\theta - \cos\theta)+\frac{h^4\theta}{8}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi h^4}{2}.$$

Итак, $\iint\limits_{\sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)d\sigma = \frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$

Примеры для самостоятельной работы

С помощью формулы Стокса вычислить следующие интегралы, проверить результаты непосредственным вычислением:

99. $\oint\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, L – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x + y + z = 0$;

100. $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$, L – окружность $x = R\cos^2 t$, $y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin 2t$, $z = R\sin^2 t$;

101. $\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, L – эллипс $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$ ($a > 0$, $c > 0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть с положительной оси Ox.

С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислить следующие поверхностные интегралы:

102. $\iint\limits_{\sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$, σ - внешняя сторона поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

103. $\iint\limits_{\sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, σ - внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

104. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, σ - полная поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ ($0 \le z \le b$);

105. $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, σ - поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ $(-h \le z \le h)$.

2.4. Приложения интегралов по поверхности

Площадь S поверхности σ вычисляется по формуле $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma$. Если γ = $= \gamma(x, y, z)$ – поверхностная плотность массы материальной поверхности σ, то масса всей этой поверхности определяется интегралом

$$m = \iint\limits_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma. \tag{46}$$

Координаты центра тяжести $C_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности σ вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma} x\gamma(x, y, z) d\sigma; \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma} y\gamma(x, y, z) d\sigma;$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma} z\gamma(x, y, z) d\sigma, \tag{47}$$

где m определяется формулой (46).

Моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно координатных осей Ox, Oy, Oz находятся по формулам:

$$\begin{cases} I_x = \iint\limits_{\sigma} (z^2 + y^2)\gamma(x, y, z) d\sigma; \\ I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z) d\sigma; \\ I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z) d\sigma. \end{cases} \tag{48}$$

Моменты инерции I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} I_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z^2\gamma(x, y, z) d\sigma; \\ I_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x^2(x, y, z) d\sigma; \\ I_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y^2\gamma(x, y, z) d\sigma. \end{cases} \tag{49}$$

Статические моменты поверхности M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz определяются так:

$$\begin{cases} M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\gamma(x,y,z)d\sigma; \\ M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x(x,y,z)d\sigma; \\ M_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\gamma(x,y,z)d\sigma. \end{cases} \quad (50)$$

Для однородной пластины, т.е. в случае, когда $\gamma(x, y, z)$ = const, вычисление интегралов в формулах (46) – (50) значительно упрощается.

Пример 47. Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки до начала координат.

В силу условия функция $\gamma(x, y, z)$, фигурирующая в формуле (46), имеет вид $\gamma(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$, где k – коэффициент пропорциональности; $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ - расстояние тоски $M(x, y, z)$ до начала координат.

По формуле (46) $m = \iint\limits_{\sigma} k(x^2 + y^2 + z^2)d\sigma$, где σ - данная полусфера. Так как $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz = \frac{R}{x}dydz$, то

$$m = \iint\limits_{\sigma} k(x^2 + y^2 + z^2)d\sigma = k\iint\limits_{D} R^2\frac{R}{x}dydz = kR^3\iint\limits_{D}\frac{dydz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}},$$

где D – круг $y^2 + z^2 \le R^2$ на плоскости Oyz.

Переходя к полярным координатам $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, находим

$$\iint\limits_{D}\frac{dydz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^R\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^R\left(R^2 - \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}d\left(R^2 - \rho^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}2\pi\Bigg|_0^R = 2\pi R.$$

Следовательно,

$$m = kR^3\iint\limits_{D}\frac{dydz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} = kR^3 2\pi R = 2\pi kR^4.$$

Пример 48. Найти массу части поверхности $z = xy$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$), вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$, если поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) =$ $= \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$, $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$, то

$$m = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,d\sigma = \iint_{D} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_{D} \left(1 + x^2 + y^2\right)dxdy,$$

где D – лепесток лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$, для которого $x \geq 0$, $y \geq 0$ (см. рис. 4).

В полярных координатах $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ уравнение границы области имеет вид $\rho = 2\sqrt{\sin 2\theta}$ $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$\iint_{D} \left(1 + x^2 + y^2\right)dxdy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2\sqrt{\sin 2\theta}} (1 + \rho^2)\rho d\rho = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2\sqrt{\sin 2\theta}} (\rho + \rho^3) d\rho =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4\sin 2\theta}{2} + \frac{16\sin^2 2\theta}{4}\right) d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \frac{1}{2} d(2\theta) +$$

$$+ 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta = -\cos 2\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + 2\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 4\theta}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \pi.$$

Следовательно, $m = \pi + 2$.

Пример 49. Найти массу части цилиндрической поверхности $y = \sqrt{9 - z^2}$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $x = 2$, если поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) =$ $= ky(x + z)$.

По формуле (46) находим

$$m = \iint_{\sigma} ky(x + z) d\sigma = k\iint_{D} y(x + z)\frac{3}{y}\,dxdz = 3k\int_{-3}^{3} dz \int_{0}^{2} (x + z)dx =$$

$$= 3k\int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2}{2} + zx\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} dz = 3k\int_{-3}^{3} (2 + 2z)dz = 3k(2z + z^2)\Big|_{z=-3}^{z=3} = 36k.$$

Пример 50. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, для которой $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Так как поверхность однородная, т.е. $\gamma(x, y, z) = \text{const}$, то в формулах (48) можно положить $\gamma = 1$.

Третья из формул (48) принимает вид $I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$. Поскольку в данном случае $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$;

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dxdy,$$

то $d\sigma = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dxdy = \dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$.

Следовательно,

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = R \iint\limits_{D} \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

где D – четверть круга $x^2 + y^2 = R^2$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, получаем

$$\iint\limits_{D} \frac{(x^2 + y^2) dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R \frac{\rho^2 \rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{\pi R^3}{3}.$$

Последний интеграл вычислен с помощью подстановки $\rho = R \sin t$.

Итак, $I_z = R \iint\limits_{D} \dfrac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = R \dfrac{\pi R^3}{3} = \dfrac{\pi R^4}{3}$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти массу поверхности при указанной поверхностной плотности $\gamma(x, y, z)$:

106. $z = \sqrt{4 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = 5$, $\gamma(x, y, z) = kz(x + y)$;

107. $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{2}$, вырезанной цилиндром $\left(y^2 + z^2\right)^2 = 4\left(y^2 - z^2\right)$, $\gamma(x, y, z) = \sqrt{1 + y^2 + z^2}$;

108. $6z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right)$, $\gamma(x, y, z) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2y^3}{3} + z + 4$;

109. $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, $\gamma(x, y, z) = x + y^2 + z^2$;

110. $2z = 9 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$, $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 2$.

111. Найти массу части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

112. Найти массу сферы радиуса R, если поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию этой точки до некоторого фиксированного диаметра сферы.

Найти координаты центра тяжести указанной однородной поверхности:

113. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(h \le z \le R)$;

114. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(x \ge 0, y \ge 0, x + y \le R)$;

115. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = ax$;

116. $3z = 2\left(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\right)$, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

117. Найти координаты центра тяжести верхней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию этой точки до оси Oz.

Найти момент инерции относительно оси Oz указанной части однородной поверхности:

118. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(h \le z \le R)$; **119.** $h^2(x^2 + y^2) = a^2z^2$ $(0 \le z \le h)$.

120. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей поверхности однородного конуса высоты h и радиуса основания R, ось которого совпадает с осью Oz, а вершина лежит в начале координат.

3. Элементы теории поля

Если каждой точке M области V поставлена в соответствие скалярная $u = u(M)$ (векторная $\vec{F} = \vec{F}(M)$) величина, то говорят, что в области V задано *скалярное* (*векторное*) поле.

В декартовой системе координат задание скалярного поля равносильно заданию одной скалярной функции трех переменных

$$u(M) = u(x, y, z),$$

а векторного поля – трех скалярных функций трех переменных:

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – проекции вектора $\vec{F}$ на соответствующие координатные оси. Предполагается, что функции $u(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области V.

Векторной линией называется кривая, направление которой в каждой ее точке M совпадает с направлением вектора $\vec{F}$, соответствующего этой точке. Векторная линия определяется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Дивергенцией векторного поля $\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется скаляр

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}.$$

Вихрем (*ротором*) векторного поля $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Потоком векторного поля $\vec{F}(M)$ через поверхность D в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ к поверхности D, называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_D \vec{F}\vec{n}dS = \iint_D F_n dS = \iint_D \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS,$$

где $\vec{F}\vec{n}$ - скалярное произведение вектора поля и единичного вектора выбранного направления нормали.

Линейным интегралом от вектора $\vec{F}$ по ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл $\int_L \vec{F}d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$, представляющий собой работу векторного поля вдоль кривой L. Если контур C – замкнутый, то линейный интеграл $Ц = \oint\limits_C \vec{F} d\vec{r} = \oint\limits_C P dx + Q dy + R dz$ называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{F}(M)$ вдоль контура *C*.

Формула Остроградского – Гаусса в векторной форме имеет вид

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oiint\limits_D \vec{F}\vec{n} dS ,$$

т.е. интеграл от дивергенции векторного поля $\vec{F}$, распространенный по некоторому объему *V*, равен потоку вектора через поверхность *D*, ограничивающую данный объем.

Формула Стокса в векторной форме имеет вид

$$\oint\limits_C \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_D \vec{n} \operatorname{rot} \vec{F} dS ,$$

т.е. циркуляция вектора вдоль замкнутого контура *C*, ограничивающего некоторую поверхность *D*, равна потоку вихря через эту поверхность (направления обхода контура и нормали должны быть согласованы друг с другом).

Введем символический вектор (в декартовой системе координат)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} ,$$

называемый *оператором Гамильтона*. Он обладает как свойствами вектора, так и свойствами дифференциального оператора. С его помощью выражения для градиента, дивергенции и ротора можно кратко записать в следующем виде:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u , \quad \operatorname{div} \vec{F} = \nabla \vec{F} , \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} .$$

Векторное поле $\vec{F}$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, и *потенциальным*, если $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, т.е. если $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. В этом случае $\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \nabla \times \nabla u = 0$; следовательно, потенциальное поле является безвихревым.

Векторное поле $\vec{F}(M)$ называется *соленоидальным* (или *трубчатым*), если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, т.е. в области задания поля *V* отсутствуют и стоки, и источники. Так как $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla(\nabla \times \vec{F}) = 0$, то поле вихрей является соленоидальным.

Пример 51. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Согласно определению, имеем

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z^2)}{\partial z}=2x+2y+2z=2(x+y+z).$$

Пример 52. Дано скалярное поле $u(x, y, z)$. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Так как $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, то

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

или $\nabla(\nabla u)=\Delta u$, т.е. $\nabla^2=\Delta$ (оператор Лапласа равен квадрату оператора Гамильтона).

Пример 53. Дано электрическое векторное поле, в каждой точке которого по закону Кулона действует вектор $\vec{F}=\frac{ke}{r^2}\vec{r}_0$, где r – расстояние данной точки от начала координат; e – положительный электрический заряд; $\vec{r}_0$ - единичный вектор, направленный по радиус-вектору данной точки; k = const. Определить поток векторного поля через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Имеем $\Pi=\iint\limits_D \vec{F}\vec{n}dS=\iint\limits_D \frac{ke}{r^2}\vec{r}_0\vec{n}dS$. Так как $r = R$ = const и $\vec{r}_0\vec{n}=1$, то

$$\Pi=\frac{ke}{R^2}\iint\limits_D dS=\frac{ke}{R^2}S_{\text{сф}}=\frac{ke}{R^2}4\pi R^2=4\pi ek.$$

Пример 54. Найти поток радиус-вектора $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 0$ $(0 \le z \le 1)$.

Найдем дивергенцию данного векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

Искомый поток найдем по формуле Остроградского – Гаусса (при вычислении интеграла используем цилиндрические координаты):

$$\Pi=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}dV=3\iiint\limits_V dV=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho}dz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho)d\rho=3\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\pi.$$

Пример 55. Найти поток векторного поля $\vec{F}=(2z-x)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+3z\vec{k}$ через сторону треугольника D, вырезанного из плоскости $x + 4y + z - 4 = 0$ координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

Единичный вектор нормали к плоскости $x + 4y + z - 4 = 0$, обеспечивающий требуемое направление ориентации поверхности, имеет вид $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i} + \ + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{k}$, т.е. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{17}}$. Имеем $\cos\alpha dS = dydz$; $\cos\beta dS = dxdz$; $\cos\gamma dS = dxdy$. Для данного векторного поля $P = 2z - x$, $Q = x + 2z$, $R = 3z$ и по определению потока получаем

$$\Pi = \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint\limits_D (2z - x)dydz + (x + 2z)dzdx + 3zdxdy =$$

$$= \iint\limits_D (2z + 4y + z - 4)dydz + (x + 2z)dzdx + 3(4 - x - 4y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{4-4y} (3z + 4y - 4)dz + \int_0^4 dz \int_0^{4-z} (x + 2z)dx + 3\int_0^4 dx \int_0^{1-x/4} (4 - x - 4y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}16(1-y^2) - 16(1-y^2)\right]dy + \int_0^4 \left[\frac{1}{2}(4-z)^2 + 2z(4-z)\right]dz +$$

$$+ 3\int_0^4 \left[\frac{1}{4}(4-x)^2 - \frac{(4-x)^2}{8}\right]dx = 42\frac{2}{3}.$$

Пример 56. Вычислить линейный интеграл от радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль дуги винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$, если $0 \le t \le 2\pi$.

Имеем

$$\int\limits_L \vec{r}d\vec{r} = \int\limits_L xdx + ydy + zdz = \int_0^{2\pi} \left[R^2(-\cos t\sin t + \sin t\cos t) + a^2 t\right]dt = \left.\frac{a^2t^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a^2.$$

Эта величина равна работе вектора $\vec{r}$ вдоль заданной дуги винтовой линии.

Пример 57. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ в положительном направлении.

По определению циркуляции получаем

$$\oint\limits_C \vec{F}d\vec{r} = \oint\limits_C -\omega ydx + \omega xdy = \omega\int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)dt = 2\pi a^2\omega.$$

Пример 58. Тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скорость $\vec{\omega}$. Найти вихрь скорости в произвольной точке тела.

Имеем $\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}(\vec{\omega}\times\vec{r})$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Находим

$$\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k},$$

причем $P=z\omega_y-y\omega_z$, $Q=x\omega_z-z\omega_x$, $R=y\omega_x-x\omega_y$. Следовательно,

$$\text{rot}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=2(\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k})=2\vec{\omega},$$

т.е. вихрь скорости $\vec{v}$ точки равен удвоенной угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения тела.

Пример 59. Показать, что поле $\vec{F}=(2xy+3y^2+9y)\vec{i}+(x^2+6xy+9x)\vec{j}$ является потенциальным, и найти потенциал этого тела.

Данное векторное поле определено на всей плоскости *Oxy*, являющейся односвязной областью. Покажем, что $\text{rot}\,\vec{F}=0$, т.е. что поле безвихревое, а следовательно, и потенциальное. Действительно, так как $P=2xy+3y^2+9y$, $Q=x^2+6xy+9x$, $R=0$, то

$$\text{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+3y^2+9y & x^2+6xy+9x & 0\end{vmatrix}=0.$$

Потенциал $u=u(x,y)$ вычислим по формуле

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C,$$

т.е. $u(x,y)=\int_0^x 0dx+\int_0^y(x^2+6xy+9x)dy+C=x^2y+3xy^2+9xy$.

Здесь в качестве начальной точки взята точка $M_0(0,0)$.

Пример 60. Найти потенциал ньютоновского поля притяжения.

Пусть точка с массой *m* помещена в начало координат *O*; тогда, согласно закону Ньютона, на помещенную в каждой точке *A* плоскости единичную массу действует сила $\vec{F}$, модуль которой $F=\dfrac{m}{r^2}$, где $r=|OA|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ньютоновское поле является потенциальным, так как его ротор, как в этом можно убедиться, равен нулю. Найдем потенциал этого плоского поля:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C=\int_{x_0}^{x}\frac{-mxdx}{\sqrt{\left(x^2+y_0^2\right)^3}}+\int_{y_0}^{y}\frac{-mxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}+C=$$

$$=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}}+C_1,\qquad \text{где}\ \ C_1=C-\frac{m}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

Пример 61. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}=(x+3y+2z)\vec{i}+$ $+(2x+z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ по контуру треугольника *MNP*, где *M*(2, 0, 0), *N*(0, 3, 0), *P*(0, 0, 1).

Согласно формуле Стокса, $Ц=\oint\limits_C \vec{F}d\vec{r}=\iint\limits_D \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{F}dS$. Здесь C – контур треугольника *MNP*, лежащего в плоскости $3x+2y+6z-6=0$, проходящей через три данные точки. Найдем ротор данного векторного поля:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+3y+2z & 2x+z & x-y\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial(x-y)}{\partial y}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\right]\vec{i}-$$

$$-\left[\frac{\partial(x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial z}\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial(2x+z)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial y}\right]\vec{i}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

Следовательно,

$$Ц=\iint\limits_D \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{F}dS=\iint\limits_D(\mathrm{rot}\,\vec{F})_x\,dydz+(\mathrm{rot}\,\vec{F})_y\,dxdz+(\mathrm{rot}\,\vec{F})_z\,dxdy=$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}}dydz+\iint\limits_{D_{xz}}dxdz-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-2\int_0^3 dy\int_0^{1-y/3}dz+\int_0^1 dz\int_0^{2-2z}dx-\int_0^2 dx\int_0^{3-3x/2}dy=$$

$$=-2\left(y-\frac{y^2}{6}\right)\Bigg|_0^3+\left(2z-z^2\right)\Big|_0^1-\left(3x-\frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=-5.$$

Пример 62. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}+a\vec{k}$ (a = const) вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении.

Параметрические уравнения данного контура C имеют вид $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$. Далее, имеем $P=y=\sin t$, $Q=-x=-\cos t$. По определению циркуляции получаем

$$Ц=\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_0^{2\pi}\sin t(-\sin t)dt-\cos t\cos tdt=-\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=-2\pi.$$

Применим также для нахождения циркуляции формулу Стокса. Ротор вектора $\vec{F}$ равен

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & a \end{vmatrix} = -2\vec{k},$$

а нормаль, обеспечивающая положительное направление обхода контура, $\vec{n} = \vec{k}$. Следовательно,

$$Ц = \iint_D \vec{n}\operatorname{rot}\vec{F}dS = -2\iint_D \vec{n}\,\vec{k}dS = -2\iint_D dxdy = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho = -2\cdot 2\pi\frac{1}{2} = -2\pi.$$

Примеры для самостоятельной работы

121. Найти поток вектора $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le \dfrac{R^2}{h^2}z^2$, $0 \le z \le h$.

122. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (y-x)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

123. Найти поток вектора $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, если $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.

124. Найти поток радиуса-вектора $\vec{r}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового конуса, если h – высота конуса и R – радиус основания.

125. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ по контуру треугольника ABC, где $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

126. Найти циркуляцию вектора $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

127. Найти циркуляцию вектора $\vec{u} = (x+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + x\vec{k}$ по эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

128. Найти дивергенцию градиента функции $u = e^{x+y+z}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ