ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ"

Филиал в г. Сызрани

# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания
к выполнению типовых расчетов
по высшей математике

Самара 2006

Составители: И.В. КОРПЕН, С.М. БОГДАНОВА.

УДК: 517

**Функции комплексного переменного.** Метод. указ. к выполнению типовых расчетов по высш. мат./ Самар. гос. техн. ун-т.; Сост. *И.В. Корпен, С.М. Богданова*, Самара, 2006. 56 с.

Изложена методика решения задач по теме «Функции комплексного переменного».

Работа предназначена для студентов высших учебных заведений технического профиля, а также для студентов заочного обучения.

Ил. 4. Библиогр.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

## Введение

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студентов. Система типовых расчетов активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому усвоению курса математики.

## Рекомендации по выполнению и оформлению типовых расчетов

1. Задание получает индивидуально каждый студент, согласно своему номеру в журнале из методического пособия или «Сборника заданий по специальным курсам высшей математики», В.Ф. Чудесенко, Москва, «Высшая школа», 1999, раздел 1 (нумерация задач сохранена).
2. Типовые задания выполняются в отдельных тетрадях. При решении необходимо делать ссылки на используемые теоремы и формулы. В конце решения записывается ответ или делается вывод.
3. Завершающим этапом является защита студентом типового расчета. Во время защиты студент должен правильно отвечать на теоретические вопросы и давать объяснение по решению задач.

## Теоретические вопросы

1. Комплексные числа и действия над ними. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная форма записи комплексного числа.
2. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, показательная, тригонометрические, гиперболические, логарифмическая, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.
3. Кривые на комплексной плоскости.
4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции. Гармонические функции.
5. Интегрирование функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница для аналитической функции. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
6. Ряды в комплексной области. Ряд Лорана.
7. Особые точки функции комплексного переменного. Вычеты. Основная теорема Коши о вычетах.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Найти все значения корня $\sqrt[3]{-i27}$.

*Решение.* Приведем комплексное число $z=-i27$ к тригонометрическому виду:

$$|z|=\sqrt{(-27)^2}=27;$$

$$\arg z=\varphi:\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=-\dfrac{27}{27}=-1\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$z=-i27=27\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{-i27}=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)=3\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

Полагая $k=0,1,2$, находим:

$k=0$: $\quad\sqrt[3]{-i27}=3\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}$.

$k=1$: $\quad\sqrt[3]{-i27}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3i$.

$k=2$: $\quad\sqrt[3]{-i27}=3\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}$.

**Задача 2.** Представить в алгебраической форме $ch\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)$.

*Решение.* Так как $chz=\cos iz$, то, полагая $z=3+\frac{\pi}{4}i$, получим:



$$ch\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)=\cos i\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)=\cos\left(3i-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 3i\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin 3i\cdot\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3i+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3i=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$$

Алгебраическая форма: $ch\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3$.

**Задача 3.** Представить в алгебраической форме $Arctg1$.

*Решение.* Полагая $z=1$ в формуле $Arctgz=-\frac{i}{2}Ln\frac{z+i}{z-i}$, получим:

$$Arctg1=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+i}{1-i}=-\frac{i}{2}Ln\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\frac{i}{2}Ln\frac{2i}{2}=-\frac{i}{2}Lni$$

Далее

$$Lni=\ln|i|+i\arg(i)+2k\pi i=\ln 1+i\frac{\pi}{2}+i2k\pi=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).$$

Окончательно получаем: $Arctg1=-\frac{i}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{4}+k\pi$,

где $k=0,\pm1,\pm2,\pm3...$

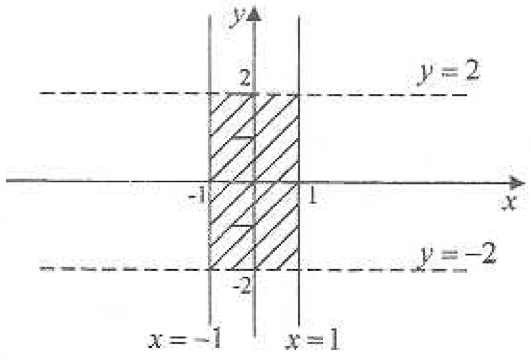
**Задача 4.** Вычертить область, заданную неравенствами $|\operatorname{Re} z|\le 1; |\operatorname{Im} z|<2$.

*Решение.* Пусть $z=x+iy$. Тогда $\operatorname{Re} z=x, \operatorname{Im} z=y$.

По условию $|x|\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$. Этому условию соответствует часть плоскости между прямыми $x=-1$ и $x=1$, включая границы.

Второму условию $|y| < 2 \Rightarrow -2 < y < 2$ соответствует часть плоскости между прямыми $y = -2$ и $y = 2$. Границы не входят в область.

Оба условия определяют заштрихованную область между прямыми
$x = -1, x = 1, y = -2, y = 2$.




**Задача 5.** Определить вид кривой $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$.

*Решение.* Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$. Тогда параметрические уравнения линии имеют вид:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

Исключением параметра $t$ получаем уравнение кривой в виде $F(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} x = (t-1)^2 + 2 \\ y = (t-1)^2 \end{cases} \Rightarrow x = y + 2$$

Получили уравнение прямой $y = x - 2$.

**Задача 6.** Проверить, что $v = 2xy + x$ является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y)$ и значению $f(0) = 0$.



*Решение.* Пусть $f(z) = u + iv$, где $v = 2xy + x$.

Если $f(z)$ аналитическая функция, то ее мнимая часть $v(x, y)$ должна быть гармонической функцией, т.е. должно выполняться условие: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (*)$.

Для нашей функции : $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1 \qquad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Условие (*) выполняется, функция $v(x, y)$ является гармонической, следовательно, может являться мнимой частью аналитической функции.

Восстановим функцию $f(z)$ по известной мнимой части, используя условия Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

По первому условию $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$.

Отсюда: $u(x, y) = \int 2x dx = x^2 + C(y)$.

Найдем $C(y)$, используя второе условие: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = C'(y) = -2y - 1$.

Отсюда: $C(y) = \int (-2y - 1) dy = -y^2 - y + C$.

Получаем $u = x^2 - y^2 - y + C$.

Таким образом

$f(z) = x^2 - y^2 - y + C + i(2xy + x) = x^2 + 2xyi - y^2 + ix - y + C =$
$= (x + iy)^2 + i(x + iy) + C = z^2 + iz + C$.

Для отыскания $C$ используем условие $f(0) = 0$. Подставляя эти значения в $f(z)$, получаем: $0 = C + i0 \Rightarrow C = 0$.

Искомая функция $f(z) = z^2 + iz$.

**Задача 7.** Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой $\int\limits_L z|z|\,dz;\quad L:\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

*Решение.* Так как путь интегрирования является дугой окружности $|z| = 1$ $(0 \le \arg z \le \pi)$, то делаем замену переменной $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$. Получаем:

$$\int\limits_L z|z|\,dz = \int\limits_0^{\pi} e^{i\varphi}\cdot 1\cdot ie^{i\varphi}d\varphi = i\int\limits_0^{\pi} e^{i2\varphi}d\varphi = i\left.\frac{e^{i2\varphi}}{i2}\right|_0^{\pi} = 0.$$

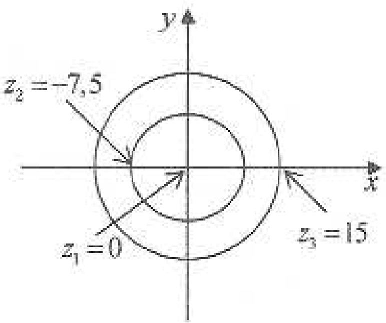
**Задача 8.** Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z: $f(z) = \dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$.

*Решение.* Функция $f(z)$ имеет три особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = -7{,}5$, $z_3 = 15$. Следовательно, имеется три кольца с центром в точке $z = 0$, в каждом из которых функция $f(z)$ является аналитической:

1) $0 < |z| < 7{,}5$ - круг $|z| < 7{,}5$, исключая центр $z = 0$;

2) $7{,}5 < |z| < 15$ - кольцо между окружностями $|z| = 7{,}5$ и $|z| = 15$;

3) $15 < |z| < +\infty$ - внешность круга $|z| \le 15$.




Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих колец. Представим $f(z)$ в виде суммы простейших дробей:



$$f(z) = \frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3} = \frac{15z+450}{z(2z+15)(-z+15)} = \frac{2}{z} - \frac{2}{2z+15} + \frac{1}{15-z}.$$

Первое слагаемое имеет нужный вид, так как представляет собой степень z. Для представления двух других дробей рядами по степеням z будем пользоваться готовым разложением в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots,\quad |z| < 1 \qquad (*).$$

1). Разложение в области $0 < |z| < 7{,}5$. Преобразуем $f(z)$ следующим образом: $f(z) = \dfrac{2}{z} - \dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{2z}{15}} + \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{z}{15}\right)}$.

Пользуясь формулой (*), получим:

$$\frac{1}{1+\dfrac{2z}{15}} = 1 - \frac{2z}{15} + \frac{2^2z^2}{15^2} + \ldots + (-1)^n\frac{2^nz^n}{15^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^nz^n}{15^n},$$

область сходимости $|z| < 7{,}5$.

$$\frac{1}{1+\left(-\dfrac{z}{15}\right)} = 1 + \frac{z}{15} + \frac{z^2}{15^2} + \ldots + \frac{z^n}{15^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^n},$$ область сходимости $|z| < 15$.

Таким образом, в области $0 < |z| < 7{,}5$ получаем:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{2}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^nz^n}{15^n} + \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^n} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{15^{n+1}}z^n.$$

2). Разложение в области $7{,}5 < |z| < 15$.

Для дроби $\dfrac{1}{15-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{15^{n+1}}$ ряд остается сходящимся, так как радиус сходимости $R = 15$. Для дроби $\dfrac{2}{15+2z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n+1}\cdot z^n$ ряд расходится в области $|z| > 7{,}5$, поэтому преобразуем дробь следующим образом:

$$\frac{2}{2z+15}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{15}{2z}}.$$

Пользуясь формулой (*), получим:

$$\frac{1}{1+\dfrac{15}{2z}}=1-\frac{15^2}{2^2z^2}+\frac{15^3}{2^3z^3}-...+(-1)^n\frac{15^n}{2^nz^n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{15^n}{2^n}\cdot z^{-n}.$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{15}{2z}\right|<1$,т.е. при $|z|>7,5$. Получаем

$$\frac{2z}{2z+15}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{15^n}{2^n}\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\cdot z^n.$$

В области $7,5<|z|<15$ получаем разложение:

$$f(z)=\frac{2}{z}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}\cdot z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^{n+1}}.$$

3). Разложение в области $|z|>15$.

Для дроби $\frac{2z}{2z+15}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\cdot z^n$ ряд остается сходящимся. Для дроби $\frac{1}{15-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^{n+1}}$ ряд расходится при $|z|>15$. Преобразуем эту дробь и разложим в ряд, пользуясь формулой (*):

$$\frac{1}{15-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\left(-\dfrac{15}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{15}{z}+\frac{15^2}{z^2}+..+\frac{15^n}{z^n}+...\right)=$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{15^n}{z^n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{15^{n+1}}.$$

В третьей области получаем ряд:

$$f(z)=\frac{2}{z}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\cdot z^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{15^{n+1}}=\frac{2}{z}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n2^{n+1}-1}{15^{n+1}}\cdot z^n.$$



**Задача 9.** Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$: $f(z)=\frac{2z}{z^2-4}$; $z_0=3-2i$.

*Решение.* Данная функция имеет две особые точки: $z_1=2$, $z_2=-2$. Следовательно, имеется три кольца с центром в точке $z_0=3-2i$, в каждом из которых $f(z)$ аналитична.

Радиус первого кольца $R_1=|z_0z_1|=\sqrt{(2-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

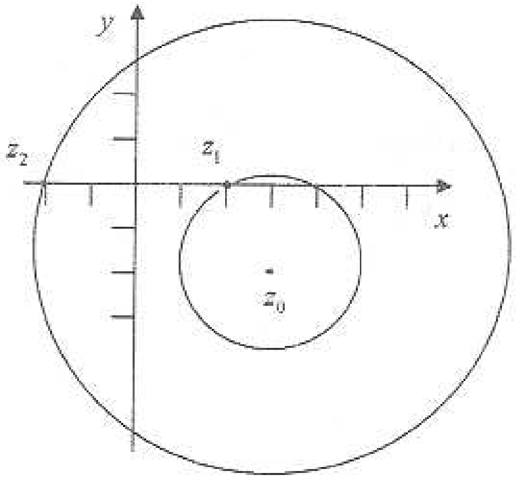
Радиус второго кольца $R_1=|z_0z_2|=\sqrt{(-2-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

Получаем три области:

1) $|z-z_0|<\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{5}<|z-z_0|<\sqrt{29}$;

3) $\sqrt{29}<|z-z_0|<\infty$.




Найдем ряды Лорана в каждой из полученных областей. Разложим функцию $f(x)$ на сумму простейших дробей:

$$f(x)=\frac{2z}{z^2-4}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}.$$

Для каждой дроби будем пользоваться готовым разложением в ряд для функции $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-...+(-1)^n z^n+..., \quad |z|<1 \quad (*)$.

1) Область $|z-z_0|<\sqrt{5}$.

Преобразуем простейшие дроби так, чтобы, пользуясь формулой $(*)$, получить ряды по степеням $(z-z_0)$.

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2+(3-2i)+z-(3-2i)}=\frac{1}{1-2i+z-z_0}=\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{1-2i}}=$$

$$=\frac{1}{1-2i}\left(1-\frac{z-z_0}{1-2i}+...+(-1)^n\frac{(z-z_0)^n}{(1-2i)^n}+...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-2i)^{n+1}}.$$

Область сходимости для этого ряда:

$$\left|\frac{z-z_0}{1-2i}\right|<1\Rightarrow|z-z_0|<|1-2i|\Rightarrow|z-z_0|<\sqrt{5}.$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2+(3-2i)+z-(3-2i)}=\frac{1}{5-2i+z-z_0}=\frac{1}{5-2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{5-2i}}=$$

$$=\frac{1}{5-2i}\left(1-\frac{z-z_0}{5-2i}+...+(-1)^n\frac{(z-z_0)^n}{(5-2i)^n}+...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

Область сходимости для данного ряда:

$$\left|\frac{z-z_0}{5-2i}\right|<1\Rightarrow|z-z_0|<|5-2i|\Rightarrow|z-z_0|<\sqrt{29}.$$

Таким образом, в области $|z-z_0|<\sqrt{5}$ получаем следующее разложение в ряд:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}+\frac{1}{(5-2i)^{n+1}}\right]\cdot(z-z_0)^n.$$

2). Кольцо $\sqrt{5}<|z-z_0|<\sqrt{29}$.

Для дроби $\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(5-2i)^{n+1}}$ ряд остается сходящимся, так как радиус сходимости $R=\sqrt{29}$.



Вторую дробь преобразуем:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-(3-2i)-2+3-2i}=\frac{1}{z-z_0+1-2i}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-2i}{z-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-2i)^n}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}(z-z_0)^n}{(1-2i)^{n+1}}.$$

Область сходимости для этого ряда:

$$\left|\frac{1-2i}{z-z_0}\right|<1\Rightarrow|z-z_0|>|1-2i|\Rightarrow|z-z_0|>\sqrt{5}.$$

В кольце $\sqrt{5}<|z-z_0|<\sqrt{29}$ получаем следующий ряд Лорана для функции $f(x)$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}(z-z_0)^n}{(1-2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

3). Область $\sqrt{29}<|z-z_0|<\infty$.

Для дроби $\frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}(z-z_0)^n}{(1-2i)^{n+1}}$ ряд остается сходящимся, так как он сходится в области $|z-z_0|>\sqrt{5}$.

Другую дробь преобразуем:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2+(3-2i)+z-(3-2i)}=\frac{1}{z-z_0+5-2i}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{5-2i}{z-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\left(1-\frac{5-2i}{z-z_0}+...+(-1)^n\frac{(5-2i)^n}{(z-z_0)^n}+...\right)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}(z-z_0)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится в области

$$\left|\frac{5-2i}{z-z_0}\right|<1\Rightarrow|z-z_0|>|5-2i|\Rightarrow|z-z_0|>\sqrt{29}.$$

В третьей области получаем:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}+\frac{1}{(5-2i)^{n+1}}\right]\cdot(z-z_0)^n.$$

**Задача 10.** Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$: $f(z) = z \cdot \sin\frac{\pi z}{z-a}$; $z_0 = a$.

*Решение.* Для любого комплексного $t$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (*).$$

Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z) = z \cdot \sin\frac{\pi(z-a+a)}{z-a} = z \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi a}{z-a}\right) = -z \cdot \sin\frac{\pi a}{z-a} =$$

$$= -(z-a+a) \cdot \sin\frac{\pi a}{z-a} = -(z-a) \cdot \sin\frac{\pi a}{z-a} - a \cdot \sin\frac{\pi a}{z-a}.$$

Полагая в формуле $(*)$ $t = \frac{\pi a}{z-a}$, получим:

$$\sin\frac{\pi a}{z-a} = \frac{\pi a}{z-a} - \frac{\pi^3 a^3}{(z-a)^3 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(\pi a)^{2n+1}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi a)^{2n+1}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Тогда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\pi a)^{2n+1}}{(z-a)^{2n}(2n+1)!} + a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\pi a)^{2n+1}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!}$.

**Задача 11.** Определить тип особой точки $z=0$ для данной функции $f(z) = \frac{e^{z^3}-1}{e^z-1-z}$.

*Решение.* Разложим числитель и знаменатель данной дроби в степенные ряды, используя разложение функции $e^z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$

Получим :



$$e^{z^3} - 1 = 1 + z^3 + \frac{z^6}{2!} + \ldots + \frac{z^{3n}}{n!} + \ldots - 1 = z^3 + \frac{z^6}{2!} + \ldots + \frac{z^{3n}}{n!} + \ldots$$

$$e^z - 1 - z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots - 1 - z = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$f(z) = \frac{e^{z^3}-1}{e^z-1-z} = \frac{z^3 + \frac{z^6}{2!} + \ldots + \frac{z^{3n}}{n!} + \ldots}{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots} = \frac{z + \frac{z^4}{2!} + \ldots + \frac{z^{3n-2}}{n!} + \ldots}{\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \ldots} =$$

$$= z \cdot \frac{1 + \frac{z^3}{2!} + \ldots + \frac{z^{3(n-1)}}{n!} + \ldots}{\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \ldots}$$

Положим $\varphi(z) = \frac{1 + \frac{z^3}{2!} + \ldots + \frac{z^{3(n-1)}}{n!} + \ldots}{\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \ldots}$.

Тогда функция представима в виде $f(z) = z \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - функция аналитическая в точке $z=0$, причем $\varphi(0) = 2 \neq 0$.

Следовательно, точка $z=0$ является для функции $f(z)$ нулем первого порядка, т.е. простым нулем.

**Задача 12.** Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} \cdot e^{\frac{1}{z}}$.

*Решение.* Особые точки данной функции найдем, приравнивая к нулю знаменатели и решая полученные уравнения:

$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \Rightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$

$z = 0$

Получаем особые точки: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$, $z_5 = 0$.

Исследуем точку $z_1 = 1$.

Имеем:

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}\cdot e^{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to 1}\frac{\pi\cos\pi z\cdot e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z^2}\cdot\sin\pi z\cdot e^{\frac{1}{z}}}{4z^3} = \frac{-\pi e}{4}.$$

Так как существует конечный предел функции $f(z)$ в точке $z=1$, то точка $z=1$ является устранимой особой функции.

Аналогично, для точки $z_2=-1$:

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}\cdot e^{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to -1}\frac{\pi\cos\pi z\cdot e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z^2}\cdot\sin\pi z\cdot e^{\frac{1}{z}}}{4z^3} = \frac{\pi e^{-1}}{4}.$$

Так как предел конечен, то $z_2=-1$ так же является устранимой особой точкой.

Исследуем точку $z_3=i$.

Представим $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{\dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)(z+i)}\cdot e^{\frac{1}{z}}}{z-i}$. Здесь $\varphi(z) = \dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)(z+i)}\cdot e^{\frac{1}{z}}$ аналитична в точке $z_3=i$, причем

$$\varphi(i) = \frac{\sin\pi i}{-2\cdot 2i}\cdot e^{\frac{1}{i}} = -\frac{ish\pi}{4}(\cos 1 - i\sin 1)\neq 0.$$

Следовательно, точка $z_3=i$ является простым полюсом данной функции $f(z)$.

Аналогично, записав функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{\dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)(z-i)}\cdot e^{\frac{1}{z}}}{z+i}$, заключаем, что точка $z_4=-i$ является простым полюсом данной функции.

Определим характер точки $z_5=0$.



Рассмотрим поведение функции при $z\to 0$ на действительной оси: $z=x$ и $f(z)=f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x^4-1}\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x\to 0$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin\pi x}{x^4-1}\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\pi x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4-1} = \lim_{x\to 0+}\frac{\pi}{x^4-1}\cdot xe^{\frac{1}{x}} =$$

$$= -\pi\lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}} = -\pi\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\pi\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = -\pi\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin\pi x}{x^4-1}\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Видим, что в точке $z_5=0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$. Следовательно, точка $z_5=0$ является существенно особой точкой функции.

**Задача 13.** Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz$.

*Решение.* В области $|z-1|\le 2$ функция $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}$ аналитична всюду, кроме точки $z=0$. По теореме Коши о вычетах $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz = 2\pi i resf(0)$.

Точка $z=0$ является полюсом функции $f(z)$, так как $\displaystyle\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}} = \infty$. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{\dfrac{z^2+1}{z^2+4}}{\sin\dfrac{z}{3}}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$ причем при $z_0=0$ $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$,

$$\psi'(z_0)=\frac{1}{3}\cos\frac{z_0}{3}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Тогда вычет в точке $z=0$ $resf(0)=\dfrac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\dfrac{1/4}{1/3}=\dfrac{3}{4}$.

Таким образом: $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\dfrac{z}{3}}dz=2\pi i\cdot\dfrac{3}{4}=1{,}5\pi i$.

**Задача 14.** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2\cdot e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz$.

*Решение.* Функция $f(z)=\dfrac{z^2\cdot e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}$ в круге $|z|\leq 1$ имеет особую точку $z=0$. Установим характер этой точки. Для этого напишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля, используя разложение в ряд Тейлора для функции

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

$$f(z)=\frac{z^2\cdot e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}=z\cdot e^{\frac{1}{z^2}}-\frac{1}{z}=z\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4 2!}+\frac{1}{z^6 3!}+\ldots\right)-\frac{1}{z}=$$
$$=z+\frac{1}{z^3 2!}+\frac{1}{z^5 3!}+\ldots$$

Так как главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$ содержит бесконечно много членов, то $z=0$ является существенно особой точкой. Вычет в этой точке



равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении: $resf(0)=C_{-1}=0$.

По теореме Коши о вычетах : $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2\cdot e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz=2\pi i resf(0)=0$.

**Задача 15.** Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=0,5}\dfrac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz}dz$.

*Решение.* В области $|z|<0{,}5$ функция $f(z)=\dfrac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz}$ аналитична всюду, кроме точки $z=0$. По теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz}dz=2\pi i resf(0).$$

Точка $z=0$ для функции является полюсом, т. к.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz}=\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}+9\sin 9z}{sh\pi iz+i\pi zch\pi iz}=\infty.$$

Установим порядок полюса. Рассмотрим функции $\varphi(z)=e^{2z}-\cos 9z$ и $\psi(z)=zsh\pi iz$, тогда $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. При этом $\varphi(0)=0$ и $\psi(0)=0$.

$\varphi'(z)=2e^{2z}+9\sin 9z$; $\varphi'(0)=2\neq 0$.

$\psi'(z)=sh\pi iz+\pi izch\pi iz$; $\psi'(0)=0$.

$\psi''(z)=2\pi ich\pi iz-\pi^2 zsh\pi iz$; $\psi''(0)=2\pi i\neq 0$.

Порядок неравной нулю в точке $z=0$ производной функции $\varphi(z)$: $k=1$; функции $\psi(z)$: $l=2$. Следовательно, порядок полюса $n=l-k=1$. Вычет в полюсе первого порядка:

$$resf(0)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz}\cdot z\right]=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-\cos 9z}{sh\pi iz}=\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}+9\sin 9z}{i\pi ch\pi iz}=\frac{2}{\pi i}.$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-\cos 9z}{sh\pi iz}dz = 2\pi i\cdot\frac{2}{\pi i} = 4.$$

**Задача 16.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz.$$

*Решение.* В области $D:|z+2i|<3$ функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-2i$ и $z_2=2-2i$. По теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz=2\pi i\left(resf(-2i)+resf(2-2i)\right).$$

Найдем вычеты в точках $z_1$ и $z_2$.

Точка $z_1=-2i$ является простым полюсом функции. Перепишем функцию в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где

$\varphi(z)=\pi+\dfrac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\cdot\left(e^{\frac{\pi z}{2}}+1\right)$, $\psi(z)=e^{\frac{\pi z}{2}}+1$. При этом

$\varphi(-2i)=\pi\neq 0$; $\psi(-2i)=0$; $\psi'(-2i)=-\dfrac{\pi}{2}\neq 0$. Тогда

$$resf(-2i)=\frac{\varphi(-2i)}{\psi'(-2i)}=\frac{\pi}{-\frac{\pi}{2}}=-2.$$

Точка $z_2=2-2i$ - полюс второго порядка.

$$resf(2-2i)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2-2i}\left[f(z)\cdot(z-2+2i)^2\right]'=$$



$$=\lim_{z\to 2-2i}\left[\left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-4-2i)(z-2+2i)^2}\right)\cdot(z-2+2i)^2\right]'=$$

$$=\lim_{z\to 2-2i}\left[\left(\frac{\pi(z-2+2i)^2}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{z-4-2i}\right)\right]'=$$

$$=\lim_{z\to 2-2i}\left(\frac{2\pi(z-2+2i)\left(e^{\frac{\pi z}{2}}+1\right)-\pi(z-2+2i)^2\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi z}{2}}}{\left(e^{\frac{\pi z}{2}}+1\right)^2}+\right.$$

$$\left.+6\frac{\frac{\pi i}{2-2i}sh\frac{\pi iz}{2-2i}\cdot(z-4-2i)-ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-4-2i)^2}\right)=-\frac{6ch\pi i}{(-2-4i)^2}=-0,18-0,24i.$$

Итог:

$$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2)}\right)dz=2\pi i(-2-0,18-0,24i)=$$

$$=\pi(0,48-4,36i).$$

**Задача 17.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}$.

*Решение.* Заменой переменной сведем данный интеграл к интегралу по замкнутому контуру.

Полагаем $z = e^{it}$, тогда $\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$; $dt = \dfrac{dz}{iz}$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{4\sqrt{2}\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + 6} dz = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}}.$$

Найдем особые точки полученной функции $f(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}}$:

$$2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad z_2 = -\sqrt{2}i.$$

Эти точки являются простыми полюсами функции $f(z)$. В области $D$: $|z| < 1$ лежит только точка $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Для того чтобы найти вычет в этой точке перепишем функцию в виде:

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right)} = \frac{1}{(2z + \sqrt{2}i)(\sqrt{2}z + 2i)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}z + 2i}}{2z + \sqrt{2}i}.$$

Обозначим $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}z + 2i}$; $\psi(z) = 2z + \sqrt{2}i$. При этом $\varphi(z_1) = -i \neq 0$; $\psi(z_1) = 0$; $\psi'(z_1) = 2 \neq 0$.

Тогда $res f(z_1) = \dfrac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} = -\dfrac{1}{2}i$.

По теореме Коши о вычетах: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}i\right) = \pi$.



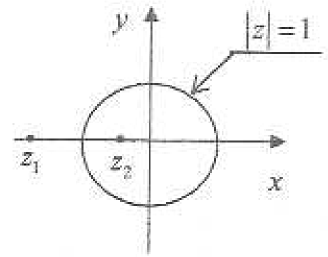
**Задача 18.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2}$.

*Решение.* Сделаем замену $z = e^{it}$; $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; $dt = \dfrac{dz}{iz}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = -2i\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + \sqrt{10}z + 1)^2}.$$

Найдем особые точки функции $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + \sqrt{10}z + 1)^2}$:

$$z^2 + \sqrt{10}z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{-\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}; \quad z_2 = \frac{-\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}.$$




В области $|z| = 1$ лежит точка $z_2 = \dfrac{-\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$. Перепишем функцию в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где

$$\varphi(z) = \frac{z}{\left(z + \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}\right)^2};$$

$$\psi(z) = \left(z + \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}\right)^2.$$

При этом в точке $z_2 = \dfrac{-\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$: $\varphi(z_2) \neq 0$; $\psi(z_2) = 0$. Из этого следует, что точка $z_2$ - полюс второго порядка. Вычет в точке $z_2$:

$$resf\left(\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}\left[f(z)\left(z+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\right)^2\right]'=$$

$$=\lim_{z\to\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}\left[\frac{z}{\left(z+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)^2}\right]'=\lim_{z\to\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}\frac{\left(z+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)^2-2z\left(z+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)}{\left(z+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)^4}=\frac{\sqrt{10}}{6\sqrt{6}}$$

По теореме Коши о вычетах:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(z^2+\sqrt{10}z+1)}=-2i\cdot 2\pi i resf\left(\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)=$$

$$=4\pi\frac{\sqrt{10}}{6\sqrt{6}}.$$

**Задача 19.** Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

*Решение.* Так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$ непрерывна на всей действительной оси, степень знаменателя $n=6$, степень числителя $m=0$ $(n>m+2)$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum resf(z)$, где сумма вычетов берется по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.

Введем функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$, которая на действительной оси совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней



полуплоскости полюс первого порядка $z_1=4i$ и полюс второго порядка $z_2=i$.

Вычислим вычеты в этих точках.

$$resf(4i)=\lim_{z\to 4i}\left[f(z)(z-4i)\right]=\lim_{z\to 4i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)}=-\frac{i}{1800}.$$

$$resf(i)=\lim_{z\to i}\left[f(z)(z-i)^2\right]'=\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)}\right]'=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{4z^3+6z^2i+30z+32i}{\left[(z+i)^2(z^2+16)\right]^2}=\frac{26i}{1800}.$$

В результате:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}=2\pi i\left(-\frac{i}{1800}+\frac{26i}{1800}\right)=-\frac{\pi}{36}.$$

**Задача 20.** Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

*Решение.* Перепишем интеграл в виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}-\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\right]dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos 3xdx-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos 2xdx,$$

где $R(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ непрерывна на всей действительной оси.

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos 3xdx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum resR(z)\cdot e^{i3z}\right\};$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos 2xdx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum resR(z)\cdot e^{i2z}\right\}$, где сумма вычетов берется по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.

Для функции $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в верхней полуплоскости расположен полюс второго порядка $z=i$.

$$resf(i)=\lim_{z\to i}\left[f(z)(z-i)^2\right]'=\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'=\lim_{z\to i}\frac{-2(z+i)}{(z+i)^4}=-\frac{i}{4}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right)e^{-3}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-3};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right)e^{-2}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Таким образом: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{2}\left(e^{-3}-e^{-2}\right).$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задача 1.** Найти все значения корня.

1.1. $\sqrt[4]{-1}$.

1.2. $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

1.3. $\sqrt[3]{1}$.

1.4. $\sqrt[3]{i}$.

1.5. $\sqrt[4]{1}$.

1.6. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

1.7. $\sqrt[3]{-1}$.

1.8. $\sqrt[3]{-i}$.

1.9. $\sqrt[4]{-16}$.

1.10. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. $\sqrt[3]{8}$.

1.12. $\sqrt[3]{8i}$.

1.13. $\sqrt[4]{16}$.

1.14. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$.

1.15. $\sqrt[3]{-8}$.

1.16. $\sqrt[3]{-8i}$.

1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$.

1.18. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19. $\sqrt[3]{1/8}$.

1.20. $\sqrt[3]{i/8}$.

1.21. $\sqrt[4]{1/16}$.

1.22. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$.

1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.24. $\sqrt[4]{-1/8}$.

1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

1.26. $\sqrt[3]{27}$.

1.27. $\sqrt[4]{1/256}$.

1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.29. $\sqrt[3]{i/27}$.

1.30. $\sqrt[4]{256}$.



**Задача 2.** Представить в алгебраической форме.

2.1. $\sin(\pi/4+2i)$.

2.2. $\cos(\pi/6+2i)$.

2.3. $Ln6$.

2.4. $sh(2+\pi i/4)$.

2.5. $ch(2+\pi i/2)$.

2.6. $Ln(1+i)$.

2.7. $\sin(\pi/3+i)$.

2.8. $\cos(\pi/4+i)$.

2.9. $Ln\left(\sqrt{3}+i\right)$.

2.10. $sh(1+\pi i/2)$.

2.11. $ch(1-\pi i)$.

2.12. $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

2.13. $Ln(-1+i)$.

2.16. $sh(3+\pi i/6)$.

2.17. $ch(1+\pi i/3)$.

2.18. $Ln(-1-i)$.

2.19. $\sin(\pi/6-3i)$.

2.20. $\cos(\pi/3+3i)$.

2.21. $Ln(1-i)$.

2.22. $sh(1-\pi i/3)$.

2.23. $ch(2-\pi i/6)$.

2.24. $1^{2i}$.

2.25. $\sin(\pi/3-2i)$.

2.26. $\cos(\pi/6-i)$.

2.27. $i^{3i}$.

2.28. $sh(2-\pi i)$.

2.14. $\cos(\pi/4-2i)$.

2.15. $\sin(\pi/2-5i)$.

2.29. $(-i)^{5i}$.

2.30. $(-1)^{4i}$.

**Задача 3.** Представить в алгебраической форме.

3.1. $Arctg\dfrac{1-i\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1+i}$.

3.2. $Arc\sin 4$.

.3.3. $Arch(-2)$.

3.4. $Arctg\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

3.5. $Arcth\left(\dfrac{3-4i}{5}\right)$.

3.6. $Arcctg\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)$.

3.7. $Arth\left(\dfrac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3.8. $Arc\sin\left(\dfrac{-3+i}{4}\right)$.

3.9. $Arc\sin\dfrac{17}{8}$.

3.16. $Arth\left(\dfrac{4-3i}{5}\right)$.

3.17. $Arctg\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

3.18. $Arcth\left(\dfrac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.19. $Arc\cos(-5)$.

3.20. $Arsh(-4i)$.

3.21. $Arc\sin\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.22. $Arctg\left(\dfrac{-9+i}{1-9i}\right)$.

3.23. $Arctg\left(\dfrac{-5i}{3}\right)$.

3.24. $Arcctg\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.



3.10. $Arctg\left(-\dfrac{i}{3}\right)$.

3.11. $Arctg(2-i)$.

3.12. $Arch(3i)$.

3.13. $Arctg\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)$.

3.14. $Arcth\left(\dfrac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.15. $Arctg\left(\dfrac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$.

3.25. $Arth\left(\dfrac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.26. $Arcth\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)$.

3.27. $Arc\sin(-1)$.

3.28. $Arctg\left(\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$.

3.29. $Arc\cos(-3i)$.

3.30. $Arc\sin 1$.

**Задача 4.** Вычертить область, заданную неравенствами.

4.1. $|z-1|\le 1, \quad |z+1|>2$.

4.2. $|z+i|\ge 1, \quad |z|<2$.

4.3. $|z-i|\le 2, \quad \operatorname{Re} z>1$.

4.4. $|z+1|\ge 1, \quad |z+i|<1$.

4.5. $|z+1|\le 1, \quad |z-i|\le 1$.

4.6. $|z+i|\le 2, \quad |z-i|>2$.

4.7. $|z-1-i|\le 1, \quad \operatorname{Im} z>1, \quad \operatorname{Re} z\ge 1$.

4.8. $|z-1+i|\ge 1, \quad \operatorname{Im} z\le -1, \quad \operatorname{Re} z<1$.

4.9. $|z-2-i|\le 2,\quad \operatorname{Im} z<1,\quad \operatorname{Re} z\ge 3$.

4.10. $|z-1-i|\ge 1,\quad 0\le Re z<2,\quad 0<\operatorname{Im} z\le 2$.

4.11. $|z+i|<2,\quad 0<Re z\le 1$.

4.12. $|z-i|\le 1,\quad 0<\arg z<\pi/4$.

4.13. $|z-i|\le 2,\quad 0<\operatorname{Im} z<2$.

4.14. $|z+i|>1,\quad -\pi/4\le \arg z<0$.

4.15. $|z-1-i|<1,\quad |\arg z|\le \pi/4$.

4.16. $|z|<2,\quad -\pi/4\le \arg(z-1)\le \pi/4$.

4.17. $|z|\le 1,\quad \arg(z+i)>\pi/4$.

4.18. $1<|z-1|\le 2,\quad \operatorname{Im} z\ge 0,\quad \operatorname{Re} z<1$.

4.19. $1\le|z-1|<2,\quad \operatorname{Im} z>1,\quad \operatorname{Re} z\le 0$.

4.20. $|z|<2,\quad \operatorname{Re} z\ge 1,\quad \arg z<\pi/4$.

4.21. $|z|>1,\quad -1<\operatorname{Im} z\le 1,\quad 0<\operatorname{Re} z\le 2$.

4.22. $|z-1|>1,\quad -1\le \operatorname{Im} z<0,\quad 0\le \operatorname{Re} z<3$.

4.23. $|z+i|<1,\quad -3\pi/4\le \arg z\le -\pi/4$.

4.24. $|z-i|\le 1,\quad -\pi/2\le \arg(z-i)<\pi/4$.

4.25. $z\bar{z}<2,\quad \operatorname{Re} z\le 1,\quad \operatorname{Im} z>-1$.

4.26. $z\bar{z}\le 2,\quad \operatorname{Re} z<1,\quad \operatorname{Im} z>-1$.

4.27. $1<z\bar{z}<2,\quad \operatorname{Re} z>0,\quad 0\le \operatorname{Im} z\le 1$.



4.28. $|z-1|<1,\quad \arg z\le \pi/4,\quad \arg(z-1)>\pi/4$.

4.29. $|z-i|<1,\quad \arg z\ge \pi/4,\quad \arg(z+1-i)\le \pi/4$.

4.30. $|z-2-i|\ge 1,\quad 1\le \operatorname{Re} z<3,\quad 0<\operatorname{Im} z\le 3$.

**Задача 5.** Определить вид кривой.

5.1. $z=3\sec t+i2tgt$.

5.2. $z=2\sec t-i3tgt$.

5.3. $z=-\sec t+i3tgt$.

5.4. $z=4tgt-i3\sec t$.

5.5. $z=3tgt+i4\sec t$.

5.6. $z=-4tgt-i2\sec t$.

5.7. $z=3co\sec t+i3ctgt$.

5.8. $z=4co\sec t-i2ctgt$.

5.9. $z=ctgt-i2co\sec t$.

5.10. $z=-ctgt+i3co\sec t$.

5.16. $z=\dfrac{4}{ch4t}+i2th4t$.

5.17. $z=th5t+\dfrac{5i}{ch5t}$.

5.18. $z=\dfrac{2}{sht}-icth t$.

5.19. $z=2e^{it}+\dfrac{1}{2e^{it}}$.

5.20. $z=3e^{it}-\dfrac{1}{2e^{it}}$.

5.21. $z=-2e^{it}+\dfrac{1}{e^{it}}$.

5.22. $z=2e^{2it}-\dfrac{1}{e^{2it}}$.

5.23. $z=\dfrac{1+t}{1-t}+i\dfrac{2+t}{2-t}$.

5.24. $z=\dfrac{t-1+it}{t(t-1)}$.

5.25. $z=\dfrac{1+i}{1-t}+\dfrac{t}{1-t}(2-4i)$.

5.11. $z = 3ch2t + i2sh2t$.

5.12. $z = 2ch3t - i3sh3t$.

5.13. $z = 5sh4t + i4ch4t$.

5.14. $z = -4sh5t - i5ch5t$

5.15. $z = \dfrac{2}{ch2t} + i4th2t$.

5.26. $z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t}$.

5.27. $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4)$.

5.28. $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$.

5.29. $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$.

5.30. $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.

**Задача 6.** Проверить, что $u(v)$ является действительной (мнимой) частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$.

6.1. $u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0$.

6.2. $u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f(0) = 1$.

6.3. $v = e^x(y\cos y + x\sin y), \quad f(0) = 0$.

6.4. $u = x^2 - y^2 - 2y, \quad f(0) = 0$.

6.5. $u = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}\cos y, \quad f(0) = 2$.

6.6. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(1) = 1 + i$.

6.7. $v = e^{-y}\sin x + y, \quad f(0) = 1$.

6.8. $v = e^x\cos y, \quad f(0) = 1 + i$.



6.9. $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \quad f(0) = 1$.

6.10. $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad f(1) = 2$

6.11. $u = e^{-y}\cos x, \quad f(0) = 1$.

6.12. $u = y - 2xy, \quad f(0) = 0$.

6.13. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad f(0) = i$.

6.14. $v = x^2 - y^2 - 2x + 1, \quad f(0) = 1$.

6.15. $v = 3x^2y - y^3 - y, \quad f(0) = 0$.

6.16. $v = 2xy + y, \quad f(0) = 0$.

6.17. $v = 3x^2y - y^3, \quad f(0) = 1$.

6.18. $u = e^x(x\cos y - y\sin y), \quad f(0) = 0$.

6.19. $v = 2xy = 2x, \quad f(0) = 0$.

6.20. $u = 1 - \sin y \cdot e^x, \quad f(0) = 1 + i$.

6.21. $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}\sin y, \quad f(0) = 2$.

6.22. $v = 1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad f(1) = 1 + i$.

6.23. $u = e^{-y}\cos x + x, \quad f(0) = 1$.

6.24. $v = e^{-y}\sin x, \quad f(0) = 1$.

6.25. $u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, \quad f(0) = 1$.

6.26. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x, \quad f(1)=2$.

6.27. $v=x^2-y^2-x, \quad f(0)=0$.

6.28. $u=-2xy-2y, \quad f(0)=i$.

6.29. $v=2xy-2y, \quad f(0)=1$.

6.30. $u=x^3-3xy^2-x, \quad f(0)=0$.

**Задача 7.** Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

7.1. $\int\limits_{AB}\bar{z}^2dz; \quad AB:\{y=x^2; z_A=0, z_B=1+i\}$.

7.2. $\int\limits_{L}(z+1)e^z dz; \quad L:\{|z|=1, \operatorname{Re}z\geq 0\}$.

7.3. $\int\limits_{AB}\operatorname{Im}z^3dz$; $AB$ – отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=2+2i$.

7.4. $\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz$; $AB$ – отрезок прямой, $z_A=1$, $z_B=1-i$.

7.5. $\int\limits_{ABC}|z|dz$; $ABC$ – ломаная, $z_A=0$, $z_B=-1+i$, $z_C=1+i$.

7.6. $\int\limits_{AB}(12z^5+4z^3+1)dz$; $AB$ – отрезок прямой, $z_A=1$, $z_B=i$.

7.7. $\int\limits_{AB}\bar{z}^2dz$; $AB$ – отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=1+i$.

7.8. $\int\limits_{ABC}z^3e^{z^4}dz$; $ABC$ – ломаная, $z_A=i$, $z_B=1$, $z_C=0$.

7.9. $\int\limits_{ABC}\operatorname{Re}\dfrac{\bar{z}}{z}dz$; $AB:\{|z|=1, \operatorname{Im}z\geq 0\}$, $BC$ – отрезок, $z_B=1$, $z_C=2$.



7.10. $\int\limits_{ABC}(z^2+\cos z)dz$; $ABC$ – ломаная, $z_A=0$, $z_B=1$, $z_C=i$.

7.11. $\int\limits_{L}\dfrac{\bar{z}}{z}dz$; $L$ – граница области: $\{1<|z|<2, \operatorname{Re}z>0\}$.

7.12. $\int\limits_{ABC}(chz+\cos iz)dz$; $ABC$ – ломаная, $z_A=0$, $z_B=-i$, $z_C=i$.

7.13. $\int\limits_{L}|z|\bar{z}dz; \quad L:\{|z|=4, \operatorname{Re}z\geq 0\}$.

7.14. $\int\limits_{L}(chz+z)dz; \quad L:\{|z|=1, \operatorname{Im}z\leq 0\}$.

7.15. $\int\limits_{L}|z|\operatorname{Re}z^2dz; \quad L:\{|z|=R, \operatorname{Im}z\geq 0\}$.

7.16. $\int\limits_{AB}(3z^2+2z)dz; \quad AB:\{y=x^2, z_A=0, z_B=1+i\}$.

7.17. $\int\limits_{L}z\operatorname{Re}z^2dz; \quad L:\{|z|=R, \operatorname{Im}z\geq 0\}$.

7.18. $\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz$; $ABC$ – ломаная, $z_A=0$, $z_B=-1+i$, $z_C=i$.

7.19. $\int\limits_{AB}e^{|z|^2}\operatorname{Im}z\,dz$; $AB$ – отрезок прямой, $z_A=1+i$, $z_B=0$.

7.20. $\int\limits_{L}(\sin iz+z)dz; \quad L:\{|z|=1, \operatorname{Re}z\geq 0\}$.

7.21. $\int\limits_{AB}z\operatorname{Re}z^2dz$; $AB$ – отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=1+2i$.

7.22. $\int\limits_{AB}(2z+1)dz; \quad AB:\{y=x^3, z_A=0, z_B=1+i\}$.

7.23. $\int\limits_{ABC} \bar{z}dz;\ AB:\{|z|=1, \operatorname{Re}z\ge 0, \operatorname{Im}z\ge 0\};\ BC$ – отрезок, $z_B=1, z_C=0$.

7.24. $\int\limits_{L}(\cos iz + 3z^2dz;\quad L:\{|z|=1, \operatorname{Im}z\ge 0\}$.

7.25. $\int\limits_{L}|z|\,dz;\quad L:\{|z|=\sqrt{2}, 3\pi/4\le \arg z\le 5\pi/4\}$.

7.26. $\int\limits_{ABC}(z^9+1)dz;\ ABC$ – ломаная, $z_A=0, z_B=1+i, z_C=i$.

7.27. $\dfrac{1}{2i}\int\limits_{|z|=R}\bar{z}dz$.

7.28. $\int\limits_{ABC}(\sin z+z^5)dz;\ ABC$ – ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_C=2i$.

7.29. $\int\limits_{AB}z\operatorname{Im}z^2dz;\ AB$ – отрезок прямой, $z_A=0, z_B=1+i$.

7.30. $\int\limits_{L}(z^3+\sin z)dz;\quad L:\{|z|=1, \operatorname{Re}z\ge 0\}$.

**Задача 8.** Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z$.

8.1. $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$.

8.2. $\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$.

8.3. $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

8.4. $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.

8.16. $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$.

8.17. $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$.

8.18. $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

8.19. $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$.



8.5. $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$.

8.6. $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

8.7. $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$.

8.8. $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$.

8.9. $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.

8.10. $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$.

8.11. $\dfrac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$.

8.12. $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

8.13. $\dfrac{13z-338}{2z^3+13z^2-169z}$.

8.14. $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$.

8.15. $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

8.20. $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$.

8.21. $\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

8.22. $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-4z^4}$.

8.23. $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$.

8.24. $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.

8.25. $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$.

8.26. $\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$.

8.27. $\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.

8.28. $\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$.

8.29. $\dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$.

8.30. $\dfrac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$.

**Задача 9.** Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

9.1. $\dfrac{z+1}{z(z-1)},\quad z_0=1+2i$.

9.16. $\dfrac{z}{z^2+1},\quad z_0=-3-2i$

9.2. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i$.

9.3. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-3-2i$.

9.4. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-2+i$.

9.5. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=1+3i$.

9.6. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=2-i$

9.7. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-1+2i$.

9.8. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-2-3i$.

9.9. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=2+i$.

9.10. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=3-i$.

9.11. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2+3i$.

9.12. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2-2i$.

9.13. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=2+i$.

9.14. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=1-2i$.

9.17. $\frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+2i$.

9.18. $\frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=1-3i$

9.19. $\frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-3-i$

9.20. $\frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+i$

9.21. $\frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-1-2i$

9.22. $\frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3+i$

9.23. $\frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=2-2i$

9.24. $\frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-2-i$

9.25. $\frac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-1-3i$

9.26. $\frac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-3+2i$

9.27. $\frac{2z}{z^2+4}$, $z_0=2+3i$

9.28. $\frac{2z}{z^2+4}$, $z_0=3+2i$

9.29. $\frac{2z}{z^2-4}$, $z_0=-1+3i$



9.15. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3+i$.

9.30. $\frac{2z}{z^2-4}$, $z_0=2+2i$

**Задача 10.** Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$.

10.1. $z\cos\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$.

10.2. $\sin\frac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.3. $ze^{z/(z-5)}$, $z_0=5$.

10.4. $\sin\frac{2z-7}{z+2}$, $z_0=-2$.

10.5. $\cos\frac{3z}{z-i}$, $z_0=i$.

10.6. $\sin\frac{5z}{z-2i}$, $z_0=2i$.

10.7. $\sin\frac{3z-i}{3z+i}$, $z_0=-\frac{i}{3}$.

10.8. $z\cos\frac{3z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.9. $z\sin\frac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.10. $(z-3)\cos\pi\frac{z-3}{z}$, $z_0=0$.

10.16. $ze^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0=2$.

10.17. $e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$.

10.18. $\sin\frac{2z}{z-4}$, $z_0=4$.

10.19. $\sin\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

10.20. $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, $z_0=1$.

10.21. $ze^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$, $z_0=a$.

10.22. $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$, $z_0=\pi$.

10.23. $z\sin\pi\frac{z+2}{z}$, $z_0=0$.

10.24. $z\cos\pi\frac{z+3}{z-1}$, $z_0=1$.

10.25. $z^2\sin\frac{z+3}{z}$, $z_0=0$.

10.11. $z^2 \sin \pi \dfrac{z+1}{z}$, $z_0 = 0$.

10.12. $z \cos \dfrac{z}{z+2i}$, $z_0 = -2i$.

10.13. $\cos \dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0 = 2$.

10.14. $\sin \dfrac{z+i}{z-1}$, $z_0 = i$.

10.15. $\sin \dfrac{z}{z-3}$, $z_0 = 3$.

10.26. $z \sin \dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

10.27. $z \cos \dfrac{z}{z-3}$, $z_0 = 3$.

10.28. $z \sin \pi \dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

10.29. $z \cos \dfrac{z}{z-5}$, $z_0 = 5$.

10.30. $z e^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0 = 4$.

**Задача 11.** Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции.

11.1. $\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.2. $z^3 e^{7/z^2}$.

11.3. $\dfrac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$

11.4. $\dfrac{\cos 7z - 1}{chz - z - z^3/6}$.

11.5. $\dfrac{sh6z - 6z}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.6. $\dfrac{ch5z - 1}{e^z - 1 - z}$.

11.16. $\dfrac{ch2z - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.17. $\dfrac{e^{z^3}}{shz - 1 - z^2/2}$.

11.18. $z e^{4/z^3}$.

11.19. $\dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$.

11.20. $\dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.21. $\dfrac{e^{7z}-1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.



11.7. $z \sin \dfrac{6}{z^2}$.

11.8. $\dfrac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.9. $\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.10. $\dfrac{\cos z^2 - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.11. $\dfrac{e^{5z}-1}{chz - z - z^2/2}$.

11.12. $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

11.13. $z^4 \cos \dfrac{5}{z^2}$.

11.14. $\dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.15. $\dfrac{sh2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.22. $\dfrac{\sin 6z - 6z}{shz - 1 - z^3/6}$.

11.23. $z \sin \dfrac{3}{z^3}$.

11.24. $\dfrac{\cos 5z - 1}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.25. $\dfrac{sh4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

11.26. $\dfrac{ch3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.27. $\dfrac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.28. $\dfrac{\sin z^4 - z^4}{shz - z - z^3/6}$.

11.29. $z \cos \dfrac{2}{z^3}$.

11.30. $\dfrac{\cos z^4/2}{chz - 1 - z^2/2}$.

**Задача 12.** Для данной функции найти изолированные особые точки определить их тип.

12.1. $\dfrac{e^{1/z}}{\sin(1/z)}$.

12.2. $\dfrac{1}{\cos z}$.

12.16. $\dfrac{e^z - 1}{\sin \pi z}$.

12.17. $thz$.

12.3. $tg^2 z$.

12.4. $z tg z e^{1/z}$.

12.5. $\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

12.6. $\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

12.7. $\dfrac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.

12.8. $tg\dfrac{1}{z}$.

12.9. $ctg\dfrac{1}{z}$.

12.10. $\dfrac{1}{e^z+1}$.

12.11. $ctg\pi z$.

12.12. $\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.

12.13. $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

12.18. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.

12.19. $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$.

12.20. $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$.

12.21. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)\cos\frac{1}{z-2}}$.

12.22. $z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

12.23. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}$.

12.24. $\dfrac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}$.

12.25. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.

12.26. $ctg\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$.

12.27. $\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{1/z}$.

12.28. $\dfrac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.



12.14. $\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$.

12.15. $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

12.29. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

12.30. $\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

**Задача 13.** Вычислить интеграл.

13.1. $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$.

13.2. $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=5/4}\frac{2dz}{z(z^2-1)}$.

13.3. $\displaystyle\oint_{|z-i|=3/2}\frac{dz}{z(z^2+4)}$.

13.4. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$.

13.5. $\displaystyle\oint_{|z-3|=1/2}\frac{e^z}{\sin z}dz$.

13.6. $\displaystyle\oint_{|z-3/2|=2}\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$.

13.7. $\displaystyle\oint_{|z-1|=3}\frac{ze^z}{\sin z}dz$.

13.8. $\displaystyle\oint_{|z-3/2|=2}\frac{2z|z-1|}{\sin z}dz$.

13.16. $\displaystyle\oint_{|z-6|=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$.

13.17. $\displaystyle\oint_{|z+1|=1/2}\frac{tgz+2}{4z^2+\pi z}dz$.

13.18. $\displaystyle\oint_{|z+3/2|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$.

13.19. $\displaystyle\oint_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$.

13.20. $\displaystyle\oint_{|z|=1/4}\frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}dz$.

13.21. $\displaystyle\oint_{|z|=\pi/2}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz$.

13.22. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz$.

13.23. $\displaystyle\oint_{|z-i|=2}\frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz$.

13.9. $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz$.

13.10. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} dz$.

13.11. $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)} dz$.

13.12. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz$.

13.13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi} dz$.

13.14. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz$.

13.15. $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz$.

13.24. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z} dz$.

13.25. $\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)} dz$.

13.26. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)\left(z+\frac{\pi}{3}\right)} dz$.

13.27. $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z} dz$.

13.28. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z} dz$.

13.29. $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z} dz$.

13.30. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}(z-\pi)} dz$.

**Задача 14.** Вычислить интеграл.

14.1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3} dz$.

14.2. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3} dz$.

14.16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3} dz$.

14.17. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4} dz$.



14.3. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z} dz$.

14.4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz$.

14.5. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} dz$.

14.6. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz$.

14.7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4} dz$.

14.8. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z} dz$.

14.9. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3} dz$.

14.10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3} dz$.

14.11. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4} dz$.

14.12. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4} dz$.

14.18. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3} dz$.

14.19. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^5-3z^3+5z}{z^4} dz$.

14.20. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4} dz$.

14.21. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4} dz$.

14.22. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5} dz$.

14.23. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^z-z-1}{z^3} dz$.

14.24. $\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\frac{i}{z^2} dz$.

14.25. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6} dz$.

14.26. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3} dz$.

14.27. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3} dz$.

14.13. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6}\,dz$.

14.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}\,dz$.

14.15. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}\,dz$.

14.28. $\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{2i}{z}\,dz$.

14.29. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z-\sin z}{z^2}\,dz$.

14.30. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}\,dz$.

**Задача 15.** Вычислить интеграл.

15.1. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-sh^2\pi^2 z}\,dz$.

15.2. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z-1+9z^2/2}{z^4 sh\frac{9}{4}z}\,dz$.

15.3. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{sh2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi^2 z}{3}}\,dz$.

15.4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ch3z-1-9z^2/2}{z^4 sh\frac{9}{8}z}\,dz$

15.5. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-1-2z}{zsh^2 4iz}\,dz$.

15.6. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{zsh2\pi z}\,dz$.

15.16. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{zsh4z}\,dz$.

15.17. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{7z}-ch5z}{z\sin 2iz}\,dz$.

15.18. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{ch3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}\,dz$.

15.19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{sh3z-\sin 3z}{z^3 shiz}\,dz$.

15.20. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2 sh5z}\,dz$.

15.21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z-3z}{z^2 sh^2 iz}\,dz$.



15.7. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z}ch4z}{z\sin 4\pi z}\,dz$.

15.8. $\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{chz-\cos 3z}{z^2\sin 5\pi z}\,dz$.

15.9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh3z-\sin 3z}{z^3 sh2z}\,dz$.

15.10. $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3 sh16\pi z}\,dz$.

15.11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 sh^2 2z}\,dz$.

15.12. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4 sh\frac{4}{3}z}\,dz$.

15.13. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{sh\pi z-\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi z}{6}}\,dz$.

15.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ch4z-8z^2-1}{z^4\sin\frac{8z}{3}}\,dz$.

15.15. $\oint\limits_{|z|=0,9} \frac{e^{3z}-1-3z}{sh^2\pi z}\,dz$.

15.22. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z-1+2z^2}{z^4 sh\frac{\pi z}{3}}\,dz$.

15.23. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{sh2z-2z}{z^2\sin^2\frac{z}{3}}\,dz$.

15.24. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ch2z-1-2z^2}{z^4\sin\frac{2\pi z}{3}}\,dz$.

15.25. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{2z}-1-2z}{zsh^2 2\pi z}\,dz$.

15.26. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 sh8iz}\,dz$.

15.27. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z}-ch6z}{z\sin\pi z}\,dz$.

15.28. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{ch2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}\,dz$.

15.29. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{shiz-\sin iz}{z^3 sh\frac{z}{3}}\,dz$.

15.30. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 sh3\pi z}\,dz$.

**Задача 16.** Вычислить интеграл.

16.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=3}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$.

16.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z+6|=2}\left(ze^{\frac{1}{z+6}}+\frac{2\cos\pi z/5}{(z+5)^2(z+3)}\right)dz$.

16.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{2sh\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)dz$.

16.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z+2|=2}\left(zch\frac{1}{z+2}-\frac{2\sin\pi z/2}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz$.

16.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$.

16.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z+3|=2}\left(zsh\frac{i}{z+3}-\frac{4sh\,\pi iz/4}{(z+2)^2z}\right)dz$.

16.7. $\displaystyle\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}-\frac{8ch\frac{\pi iz}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz$.

16.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z+4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z+4}-\frac{2\sin\pi z/6}{(z+3)^2(z+1)}\right)dz$.



16.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-7i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$.

16.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5}-\frac{2ch\,\pi iz/4}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz$.

16.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}-\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz$.

16.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2}\left(ze^{\frac{2}{z-1}}+\frac{2\cos\pi z/2}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz$.

16.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$.

16.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2}\left(zch\frac{3}{z-2}-\frac{2\cos\pi z/3}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz$.

16.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8ch\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz$.

16.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=2}\left(zsh\frac{1}{z-3}-\frac{2\sin\pi z/8}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz$.

16.17. $\oint\limits_{|z+3i|=2} \left( \dfrac{4sh\dfrac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)} - \dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}-i} \right) dz$.

16.18. $\oint\limits_{|z-4|=2} \left( z\cos\dfrac{1}{z-4} + \dfrac{10ch\,\pi iz/5}{(z-5)^2(z-7)} \right) dz$.

16.19. $\oint\limits_{|z-5i|=2} \left( \dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i} - \dfrac{2\cos\dfrac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} \right) dz$.

16.20. $\oint\limits_{|z-4|=2} \left( z\sin\dfrac{i}{z-5} + \dfrac{2sh\,\pi iz/12}{(z-6)^2(z-8)} \right) dz$.

16.21. $\oint\limits_{|z-i|=2} \left( \dfrac{4\sin\dfrac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)} + \dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i} \right) dz$.

16.22. $\oint\limits_{|z-6|=2} \left( ze^{\frac{1}{z-6}} - \dfrac{2ch\,\pi iz/5}{(z-5)^2(z-3)} \right) dz$.

16.23. $\oint\limits_{|z-6i|=2} \left( \dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} - \dfrac{2ch\dfrac{\pi iz}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)} \right) dz$.

16.24. $\oint\limits_{|z-5|=2} \left( zch\dfrac{2}{z-5} + \dfrac{4\cos\pi z/4}{(z-4)^2(z-2)} \right) dz$.



16.25. $\oint\limits_{|z+6i|=2} \left( \dfrac{2sh\dfrac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)} + \dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1} \right) dz$.

16.26. $\oint\limits_{|z-4|=2} \left( zsh\dfrac{1}{z-4} - \dfrac{2\sin\pi z/6}{(z-3)^2(z-1)} \right) dz$.

16.27. $\oint\limits_{|z+2i|=2} \left( \dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} - \dfrac{4\cos\dfrac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)} \right) dz$.

16.28. $\oint\limits_{|z-3|=2} \left( z\cos\dfrac{1}{z-3} - \dfrac{4ch\,\pi iz/2}{z(z-2)^2} \right) dz$.

16.29. $\oint\limits_{|z-2i|=2} \left( \dfrac{2\sin\dfrac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} \right) dz$.

16.30. $\oint\limits_{|z-2|=2} \left( z\sin\dfrac{i}{z-2} - \dfrac{2sh\,\pi iz/2}{(z-1)^2(z+1)} \right) dz$.

**Задача 17.** Вычислить интеграл.

17.1. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$.

17.2. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}$.

17.3. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$.

17.16. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$.

17.17. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}$.

17.18. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$.

17.4. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}$.

17.5. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$.

17.6. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}$.

17.7. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$.

17.8. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}$.

17.9. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$.

17.10. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$.

17.11. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$.

17.12. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$.

17.13. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$.

17.14. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$.

17.19. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}$.

17.20. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}$.

17.21. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$.

17.22. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sin t+5}$.

17.23. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sin t+5}$.

17.24. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}$.

17.25. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t+9}$.

17.26. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{7}\sin t+4}$.

17.27. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}$.

17.28. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$.

17.29. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}$.



17.15. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$.

17.30. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{21}\sin t+5}$.

**Задача 18.** Вычислить интеграл.

18.1. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}$.

18.2. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}$.

18.3. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}$.

18.4. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}$.

18.5. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.6. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}$.

18.7. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$.

18.8. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.9. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2}$.

18.16. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.17. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$.

18.18. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\cos t)^2}$.

18.19. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.20. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}$.

18.21. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.22. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.23. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.24. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

18.10. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.11. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.12. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.13. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.14. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}$.

18.15. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.25. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.26. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$.

18.27. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.28. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.29. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$.

18.30. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}$.

**Задача 19.** Вычислить интеграл.

19.1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$.

19.2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$.

19.3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^4+1)^2}dx$.

19.4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

19.5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$.

19.16. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$.

19.17. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

19.18. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx$.

19.19. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.

19.20. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.



19.6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

19.7. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+10x^2+9}dx$.

19.8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

19.9. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$.

19.10. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.

19.11. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

19.12. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

19.13. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx$.

19.14. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$.

19.15. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$.

19.21. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$.

19.22. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

19.23. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$.

19.24. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$.

19.25. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx$.

19.26. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

19.27. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$.

19.28. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$.

19.29. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

19.30. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx$.

**Задача 20.** Вычислить интеграл.

20.1. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx$.

20.16. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx$.

20.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

20.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

20.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

20.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$.

20.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)^2}dx$.

20.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx$.

20.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3-2)\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}dx$.

20.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx$.

20.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx$.

20.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx$.

20.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$.

20.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx$.

20.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx$.

20.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$.

20.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

20.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$.

20.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx$.

20.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2-x+1)^2}dx$.

20.24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$.

20.25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$.

20.26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$.

20.27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$.



20.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$.

20.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$.

20.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$.

20.28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

20.29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$.

20.30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$.

## Библиографический список

1. *Чудесенко В.Ф.*, Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): Учеб. пособие для вузов.- 2-е изд., перераб.- М.: Высш.шк., 1999.-126.
2. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.*, Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч 2.- М.: Высш. шк., 1986.-415 с.
3. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.*, Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.-299с.



**Функции комплексного переменного**
Составители: *КОРПЕН Инна Владимировна*
*БОГДАНОВА Светлана Николаевна*

Редактор Н.В. Вершинина
Технический редактор В.Ф. Елисеева

Подписано в печать
Формат 60×84 1/16. Бумага 13.05.05. офсетная
Печать офсетная
Усл. п. л. 3,4  Усл. кр.-отт. 3,4  Уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. - 144

Государственное образовательное учреждения
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.