Министерство образования Российской Федерации

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра "Прикладная математика"

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Методическая разработка для студентов специальности
"Двигатели внутреннего сгорания"
вечерней формы обучения Заволжского филиала

Нижний Новгород 2004

Составитель А.В.Чернов

УДК 519.2.21

Примеры решения задач по теории вероятностей и математической статистике. Методическая разработка для студентов специальности "Двигатели внутреннего сгорания" вечерней формы обучения Заволжского филиала / НГТУ; Сост.: А.В.Чернов. Н.Новгород, 2004. 40 с.

Дана краткая справка по элементам теории вероятностей и математической статистики, необходимым для решения задач, разобраны примеры решения задач по каждой теме, приведены специальные таблицы используемых распределений.

Разработка предназначена для первоначального знакомства с теорией вероятностей и математической статистикой, а также для выработки у студентов так называемого "вероятностного мышления" и соответственно навыков решения задач.

Научный редактор И.П.Рязанцева

Редактор Е.В.Комарова

Подписано к печати 05.02.04. Формат 60×84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 2,5. Уч.-изд.л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ 95.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603600. Н.Новгород, ул.Минина, 24.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий количество различных комбинаций, которые можно составить заданным способом из элементов данного множества.

Для множества, состоящего из n элементов, основными комбинациями являются следующие:

1. **Перестановки** – всевозможные отличающиеся друг от друга порядком упорядоченные наборы всех элементов данного множества.

Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Пример 1. Для множества трех геометрических векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ различными перестановками будут

$$\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}, \{\overline{c},\overline{a},\overline{b}\}, \{\overline{b},\overline{c},\overline{a}\}, \{\overline{b},\overline{a},\overline{c}\}, \{\overline{c},\overline{b},\overline{a}\}, \{\overline{a},\overline{c},\overline{b}\}.$$

Их число можно было вычислить, не выписывая самих перестановок, по формуле: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

2. **Размещения из n элементов по k** – всевозможные отличающиеся друг от друга порядком упорядоченные наборы k элементов данного множества n элементов.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k и вычисляется по формуле: $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Пример 2. В предыдущем примере различными размещениями из трех векторов по два будут

$$\{\overline{a},\overline{b}\}, \{\overline{b},\overline{a}\}, \{\overline{a},\overline{c}\}, \{\overline{c},\overline{a}\}, \{\overline{b},\overline{c}\}, \{\overline{c},\overline{b}\}.$$

Их количество можно было вычислить, не выписывая самих размещений, как произведение всех натуральных чисел от 3 до $3-2+1=2$: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

3. **Сочетания из n элементов по k** – всевозможные неупорядоченные наборы k элементов данного множества n элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k. Поскольку на каждый неупорядоченный набор k элементов приходится $P_k = k!$ упорядоченных наборов, то очевидно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Пример 3. В предыдущем примере различными сочетаниями из трех векторов по два будут

$$\{\overline{a},\overline{b}\}, \{\overline{a},\overline{c}\}, \{\overline{b},\overline{c}\}.$$

Их количество можно было вычислить, не выписывая самих сочетаний, как отношение $C_3^2 = A_3^2/P_2 = (3 \cdot 2)/(2!) = 6/2 = 3$.

Формулу числа размещений обобщает следующая теорема.

Теорема 1. Число различных упорядоченных наборов вида

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$

где элемент a_i может принимать n_i различных значений, $i = \overline{1,k}$, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Замечание. Из теоремы 1 можно получить формулу для числа размещений A_n^k. Действительно, здесь элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выбираются из одного множества и должны быть различны. Очевидно, что a_1 может принимать n различных значений. Если a_1 зафиксировать, то a_2 может принимать $(n-1)$ значение (a_2 не может быть равен a_1) и т.д.

Теорема 2. Пусть M_i – некоторое множество, состоящее из n_i элементов, $i = \overline{1,k}$. Число различных неупорядоченных наборов из $m = m_1 + \ldots + m_k$ элементов, среди которых ровно m_i элементов множества M_i, $i = \overline{1,k}$, равно произведению $C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k}$.

Как пример использования теоремы 1 докажем теорему 2 для случая $k = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ (для произвольных $k, m_1, \ldots, m_k$ доказывается аналогично). Итак, пусть имеются неупорядоченные наборы вида $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$, где a_1, a_2, a_3 выбираются из множества n_1 элементов, а b_1, b_2 – из множества n_2 элементов. Каждый из этих неупорядоченных наборов можно отождествить с упорядоченным набором 2-х наборов $\{a, b\}$, где $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2\}$. Очевидно, что количество всех возможных неупорядоченных наборов вида a - это по определению $C_{n_1}^3$, а количество всех возможных неупорядоченных наборов вида b - это по определению $C_{n_2}^2$. Тогда по теореме 1, количество всех упорядоченных наборов $\{a, b\}$ равно $C_{n_1}^3 \cdot C_{n_2}^2$.

Задача 1. Имеется 7 конвертов, которые нужно разнести по 7 указанным на них адресам. Сколько возможно маршрутов доставки?

Решение. Занумеруем конверты (а тем самым, и указанные на них адреса). Каждому маршруту взаимно-однозначно соответствует упорядоченный набор различных чисел от 1 до 7, то есть перестановка чисел от 1 до 7. Например, набор $\{5, 2, 6, 7, 1, 3, 4\}$ означает, что сначала доставляем конверт по пятому адресу, затем - по второму, потом - по шестому и т.д. Всего таких наборов, а следовательно, и маршрутов, будет $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Задача 2. Имеется число 2131213. Сколько всего чисел можно составить из образующих его цифр?

Решение. Интересующие нас числа представляют собой наборы по 7 цифр. У нас имеется три "1", две "2"и две "3". Зафиксируем какие-то три позиции и поместим на них цифру "1". Выбор таких трех позиций из семи возможных представляет собой сочетание из семи по три, поэтому всего таких возможностей C_7^3. На две позиции из оставшихся четырех разместим цифру "2". Всего таких возможностей C_4^2. На оставшиеся две позиции разместим цифру "3 одна возможность. Тогда каждое интересующее нас число можно отождествить с упорядоченным набором $\{s_1, s_2, s_3\}$, где s_1 - номер способа размещения "1", s_2 - номер способа размещения "2", s_3 - номер способа размещения "3". Как показано ранее, s_1 может принимать C_7^3 различных значений, s_2 - C_4^2 различных значений, и s_3 - одно значение. Таким образом, по теореме 1, искомое количество будет равно

$$n = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} = 7 \cdot 5 \cdot 6 = 210.$$

Задача 3. Сколько словарей необходимо издать, чтобы переводить с семи языков на любой другой из этих языков?

Решение. Каждый из словарей можно трактовать как упорядоченную пару $\{Я_1, Я_2\}$ различных языков из данных семи (перевод с одного языка $Я_1$ на другой $Я_2$), то есть как размещение из 7 языков по 2. Поэтому общее количество словарей - это $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.

Задача 4. Имеется кодовый замок, кодирующее устройство которого состоит из четырех барабанов с десятью гранями, на которых изображены цифры от 0 до 9, и трех барабанов с пятью гранями, на которых изображены буквы "A","B","C","D","E". Каково количество возможных кодовых комбинаций для этого замка.

Решение. Каждую кодовую комбинацию можно представить как упорядоченный набор $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3\}$, где a_i принимает 10 значений (цифры от 0 до 9), $i = \overline{1,4}$, а b_j 5 различных значений (буквы от "A" до "E"), $j = \overline{1,3}$. По теореме 1, общее количество комбинаций равно $n = 10^5 \cdot 5^3 = 12500000$.

Задача 5. Первенство по баскетболу оспаривают 18 команд, которые путем жеребьевки распределяются на 2 подгруппы по 9 команд в каждой. Пять команд из 18 являются лидирующими. Каково количество вариантов жеребьевки, при которых три лидирующие команды попадают в первую подгруппу?

Решение. Можем воспользоваться теоремой 2, если обозначить M_1 - множество лидирующих команд ($n_1 = 5$), M_2 - множество команд-аутсайдеров ($n_2 = 18 - 5 = 13$). При интересующих нас вариантах жеребьевки первая подгруппа состоит из $m_1 = 3$ лидирующих подгрупп и $m_2 = 9 - 3 = 6$ команд-аутсайдеров. Соответственно по теореме 2, количество всех таких вариантов равно

$$C_5^3 \cdot C_{13}^6 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6!} = 10 \cdot 1729 = 17290.$$

1.2. Случайные события

Событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Если исход опыта (произойдет событие или не произойдет) однозначно определяется его условиями, то событие называется **детерминированным** (определенным). Для недетерминированного события отношение

$$h_n(A) = \frac{m_n(A)}{n},$$

где n - общее количество проведенных опытов, а $m_n(A)$ - количество тех из них, в которых событие A произошло, называется частотой события A. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(A) = P(A)$, то говорят, что событие обладает статистической устойчивостью. Недетерминированное событие, обладающее статистической устойчивостью, называется **случайным**. При этом предел $P(A)$ называется **вероятностью события** A [1]. Вероятность $P(A)$ является количественной мерой степени возможности наступления события в результате серии одинаковых опытов, повторяющихся неограниченное количество раз. Предмет теории вероятностей - это случайные события и их вероятности.

Далее для краткости под словом "событие"будем понимать "случайное событие". Говорят, что события образуют полную группу событий, если в результате опыта по крайней мере одно из них обязательно должно произойти. События называются равновозможными, если по условиям опыта нет оснований считать одно из них более возможным, чем другое. Говорят, что события несовместны, если в результате опыта никакие два из них не могут произойти одновременно. Множеством элементарных исходов называется полная группа равновозможных и несовместных событий. Множество элементарных исходов будем обозначать Ω.

1.3. Операции над событиями

Заметим, что если множество элементарных исходов Ω задано, то всякое событие A, которое выделяется в данном опыте, можно рассматривать как подмножество множества Ω.

Пример 4. Предположим, опыт заключается в подбрасывании игральной кости, центр тяжести которой совпадает с ее геометрическим центром, с гранями, пронумерованными от 1 до 6. В результате этого опыта может, в частности, произойти 6 событий вида ω_i ="выпала грань номер i", то есть "выпало i очков", $i = \overline{1,6}$. Очевидно, они являются несовместными (2 грани не могут выпасть одновременно), равновозможными (кубик симметричен, с несмещенным центром тяжести) и образуют полную группу (какая-то одна грань должна выпасть). Иными словами, это элементарные исходы, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$. Рассмотрим событие A="выпало четное число очков". Очевидно, наступление события A эквивалетно наступлению одного из элементарных исходов $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, соответственно событие A рассматривается как множество всех благоприятных для него элементарных исходов $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$.

Вложение $A \subset B$ означает, что событие A влечет событие B. Действительно, если событие A происходит, то реализуется один из благоприятных для него элементарных исходов $\omega \in A$, но $A \subset B$, и таким образом, $\omega \in B$, а в таком случае осуществляется событие B.

Объединение множеств

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$$

[1] Это так называемая частотная интерпретация вероятности.

(множество всех ω из Ω, которые принадлежат одному из множеств A или B) называется **суммой событий** $A+B$. Иными словами, $A+B$ – это событие, состоящее в том, что реализуется какой-то элементарный исход, благоприятный какому-то из событий A или B (хотя бы одному), то есть во всяком случае одно из событий A или B происходит.

Пересечение множеств

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$$

называется **произведением событий** AB. Иными словами, AB – это событие, состоящее в том, что реализуется какой-то из элементарных исходов, благоприятных одновременно и событию A и событию B, то есть одновременно происходят оба события A и B.

Множество элементарных исходов Ω называется также **достоверным событием**. Таким образом, достоверное событие – это событие, которое заведомо произойдет в результате опыта.

Пустое множество $\emptyset$ (т.е. множество, не содержащее ни одного элемента) называется **невозможным событием**. Несовместность событий A и B можно записать следующим образом: $AB = \emptyset$.

Разность множеств

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

называется **отрицанием события** A. Иными словами, это событие, состоящее в том, что не происходит событие A.

Непосредственно из свойств операций над множествами следуют свойства операций над событиями. Укажем основные из них:
1) $A+B=B+A$; 2) $AB=BA$; 3) $A+\overline{A}=\Omega$; 4) $A\Omega=A$; 5) $AB\subset A$;
6) $A\overline{A}=\emptyset$; 7) $\overline{\overline{A}}=A$; 8) $A\setminus B=A\overline{B}$; 9) $(A+B)C=AC+BC$;
10) $AB+C=(A+C)(B+C)$; 11) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$; 12) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

Задача 6. Бросают две игральные кости. Заданы события: A="сумма очков равна 5", B="хотя бы на одной из костей выпало 1". Описать события AB и $A\setminus B=A\overline{B}$.

Решение. AB - событие, состоящее в том, что реализуются оба события A и B, то есть на одной кости выпало 1 и сумма очков равна 5. Иными словами, AB="на одной кости выпало 1, а на другой – 4".

$A\overline{B}$ – событие, состоящее в том, что ни на одной из костей не выпало 1 (отрицание B), а сумма очков равна 5. Иными словами, $A\overline{B}$="на одной кости выпало 2, а на другой - 3".

1.4. Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ – конечное множество элементарных исходов, из которых m благоприятны событию A, то есть $A=\{\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_m}\}$. В соответствии с определением элементарных исходов можно ожидать (и так оно

и есть на самом деле), что при неограниченном увеличении количества N опытов примерно в N/n из них будет происходить событие ω_{i_1}, и аналогично, примерно в $(mN)/n$ из них будет реализовываться один из исходов $\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_m}$, то есть событие A. Иными словами, $h_N(A)$ будет приближенно равно $(mN)/(nN)=m/n$. Тогда в силу статистической устойчивости получаем:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Эта формула принимается как классическое определение вероятности $P(A)$.

Пример 5. Предположим, опыт заключается в подбрасывании игральной кости, с гранями, пронумерованными от 1 до 6. Как установлено ранее, $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_6\}$, где ω_i ="выпало i очков", $i=\overline{1,6}$. Найдем вероятность события A="выпало четное число очков".

Очевидно, $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$. Таким образом, общее число элементарных исходов $n=6$, число благоприятных исходов $m=3$, следовательно,

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Свойства вероятности:

1) $P(A)\in[0,1]$, $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$;

2) если $A_iA_j=\emptyset$, $i,j=\overline{1,n}$, $i\neq j$, то $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$. В частности, если $AB=\emptyset$, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$;

3) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

4) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;
$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ и т.д.;

5) **если** $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$, $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$.

Задача 7. В ящике находится $a+b$ однотипных деталей, из которых b деталей с браком. Наудачу вынимается три детали. Какова вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна бракованная?

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Тогда его отрицание $\overline{A}$="все 3 выбранные детали исправны". Элементарными исходами являются упорядоченные наборы вида $\omega=\{d_1,d_2,d_3\}$, где d_i – деталь, вынутая i-й по счету, $i=\overline{1,3}$, а всего деталей $(a+b)$. Таким образом, элементарные исходы представляют собой размещения из $(a+b)$ деталей по три, а их количество равно $n=A^3_{a+b}$. Аналогично, элементарные исходы, благоприятные для события $\overline{A}$, представляют собой размещения из a исправных деталей по три, а их количество равно $m = A_a^3$. Тогда вероятность

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{A_a^3}{A_{a+b}^3} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{(a+b)\cdot(a+b-1)\cdot(a+b-2)}, \text{ и } P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Задача 8. Найти вероятность того, что при трех подбрасываниях игральной кости ни разу не выпадет четное число очков.

Решение. Обозначим A – интересующее нас событие, a_i – число очков, выпавших при i-м бросании, $i = \overline{1,3}$. Элементарными исходами являются упорядоченные наборы вида $\omega = \{a_1, a_2, a_3\}$, где каждое a_i может принимать шесть значений (от 1 до 6 очков), $i = \overline{1,3}$. Благоприятными для события A являются те из них, в которых каждое a_i – нечетно, то есть $a_i \in \{1,3,5\}$ и таким образом, может принимать три значения. По теореме 1, число элементарных исходов $n = 6\cdot 6\cdot 6 = 6^3$, а число благоприятных исходов $m = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3$. Тогда вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}.$$

Задача 9. В урне a белых шаров, b черных и c красных. Шары вынимают до тех пор, пока не появится белый шар. Найти вероятность того, что будет произведено 5 извлечений.

Решение. Обозначим B_i – шар, вынутый i-м по счету, $i = \overline{1,5}$. Элементарные исходы представляют собой упорядоченные наборы вида $\omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$, то есть являются размещениями из $(a+b+c)$ шаров по 5. Соответственно всего таких размещений $n = A_{a+b+c}^5$. Благоприятными для интересующего нас события A являются те из них, в которых шары $B_1, \ldots, B_4$ – не белые, а шар B_5 – белый. Тогда благоприятные исходы представляются в виде упорядоченных наборов $\{B, B_5\}$, где $B = \{B_1, \ldots, B_4\}$ – размещение из $(b+c)$ не белых шаров по 4, а всего таких размещений A_{b+c}^4, а B_5 может быть любым из a белых шаров. Отсюда по теореме 1 число благоприятных исходов равно $m = A_{b+c}^4 \cdot a$. Таким образом, вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a\cdot A_{b+c}^4}{A_{a+b+c}^5}.$$

Задача 10. Первенство по баскетболу оспаривают 18 команд, которые путем жеребьевки распределяются на 2 подгруппы по 9 команд в каждой. Пять команд из 18 являются лидирующими. Найти вероятность попадания трех лидирующих команд в одну подгруппу, а двух других – в другую.

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Возможны два варианта: 1) A_1="в первую подгруппу попали три лидирующих команды"(и следовательно, во вторую подгруппу – две лидирующих команды), либо наоборот, 2) A_2="в первую подгруппу попали две лидирующих команды"(и

следовательно, во вторую подгруппу – три лидирующих команды). Соответственно $A = A_1 + A_2$. Очевидно, что события A_1 и A_2 не могут произойти одновременно, то есть являются несовместными: $A_1A_2 = \emptyset$. Тогда $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Вычислим вероятность $P(A_1)$. Перенумеруем команды. Обозначим через $K_1, \ldots, K_9$ – номера команд, попавших в первую подгруппу. Конкретный состав первой подгруппы - это элементарный исход, то есть элементарные исходы представляют собой неупорядоченные наборы вида $\omega = \{K_1, \ldots K_9\}$, то есть сочетания из 18 команд по 9. Всего таких сочетаний $n = C_{18}^9$. Благоприятными для события A_1 являются те из них, в которых три команды лидирующие, а остальные шесть – аутсайдеры. При решении задачи 5 было установлено, что число таких наборов $m = C_5^3 \cdot C_{13}^6$. Поэтому вероятность

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3\cdot C_{13}^6}{C_{18}^9}. \quad \text{Аналогично, } P(A_2) = \frac{C_5^2\cdot C_{13}^7}{C_{18}^9}.$$

Таким образом,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_5^3\cdot C_{13}^6 + C_5^2\cdot C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

1.5. Геометрическое определение вероятности

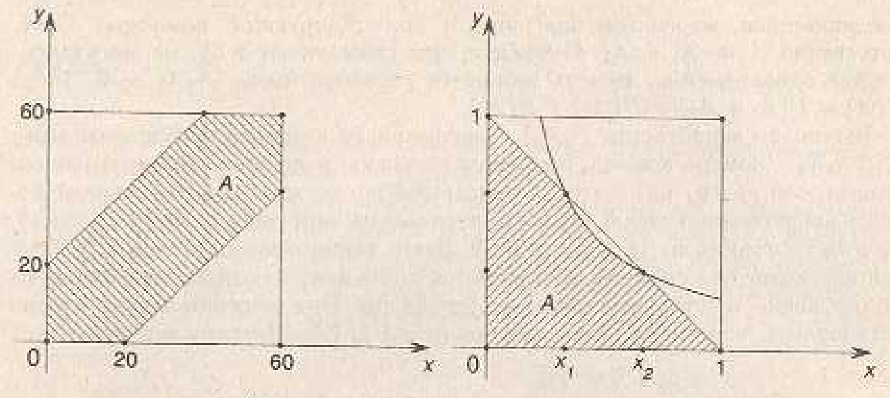
Предположим, возможно установление взаимно-однозначного соответствия между множеством элементарных исходов и некоторым множеством на прямой, на плоскости или в пространстве, которое также будем обозначать Ω. Событие $A \subset \Omega$ аналогичным образом отождествляется с подмножеством этого множества. Соответственно вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)},$$

где $\mathrm{mes}(A)$ – лебегова мера множества A, в частности, длина для множества на прямой, площадь – на плоскости, и объем – в пространстве.

Задача 11. Пусть в случайные моменты времени в период с 17 до 18 часов включаются передатчик и приемник и работают 20 минут. Какова вероятность, что переданное сообщение будет принято?

Решение. Обозначим x – время включения передатчика, а y – время включения приемника, отсчитываемые от 17 часов 00 минут, $x, y \in [0, 60]$. Очевидно, что сообщение будет принято в том и только в том случае, когда $|x - y| \le 20$. Таким образом, множество элементарных исходов Ω можно отождествить с квадратом $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in [0,60]\}$, а интересующее нас событие A – с множеством $\{(x,y) \in \Omega : |x - y| \le 20\}$ (см. рис. 1, a)). Площадь $S(\Omega) = 60\cdot 60 = 3600$, $S(A) = S(\Omega) - (40\cdot 40) = 3600 - 1600 = 2000$.



а) б)

Рис. 1

Соответственно вероятность

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

Задача 12. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел из $[0,1]$ окажется меньше либо равна 1, а произведение – не больше $2/9$.

Решение. Обозначим x, y – указанные числа. Тогда множество элементарных исходов можно отождествить с квадратом $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in [0,1]\}$, а интересующее нас событие A – с множеством $\{(x,y) \in \Omega : x + y \le 1, xy \le 2/9\}$. Очевидно, что $S(\Omega) = 1$. Вычислим $S(A)$. Найдем абсциссы точек пересечения прямой $x + y = 1$ и гиперболы $xy = 2/9$ (рис. 1, *б*)):

$$x(1-x) = 2/9 \Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$. Соответственно

$$S(A) = \int_0^{1/3} (1-x)dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9x}dx + \int_{2/3}^{1} (1-x)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2,$$

$P(A) = S(A)/S(\Omega) = S(A)$.

1.6. Условная вероятность и независимость событий

Пусть $P(B) \ne 0$. **Условной вероятностью** $P(A|B)$ (события A при условии B) называется вероятность события A, вычисленная при условии, что

событие B произошло. Условная вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

События A и B называются **независимыми**, если осуществление одного из них не влияет на вероятность другого, то есть $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Таким образом, если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 6. Обратимся еще раз к задаче 8. Решим ее другим способом. Определим события: A_i="при i-м подбрасывании выпало нечетное число очков", $i = \overline{1,3}$. Тогда интересующее нас событие $A = A_1A_2A_3$. Очевидно, что $P(A_i) = 0.5$, $i = \overline{1,3}$ (всего 6 элементарных исходов, благоприятных 3). Заметим, что события A_1A_2 и A_3, а также A_1 и A_2 являются независимыми. Тогда

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

1.7. Вероятность произведения событий

Непосредственно по определению условной вероятности,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A),$$

и по индукции,

$$P(A_1A_2 \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1A_2 \cdot A_{n-1}).$$

Соответственно события $A_1, \ldots A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если $\forall\, 1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n$, $k = \overline{2,n}$,

$$P\left(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Задача 13. На семи карточках написаны буквы, образующие слово "СОЛОВЕЙ". Наудачу вынимаются по одной три карточки и выкладываются слева направо. Найти вероятность того, что получится слово "ВОЛ".

Решение. Определим события: A_1="первая буква – В", A_2="вторая буква – О", A_3="третья буква – Л". Тогда интересующее нас событие $A = A_1A_2A_3$;

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2).$$

Очевидно, что $P(A_1) = 1/7$ (всего букв $n = 7$, благоприятных $m = 1$); $P(A_2|A_1) = 2/6$ (предполагается, что событие A_1 произошло, то есть всего

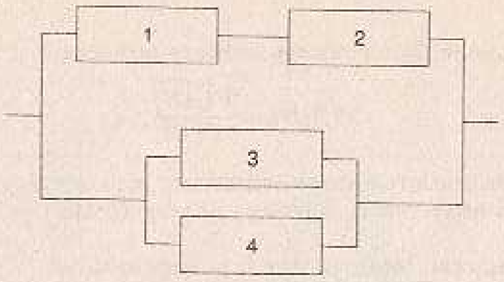


Рис. 2

букв стало на одну меньше, и буквы "В"уже нет, $n = 6$, и имеется две буквы "О": $m = 2$); $P(A_3|A_1A_2) = 1/5$ (события A_1 и A_2 произошли, то есть стало меньше на две буквы: "В"и "О", $n = 5$, $m = 1$). Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{105}.$$

Задача 14. Стрелок делает по мишени три выстрела, и с каждого выстрела попадает независимо от результата остальных с вероятностями соответственно p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что он не попадет ни разу.

Решение. Обозначим: A_i="i-й выстрел попал в цель", $i = \overline{1,3}$. Тогда $A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i$, $i = \overline{1,3}$. Поскольку события A_i независимы, то независимы и их отрицания, следовательно,

$$P(A) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3).$$

Задача 15. Система управления состоит из четырех узлов (рис. 2). Вероятности безотказной работы каждого из узлов равны соответственно $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.8$, $p_4 = 0.9$. Отказы происходят независимо. Вычислить вероятность безотказной работы системы управления.

Решение. Обозначим A – интересующее нас событие, A_i="i-й узел работает безотказно", $i = \overline{1,4}$, A_{12}="участок из узлов 1,2 работает безотказно", A_{34}="участок из узлов 3,4 работает безотказно". Заметим, что система не работает, если не работают оба участка, то есть $\overline{A} = \overline{A_{12}}\,\overline{A_{34}}$. Участок 12 работает, если работают оба узла 1 и 2, то есть $A_{12} = A_1A_2$; участок 34 не работает, если не работают оба узла 3 и 4, то есть $\overline{A_{34}} = \overline{A_3}\,\overline{A_4}$. Поскольку события A_i независимы, то

$$P(A_{12}) = P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = p_1p_2, \quad P(\overline{A_{12}}) = 1 - P(A_{12}) = 1 - p_1p_2,$$

$$P(\overline{A_{34}}) = P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4}) = (1-p_3)(1-p_4); \quad P(\overline{A}) = P(\overline{A_{12}})\cdot P(\overline{A_{34}}),$$

и таким образом,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1-p_1p_2)(1-p_3)(1-p_4) = 1 - 0.58\cdot 0.2\cdot 0.1 = 0.9884.$$

1.8. Формула полной вероятности

Если по условиям опыта можно сделать n исключающих друг друга гипотез $H_1, \ldots, H_n$, и событие A может произойти только в том случае, когда реализуется одна из этих гипотез, то справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i).$$

Задача 16. Известно, что в ящике находится 70% деталей, произведенных на первом станке; 20% деталей, произведенных на втором станке, и 10% деталей, произведенных на третьем станке, причем первый станок дает 0.3% брака, второй – 1.5%, и третий – 2.5%. Наудачу вынимается одна деталь из ящика. Какова вероятность, что она окажется бракованной?

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Выдвинем следующие три исключающие друг друга гипотезы: H_i="выбранная деталь произведена на i-м станке", $i = \overline{1,3}$. Предположим, всего деталей n. Поскольку на первом станке произведено 70% деталей, то рассматривая выбор каждой конкретной детали как элементарный исход, получаем, что благоприятных для H_1 элементарных исходов $m = 0.7n$. Соответственно $P(H_1) = m/n = 0.7$. Аналогично, $P(H_2) = 0.2$, $P(H_3) = 0.1$. Предположим, деталь произведена на первом станке. Тогда вероятность того, что она бракованная, то есть $P(A|H_1)$ равна 0.003. Аналогично, $P(A|H_2) = 0.015$, $P(A|H_3) = 0.025$. Тогда по формуле полной вероятности,

$$P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + P(A|H_3)\cdot P(H_3),$$

то есть

$$P(A) = 0.003\cdot 0.7 + 0.015\cdot 0.2 + 0.025\cdot 0.1 = 0.0076.$$

1.9. Формула Байеса

Предположим опять, что по условиям опыта можно сделать n исключающих друг друга гипотез $H_1, \ldots, H_n$, и событие A может произойти только в том случае, когда реализуется одна из этих гипотез. Тогда, если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, $i = \overline{1,n}$, и в результате опыта произошло событие A, то с учетом этого события "новые", то есть условные вероятности гипотез, вычисляются по формуле Байеса:

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Задача 17. Пусть имеют место условия задачи 16. Из ящика вынута деталь, и она оказалась бракованной. На каком станке она вероятнее всего была произведена?

Решение. При решении задачи 16 было установлено, что $P(H_1) = 0.7$, $P(H_2) = 0.2$, $P(H_3) = 0.1$, $P(A|H_1) = 0.003$, $P(A|H_2) = 0.015$, $P(A|H_3) = 0.025$, $P(A) = 0.0076$. По формуле Байеса, вероятность того, что деталь, оказавшаяся бракованной (состоялось событие A), была произведена на первом станке, равна

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.003 \cdot 0.7}{0.0076} = 0.276316.$$

Аналогично,

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.015 \cdot 0.2}{0.0076} = 0.394737,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.025 \cdot 0.1}{0.0076} = 0.328947,$$

или

$$P(H_3|A) = 1 - P(H_1|A) - P(H_2|A) = 1 - 0.276316 - 0.394737 = 0.328947.$$

Сравнивая вероятности, заключаем, что деталь вероятнее всего была произведена на втором станке.

1.10. Последовательные испытания. Схема Бернулли

Последовательные испытания – это последовательное проведение n раз одного и того же опыта или одновременное проведение n одинаковых опытов.

Говорят, что последовательные испытания удовлетворяют схеме Бернулли, если выполняются три условия:

1) при каждом испытании различают лишь два исхода: событие A, трактуемое как успех (A произошло), и его отрицание $\overline{A}$, трактуемое как неудача (A не произошло);

2) испытания являются независимыми, то есть $P(A)$ в k-м испытании не зависит от исходов ни одного из испытаний до k-го;

3) в каждом испытании вероятность успеха одна и та же: $P(A) = p = \text{const}$.

Вероятность неудачи в каждом испытании обозначают обычно буквой q, то есть $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Вероятность того, что из n испытаний по схеме Бернулли в k испытаниях произойдет успех, обозначают $P_n(k)$. Вероятность того, что из n испытаний по схеме Бернулли успех произойдет не менее l раз и не более m раз, обозначают $P_n(l, m)$. В условиях схемы Бернулли справедливы формулы:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$P_n(l, m) = \sum_{k=l}^{m} P_n(k) = \sum_{k=l}^{m} C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$P_n(l, m) = 1 - \sum_{k=0}^{l-1} P_n(k) - \sum_{k=m+1}^{n} P_n(k) = 1 - \sum_{k=0}^{l-1} C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$P_n(1, n) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n.$$

Задача 18. Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Определить вероятность выпадения герба не более пяти раз.

Решение. Имеем последовательное проведение 10 раз одного опыта (подбрасывание монеты), вероятность выпадения герба ("успеха") в каждом опыте не зависит от исхода других опытов и равна $p = 0.5$. Соответственно $q = 1 - p = 0.5$. Таким образом, имеем схему Бернулли. Искомая вероятность

$$P_{10}(0, 5) = \sum_{k=0}^{5} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{1}{1024}\left(C_{10}^0 + \ldots + C_{10}^5\right) = \frac{638}{1024}.$$

Задача 19. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0.3 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность того, что в день поступит хотя бы одна заявка.

Решение. Поступление или непоступление заявки можно рассматривать как одно испытание по схеме Бернулли. Вероятность успеха $p = 0.3$, вероятность неудачи $q = 1 - p = 0.7$. Искомая вероятность

$$P_{10}(1, 10) = 1 - q^{10} = 1 - 0.7^{10} = 0.9718.$$

Задача 20. Известно, что на 200 лотерейных билетов приходится 1 выигрышный. Сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша была не менее 95%?

Решение. Пусть весь тираж лотереи равен N, а число билетов, которые необходимо купить, равно n. Естественно предположить, что N много больше n. Тогда можем считать, что каждый билет выигрывает независимо от остальных с вероятностью $p = 1/200 = 0.005$, то есть находимся в условиях схемы Бернулли, $q = 1 - p = 0.995$. Тогда вероятность выиграть хотя бы на 1 билет равна $P_n(1, n) = 1 - q^n$ и должна быть больше либо равна 0.95, или

$$q^n \le 1 - 0.95 = 0.05, \text{ или } n \ge \frac{\ln 0.05}{\ln 0.995} = 597.6473\ldots,$$

то есть необходимо купить как минимум 598 билетов.

1.11. Приближенные формулы для схемы Бернулли

При больших значениях числа n испытаний по схеме Бернулли применение формул п.1.11 затруднительно в вычислительном плане. В этом случае используют одну из приведенных далее приближенных формул (в каждой из них предполагается, что n велико):

1. Если число $\lambda = np$ достаточно мало (а следовательно, мала и вероятность успеха p), то справедлива формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Аналогично, если число $\lambda' = nq$ достаточно мало, то для вероятности того, что число неудач по схеме Бернулли равно k, справедлива формула

$$P_n'(k) \approx P(k;\lambda') = \frac{(\lambda')^k}{k!}e^{-\lambda'}, \quad k = \overline{0,n};$$

соответственно

$$P_n(k) \approx P(n-k;\lambda') = \frac{(\lambda')^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda'}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Примечание. Совокупность вероятностей $P(k;\lambda)$, $k = 0, 1, \ldots$, называется распределением Пуассона. Для него существуют специальные таблицы (см. табл. 1 в приложении), которыми и пользуются на практике.

2. Если вероятности успеха p и q неудачи велики, то справедлива локальная формула Муавра-Лапласа (стандартное нормальное приближение):

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(k) \approx \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad \text{где} \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Примечание. Функцию $\varphi(x)$ называют функцией Гаусса. Для нее существуют специальные таблицы (см. табл. 3 в приложении), которыми и пользуются на практике.

3. Если вероятности успеха p и q неудачи велики, то справедлива интегральная формула Муавра-Лапласа:

$$P_n(l,m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \quad \text{где}$$

$$x_1 = \frac{l-np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt, \quad \Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)dt.$$

Примечание. Функцию $\Phi(x)$ называют функцией стандартного нормального распределения, а функцию $\Phi_0(x)$ – интегралом Лапласа. Для них существуют специальные таблицы (см. табл. 2 в приложении), которыми и пользуются на практике.

Рекомендации по применению приближенных формул.

1. Если $n = \overline{10,20}$, то приближенные формулы используются для грубых, прикидочных расчетов. Формулу Пуассона применяют, когда $\lambda \in [0,2]$ или

$\lambda' \in [0,2]$ при $n = 10$ и соответственно, $\lambda \in [0,3]$ или $\lambda' \in [0,3]$ при $n = 20$. Иначе используют формулы Муавра-Лапласа.

2. При $n = \overline{20,100}$ приближенные формулы можно применять для прикладных инженерных расчетов, в частности, при $n = 100$ формулу Пуассона используют, когда $\lambda \in [0,7]$ или $\lambda' \in [0,7]$ (иначе пользуются формулами Муавра-Лапласа).

3. Если $n = \overline{100,1000}$, то практически при любых инженерных расчетах можно применять приближенные формулы, в частности, при $n = 1000$ формулу Пуассона используют, когда $\lambda \in [0,15]$ или $\lambda' \in [0,15]$.

4. При $n > 1000$ даже специальные таблицы рассчитываются с помощью приближенных формул (но применяются специальные поправки для увеличения точности); формулу Пуассона используют, когда $\lambda \in [0,\alpha(n)]$ или $\lambda' \in [0,\alpha(n)]$, где $\alpha(1000) = 15$ и $\alpha(n) \nearrow$.

Задача 21. Вероятность выпуска бракованного сверла $p = 0.005$. Сверла упаковываются в коробки по 100 штук. Какова вероятность того, что в коробке, выбранной наудачу, окажется не более одного бракованного сверла?

Решение. Имеем схему Бернулли при $n = 100$, $p = 0.005$, $l = 0$, $m = 1$, $\lambda = np = 100\cdot 0.005 = 0.5$. Поскольку $n = 100$, $\lambda \in [0,7]$, то в соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся формулой Пуассона. Искомая вероятность

$$P_{100}(0,1) = P_{100}(0) + P_{100}(1) \approx P(0;0.5) + P(1;0.5).$$

По табл. 1 из приложения находим: $P(0;0.5) = 0.60653$, $P(1;0.5) = 0.30327$. Таким образом, $P_{100}(0,1) \approx 0.9098$.

Задача 22. Электронный прибор состоит из 2500 элементов. Вероятность отказа одного элемента за год $p = 0.0008$. Найти вероятность того, что в течение года откажут не менее трех элементов.

Решение. Имеем схему Бернулли при $n = 2500$, $p = 0.0008$, $l = 3$, $m = 2500$, $\lambda = np = 2500\cdot 0.0008 = 2$. Поскольку

$$n = 2500, \quad \lambda \in [0,15] \subset [0,\alpha(2500)],$$

то в соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся формулой Пуассона. Искомая вероятность

$$P_{2500}(3,2500) = 1 - P_{2500}(0) - P_{2500}(1) - P_{2500}(2),$$

откуда

$$P_{2500}(3,2500) \approx 1 - P(0;2) - P(1;2) - P(2;2).$$

По табл. 1 находим:

$$P(0;2) = 0.13534, \quad P(1;2) = 0.27067, \quad P(2;2) = 0.27067.$$

Таким образом, $P_{2500}(3,2500) \approx 0.3233$.

Задача 23. Два человека заключают пари о том, что при 150 подбрасываниях симметричной монеты герб выпадет ровно 75 раз. Какое соотношение ставок следует считать справедливым?

Решение. Пусть первый игрок ставит на то, что указанное событие A произойдет, а другой – на то, что не произойдет. Тогда если z – сумма ставок, x – ставка первого игрока, а y – ставка второго игрока, то соотношение ставок следует считать справедливым, если $x = P(A) \cdot z$, $y = (1 - P(A)) \cdot z$. Найдем $P(A)$.

Имеем схему Бернулли при $n = 150$, $p = q = 0.5$, $\lambda = np = 150 \cdot 0.5 = 75$, $k = 75$. Искомая вероятность $P(A) = P_{150}(75)$. В соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся локальной формулой Муавра-Лапласа:

$$P_{150}(75) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{37.5}} = \frac{\varphi(x)}{6.1237},$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 75}{\sqrt{37.5}} = 0.$$

По табл. 3 (см. приложение) находим, что $\varphi(x) \approx 0.39894$. Таким образом, $P_{150}(75) \approx 0.0651$.

Задача 24. При социологическом опросе каждый человек может дать неискренний ответ независимо от других с вероятностью 0.2. Какова вероятность того, что из 500 опрошенных не более 75 дадут неискренний ответ?

Решение. Имеем схему Бернулли при $n = 500$, $p = 0.2$, $q = 1 - p = 0.8$, $l = 0$, $m = 75$, $\lambda = np = 500 \cdot 0.2 = 100$. В соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся интегральной формулой Муавра-Лапласа:

$$P_{500}(0, 75) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

$$x_1 = \frac{l - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-100}{\sqrt{80}} = -11.18, \quad x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100}{\sqrt{80}} = -2.8.$$

По табл. 2 (см. приложение) находим $\Phi_0(x_1) = -\Phi_0(11.18) = -0.5$, $\Phi_0(x_2) = -\Phi_0(2.8) = -0.49745$. Таким образом, $P_{500}(0, 75) \approx 0.0025$.

1.12. Случайные величины и их распределения

Функция $X(\omega)$, определенная на множестве элементарных исходов Ω, называется случайной величиной (с.в.), если для каждого события вида

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbf{R},$$

вероятность $P(X < x)$ имеет смысл.

В частности, если множество Ω конечно или счетно (то есть его элементы можно перенумеровать), то любая функция элементарных исходов является с.в.

Пример 7. В опыте с однократным выбрасыванием игральной кости число X выпавших очков является с.в.. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, ω_i–"выпадение i очков", $X(\omega_i) = i$, $i = \overline{1,6}$.

Любое правило, позволяющее вычислить вероятность того, что с.в. X примет значение из некоторого подмножества множества ее значений E_X, называется законом распределения вероятностей (или просто распределением) с.в. X.

Закон распределения с.в. может быть задан, в частности, с помощью **функции распределения** $F(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Свойства функции распределения:

1) $F(x) \in [0, 1]$, $\forall x \in \mathbf{R}$;
2) $F(x_1) \leq F(x_2)$, $\forall x_1 \leq x_2$;
3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4) $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;
5) $F(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ (непрерывность слева).

Можно показать, что любая неубывающая и непрерывная слева функция, обладающая свойством 3), является функцией распределения некоторой с.в. X.

1.13. Дискретные случайные величины

Случайная величина X называется дискретной, если дискретно (то есть конечно или счетно) множество ее значений E_X.

Пусть $E_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $P(X = x_i) = p_i$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда закон распределения с.в. X можно задать с помощью таблицы, которая называется рядом распределения с.в.:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Соответственно функция распределения:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3, \\ \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} p_i, & x_{m-1} < x \leq x_m, \quad m = \overline{2,n} \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Задача 25. Игральную кость бросают один раз. Если выпало четное число очков, игрок выигрывает \$10, если нечетное, но меньше пяти, проигрывает \$2, если выпало пять очков, проигрывает \$20. Найти распределение величины выигрыша X.

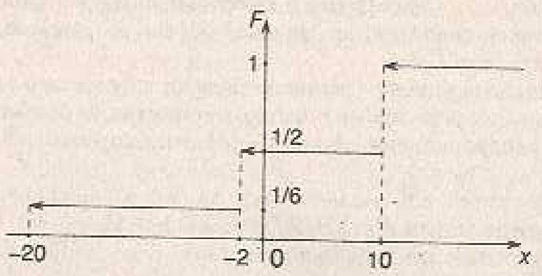


Рис. 3

Решение. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$, $P(\omega_i) = 1/6$, $i = \overline{1,6}$, $E_X = \{-20, -2, 10\}$. Заметим, что $\{X = 10\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\{X = -2\} = \{\omega_1, \omega_3\}$, $\{X = -20\} = \{\omega_5\}$. Тогда $P(X = -20) = 1/6$, $P(X = -2) = 2/6 = 1/3$, $P(X = 10) = 3/6 = 1/2$. Соответственно ряд распределения:

X	-20	-2	10
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Функция распределения (рис. 3):

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -20, \\ p_1 = \frac{1}{6}, & -20 < x \le -2, \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, & -2 < x \le 10, \\ p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1, & x > 10. \end{cases}$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся распределения дискретных с.в.

1. **Биномиальное распределение**. Говорят, что дискретная с.в. X распределена по биномиальному закону, если она принимает значения из набора $\overline{0,n}$ с вероятностями

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}, \quad p, q \in (0,1) \quad q = 1 - p.$$

Фактически это число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли.

2. **Распределение Пуассона**. Говорят, что дискретная с.в. X распределена по закону Пуассона, если она принимает значения $k = 0, 1, \dots, n, \dots$ с вероятностями

$$P(X = k) = P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots, \quad \lambda > 0.$$

В некотором смысле это тоже распределение числа успехов в испытаниях по схеме Бернулли, но при неограниченно большом количестве испытаний и малой вероятности успеха при одном испытании (закон редких событий).

3. **Геометрическое распределение**. Говорят, что дискретная с.в. X распределена по геометрическому закону, если она принимает значения $k = 0, 1, \dots, n, \dots$ с вероятностями

$$P(X = k) = pq^k; \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots, \quad p, q \in (0,1) \quad q = 1 - p.$$

Это распределение количества (неудачных) испытаний по схеме Бернулли, проведенных до первого успеха.

Задача 26. Найти распределение числа гербов X, выпавших при четырех бросаниях симметричной монеты.

Решение. Имеем схему Бернулли при $n = 4$, $p = q = 0.5$; X - число успехов (выпадение герба). Соответственно $E_X = \{0, \dots, 4\}$,

$$P(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \frac{1}{16} C_4^k, \quad k = \overline{0,4},$$

то есть имеет место биномиальное распределение. Ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Задача 27. Известно, что количество звонков, поступивших в течение часа на телефонную станцию, подчиняется распределению Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Какова вероятность, что в течение часа позвонит 1 или 2 абонента?

Решение. Пусть X - число звонков, поступивших в течение часа на телефонную станцию. По условию,

$$P(X = k) = P(k; 3) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots$$

Пусть A - интересующее нас событие. Тогда

$$P(A) = P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = P(1; 3) + P(2; 3).$$

По табл. 1 (см. приложение) находим: $P(1; 3) = 0.14936$, $P(2; 3) = 0.22404$, и таким образом, $P(A) = 0.3734$.

Задача 28. Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли, $p \in (0,1)$ - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$, X - число испытаний, которые пришлось провести до первого успеха. Тогда $X \in \overline{0, +\infty}$. При этом $X = 0$, если первое же испытание оказалось успешным, откуда $P(X = 0) = p$. Пусть A="испытание завершилось успешно". Тогда элементарные исходы имеют вид $\omega_k = \underbrace{\overline{A}\,\overline{A} \dots \overline{A}}_{k \text{ раз}} A$. Соответственно $X(\omega_k) = k$. Поскольку испытания независимы, то

$$P(X = k) = P(\omega_k) = P(\overline{A})^k P(A) = q^k p,$$

то есть X подчиняется геометрическому распределению.

Задача 29. Монету бросают до первого появления герба, X – количество раз, которое выпала решка до первого появления герба. Найти распределение X.

Решение. Находимся в условиях задачи 28 при $p = q = 0.5$ (вероятность выпадения герба или решки). Тогда

$$P(X = k) = q^k p = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Ряд распределения:

X	0	1	2	3	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…

1.14. Непрерывные случайные величины

Если существует неотрицательная интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция $f(t)$ такая, что функция распределения $F(x)$ с.в. X представляется в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

то функция $f(t)$ называется плотностью распределения с.в. X, и поскольку функция распределения $F(x)$ в этом случае непрерывна, то и с.в. X называется непрерывной.

Свойства плотности распределения:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$;

2) если $F(x)$ дифференцируема, то $F'(x) = f(x)$;

3) $P(x_1 \le X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся распределения непрерывных с.в.:

1. **Равномерное распределение** – распределение, определяемое плотностью:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & t \notin [a, b]. \end{cases}$$

2. **Показательное распределение** – распределение, определяемое плотностью

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. **Нормальное распределение** с параметрами $\{m, \sigma\}$ – распределение, определяемое плотностью:

$$f(t) = \varphi_{m,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

При $m = 0$, $\sigma = 1$ – это так называемое стандартное нормальное распределение, плотностью которого является уже встречавшаяся ранее функция Гаусса

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Можно показать, что при произвольных значениях параметров m, σ для функции нормального распределения справедлива формула

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

– интеграл Лапласа (см. табл. 2 в приложении).

Задача 30. Однородная проволока длиной 1 метр растягивается за концы и рвется. Найти распределение расстояния X от точки разрыва до левого конца проволоки.

Решение. Отождествим множество элементарных исходов Ω с отрезком $[0, 1]$. Тогда событие $A = \{x_1 \le X < x_2\}$ отождествляется с полуинтервалом $[x_1, x_2) \subset [0, 1]$. В соответствии с геометрическим определением вероятности имеем:

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = P(A) = \frac{x_2 - x_1}{1 - 0} = x_2 - x_1 = F(x_2) - F(x_1),$$

откуда заключаем, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Эта функция имеет плотность распределения

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Таким образом, с.в. X подчиняется равномерному распределению при $a = 0$, $b = 1$.

Задача 31. Время ожидания некоторого события A распределено по показательному закону с параметром $\lambda > 0$. К моменту времени t_0 событие

A не произошло. Найти вероятность того, что от момента времени t_0 ждать осуществления события A придется не меньшее время, чем Δt.

Решение. Пусть X – время ожидания A с самого начального момента времени. По условию, X подчиняется показательному закону, и таким образом,

$$P(X \geq t) = 1 - P(X < t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0.$$

Нам требуется вычислить условную вероятность

$$P(X \geq t_0 + \Delta t | X \geq t_0) = \frac{P(X \geq t_0 + \Delta t)}{P(X \geq t_0)} = \frac{e^{-\lambda(t_0+\Delta t)}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Замечание. Таким образом, в условиях задачи информация о том, что событие не наступило к данному моменту времени t_0, не повышает шансы его наступления в дальнейшем. Таким свойством (называемым отсутствием последействия) обладает только показательное распределение.

Задача 32. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 20$, $\sigma = 30$. Найти вероятность попадания с.в. X в отрезок $[10, 70]$.

Решение. Поскольку распределение непрерывно, то

$$P(10 \leq X \leq 70) = P(10 \leq X < 70) = \Phi_{m=20,\sigma=30}(70) - \Phi_{m=20,\sigma=30}(10),$$

откуда

$$P(10 \leq X \leq 70) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{10-20}{30} = -\frac{1}{3} \approx -0.33, \quad x_2 = \frac{70-20}{30} = \frac{5}{3} \approx 1.66.$$

По табл. 2 из приложения находим:

$$\Phi_0(x_1) = -\Phi_0(0.33) = -0.12930, \quad \Phi_0(x_2) = \Phi_0(1.66) = 0.45154,$$

и таким образом, $P(10 \leq X \leq 70) \approx 0.58084$.

Задача 33. Определить, при каком значении параметров α и β функция

$$F(x) = \alpha \cdot \mathrm{arctg} x + \beta$$

является функцией распределения непрерывной с.в. X. Найти плотность распределения $f(x)$ и вычислить вероятность $P(1 \leq X < \sqrt{3})$.

Решение. 1. По свойствам функции распределения

$$0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha \cdot \mathrm{arctg} x + \beta) = \alpha \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \beta,$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha \cdot \mathrm{arctg} x + \beta) = \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \beta = 0, \\ \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta = 1, \end{cases}$$

получаем: $\beta = 1/2$, $\alpha = 1/\pi$.

2. По свойствам плотности распределения

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg} x + \frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

3. По свойствам функции распределения

$$P(1 \leq X < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(1) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \mathrm{arctg}1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12}.$$

Задача 34. Дана плотность распределения некоторой с.в. X

$$f(x) = \begin{cases} C/(x^2-1), & x > 2; \\ 0, & x \leq 2. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения $F(x)$ и $P(0 \leq X < 5)$.

Решение. 1. По свойствам плотности распределения

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{Cdx}{x^2-1} = \frac{C}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{C}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right)\Big|_2^{+\infty} = \frac{C}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^b =$$

$$= \frac{C}{2}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{C\ln 3}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{\ln 3}.$$

2. По определению плотности распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

откуда при $x \leq 2$ $F(x) = 0$, и при $x > 2$

$$F(x) = \frac{2}{\ln 3}\int_2^x \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^x = \frac{1}{\ln 3}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right),$$

и таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 3} \ln \frac{3(x-1)}{x+1}, & x > 2; \\ 0, & x \leq 2. \end{cases}$$

3. По определению функции распределения

$$P(0 \leq X < 5) = F(5) - F(0) = F(5) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

1.15. Числовые характеристики случайных величин

1. **Математическое ожидание**

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной с.в. X, принимающей значения x_i, $i \in J$, с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$, $i \in J$, называется сумма

$$M(X) = \sum_{i \in J} x_i p_i$$

(если справа – числовой ряд, а не конечная сумма, то предполагается, что он сходится абсолютно).

Математическим ожиданием (средним значением) непрерывной с.в. X с плотностью распределения $f(x)$ называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

(предполагается, что этот несобственный интеграл сходится абсолютно, в противном случае считается, что $M(X)$ не существует).

Примечание. При неограниченном увеличении числа испытаний среднее арифметическое всех значений, принятых с.в. X в этих испытаниях, стремится к $M(X)$.

Свойства математического ожидания:

1) если $P(X = c) = 1$, то $M(X) = c$;
2) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\forall$ с.в. X: $M(aX + b) = aM(X) + b$;
3) $\forall$ с.в. X, Y: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4) если с.в. X и Y независимы, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$;
5) если $X \geq 0$, то $M(X) \geq 0$;
6) если $X \geq Y$, то $M(X) \geq M(Y)$;
7) $\forall$ с.в. X: $|M(X)| \leq M(|x|)$.

Две с.в. могут иметь одинаковые средние значения, но их возможные значения могут быть по-разному разбросаны вокруг средних значений. Разброс значений с.в. характеризует дисперсия.

2. **Дисперсия**

Дисперсией с.в. X называется число

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Соответственно если X – дискретная с.в., то

$$D(X) = \sum_{i \in J} (x_i - M(X))^2 p_i;$$

если X – непрерывная с.в., то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

На практике для вычисления дисперсии используется более простая формула:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Если X – дискретная с.в., то

$$M(X^2) = \sum_{i \in J} (x_i)^2 p_i;$$

если X – непрерывная с.в., то

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называется **средним квадратичным отклонением** с.в. X. При неограниченном увеличении количества испытаний большинство значений, принимаемых случайной величиной, попадает в интервал $(M(X) - \sigma(X), M(X) + \sigma(X))$.

Свойства дисперсии:

1) если $P(X = c) = 1$, то $D(X) = 0$;
2) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\forall$ с.в. X: $D(aX + b) = a^2 D(X)$;
3) $\forall$ независимых с.в. X, Y: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Числовые характеристики для основных распределений

1. **Биномиальное распределение**:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

2. **Распределение Пуассона**:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M(X) = D(X) = \lambda.$$

3. **Геометрическое распределение**:

$$P(X = k) = q^k p, \quad M(X) = q/p, \quad D(X) = q/p^2.$$

4. **Равномерное распределение**:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}, \quad M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. **Показательное распределение**:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6. **Нормальное распределение**:

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad M(X) = m, \quad D(X) = \sigma^2.$$

Задача 35. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна 0.00248. Известно, что число вызовов X имеет распределение Пуассона. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Найдем параметр λ распределения Пуассона. По условию,

$$P(X = 0) = P(0; \lambda) = 0.00248.$$

По табл. 1 из приложения имеем: $\lambda = 6$. Отсюда $M(X) = D(X) = \lambda = 6$. Таким образом, в среднем в течение часа поступает $6 \pm \sqrt{6}$ вызовов.

Задача 36. Из хорошо перетасованной колоды карт слева направо последовательно выкладываются карты лицевой стороной вверх. На карты первой колоды аналогично кладут карты второй колоды. Найти среднее число совпадений верхней и нижней колоды.

Решение. Пусть n – число карт в колоде. Число совпадений $X = X_1 + \ldots + X_n$, где

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я пара совпала,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для i-й пары элементарные исходы имеют вид $\{K_1, K_2\}$ (произвольная пара карт из 1-й и 2-й колоды) – всего $n \times n = n^2$ вариантов; благоприятные исходы: $\{K_1, K_1\}$ (карты совпадают) – всего n вариантов. Тогда

$$P(X_i = 1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

откуда

$$M(X_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0 \cdot \frac{n-1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n};$$

$$M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_n) = \frac{n}{n} = 1.$$

Таким образом, в среднем будет одно совпадение.

Задача 37. По заданному закону распределения с.в. X для с.в. $Y = 3X+5$ найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$

X	-2	0	3	5
P	0.3	0.1	?	0.4

Решение. Имеем ряд распределения с.в. X при $n = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = ?$, $p_4 = 0.4$. Поскольку должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

то $p_3 = 0.2$. По определению,

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (-2) \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.4 = 2,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 4 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.2 + 25 \cdot 0.4 = 13,$$

следовательно,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 13 - 2^2 = 13 - 4 = 9.$$

По свойствам математического ожидания и дисперсии получаем:

$$M(Y) = M(3X + 5) = 3M(X) + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11,$$

$$D(Y) = D(3X + 5) = 3^2 D(X) = 9 \cdot 9 = 81, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{81} = 9.$$

Задача 38. Плотность распределения с.в. X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^9}, & x > 1; \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Решение. По определению,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 8 \cdot \int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^9} dx = 8 \cdot \int_{1}^{+\infty} x^{-8} dx = \frac{-8}{7} x^{-7} \Big|_1^{+\infty} = \frac{8}{7},$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 8 \cdot \int_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^9} dx = 8 \cdot \int_{1}^{+\infty} x^{-7} dx = \frac{-8}{6} x^{-6} \Big|_1^{+\infty} = \frac{4}{3},$$

следовательно,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{4}{3} - \frac{64}{49} = \frac{196 - 192}{3 \cdot 49} = \frac{4}{147},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{2}{7\sqrt{3}}.$$

Примечание. В условиях задачи 34 $M(X)$ (а тем более $M(X^2)$ и $D(X)$) не существуют:

$$M(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = C \cdot \int_{2}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2-1} =$$

$$= \frac{C}{2} \cdot \int_{2}^{+\infty} \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{C}{2} \cdot \ln|x^2-1| \Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика (МС) – это раздел математики, который изучает так называемые обратные задачи по отношению к задачам теории вероятностей.

Предположим, имеются данные наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ за некоторой с.в. X, функция распределений $F(x)$ которой неизвестна. МС, в частности, разрабатывает методы, позволяющие по этим данным приближенно восстановить $F(x)$.

2.1. Основные определения

Вся подлежащая изучению совокупность объектов или всех возможных наблюдений называется **генеральной совокупностью**.

Та часть объектов, которая отобрана из генеральной совокупности для непосредственного изучения, или результаты произведенных наблюдений, которые трактуются как значения некоторых с.в. $X_1, \ldots, X_n$, называется **выборкой**. Число n объектов в выборке называется *объемом выборки*.

Основной метод МС – исследование генеральной совокупности с помощью выборки. Однако для этого выборка должна быть **репрезентативной** (представительной), то есть должна сохранять пропорции генеральной совокупности.

Пример 8. Предположим, генеральная совокупность – это некоторый большой набор однотипных деталей, из которых M исправных и N неисправных; выборка содержит m исправных и n неисправных деталей. Если $N/M = n/m$, то выборка репрезентативна (причем идеально). Во всяком случае N/M и n/m не должны сильно отличаться.

Простейший способ построения репрезентативной выборки – это так называемая **собственно случайная выборка** с **повторным отбором**, получаемая путем случайного выбора элементов без расчленения их на типы и группы, с возвращением каждого обследованного объекта выборки в генеральную совокупность.

Ограничимся только этим простейшим случаем. Тогда определение выборки можно конкретизировать следующим образом.

Случайной выборкой объема n, отвечающей с.в. X с функцией распределения $F(x)$, называется набор n независимых с.в. $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет распределение $F(x)$. При этом $F(x)$ называется теоретической функцией распределения.

Примечание. Практически можно считать, что n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ – это n независимых измерений, проведенных при одинаковых условиях.

2.2. Эмпирическая функция распределения

Функция, ставящая в соответствие $\forall x \in \mathbf{R}$ некоторую случайную величину $F(x) = F(x)[\omega]$, $\omega \in \Omega$, называется **случайной функцией**.

Эмпирической функцией распределения (э.ф.р.) для выборки $X_1, \ldots, X_n$ называется случайная функция

$$F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}, \quad \text{где } \mu_n(x) \text{ – число всех } X_i < x.$$

Примечание. При конкретной реализации выборки $x_1, \ldots, x_n$ $F_n(x)$ – функция действительного переменного.

Говорят, что случайная функция $F_n(x)$ сходится по вероятности к функции $F(x)$, то есть $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$, если

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\{|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\} = 1, \quad \text{точнее,}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \in \Omega : |F_n(x)[\omega] - F(x)| < \varepsilon\} = 1;$$

иными словами, $\forall x \in \mathbf{R}$ значения функций $F_n(x)$ и $F(x)$ при всех достаточно больших номерах n со сколь угодно большой вероятностью отличаются сколь угодно мало.

Теорема 3. Если $F(x)$ – теоретическая функция распределения, а $F_n(x)$ – э.ф.р., то $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$.

Примечание. Таким образом, для приближенного представления искомой теоретической функции распределения $F(x)$ целесообразно использовать э.ф.р. $F_n(x)$, если n достаточно велико.

Пусть в данной реализации выборки $x_1, \ldots, x_n$ оказалось, что n_1 компонент приняло значение z_1, n_2 компонент приняло значение $z_2, \ldots$, n_k компонент приняло значение z_k, $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$. Тогда значения $z_1, \ldots, z_k$ называются **вариантами**, а их последовательность, записанная в порядке возрастания, – **вариационным рядом**; числа n_j называются **частотами**, а отношения n_j/n – **относительными частотами**. Оформленный в виде таблицы перечень вариант и соответствующих им частот называется **статистическим распределением**, или **группировкой** данной реализации выборки.

Задача 39. Даны результаты наблюдений с.в. X: 10, 6, 10, 2, 6, 10, 2, 10, 10, 6, 10, 10, 10, 2, 2, 6, 10, 10, 6, 10, 10, 6, 2, 10, 6, 10, 6, 10, 6, 10, 6, 10, 10, 2, 10, 10, 6, 10, 6, 10, 6, 2, 6, 10, 10, 2, 10, 10, 10, 2, 10, 6, 10, 6, 10, 2, 6, 2, 6, 2. Построить статистическое распределение и эмпирическую функцию распределения.

Решение. Заметим, что в данную реализацию выборки входят значения: $z_1 = 2$ $n_1 = 12$ раз, $z_2 = 6$ $n_2 = 18$ раз, $z_3 = 10$ $n_3 = 30$ раз. Записывая эти данные в таблицу, получаем статистическое распределение:

z_k	2	6	10
n_k	12	18	30

Объем выборки: $n = n_1+n_2+n_3 = 12+18+30 = 60$; $z_{\min} = 2$, соответственно при $x \leq 2$ ни одно из значений данной реализации выборки не удовлетворяет неравенству $x_i < x$, то есть

$$\mu_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} = 0.$$

Аналогично, при $2 < x \leq 6$:

$$\mu_n(x) = n_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5};$$

при $6 < x \leq 10$:

$$\mu_n(x) = n_1 + n_2 = 12 + 18 = 30 \quad \Rightarrow \quad F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2};$$

при $x > 10$:

$$\mu_n(x) = n_1 + n_2 + n_3 = n = 60 \quad \Rightarrow \quad F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} = \frac{60}{60} = 1.$$

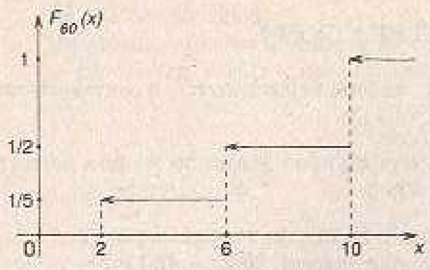
Таким образом, (см. рис. 4, *а*)),

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 1/5, & 2 < x \leq 6; \\ 1/2, & 6 < x \leq 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

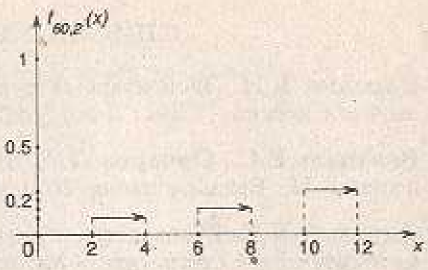
2.3. Эмпирическая плотность распределения. Гистограмма

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка, $h > 0$ – число, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\nu_h(m)$ – число компонент X_k, попадающих в полуинтервал $[mh, (m+1)h)$. **Эмпирической плотностью распределения** (э.п.р.) данной выборки называется случайная функция

$$f_{n,h}(x) = \left\{ \frac{\nu_h(m)}{nh}, \quad \text{если} \quad x \in [mh, (m+1)h), \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \right.$$



а)



б)

Рис. 4

Теорема 4. Пусть $f(x)$ – теоретическая плотность распределения. Тогда для любой точки непрерывности x функции $f(x)$ имеем:

$$f_{n,h}(x) \xrightarrow{P} f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad h \to 0, \quad nh \to \infty.$$

Примечание. Таким образом, для приближенного представления искомой теоретической плотности распределения $f(x)$ целесообразно использовать э.п.р. $f_{n,h}(x)$, если n достаточно велико, а $h > 0$ достаточно мало.

График э.п.р. называется **гистограммой**.

Задача 40. В условиях задачи 39 построить при $h = 2$ э.п.р. и гистограмму.

Решение. Для $h = 2$ и $m = 0$ полуинтервал $[mh, (m+1)h) = [0, 2)$. В этот интервал не попало ни одного значения $x_1, \ldots, x_{60}$. Поэтому $\nu_2(0) = 0$. То же самое будет и для $m < 0$, $m > 5$. Рассуждая аналогично, получаем:

$$[2,4) : \nu_2(1) = 12; \; [4,6) : \nu_2(2) = 0; \; [6,8) : \nu_2(3) = 18;$$

$$[8,10) : \nu_2(4) = 0; \; [10,12) : \nu_2(5) = 30.$$

Поскольку $nh = 60 \cdot 2 = 120$, то

$$f_{60,2}(x) = \begin{cases} \nu_2(1)/120 = 12/120 = 0.1, & x \in [2,4); \\ \nu_2(3)/120 = 18/120 = 0.15, & x \in [6,8); \\ \nu_2(5)/120 = 30/120 = 0.25, & x \in [10,12); \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Гистограмма, то есть график э.п.р., изображена на рис. 4, *б* .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бородин А.Н.** Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. - СПб.: Лань, 1999. – 224 с.
2. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** Задачи и упражнения по теории вероятностей. - М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.
3. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 2000. – 400 с.
4. **Печинкин А.В., Тескин О.И.** и др. Теория вероятностей. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 456 с.
5. Сборник задач по математике для втузов, Т.2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. **А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.** - М.: Наука, 1981-1986.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы распределений

1. *Приближенные значения распределения Пуассона*

$$P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

домноженные на 10^5.

Таблица 1, *а*

m	λ									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

Таблица 1, *б*

m	λ									
	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
0	22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

2. *Приближенные значения интеграла Лапласа*

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt,$$

домноженные на 10^5.

Таблица 2

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06750	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09484	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17365	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22241
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26731	27035	27337	27637	27935	28231	28524
0.8	28815	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34135	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40148
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43575	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45544	45637	45728	45819	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47671
2.0	47725	47778	47831	47882	47933	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48746	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
2.8	49745	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3.0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900

Окончание табл. 2

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.1	49903	49907	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3.2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3.3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3.4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3.5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49982	49982	49983	49984
3.6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3.7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49993
3.8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3.9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

Примечания: 1. $\Phi_0(x)$ – нечетная функция, то есть

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x).$$

2. Значения функции стандартного нормального распределения $\Phi(x)$ определяются по формуле

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

3. *Приближенные значения плотности стандартного нормального распределения (функции Гаусса)*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad ,$$

домноженные на 10^5.

Таблица 3

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39823	39797	39767	39733
0.1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0.2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38252
0.3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0.4	36827	36678	36526	36371	36214	36053	35889	35723	35553	35381
0.5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0.6	33323	33122	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0.7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29660	29431	29200
0.8	28969	28737	28504	28269	28034	27799	27562	27324	27086	26848
0.9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1.0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025

Окончание табл. 3

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1.2	19419	19186	18954	18723	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1.3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15823	15608	15395	15183
1.4	14973	14764	14556	14351	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1.5	12952	12758	12567	12376	12188	12001	11816	11632	11451	11270
1.6	11092	10916	10741	10568	10396	10227	10059	09893	09728	09566
1.7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1.8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1.9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2.0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2.1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2.2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02898
2.3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2.4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2.5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2.6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2.7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2.8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2.9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3.0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3.1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3.2	00238	00231	00224	00217	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3.3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00128
3.4	00123	00119	00115	00111	00108	00104	00100	00097	00094	00090
3.5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3.6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3.7	00043	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00032	00030
3.8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00022	00021
3.9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00015	00014
4.0	00013	00013	00012	00012	00011	00011	00011	00010	00010	00009