

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Прикладная математика»

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ
РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Нижегород, 2006

Составители: М.Г. Ефимова, Р.П. Эюзина, А.Н. Мошкова

УДК 517

Определенный интеграл и его приложения. Расчетные задания. Методические указания для студентов всех специальностей и всех форм обучения. НГТУ; сост.: М.Г. Ефимова, Р.П. Эюзина, А.Н. Мошкова. - Н.Новгород, 2006. - 23с.

Сборник расчетных заданий, содержит типовые расчеты по теме «Определенный интеграл».

Научный редактор И.П. Рязанцева

Редактор Э.Б. Абросимова

Компьютерный набор Т.О. Парфенова, Е.В. Егорова, Е.А. Бобылева

Подписано в печать 22.12.05. Формат 60 x 84 1/16. Бумага газетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 500 экз. Заказ 9.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ, 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный
технический университет, 2006

Введение

Данная методическая разработка содержит типовые расчетные задания по разделу высшей математики «Определенный интеграл». По сравнению с известным сборником заданий Л.А. Кузнецова, задания из которого использованы в этой разработке, здесь шире представлены задачи с приложениями определенного интеграла и включены задачи с несобственными интегралами.

Задания составили: М.Г.Ефимова (3,4,5,9,10,11), А.Н. Мошкова (1,2,6,7,8), Р.П.Эюзина (12,13,14,15).

Пособие можно использовать для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

Задача 1. Вычислить определенный интеграл.

- | | | | |
|-------|--|-------|--|
| 1.1. | $\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ | 1.11. | $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$ |
| 1.2. | $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ | 1.12. | $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{25+3x}} dx$ |
| 1.3. | $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ | 1.13. | $\int_0^1 \frac{z^2}{z^8+1} dz$ |
| 1.4. | $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$ | 1.14. | $\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}} dy$ |
| 1.5. | $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$ | 1.15. | $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ |
| 1.6. | $\int_0^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$ | 1.16. | $\int_1^2 \frac{1}{e^x+1} dx$ |
| 1.7. | $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} dx$ | 1.17. | $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$ |
| 1.8. | $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$ | 1.18. | $\int_1^2 \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}$ |
| 1.9. | $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$ | 1.19. | $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx$ |
| 1.10. | $\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$ | 1.20. | $\int_0^2 \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx$ |

- 1.21. $\int_0^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.
- 1.22. $\int_1^4 \frac{(1/2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x+y})} dx$.
- 1.23. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx$.
- 1.24. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} dx$.
- 1.25. $\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4} dx$.
- 1.26. $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$.
- 1.27. $\int_2^9 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.
- 1.28. $\int_1^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}} dx$.
- 1.29. $\int_1^e \frac{x}{x^2+\ln x^2} dx$.
- 1.30. $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+4)^2} dx$.
- 1.31. $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} dx$.

Задача 2. Вычислить определенный интеграл.

- 2.1. $\int_{\sqrt{5}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^0} dx$.
- 2.2. $\int_1^2 \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx$.
- 2.3. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx$.
- 2.4. $\int_0^a \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx$.
- 2.5. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.
- 2.6. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.
- 2.7. $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$.
- 2.8. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.
- 2.9. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2} dx$.
- 2.10. $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$.
- 2.11. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$.
- 2.12. $\int_0^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$.
- 2.13. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$.
- 2.14. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.
- 2.15. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.
- 2.16. $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$.

- 2.17. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2} dx$.
- 2.18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx$.
- 2.19. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{5+4\cos x} dx$.
- 2.20. $\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x + \sin x} dx$.
- 2.21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x + \sin x} dx$.
- 2.22. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2} dx$.
- 2.23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x + \cos x)^2} dx$.
- 2.24. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(1+\sin x + \cos x)^2} dx$.
- 2.25. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+\cos x} dx$.
- 2.26. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\sin x + \cos x)^2} dx$.
- 2.27. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin x} dx$.
- 2.28. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{5+3\sin x} dx$.
- 2.29. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x - \cos x} dx$.
- 2.30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\cos x - \sin x)^2} dx$.
- 2.31. $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x}{(1+\cos x - \sin x)^2} dx$.

Задача 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат.

- 3.1. $y^2 - 2x = 0, y^2 = 4x - x^2$ ($x \leq 2$).
- 3.2. $y^2 - 6x = 0, x^2 + y^2 = 16$ ($x \geq 0$).
- 3.3. $y^2 + 3x - 18 = 0, y^2 = 6x - x^2$ ($x \geq 3$).
- 3.4. $y^2 - 6x - 24 = 0, x^2 + y^2 = 16$ ($x \leq -2$).
- 3.5. $x^2 - 4y = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$ ($y \leq 4$).
- 3.6. $x^2 + y^2 = 8, x^2 - 2y = 0$ ($y \geq 0$).
- 3.7. $x^2 + y^2 - 8y = 0, x^2 + 2y - 16 = 0$ ($y \geq 2$).
- 3.8. $y^2 + 3x - 6 = 0, x^2 + y^2 = 4$ ($x \geq 1$).
- 3.9. $y^2 + 2x = 0, y^2 + 8x + x^2 = 0$ ($x \geq -6$).
- 3.10. $y^2 + 3x = 0, x^2 + y^2 = 4, x = 0$ ($x \leq 0$).
- 3.11. $y^2 - 12x + x^2 = 0, y^2 - 3x = 0$ ($x \leq 9$).
- 3.12. $x^2 + y^2 = 16, y^2 + 2x - 16 = 0$ ($y \geq 2\sqrt{3}$).
- 3.13. $x^2 + y = 0, y^2 + 2y + x^2 = 0$ ($y \geq -1$).
- 3.14. $x^2 + y^2 = 4, 3y + x^2 = 0$ ($y \leq 0$).

- 3.15. $x^2 + y^2 + 10y = 0, x^2 - 5y - 50 = 0$ ($y \leq -5$).
- 3.16. $x^2 + y^2 = 36, y^2 - 9x - 54 = 0$ ($x \leq -3$).
- 3.17. $y^2 - 6x = 0, y^2 - 12x + x^2 = 0$ ($x \leq 6$).
- 3.18. $y^2 - 9x = 0, x^2 + y^2 = 36$ ($x \geq 0$).
- 3.19. $x^2 + y^2 = 64, y^2 + 12x - 96 = 0$ ($x \geq 4$).
- 3.20. $x^2 - 7y = 0, y^2 - 14y + x^2 = 0$ ($y \leq 7$).
- 3.21. $y^2 - 16y + x^2 = 0, x^2 + 8y - 128 = 0$ ($y \geq 8$).
- 3.22. $x^2 + y^2 = 100, y^2 + 15x = 0$ ($x \leq 0$).
- 3.23. $x^2 - 4x + y^2 = 0, y^2 + 3x - 12 = 0$ ($x \geq 3$).
- 3.24. $y^2 - 8y + x^2 = 0, x^2 - 2y = 0$ ($y \leq 6$).
- 3.25. $y^2 - 4y + x^2 = 0, x^2 + y - 4 = 0$ ($y \geq 1$).
- 3.26. $x^2 + y^2 = 32, x^2 - 4y = 0$ ($y \geq 0$).
- 3.27. $x^2 + y^2 - 16y = 0, x^2 - 12y = 0$ ($y \leq 4$).
- 3.28. $y^2 + 6x = 0, y^2 + 8x + x^2 = 0$ ($x \geq -2$).
- 3.29. $x^2 + y^2 = 100, y^2 - 15x - 150 = 0$ ($x \leq -5$).
- 3.30. $x^2 - 3y = 0, x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$).
- 3.31. $y^2 + x^2 - 16y = 0, x^2 - 4y = 0$ ($y \leq 12$).

Задача 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

- 4.1.
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{\cos t}, \\ y = \sqrt{2} \operatorname{tg} t, \end{cases}$$
- 4.2.
$$\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases}$$
- 4.3.
$$\begin{cases} x = 3 \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{2}{\sin t}, \end{cases}$$
- 4.4.
$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases}$$
- 4.5.
$$\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{\cos t}, \\ y = 2 \operatorname{tg} t, \end{cases}$$
- 4.6.
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases}$$
- 4.7.
$$\begin{cases} x = 3 \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{2}{\cos t}, \end{cases}$$
- 4.8.
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases}$$

- 4.9.
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sin t}, \\ y = 4 \operatorname{ctg} t, \end{cases}$$
- 4.10.
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases}$$
- 4.11.
$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{\sin t}, \end{cases}$$
- 4.12.
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$$
- 4.13.
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{\cos t}, \\ y = 3 \operatorname{tg} t, \end{cases}$$
- 4.14.
$$\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases}$$
- 4.15.
$$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{\sin t}, \end{cases}$$
- 4.16.
$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$$
- 4.17.
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}, \\ y = 3 \operatorname{ctg} t, \end{cases}$$
- 4.18.
$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sin t}, \\ y = 3 \operatorname{ctg} t, \end{cases}$$
- 4.19.
$$\begin{cases} x = 8 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases}$$
- 4.20.
$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\cos t}, \end{cases}$$
- 4.21.
$$\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$$
- 4.22.
$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{3}{\sin t}, \end{cases}$$
- 4.23.
$$\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases}$$
- 4.24.
$$\begin{cases} x = 3 \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{2}{\cos t}, \end{cases}$$
- 4.25.
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$$
- 4.26.
$$\begin{cases} x = \frac{3}{\cos t}, \\ y = 2 \operatorname{tg} t, \end{cases}$$

- 4.27. $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \cos t, \\ y = 3\sqrt{3} \sin t, \\ x = 3 \ (\alpha \geq 3). \end{cases}$
- 4.28. $\begin{cases} x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{\sin t}, \\ y = 2. \end{cases}$
- 4.29. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = \sqrt{2} \ (\alpha \geq \sqrt{2}). \end{cases}$
- 4.30. $\begin{cases} x = 3\sqrt{3} \cos t, \\ y = 4\sqrt{3} \sin t, \\ y = 6 \ (\beta \geq 6). \end{cases}$
- 4.31. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \ (\beta \geq 3), \ 0 \leq x \leq 4\pi. \end{cases}$

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат.

- 5.1. $r = \frac{1}{2} + \sin \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$ 5.15. $r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi \ (r \geq \sin \varphi).$
- 5.2. $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$ 5.16. $r = \cos \varphi, r = \sqrt{3} \sin \varphi \ (r \geq \cos \varphi).$
- 5.3. $r = \frac{1}{2} - \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$ 5.17. $r = \cos \varphi, r = \sin \varphi \ (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$
- 5.4. $r = \frac{1}{2} - \cos \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$ 5.18. $r^2 = 4 \sin^2 \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$
- 5.5. $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi, r = 2 \ (r \geq 2).$ 5.19. $r^2 = 4 \sin \varphi \cos \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$
- 5.6. $r = 1 - \sqrt{2} \sin \varphi, r = 2 \ (r \geq 2).$ 5.20. $r^2 = 4 \cos^2 \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$
- 5.7. $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi, r = 2 \ (r \geq 2).$ 5.21. $r^2 = 2 \sin 2\varphi \cos^2 2\varphi.$
- 5.8. $r = 1 - \sqrt{2} \cos \varphi, r = 2 \ (r \geq 2).$ 5.22. $r^2 = \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi.$
- 5.9. $r = 2 \cos 3\varphi, r = \sqrt{3} \ (r \geq \sqrt{3}).$ 5.23. $r^2 = 4 \cos 2\varphi, r = \sqrt{2} \ (r \geq \sqrt{2}).$
- 5.10. $r = 2 \sin 3\varphi, r = \sqrt{3} \ (r \geq \sqrt{3}).$ 5.24. $r = 4 \cos^3 \varphi, r = \frac{1}{2} \ (r \geq \frac{1}{2}).$
- 5.11. $r = 2 \cos 6\varphi, r = \sqrt{3} \ (r \geq \sqrt{3}).$ 5.25. $r = 4 \sin^3 \varphi, r = \frac{1}{2} \ (r \geq \frac{1}{2}).$
- 5.12. $r = 2 \sin 6\varphi, r = \sqrt{3} \ (r \geq \sqrt{3}).$ 5.26. $r = \cos \varphi + \sin \varphi, r = \frac{\sqrt{3}}{2} \ (r \geq \frac{\sqrt{3}}{2}).$
- 5.13. $r = 2 \sin 4\varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$ 5.27. $r = 2 \cos^2 \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$
- 5.14. $r = \cos \varphi - \sin \varphi, r = \frac{1}{\sqrt{2}} \ (r \geq \frac{1}{\sqrt{2}}).$ 5.28. $r = \sin 2\varphi, r = \frac{1}{2} \ (r \geq \frac{1}{2}).$

8

- 5.29. $r = 2 \cos 4\varphi, r = \sqrt{2} \ (r \geq \sqrt{2}).$ 5.31. $r = 4 \sin 2\varphi, r = 2 \ (r \geq 2).$
- 5.30. $r = 2 \sin^2 \varphi, r = 1 \ (r \geq 1).$

Задача 6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат.

- 6.1. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \ 0 \leq x \leq 7/9.$
- 6.2. $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \ 1/4 \leq x \leq 1.$
- 6.3. $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \ 0 \leq x \leq 1/4.$
- 6.4. $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \ 0 \leq x \leq 15/16.$
- 6.5. $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \ 1/9 \leq x \leq 1.$
- 6.6. $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \ 0 \leq x \leq 9/16.$
- 6.7. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \ 0 \leq x \leq 3/4.$
- 6.8. $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, \ 0 \leq x \leq 1/2.$
- 6.9. $y = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 1, \ 1/4 \leq x \leq 1.$
- 6.10. $y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x - 1, \ 0 \leq x \leq 8/9.$
- 6.11. $y = \ln x, \ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$
- 6.12. $y = \ln(x^2 - 1), \ 2 \leq x \leq 3.$
- 6.13. $y = \ln \frac{5}{2x}, \ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
- 6.14. $y = \frac{x^2 - \ln x}{2}, \ 1 \leq x \leq 2.$
- 6.15. $y = 1 - \ln \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi/6.$
- 6.16. $y = 1 - \ln \sin x, \ \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
- 6.17. $y = \frac{2}{3}x^2 - 2\sqrt{x}, \ 0 \leq x \leq 3.$
- 6.18. $27y^2 = 16(x-1)^2, \ 1 \leq x \leq 2.$
- 6.19. $y = \ln 7 + \ln x, \ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
- 6.20. $y = -\ln \sin x, \ 0 \leq x \leq \pi/6.$
- 6.21. $y = e^x + 6, \ \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$
- 6.22. $y = 2 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ 0 \leq x \leq 1.$
- 6.23. $y = e^x + 13, \ \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$
- 6.24. $y = 2 - e^x, \ \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$

9

- 6.25. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq 1$
 6.26. $y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
 6.27. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \ln 3, 0 \leq x \leq 2$.
 6.28. $y = e^x - 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
 6.29. $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}, 0 \leq x \leq 2$.
 6.30. $y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
 6.31. $y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq 3$.

Задача 7. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.

- 7.1. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$
 7.2. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \pi/6 \leq t \leq \pi/4$
 7.3. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 3\pi$
 7.4. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$
 7.5. $\begin{cases} x = 4(2 \cos t + \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$
 7.6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$
 7.7. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$
 7.8. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$
 7.9. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/4$

- 7.10. $\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(\sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/3$
 7.11. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \pi/2 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$
 7.12. $\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/3$
 7.13. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$
 7.14. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$
 7.15. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$
 7.16. $\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$
 7.17. $\begin{cases} x = \frac{5}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{5}{2}(1 - \cos t), \end{cases} \pi/2 \leq t \leq \pi$
 7.18. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \pi/2 \leq t \leq \pi$
 7.19. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$
 7.20. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$
 7.21. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \pi \leq t \leq 2\pi$
 7.22. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$
 7.23. $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$
 7.24. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$

- 7.25. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$
- 7.26. $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$
- 7.27. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3$
- 7.28. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/6$
- 7.29. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4$
- 7.30. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4$
- 7.31. $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

Задача 8. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

- 8.1. $\rho = 1 - \sin \varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6$. 8.13. $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- 8.2. $\rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$. 8.14. $\rho = 5e^{12\varphi}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- 8.3. $\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq 0$. 8.15. $\rho = 6e^{5\varphi}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- 8.4. $\rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/6$. 8.16. $\rho = 3e^{4\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 8.5. $\rho = 5(1 - \cos \varphi), -\pi/3 \leq \varphi \leq 0$. 8.17. $\rho = 4e^{3\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 8.6. $\rho = 6(1 + \sin \varphi), -\pi/2 \leq \varphi \leq 0$. 8.18. $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 8.7. $\rho = 7(1 - \sin \varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6$. 8.19. $\rho = 5e^{12\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 8.8. $\rho = 8(1 - \cos \varphi), -2/3\pi \leq \varphi \leq 0$. 8.20. $\rho = 12e^{3\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 8.9. $\rho = 1 - \cos \varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6$. 8.21. $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 3/4$.
- 8.10. $\rho = 1 + \sin \varphi, -\pi/6 \leq \varphi \leq 0$. 8.22. $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/3$.
- 8.11. $\rho = 2(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/6$. 8.23. $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 5/12$.
- 8.12. $\rho = 3e^{4\varphi}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. 8.24. $\rho = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq 3/4$.

- 8.25. $\rho = 2e^{3\varphi}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- 8.26. $\rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq 12/5$.
- 8.27. $\rho = 12\varphi, 0 \leq \varphi \leq 5/12$.
- 8.28. $\rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/5$.
- 8.29. $\rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/3$.
- 8.30. $\rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2$.
- 8.31. $\rho = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq 5/4$.

Задача 9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

- 9.1. $\frac{x^2}{9} + y^2 - 2z = 0$.
- 9.2. $\frac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = 1$.
- 9.3. $z = x^2 + \frac{y^2}{9} - 2$.
- 9.4. $\frac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = -1$.
- 9.5. $2z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + 1$.
- 9.6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$.
- 9.7. $x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 5$.
- 9.8. $z = x^2 + 9y^2$.
- 9.9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$.
- 9.10. $2z - x^2 - \frac{y^2}{9} + 4 = 0$.
- 9.11. $z = -x^2 - y^2$.
- 9.12. $2z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{9}$.

$$9.13. z = \sqrt{7 - x^2 - \frac{y^2}{9}},$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 = -1,$$

$$z = 0.$$

$$9.20. \frac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = 2,$$

$$2z = 2 - \frac{x^2}{9} - y^2.$$

$$9.14. z = -2\sqrt{2 - x^2 - \frac{y^2}{9}},$$

$$z = -2\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9}},$$

$z = 0$ (вне конуса).

$$9.21. x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,$$

$$9x^2 + y^2 = 2z^2.$$

$$9.15. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} - 2z^2 = 0.$$

$$9.22. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} - \frac{3}{2}z^2 = 0,$$

$$2z = 2 - \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9}$$

(вне конуса).

$$9.16. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 2,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{3z^2}{2} = 0.$$

$$9.23. \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 2,$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 2z^2 = -2.$$

$$9.17. x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 = 2,$$

$$2z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{9}.$$

$$9.24. \frac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = 1,$$

$$2z = \frac{x^2}{9} + y^2 - 4.$$

$$9.18. \frac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = 1,$$

$$\frac{x^2}{9} + y^2 - 2z^2 = -8.$$

$$9.25. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = -1,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 7$$

(вне гиперболоида).

$$9.19. x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 = -1,$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{3}{4}z = 0.$$

$$9.26. x^2 + \frac{y^2}{9} + 2z = 0,$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 - 1 = 0,$$

$$z = 0.$$

$$9.27. x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 3.$$

$$9.30. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0,$$

$$2z = x^2 + \frac{y^2}{4} - 8$$

(вне конуса).

$$9.28. \frac{z^2}{4} + \frac{x^2}{9} + y^2 = 2,$$

$$z^2 = 4\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right)$$

(вне конуса).

9.31.

$$z = 3\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$z = 2 + x^2 + y^2.$$

9.29.

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2},$$

$$9z = x^2 + y^2.$$

Задача 10. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями.

$$10.1. x^2 + y^2 = 5,$$

$$y^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$x \geq -1.$$

$$10.7. x^2 + y^2 = 16,$$

$$y^2 + 2x - 16 = 0,$$

$$x \geq 2.$$

$$10.2. y^2 + 2x = 0,$$

$$y^2 + 8x + x^2 = 0,$$

$$x \geq -6.$$

$$10.8. x^2 + y^2 = 16,$$

$$y^2 + 2x - 16 = 0,$$

$$x \leq 2.$$

$$10.3. y^2 + 3x - 18 = 0,$$

$$y^2 = 6x - x^2,$$

$$x \geq 3.$$

$$10.9. x^2 + y = 0,$$

$$y^2 + 2y + x^2 = 0,$$

$$y \geq -1.$$

$$10.4. y^2 - 6x - 24 = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 16,$$

$$x \leq -2.$$

$$10.10. x^2 + y^2 = 10,$$

$$3x^2 + y = 0,$$

$$y \leq 0.$$

$$10.5. y^2 - 2x - 16 = 0,$$

$$y^2 + 8x + x^2 = 0,$$

$$x \leq -2.$$

$$10.11. x^2 + y^2 = 36,$$

$$y^2 - 9x - 54 = 0,$$

$$x \leq -3.$$

$$10.6. y^2 + 3x = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$x \leq 0.$$

$$10.12. y^2 - 6x = 0,$$

$$y^2 - 12x + x^2 = 0,$$

$$x \leq 6.$$

- 10.13. $y^2 - 12x + x^2 = 0,$
 $y^2 - 6x = 0,$
 $x \leq 6.$
- 10.14. $y^2 - 12x + x^2 = 0,$
 $y^2 - 3x = 0,$
 $x \leq 9.$
- 10.15. $y^2 - 7x = 0,$
 $y^2 - 14x + x^2 = 0,$
 $x \leq 7.$
- 10.16. $x^2 + 16x + y^2 = 0,$
 $y^2 + 8x - 128 = 0,$
 $x \geq 8.$
- 10.17. $x^2 + y^2 = 100,$
 $y^2 + 15x = 0,$
 $x \leq 0.$
- 10.18. $y^2 - x^2 = 1,$
 $|x| = \sqrt{3}.$
- 10.19. $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1,$
 $\frac{y^2}{9} + x^2 = 3.$
- 10.20. $y^2 - x^2 = 1,$
 $|x| = \sqrt{3}.$
- 10.21. $y = \sqrt{36 - x^2},$
 $9y = x^2.$
- 10.22. $x^2 + y^2 = 1,$
 $x^2 - 2y = 0,$
 $y = 0.$
- 10.23. $y^2 - 9x = 0,$
 $x^2 + y^2 = 36,$
 $x \geq 0.$
- 10.24. $x^2 + y^2 = 64,$
 $y^2 + 12x - 96 = 0,$
 $x \geq 4.$
- 10.25. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1,$
 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 3,$
 $|x| \geq 3.$
- 10.26. $y = \sqrt{36 - x^2},$
 $9y = x^2,$
 $y = 0.$
- 10.27. $x^2 + y^2 = 3,$
 $x^2 - y^2 = 1,$
 $|x| \geq 1.$
- 10.28. $\sqrt{5}y^2 - x = 0,$
 $x = \sqrt{6 - y^2}.$
- 10.29. $x^2 + y^2 = 8,$
 $x^2 - 2y = 0,$
 $y \geq 0.$
- 10.30. $y = |x|,$
 $y = \sqrt{2 - x^2}.$
- 10.31. $x^2 - y^2 = 2,$
 $2y = 2 - x^2.$

Задача 11. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями.

- 11.1. $x^2 - 4y = 0,$
 $y^2 - 8y + x^2 = 0,$
 $y \leq 4.$
- 11.2. $x^2 + y^2 = 8,$
 $x^2 - 2y = 0,$
 $y \geq 0.$
- 11.3. $x^2 - y^2 = 2,$
 $x^2 - 2y^2 = -2.$
- 11.4. $x^2 + y^2 - 4y = 0,$
 $x^2 + 2y - 8 = 0,$
 $y \geq 2.$
- 11.5. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1,$
 $\frac{x^2}{9} - 2y^2 = 0.$
- 11.6. $y^2 + 3x - 18 = 0,$
 $y^2 = 6x - x^2$
 $(x \geq 3).$
- 11.7. $2y = 2 - \frac{x^2}{9},$
 $\frac{x^2}{9} - y^2 = -1.$
- 11.8. $\sqrt{5}y^2 - x = 0,$
 $x = \sqrt{6 - y^2}.$
- 11.9. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1,$
 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 3,$
 $x \geq 3.$
- 11.10. $y = \sqrt{\frac{x^2}{9} + 1},$
 $y = \sqrt{7 - \frac{x^2}{9}}$
 $(x = 0, y = 0).$
- 11.11. $x^2 + y^2 - 8y = 0,$
 $x^2 + 2y - 16 = 0$
 $(y \geq 2).$
- 11.12. $y^2 - x^2 = 1,$
 $|x| = \sqrt{3}.$
- 11.13. $y^2 + 2x = 0,$
 $y^2 + 4x + x^2 = 0,$
 $x \geq -2.$
- 11.14. $y = |x|,$
 $y = \sqrt{2 - x^2}.$
- 11.15. $x^2 + y^2 = 16,$
 $x^2 + 2y - 16 = 0,$
 $y \leq 2.$
- 11.16. $\frac{x^2}{9} - \frac{3}{2}y^2 = 0,$
 $2y = 2 - \frac{x^2}{9}.$

$$11.17. \quad x = \sqrt{2+y^2}, \\ x = \sqrt{2-2y}.$$

$$11.25. \quad 2y - \frac{x^2}{9} + 4 = 0,$$

$$\frac{x^2}{9} - y^2 - 1 = 0.$$

$$11.18. \quad x^2 + y^2 = 13,$$

$$y^2 + 2x + 2 = 0,$$

$$(x \leq -1).$$

$$11.26. \quad x^2 + y^2 = 16,$$

$$x^2 + 2y - 16 = 0,$$

$$(y \geq 2).$$

$$11.19. \quad x^2 - y^2 = 2,$$

$$2y = 2 - x^2,$$

$$y = 1$$

$$11.20. \quad y^2 - x^2 = 1,$$

$$|y| = 2.$$

$$11.28. \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 2,$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{2} = 0,$$

$$y = 0.$$

$$11.21. \quad y = x^2 - 2,$$

$$y = |x|$$

$$11.29. \quad y = \sqrt{36 - x^2},$$

$$9y = x^2,$$

$$11.22. \quad x^2 - y^2 = 1,$$

$$x^2 - 2y = 0,$$

$$y = 0.$$

$$11.30. \quad y^2 = 4x^2,$$

$$\frac{y^2}{4} + x^2 = 2,$$

$$(x > 0).$$

$$11.23. \quad x^2 - y^2 = 1,$$

$$2y = x^2 - 4.$$

$$11.31. \quad y = 3|x|,$$

$$y = 2 + x^2$$

$$(y \leq 3).$$

$$11.24. \quad y = 3|x|,$$

$$y = 2 + x^2$$

$$(y \geq 3).$$

Задача 12.

12.1. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую резервуар, ограниченный конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 1$.

12.2. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 20м, нижним - 10м и высотой 6м. Определить давление воды на плотину.

12.3. Найти момент инерции цилиндра, радиус основания которого R , высота H , относительно его оси.

12.4. Тонкая проволока массы M согнута в виде полуокружности радиуса R и вращается вокруг оси, проходящей через концы полуокружности, делая n оборотов в минуту. Вычислить ее кинетическую энергию.

12.5. Найти осевую составляющую P кг полного давления пара на сферическое дно котла. Диаметр цилиндрической части котла d м, давление пара в котле P кг/м².

12.6. Скорость тела дается формулой $v = \sqrt{1+t} \frac{m}{c}$. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

12.7. Найти момент инерции полуокруга радиуса R относительно его диаметра.

12.8. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны a .

12.9. Цилиндрическая пистрета с горизонтальной осью наполовину наполнена маслом (удельный вес 0,9). Определить давление масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус ее равен 2 м.

12.10. С какой силой полукольцо радиуса R и массы M действует на материальную точку массы m , находящуюся в его центре.

12.11. Найти момент инерции эллипса с полуосями a и b относительно оси, длины $2a$.

12.12. Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду из цилиндрического резервуара, имеющего в основании круг радиуса $R=3$ м и высоту $H=5$ м.

12.13. Крутовой цилиндр, радиус основания которого R , а высота H , вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна γ . Найти кинетическую энергию цилиндра.

12.14. Найти момент инерции круга радиуса R относительно его центра.

12.15. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме конуса высотой H и радиусом основания R ? Удельный вес песка равен d (песок поднимает с поверхности земли).

12.16. Найти величину давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что основание его равно 8м, высота 12м, верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5м.

12.17. Найти момент инерции конуса, радиус основания которого R , высота H , относительно его оси.

12.18. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полушаровидный резервуар радиуса $R=0,6$ м.

12.19. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально 120В, равномерно падает, убывая на 0,01В в секунду. Одновременно с этим в цепь включается сопротивление, тоже с постоянной скоростью, равной 0,1 Ом в секунду. Кроме того, в цепи имеется постоянное сопротивление, равное 12 Ом. Сколько кулонов электричества протекает через цепь за 3 минуты?

12.20. Найти момент инерции эллипса с полуосями a и b относительно оси, длины $2b$.

12.21. Концы вертикального вала радиуса r поддерживаются плоским полупятымком. Вес вала P распределяется равномерно на всю поверхность опоры.

Вычислить полную работу сил трения при одном обороте вала. Коэффициент трения μ .

12.22. Напряжение на клеммах электрической цепи $U=120\text{В}$. В цепь равномерно вводятся сопротивление со скоростью $0,1\text{ Ом}$ в секунду. Кроме того, в цепь включено постоянное сопротивление $r=10\text{ Ом}$. Сколько кулонов электричества протечет через цепь в течение двух минут?

12.23. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см , если сила 1 кг растягивает на 1 см .

12.24. Найти давление на пластинку, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и b и высотой h , погруженную в жидкость на глубину s .

12.25. Какую работу нужно совершить, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высоты H , имеющего радиусы оснований R и r ($r < R$)? Удельный вес песка равен d . Песок поднимают с поверхности земли, на которой покоится больше основание конуса.

12.26. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса d из резервуара, имеющего форму обращенного вершины вниз конуса, высота которого H , а радиус основания R . Как изменится результат, если конус будет обращен вершиной вверх?

12.27. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания $R=2\text{ м}$, глубина котла $H=4\text{ м}$. Он наполнен жидкостью, удельный вес которой $d=0,8\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

12.28. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг стороны a . Толщина пластинки d , плотность материала, из которого сделана пластинка, равна γ . Найти кинетическую энергию пластинки.

12.29. Треугольная пластинка, основание которой a , а высота h , вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью ω . Найти кинетическую энергию пластинки, если толщина ее d , а плотность материала, из которого она изготовлена, равна γ .

12.30. Пластинка в форме прямоугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a , высота h . Найти силу давления воды на каждую из сторон пластинки. Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется верхняя, а основание будет параллельно поверхности воды?

12.31. Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так что одна из осей (длиной $2b$) лежит на поверхности. Как велика сила давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина погруженной полуоси эллипса равна a , а удельный вес жидкости d' ?

Задача 13. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями.

13.1. $y=1-x^2, y=0$.

13.2. $y=x^2, y=1$.

13.3. $2y=x^2, y=x^2, x=1, x=2$.

13.18. $y^2=2px, x=2p$.

13.4. $ay=x^2, x+y=2a$ ($a>0$).

13.19. $x=0, y=0, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

13.5. $y^2=xy=x^2$.

13.20. $\frac{x^2}{4}+y^2=1, \frac{x}{2}+y=1$.

13.6. $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, y=0$.

13.21. $y=2x^2, y=x^2, x=1, x=2$.

13.7. $y=\sin x, y=0, x=\frac{\pi}{4}$.

13.22. $y^2=x, x=1, y=0$ ($y\geq 0$).

13.8. $y=\sqrt{2x-x^2}, y=0$.

13.23. $y=x^2, y=2x^2, x=1, x=2$.

13.9. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$.

13.24. $y=x^2, y=8-x^2$.

13.10. $y^2=4x+4, y^2=-2x+4$.

13.25. $y^2=4x, x+y=3, y\geq 0$.

13.11. $y=\sin x, y=0$ ($0<x<\pi$).

13.26. $4y=x^2-4, -2y=x^2-4$.

13.12. $y^2=8x, y=0, x+y=6$ ($y>0$).

13.27. $x^2=20y, y^2=20x$.

13.13. $x^2+y^2=R^2, y=0$ ($y>0$).

13.28. $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$.

13.14. $y=\sin x, y=\cos x, y=0$.

13.29. $2y=x^2, x+y=4$.

13.15. $xy=4, y=x, x=4$.

13.30. $y^2=2x, x=2$.

13.16. $y=2\sqrt{x}, y=x$.

13.31. $y=\cos x, y=0$ ($-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$).

13.17. $xy=4, x+y=5$.

Задача 14. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость).

14.1. $\int_0^{\infty} x \ln x dx$. 14.6. $\int_0^1 \ln x dx$. 14.11. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$.

14.2. $\int_0^2 \frac{dx}{x^3-x^2}$. 14.7. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. 14.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg x dx$.

14.3. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}$. 14.8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 14.13. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

14.4. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 14.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$. 14.14. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

14.5. $\int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 14.10. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x-3} dx$. 14.15. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

$$14.16. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$14.17. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

$$14.18. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}.$$

$$14.19. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

$$14.20. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx.$$

$$14.21. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$14.22. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$14.23. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14.24. \int_1^2 \frac{dx}{1-x^3}.$$

$$14.25. \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$14.26. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

$$14.27. \int_0^1 x \ln^2 x dx.$$

$$14.28. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

$$14.29. \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

$$14.30. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

$$14.31. \int_0^2 \frac{dx}{e^x - 1}.$$

Задача 15. Исследовать на сходимость несобственный интеграл.

$$15.1. \int_0^{\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx.$$

$$15.2. \int_1^{\infty} \frac{1+x}{x^3 + \sin^3 x} dx.$$

$$15.3. \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$$

$$15.4. \int_1^{\infty} \frac{3 + \arctg(1/x)}{1+x\sqrt{x}} dx.$$

$$15.5. \int_1^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{2+x\sqrt{x}} dx.$$

$$15.6. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3+2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx.$$

$$15.7. \int_1^{\infty} (1 - \cos \frac{2}{x}) dx.$$

$$15.8. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2x^2}}{\sqrt[3]{x^3-1}} dx.$$

$$15.9. \int_1^{\infty} \frac{x \arctg x^2}{\sqrt[3]{x^3+4x^2+3}} dx.$$

$$15.10. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \operatorname{tg} \frac{x}{x^3+1}}{x} dx.$$

$$15.11. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2+2x+7} dx.$$

$$15.12. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} \arctg \frac{1}{x^2+1}}{x^2+1} dx.$$

$$15.13. \int_1^{\infty} \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{x^5-x}} dx.$$

$$15.14. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3+2x^2}}{\sqrt[3]{x^3-1}} dx.$$

$$15.15. \int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx.$$

$$15.16. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^3})}{e^{x^2}-1} dx.$$

$$15.17. \int_0^1 \frac{x^2}{x - \sin x} dx.$$

$$15.18. \int_0^1 \frac{x^2}{x - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$15.19. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$15.20. \int_0^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{16-x^4}} dx.$$

$$15.21. \int_0^{\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$15.22. \int_0^2 \frac{x^2+2x}{(x^2+x-6)^2} dx.$$

$$15.23. \int_0^1 \frac{\cos^4 x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$15.24. \int_0^2 \frac{(x^2+1) \sin^2 x}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} dx.$$

$$15.25. \int_0^1 \frac{(x+2) \cos^4 4x}{\sqrt{(3x^2-2x-1)^6}} dx.$$

$$15.26. \int_0^6 \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^2-6x+8}} dx.$$

$$15.27. \int_0^4 \frac{x^2 \sin^2 x}{\sqrt{(x^2-2x)^5}} dx.$$

$$15.28. \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin \frac{1}{x^4+1}}{\sqrt{x^4+1}} dx.$$

$$15.29. \int_{10}^{\infty} \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x^2+x}} dx.$$

$$15.30. \int_0^1 \frac{x}{x - \ln(1+x)} dx.$$

$$15.31. \int_{10}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}} dx.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления/ Н.С.Пискунов, Т.1. - М.: Наука.
2. Бутров, Я.С., Никольский, С.М. Высшая математика/ Я.С.Бутров, С.М.Никольский. - М.: Высшая математика.
3. Сборник задач по математике для вузов/ под редакцией А.В.Ефимова, В.И.Демидовича, Ч.1. - М.: Наука.
4. Данко, П.Е., Попов, А.Т., Кожевникова, Т.Я./ П.Е.Данко, А.Т.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах, Ч.1. - М. Высшая школа.