

517  
745

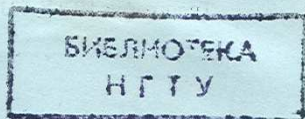
Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА  
Кафедра «Высшая математика»

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ  
ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для студентов всех специальностей и всех форм обучения

Часть 1



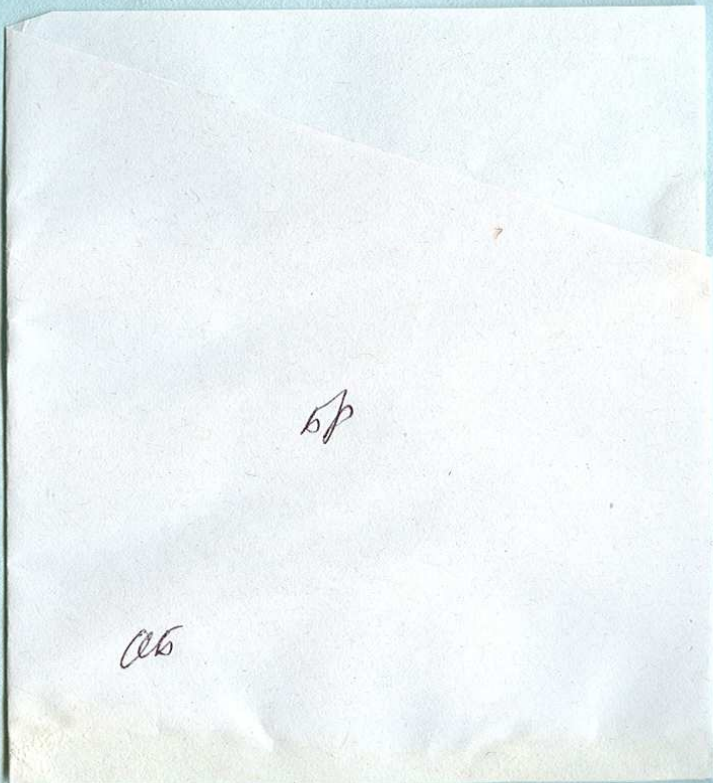
Н.Новгород, 2008

Составители: М.Ф.Авдеева, М.С.Баранова, Ф.А.Богашов, А.В.Владыкин, М.Е.Елисеев, Л.Н.Ерофеева, В.И.Ершов, Е.К.Китаева, Н.С.Корнилова, Л.М.Кузнецова, С.В.Лещева, Т.В.Лухманова, Л.Н.Мазунова, С.А.Метлицкая, И.В.Пашина, Т.И.Пересыпкина, Е.Ф.Ромашевская, Ю.А.Самохин, В.П.Федотов, С.И.Хомутецкая, Л.Г.Шепелевич, Е.Б.Шинкарева, С.Д.Шуко.

УДК 517.2

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одного переменного. Расчетные задания по курсу высшей математики. Ч1. Для студентов всех специальностей и всех форм обучения / НГТУ; сост.: М.Ф.Авдеева, М.С.Баранова и др. Н.Новгород, 2008. – 77 с.

Научный редактор Ю.А.Самохин  
Редактор Э.Б. Абросимова  
Компьютерный набор Н.А.Колпакова



га газетная.  
Экз. Заказ 278.

и. Р. Е. Алексева.  
инина, 24.

ственный технический  
ксеева, 2008

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

### ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ЗАДАНИЕ 1. Используя правило Крамера, решить линейную систему.

$$1.1. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.21. \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.22. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.23. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.27. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ -6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.28. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.29. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.30. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 2. Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Вычислить заданное матричное выражение в соответствии с

вариантом.

2.1.  $A \cdot B^T + 3C$ .

2.2.  $A^T \cdot B - 3C$ .

2.3.  $A \cdot B - 2C^T$ .

2.4.  $A \cdot C + 3B^T$ .

2.5.  $A \cdot C^T - 2B$ .

2.6.  $A^T \cdot C - 3B$ .

2.7.  $(A \cdot C)^T + 3B$ .

2.8.  $B \cdot C + 3A^T$ .

2.9.  $B \cdot C^T - 4A$ .

2.10.  $B^T \cdot C + 4A$ .

2.11.  $(B \cdot C)^T - 2A$ .

2.12.  $(A + 2B) \cdot C^T$ .

2.13.  $(C + 3B) \cdot A^T$ .

2.14.  $(A - 2C) \cdot B^T$ .

2.15.  $(A \cdot D)^T + 2C$ .

2.16.  $A \cdot D^T + 3C$ .

2.17.  $A^T \cdot D - 3C$ .

2.18.  $A \cdot D - 2C^T$ .

2.19.  $A \cdot C + 3D^T$ .

2.20.  $A \cdot C^T - 2D$ .

2.21.  $A^T \cdot C - 3D$ .

2.22.  $(A \cdot C)^T + 3D$ .

2.23.  $B \cdot C + 3D^T$ .

2.24.  $B \cdot C^T - 4D$ .

2.25.  $B^T \cdot C + 4D$ .

2.26.  $(B \cdot C)^T - 2D$ .

2.27.  $(D + 2B) \cdot C^T$ .

2.28.  $(C + 3B) \cdot D^T$ .

2.29.  $(D - 2C) \cdot B^T$ .

2.30.  $(A \cdot B)^T + 2C$ .

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить матричное соотношение при заданных выражениях для входящих в него матриц в соответствии с вариантом.

3.1.  $AB - 2C^{-1}D$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

3.2.  $A^2 + 4(BC)^{-1}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ .

3.3.  $2A^{-1} + B^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

3.4.  $AB^{-1} + 4C$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 5 \\ 7 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -3 \\ 0 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ .

3.5.  $2(AB)^{-1} + C^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

3.6.  $A^{-1}B - 3C$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & -9 & -1 \end{pmatrix}$ .

3.7.  $4A^{-1} - 6B^{-1}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ .

3.8.  $AA^T - 4B^{-1}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -2 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ .

$$3.9. A-3B^{-1}C, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 \\ -5 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.10. 3A^{-1}+2B^T C, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -15 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$3.11. AB^{-1}+3C^T, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.12. (8AB)^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 8 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$3.13. \det(AA^{-1})-(BC)^T, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$3.14. (AB)^{-1}C, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3.15. 14A^{-1}B^{-1}+C^2, \quad A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3.16. 2AB+C^{-1}D, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.17. AB+C^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3.18. A^{-1}+2B^2, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.19. A+6BC^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 5 & 7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3.20. A^{-1}+3BC, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, C=(1 \ -2 \ 2).$$

$$3.21. A^{-1}-2B^2, \quad A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.22. (A^{-1}-7B^{-1})^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3.23. A^{-1}-BB^T, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.24. (AB)^2+3C^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B=(1 \ 4 \ -1), C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. 3A^T+B^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3.26. 4A^{-1}B+C^T, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.27. (AB)^{-1}, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.28. A^{-1}-(BC)^T, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, C=(1 \ 7 \ -2).$$

$$3.29. (AB)^{-1}C, \quad A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.30. (2A^{-1}-7B^{-1})^T, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 4. Решить матричные уравнения  $AX=B$  и  $XA=B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Значения элементов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ ,  $i, j=1,2$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

$a_{ij}, b_{ij}$ \ № варианта	№ варианта									
	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	4.5.	4.6.	4.7.	4.8.	4.9.	4.10.
$a_{11}$	1	1	1	2	3	3	2	-2	2	2
$a_{12}$	1	0	-2	1	1	4	2	1	3	2
$a_{21}$	1	1	2	-1	3	4	3	1	4	3
$a_{22}$	-1	1	3	2	0	2	1	4	1	1
$b_{11}$	0	2	11	3	7	14	2	-2	4	0
$b_{12}$	6	-4	-12	2	3	13	12	7	15	8
$b_{21}$	-4	6	18	1	6	12	-1	10	-2	2
$b_{22}$	6	-7	-21	-1	3	4	12	19	15	8
$a_{ij}, b_{ij}$ \ № варианта	№ варианта									
	4.11.	4.12.	4.13.	4.14.	4.15.	4.16.	4.17.	4.18.	4.19.	4.20.
$a_{11}$	4	2	0	3	2	2	2	3	3	1
$a_{12}$	5	1	3	1	6	1	1	2	0	1
$a_{21}$	2	3	2	3	3	-1	1	0	2	2
$a_{22}$	4	4	2	2	3	2	0	2	2	-1
$b_{11}$	23	-2	12	-2	14	5	6	6	3	1
$b_{12}$	-7	-3	-9	4	-4	2	3	2	-3	5
$b_{21}$	19	-3	4	-1	9	-1	2	6	6	-7
$b_{22}$	-2	-10	-4	5	0	-1	-1	14	0	1

$a_{ij}, b_{ij}$ \ № варианта	№ варианта									
	4.21.	4.22.	4.23.	4.24.	4.25.	4.26.	4.27.	4.28.	4.29.	4.30.
$a_{11}$	1	2	1	2	-2	0	-1	3	-1	-1
$a_{12}$	1	1	1	-1	1	-5	3	1	1	3
$a_{21}$	1	-1	-1	2	2	1	2	-1	1	2
$a_{22}$	2	0	1	0	0	1	2	2	2	3
$b_{11}$	5	-5	1	-10	3	-10	1	1	5	-1
$b_{12}$	2	3	7	9	5	-5	-3	7	-5	-1
$b_{21}$	9	3	-9	-6	-2	6	6	-5	10	2
$b_{22}$	-1	-1	3	10	-4	4	6	0	-1	-7

ЗАДАНИЕ 5. Решить матричное уравнение  $AXB=C$ , где  $A, B, C$  – заданные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Значения элементов  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ ,  $i, j=1,2$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{21}$	$c_{22}$
5.1	3	-1	5	-2	5	6	7	8	4	6	-9	0
5.2	1	-2	2	3	-2	3	-4	1	-2	3	4	-2
5.3	3	2	5	0	2	-2	1	3	4	-6	3	2
5.4	2	-2	-3	4	2	3	4	5	-1	2	4	-2
5.5	-3	1	2	-4	5	0	2	3	4	0	2	1
5.6	3	2	4	3	2	2	4	3	-4	3	4	-2
5.7	3	2	5	4	5	2	7	3	4	1	2	7
5.8	4	2	5	3	-2	3	-4	4	4	3	2	2
5.9	2	-1	3	-2	2	6	3	8	2	6	1	3
5.10	6	2	5	3	2	-3	-4	4	-2	-3	-4	2
5.11	3	4	5	8	5	-2	7	3	4	1	-2	0
5.12	7	2	6	3	-2	-1	-4	2	-2	3	1	-2
5.13	2	0	5	-1	5	-6	-2	3	3	5	2	0
5.14	-3	1	6	-3	-2	2	-4	3	-9	-3	-4	-2
5.15	1	-1	4	-2	5	1	7	2	2	4	-2	0

№ варианта	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{21}$	$c_{22}$
5.16	3	-1	6	-3	-1	1	-2	4	4	3	-2	-2
5.17	2	-3	2	0	3	2	7	5	1	3	2	1
5.18	1	1	6	3	-3	2	-4	4	2	-3	-4	2
5.19	1	-2	0	-2	5	6	7	0	1	2	8	5
5.20	2	2	3	5	-3	3	-2	1	-3	1	4	-2
5.21	3	-1	5	0	-2	3	2	1	3	1	7	5
5.22	4	3	2	3	2	1	-4	1	-2	3	-5	2
5.23	2	-4	1	-3	0	3	2	2	8	0	-6	4
5.24	-2	4	2	-1	2	0	-3	1	-1	3	-6	2
5.25	3	0	5	-2	1	6	0	3	7	9	5	3
5.26	2	0	3	-1	-2	3	0	4	3	0	3	1
5.27	0	3	5	-2	2	0	7	3	6	8	4	2
5.28	0	-1	5	-2	4	5	6	7	4	1	5	3
5.29	3	2	0	4	5	6	2	3	5	7	3	1
5.30	2	-1	5	-2	3	4	5	6	1	0	2	3

ЗАДАНИЕ 6. Решить однородную линейную систему.

- |   |   |
|---|---|
| <p>6.1. <math display="block">\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.2. <math display="block">\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.3. <math display="block">\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.4. <math display="block">\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.5. <math display="block">\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.6. <math display="block">\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}</math></p> | <p>6.7. <math display="block">\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.8. <math display="block">\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.9. <math display="block">\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.10. <math display="block">\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.11. <math display="block">\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.12. <math display="block">\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}</math></p> |
|---|---|

- |  |   |
|--|---|
| <p>6.13. <math display="block">\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.14. <math display="block">\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.15. <math display="block">\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.16. <math display="block">\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.17. <math display="block">\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.18. <math display="block">\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.19. <math display="block">\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.20. <math display="block">\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.21. <math display="block">\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> | <p>6.22. <math display="block">\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.23. <math display="block">\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.24. <math display="block">\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.25. <math display="block">\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.26. <math display="block">\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.27. <math display="block">\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.28. <math display="block">\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.29. <math display="block">\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}</math></p> <p>6.30. <math display="block">\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}</math></p> |
|--|---|

ЗАДАНИЕ 7. Найти общее решение системы.

$$7.1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ -x_1 + 16x_2 - 13x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4. \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 17x_4 + 11x_5 = 2, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$7.5. \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

$$7.7. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 13, \\ 14x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 15, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 12. \end{cases}$$

$$7.9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2. \end{cases}$$

$$7.11. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 5, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 7. \end{cases}$$

$$7.2. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ -7x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_5 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 13. \end{cases}$$

$$7.4. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 13x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

$$7.6. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 2, \\ -5x_1 + 8x_2 - 8x_3 - 4x_4 + 11x_5 = 5. \end{cases}$$

$$7.8. \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 11x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

$$7.10. \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -13, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 9, \\ 3x_2 + 13x_3 + x_4 - 5x_5 = 3. \end{cases}$$

$$7.12. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ -x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

$$7.13. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = -2, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -6. \end{cases}$$

$$7.15. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

$$7.17. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 = -11, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1. \end{cases}$$

$$7.19. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7, \\ 4x_2 - 13x_3 - 4x_4 + x_5 = -12. \end{cases}$$

$$7.21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$7.23. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$$

$$7.25. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 9x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.14. \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4, \\ 5x_1 - 10x_2 - 10x_3 + 6x_4 - 18x_5 = -14. \end{cases}$$

$$7.16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - 12x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 6x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$7.18. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_4 + 10x_5 = 3. \end{cases}$$

$$7.20. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 7x_1 - x_2 + 6x_3 + 13x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2. \end{cases}$$

$$7.22. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 8. \end{cases}$$

$$7.24. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$$

$$7.26. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 9x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2. \end{cases}$$

$$7.27. \begin{cases} 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$$

$$7.28. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5. \end{cases}$$

$$7.29. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$7.30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ 9x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 19x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

### ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

**ЗАДАНИЕ 8.** В четырехугольной призме  $ABCD, B_1C_1D_1$  известны координаты ее вершин:  $A(2;4;9)$ ,  $B(9;0;0)$ ,  $C(1;9;3)$ ,  $A_1(9;6;2)$ ; точки  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$ ,  $Q_5$  – центры соответственно граней  $ABCD$ ,  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $BB_1C_1C$ ,  $DD_1C_1C$ ,  $AA_1D_1D$ ,  $AA_1B_1B$ .

Разложить по базису  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  заданный вектор, найти его длину и угол, который он образует с вектором  $\overline{AC_1}$ . Заданный вектор взять в соответствии с вариантом.

- |                           |                             |                             |
|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 8.1. $\overline{AQ_1}$ .  | 8.11. $\overline{CQ_4}$ .   | 8.21. $\overline{C_1Q_4}$ . |
| 8.2. $\overline{AQ_2}$ .  | 8.12. $\overline{CQ_5}$ .   | 8.22. $\overline{B_1Q_2}$ . |
| 8.3. $\overline{AQ_3}$ .  | 8.13. $\overline{AQ_2}$ .   | 8.23. $\overline{B_1Q_3}$ . |
| 8.4. $\overline{BQ_3}$ .  | 8.14. $\overline{AQ_2}$ .   | 8.24. $\overline{B_1Q_4}$ . |
| 8.5. $\overline{BQ_4}$ .  | 8.15. $\overline{AQ_3}$ .   | 8.25. $\overline{QQ_1}$ .   |
| 8.6. $\overline{BQ_5}$ .  | 8.16. $\overline{D_1Q_5}$ . | 8.26. $\overline{QQ_2}$ .   |
| 8.7. $\overline{DQ_1}$ .  | 8.17. $\overline{D_1Q_2}$ . | 8.27. $\overline{QQ_3}$ .   |
| 8.8. $\overline{DQ_2}$ .  | 8.18. $\overline{D_1Q_2}$ . | 8.28. $\overline{QQ_3}$ .   |
| 8.9. $\overline{DQ_3}$ .  | 8.19. $\overline{C_1Q_2}$ . | 8.29. $\overline{QQ_4}$ .   |
| 8.10. $\overline{CQ_1}$ . | 8.20. $\overline{C_1Q_2}$ . | 8.30. $\overline{Q_2Q_3}$ . |

**ЗАДАНИЕ 9.** Даны векторы  $\vec{p} = \text{col}(1;2;-3)$ ,  $\vec{q} = \text{col}(2;-1;1)$ . Найти

проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ . Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$\vec{a}, \vec{b}$	№ варианта	$\vec{a}, \vec{b}$
9.1	$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$	9.16	$\vec{a} = \vec{q} - 2\vec{p}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$
9.2	$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{q} - \vec{p}$	9.17	$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$
9.3	$\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$	9.18	$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$
9.4	$\vec{a} = \vec{q} - 3\vec{p}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$	9.19	$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{q} - \vec{p}$
9.5	$\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$	9.20	$\vec{a} = 3\vec{q} - \vec{p}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$
9.6	$\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$	9.21	$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$
9.7	$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$	9.22	$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{q} - \vec{p}$
9.8	$\vec{a} = 2\vec{q} - 3\vec{p}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$	9.23	$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$
9.9	$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + 2\vec{q}$	9.24	$\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$
9.10	$\vec{a} = \vec{q} - \vec{p}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$	9.25	$\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$
9.11	$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$	9.26	$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$
9.12	$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$	9.27	$\vec{a} = \vec{q} - 3\vec{p}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$
9.13	$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{q} - 2\vec{p}$	9.28	$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{q} - \vec{p}$
9.14	$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$	9.29	$\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$
9.15	$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{q} + \vec{p}$	9.30	$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$

**ЗАДАНИЕ 10.** Параллелограмм построен на заданных векторах

$\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$  и  $\vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n}$ . Найти площадь параллелограмма, если известны длины векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  и угол между ними. Выражения векторов  $\vec{a}, \vec{b}$ , длины векторов  $|\vec{m}|$  и  $|\vec{n}|$  и угол между ними  $(\vec{m}, \vec{n})$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$ \vec{m} $	$ \vec{n} $	$(\vec{m}, \vec{n})$
10.1	$3\vec{m} + 5\vec{n}$	$-2\vec{m} + 3\vec{n}$	1	2	$\frac{\pi}{3}$
10.2	$2\vec{m} - \vec{n}$	$4\vec{m} - 5\vec{n}$	1	1	$\frac{\pi}{4}$



№ варианта	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$ \bar{m} $	$ \bar{n} $	$(\bar{m}, \bar{n})$
10.3	$\bar{m} + 2\bar{n}$	$2\bar{m} + \bar{n}$	2	3	$\frac{\pi}{6}$
10.4	$3\bar{m} + 2\bar{n}$	$2\bar{m} - \bar{n}$	2	2	$\frac{\pi}{3}$
10.5	$2\bar{m} + 3\bar{n}$	$4\bar{m} + \bar{n}$	3	5	$\frac{\pi}{2}$
10.6	$3\bar{m} - 2\bar{n}$	$\bar{m} + \bar{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
10.7	$5\bar{m} - 6\bar{n}$	$\bar{m} + 2\bar{n}$	1	1	$\frac{\pi}{6}$
10.8	$3\bar{m} + 4\bar{n}$	$4\bar{m} + 5\bar{n}$	2	2	$\frac{\pi}{4}$
10.9	$-3\bar{m} + 4\bar{n}$	$4\bar{m} + 2\bar{n}$	1	2	$\frac{\pi}{2}$
10.10	$\bar{m} + \bar{n}$	$\bar{m} - 5\bar{n}$	2	2	$\frac{\pi}{2}$
10.11	$-3\bar{m} + \bar{n}$	$5\bar{m} + 3\bar{n}$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
10.12	$\bar{m} - 2\bar{n}$	$\bar{m} + 2\bar{n}$	3	3	$\frac{\pi}{3}$
10.13	$3\bar{m} - 2\bar{n}$	$5\bar{m} - 6\bar{n}$	4	6	$\frac{\pi}{3}$
10.14	$-3\bar{m} + \bar{n}$	$\bar{m} - \bar{n}$	2	1	$\frac{\pi}{6}$
10.15	$2\bar{m} - 5\bar{n}$	$-\bar{m} - \bar{n}$	1	3	$\frac{\pi}{3}$
10.16	$-3\bar{m} + 7\bar{n}$	$-2\bar{m} - 2\bar{n}$	1	4	$\frac{\pi}{2}$
10.17	$\bar{m} + \bar{n}$	$\bar{m} - \bar{n}$	3	2	$\frac{\pi}{4}$
10.18	$-2\bar{m} - 3\bar{n}$	$\bar{m} + \bar{n}$	4	5	$\frac{\pi}{2}$
10.19	$\bar{m} - \bar{n}$	$5\bar{m} + \bar{n}$	3	7	$\frac{\pi}{3}$
10.20	$4\bar{m} - \bar{n}$	$4\bar{m} + \bar{n}$	1	1	$\frac{\pi}{4}$
10.21	$\bar{m} + \bar{n}$	$\bar{m} - \bar{n}$	2	5	$\frac{\pi}{6}$

№ варианта	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$ \bar{m} $	$ \bar{n} $	$(\bar{m}, \bar{n})$
10.22	$6\bar{m} - 2\bar{n}$	$\bar{n} + \bar{m}$	5	6	$\frac{\pi}{3}$
10.23	$\bar{n} - 3\bar{m}$	$5\bar{n} + \bar{m}$	4	3	$\frac{\pi}{4}$
10.24	$-3\bar{n} - 3\bar{m}$	$\bar{n} + \bar{m}$	8	5	$\frac{\pi}{3}$
10.25	$3\bar{m} + 7\bar{n}$	$-\bar{m} - 2\bar{n}$	1	1	$\frac{\pi}{4}$
10.26	$\bar{m} - \bar{n}$	$3\bar{m} + 2\bar{n}$	2	2	$\frac{\pi}{4}$
10.27	$\bar{m} + \bar{n}$	$2\bar{m} - \bar{n}$	3	2	$\frac{\pi}{3}$
10.28	$\bar{m} - 9\bar{n}$	$\bar{m} + \bar{n}$	1	1	$\frac{\pi}{3}$
10.29	$-4\bar{m} + 6\bar{n}$	$2\bar{m} - 3\bar{n}$	4	10	$\frac{\pi}{2}$
10.30	$7\bar{n} - 2\bar{m}$	$2\bar{n} - 7\bar{m}$	5	5	$\frac{\pi}{3}$

ЗАДАНИЕ 11. Треугольник  $ABC$  задан своими вершинами. Найти его площадь. Координаты точек  $A, B, C$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$A$	$B$	$C$	№	$A$	$B$	$C$
11.1	(3;-1;2)	(1;2;-1)	(-1;1;-3)	11.21	(0;0;2)	(0;3;0)	(4;0;0)
11.2	(3;-5;3)	(3;-1;2)	(1;-1;3)	11.22	(0;0;-2)	(0;-3;0)	(4;0;0)
11.3	(2;-6;2)	(2;-2;1)	(0;-2;2)	11.23	(1;1;-1)	(1;-2;1)	(-4;0;0)
11.4	(4;-4;4)	(4;0;3)	(2;0;4)	11.24	(2;2;10)	(6;2;-2)	(-3;1;1)
11.5	(6;2;5)	(4;5;-2)	(2;4;0)	11.25	(3;3;15)	(9;3;-3)	(-2;6;-6)
11.6	(5;-3;5)	(5;1;4)	(3;1;5)	11.16	(-3;-2;-3)	(6;5;4)	(-5;-3;-4)
11.7	(6;-2;6)	(6;2;5)	(4;2;6)	11.17	(0;1;0)	(9;8;7)	(-2;0;-1)
11.8	(-1;-5;-2)	(-3;-2;-5)	(-5;-3;-7)	11.18	(-2;-1;-2)	(7;6;5)	(-4;-2;-3)
11.9	(2;10;4)	(6;4;10)	(10;6;14)	11.19	(6;3;6)	(7;6;0)	(-4;-2;-3)
11.10	(-3;1;-2)	(-1;-2;1)	(-1;1;-3)	11.20	(5;2;5)	(6;5;4)	(0;-2;3)
11.11	(-3;5;-3)	(-3;1;-2)	(-1;1;-3)	11.26	(1;1;5)	(3;1;-1)	(-3;9;-9)
11.12	(2;1;2)	(3;2;1)	(4;2;3)	11.27	(4;4;8)	(6;4;2)	(-1;3;-3)
11.13	(7;6;7)	(8;7;6)	(9;7;8)	11.28	(-2;-2;-4)	(-3;-2;-1)	(2;6;0)
11.14	(4;3;4)	(5;4;3)	(6;4;5)	11.29	(4;4;2)	(3;4;5)	(-1;-3;0)
11.15	(-4;-3;-4)	(5;4;3)	(-6;-4;-5)	11.30	(1;1;-1)	(0;1;2)	(2;0;3)

**ЗАДАНИЕ 12.** Тетраэдр задан вершинами в точках  $A, B, C, D$ . Найти объем тетраэдра и его высоту, опущенную из вершины  $D$  на грань  $ABC$  (для вариантов 1-7); высоту, опущенную из вершины  $A$  на грань  $BCD$  (для вариантов 8-14); высоту, опущенную из вершины  $B$  на грань  $ACD$  (для вариантов 14-22); высоту, опущенную из вершины  $C$  на грань  $ABD$  (для вариантов 23-30). Координаты точек взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$A$	$B$	$C$	$D$
12.1	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)	(2,-2,-4)
12.2	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)	(-3,0,1)
12.3	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)	(2,1,0)
12.4	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)	(0,-5,-4)
12.5	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)	(1,-1,2)
12.6	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)	(7,-3,1)
12.7	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)	(3,1,-4)
12.8	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)	(-4,3,5)
12.9	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(3,1,-4)	(-4,7,3)
12.10	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)	(-5,2,-8)
12.11	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)	(-10,8,7)
12.12	(1,-1,2)	(2,1,2)	(1,1,4)	(6,-3,8)
12.13	(14,4,5)	(-5,-3,2)	(-2,2,-1)	(-2,-6,-3)
12.14	(1,2,0)	(3,0,-3)	(5,2,6)	(8,4,-9)
12.15	(2,-1,2)	(1,2,-1)	(3,2,1)	(-4,2,5)
12.16	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)	(1,0,-2)
12.17	(2,3,1)	(6,3,7)	(4,1,-2)	(7,5,-3)
12.18	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)	(5,9,-8)
12.19	(1,5,-7)	(-3,6,3)	(-2,7,3)	(-4,8,-12)
12.20	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-5,-2,0)	(2,5,4)
12.21	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)	(3,4,5)
12.22	(4,-1,3)	(-2,1,0)	(0,-5,1)	(3,2,-6)
12.23	(7,2,4)	(7,-1,-2)	(3,3,1)	(-4,2,1)
12.24	(2,1,4)	(-1,5,-2)	(-7,-3,2)	(-6,-3,6)
12.25	(-1,-6,3)	(1,-5,9)	(-2,3,5)	(0,-1,-1)
12.26	(-1,-5,2)	(-6,0,-3)	(3,6,-3)	(-10,6,7)
12.27	(5,2,0)	(2,5,0)	(1,2,4)	(-1,1,1)
12.28	(2,-1,-2)	(1,2,1)	(5,0,-6)	(-10,9,7)
12.29	(-2,0,-4)	(-1,7,1)	(4,-8,-4)	(1,-4,6)
12.30	(1,3,6)	(2,2,1)	(-1,0,1)	(-4,6,-3)

### Преобразование произвольного базиса в ортонормированный базис

1. Краткие теоретические сведения.

Пусть  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$  данный базис в  $R_2$ . Преобразуем заданный базис в ортонормированный базис.

Введем следующую систему векторов:

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \lambda_{21} \vec{g}_1 \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) число  $\lambda_{21}$  выберем так, чтобы векторы  $\vec{g}_1$  и  $\vec{g}_2$  были ортогональны, то есть  $\lambda_{21}$  найдем из условия

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) = 0. \quad (2)$$

Для нахождения  $\lambda_{21}$  подставим значение вектора  $\vec{g}_2$  из (1) в равенство (2):

$$(\vec{g}_1, \vec{f}_2 - \lambda_{21} \vec{g}_1) = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\lambda_{21} = \frac{(\vec{f}_2, \vec{g}_1)}{|\vec{g}_1|^2}. \quad (4)$$

При найденном  $\lambda_{21}$  векторы  $\vec{g}_1$  и  $\vec{g}_2$  ортогональны и, следовательно, образуют базис, как и данная система  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ . Разделим каждый из векторов полученной ортогональной системы  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  на его длину:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{|\vec{g}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{|\vec{g}_2|}. \quad (5)$$

Очевидно, что векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  — единичные векторы.

С учетом вышесказанного, полученная система  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  — искомая ортонормированная система векторов, то есть удовлетворяет условию

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad \text{причем } i, j = 1, 2.$$

Указанный алгоритм перехода от произвольного базиса к ортонормированному можно применить к  $n$ -мерному произвольному базису: ( $n \geq 3$ ).

Укажем основные формулы для случая  $n \geq 3$ .

Пусть

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\} \quad (6)$$

данный произвольный базис в  $R_n$  ( $n \geq 3$ ).

Введем систему векторов:

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{f}_1, \\ \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \lambda_{21} \vec{g}_1, \\ \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \lambda_{31} \vec{g}_1 - \lambda_{32} \vec{g}_2, \\ \vec{g}_4 = \vec{f}_4 - \lambda_{41} \vec{g}_1 - \lambda_{42} \vec{g}_2 - \lambda_{43} \vec{g}_3, \\ \dots \\ \vec{g}_n = \vec{f}_n - \lambda_{n1} \vec{g}_1 - \lambda_{n2} \vec{g}_2 - \lambda_{n3} \vec{g}_3 - \dots - \lambda_{nn-1} \vec{g}_{n-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Числа  $\lambda_{ij}$ ,  $i=2,3,\dots,n$ ;  $j=1,2,\dots,n-1$  выбираем так, чтобы система векторов  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n\}$  была ортогональной, то есть удовлетворяла условию:

$$(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = 0, \text{ если } i \neq j. \quad (8)$$

Из условия ортогональности (8) находим  $\lambda_{ij}$ :

$$\lambda_{ij} = \frac{(\vec{f}_i, \vec{g}_j)}{|\vec{g}_j|^2}, \quad i=2,3,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,n-1 \quad (9)$$

Подставим найденные по формулам (9)  $\lambda_{ij}$  в систему (7). В этом случае получаем ортогональную систему:

$$\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n\}. \quad (10)$$

Разделим каждый вектор системы (10) на его длину. Приходим к искомой ортонормированной системе векторов:

$$\left\{ \vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{|\vec{g}_1|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{|\vec{g}_2|}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{g}_3}{|\vec{g}_3|}, \dots, \vec{e}_n = \frac{\vec{g}_n}{|\vec{g}_n|} \right\}. \quad (11)$$

Это означает, что система  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  удовлетворяет условию

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

**ЗАДАНИЕ 13.** Преобразовать данный базис  $\vec{f}_1 = \text{col}(m; -m)$ ,  $\vec{f}_2 = \text{col}(m; -\frac{m}{2})$ , в ортонормированный базис. Дать геометрическую иллюстрацию. Значение  $m$  в соответствии с вариантом взять из таблицы:

№ варианта	$m$	№ варианта	$m$	№ варианта	$m$
13.1	1	13.11	-0,6	13.21	$\frac{2}{7}$
13.2	-1	13.12	0,6	13.22	$-\frac{2}{7}$
13.3	0,5	13.13	$\frac{3}{7}$	13.23	$\frac{4}{3}$
13.4	$\frac{2}{3}$	13.14	$-\frac{3}{7}$	13.24	$-\frac{4}{3}$
13.5	$-\frac{2}{3}$	13.15	$\frac{3}{8}$	13.25	$\frac{5}{3}$
13.6	$\frac{2}{5}$	13.16	-1,5	13.26	$-\frac{5}{3}$
13.7	$-\frac{2}{5}$	13.17	$\frac{1}{3}$	13.27	0,8
13.8	-0,25	13.18	$-\frac{1}{3}$	13.28	-0,8
13.9	0,75	13.19	$\frac{1}{7}$	13.29	1,5
13.10	-0,75	13.20	$-\frac{1}{7}$	13.30	-0,5

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

**ЗАДАНИЕ 14.** Даны вершины треугольника  $ABC$ . Составить уравнение медианы, проведенной из вершины  $A$  (для вариантов 1-10), из вершины  $B$  (для вариантов 11-20), из вершины  $C$  (для вариантов 21-30). Координаты точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$A$	$B$	$C$	№	$A$	$B$	$C$
14.1	(-4;4)	(3;2)	(-5;0)	14.16	(-5;7)	(5;6)	(-3;2)
14.2	(-5;2)	(3;-1)	(-1;-5)	14.17	(1;5)	(5;3)	(1;-3)
14.3	(1;4)	(8;5)	(-2;-1)	14.18	(-7;-2)	(3;0)	(-7;-8)
14.4	(-7;2)	(1;2)	(-5;-6)	14.19	(-1;5)	(3;6)	(-3;-4)
14.5	(-1;4)	(1;8)	(-1;-2)	14.20	(-2;-2)	(3;3)	(1;-9)
14.6	(-2;2)	(6;5)	(-2;-7)	14.21	(-10;5)	(1;2)	(-7;2)
14.7	(-10;9)	(-1;4)	(-5;4)	14.22	(-4;3)	(1;-1)	(-3;-3)
14.8	(-4;2)	(4;1)	(-6;-1)	14.23	(-5;5)	(6;5)	(-4;1)
14.9	(-5;0)	(4;-2)	(-2;-6)	14.24	(1;3)	(6;2)	(0;4)
14.10	(1;2)	(4;4)	(2;-2)	14.25	(-7;5)	(-1;8)	(-3;0)
14.11	(-7;0)	(2;1)	(-6;-7)	14.26	(-1;3)	(4;5)	(-4;-5)
14.12	(-1;7)	(2;7)	(-2;-3)	14.27	(-2;1)	(4;2)	(0;-10)
14.13	(-2;0)	(7;4)	(-3;-8)	14.28	(-10;3)	(2;1)	(-8;1)
14.14	(-10;7)	(0;3)	(-6;3)	14.29	(-4;1)	(2;-2)	(-4;-4)
14.15	(-4;0)	(0;0)	(-2;-2)	14.30	(-5;3)	(2;4)	(0;0)

**ЗАДАНИЕ 15.** Найти точку, симметричную точке  $M$  относительно прямой  $l$ ; координаты точки  $M$  и уравнение прямой  $l$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$M$	$l$	№	$M$	$l$
15.1	(-10;5)	$2x - y = 0$	15.12	(1;-2)	$x + 1 = 0$
15.2	(16;7)	$3x + y - 15 = 0$	15.13	(-7;-9)	$x + y - 4 = 0$
15.3	(-4;-10)	$x + 3y - 4 = 0$	15.14	(10;-15)	$x - y - 1 = 0$
15.4	(7;-2)	$x - y - 1 = 0$	15.15	(-1;3)	$x - y - 2 = 0$
15.5	(-17;-2)	$x + 2 = 0$	15.16	(1;5)	$2x + y + 3 = 0$
15.6	(6;9)	$x + 2y - 4 = 0$	15.17	(-14;-16)	$x + y = 0$
15.7	(-9;6)	$2x - 3y - 3 = 0$	15.18	(0;-6)	$x - 2y + 8 = 0$
15.8	(7;-2)	$3x - y - 3 = 0$	15.19	(-6;-2)	$y + x = 0$
15.9	(-9;-2)	$x + y + 1 = 0$	15.20	(10;5)	$3x + 2y - 14 = 0$
15.10	(8;11)	$2x + 3y + 3 = 0$	15.21	(-6;12)	$x - 3y - 8 = 0$
15.11	(-5;8)	$3x - 2y - 8 = 0$	15.22	(11;-4)	$2x - y - 6 = 0$

№	$M$	$l$	№	$M$	$l$
15.23	(-11;0)	$3x + y + 3 = 0$	15.27	(-7;-5)	$x + 2y + 2 = 0$
15.24	(4;5)	$x + 3y + 1 = 0$	15.28	(4;-9)	$2x - 3y - 9 = 0$
15.25	(-13;12)	$x - y + 5 = 0$	15.29	(-11;5)	$3x - y - 12 = 0$
15.26	(13;-2)	$x + y - 3 = 0$	15.30	(3;7)	$x + y - 2 = 0$

**ЗАДАНИЕ 16.** Составить уравнение высоты треугольника  $ABC$ , опущенной из вершины  $A$  (для вариантов 1-10), из вершины  $B$  (для вариантов 11-20), из вершины  $C$  (для вариантов 21-30). Координаты точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$A$	$B$	$C$	№	$A$	$B$	$C$
16.1	(-6;2)	(4;-1)	(7;7)	16.16	(-4;1)	(1;-1)	(4;4)
16.2	(-4;3)	(7;1)	(6;4)	16.17	(-2;2)	(4;1)	(3;8)
16.3	(-2;4)	(2;-2)	(5;8)	16.18	(-7;3)	(7;-2)	(2;5)
16.4	(-7;1)	(5;0)	(4;5)	16.19	(-5;4)	(2;0)	(7;9)
16.5	(-5;2)	(8;-3)	(3;9)	16.20	(-3;1)	(5;-3)	(6;6)
16.6	(-3;3)	(3;-1)	(2;6)	16.21	(-8;2)	(8;-1)	(5;3)
16.7	(-8;4)	(6;4)	(7;3)	16.22	(-6;3)	(3;1)	(4;7)
16.8	(-6;1)	(1;-2)	(6;7)	16.23	(-4;4)	(6;-2)	(3;4)
16.9	(-4;2)	(4;0)	(5;4)	16.24	(-2;1)	(1;0)	(2;8)
16.10	(-2;3)	(7;-3)	(4;8)	16.25	(-7;2)	(4;-3)	(7;5)
16.11	(-7;4)	(2;-1)	(3;5)	16.26	(-5;3)	(7;-1)	(6;9)
16.12	(-5;1)	(5;1)	(2;9)	16.27	(-3;4)	(2;1)	(5;6)
16.13	(-3;2)	(8;-2)	(7;6)	16.28	(-8;1)	(5;-2)	(4;3)
16.14	(-8;3)	(3;0)	(6;3)	16.29	(-6;2)	(8;0)	(3;7)
16.15	(-6;4)	(6;-3)	(5;7)	16.30	(-4;3)	(3;-3)	(2;4)

**ЗАДАНИЕ 17.** Найти площадь квадрата, если известно, что одна из его вершин – точка  $A(x_0; y_0)$ , а одна из сторон квадрата лежит на прямой  $l$ . Координаты точки  $A$  и уравнение прямой  $l$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$A(x_0; y_0)$	$l$	№	$A(x_0; y_0)$	$l$
17.1	(3;3)	$x + 2y - 4 = 0$	17.6	(1;4)	$3x - 2y - 8 = 0$
17.2	(-5;0)	$2x - 3y - 3 = 0$	17.7	(0;-2)	$x + y - 1 = 0$
17.3	(4;-1)	$3x - y - 3 = 0$	17.8	(1;-1)	$x + y - 4 = 0$
17.4	(-5;2)	$x + y + 1 = 0$	17.9	(1;-6)	$x - y - 1 = 0$
17.5	(2;2)	$2x + 3y + 3 = 0$	17.10	(1;1)	$x - y - 2 = 0$

№	$A(x_0; y_0)$	$l$	№	$A(x_0; y_0)$	$l$
17.11	(-1;4)	$2x+y+3=0$	17.21	(4;-2)	$x+2y+3=0$
17.12	(-2;-4)	$x+y-3=0$	17.22	(-5;-1)	$x+2y+4=0$
17.13	(-3;0)	$x-2y+8=0$	17.23	(2;-6)	$2x-3y-9=0$
17.14	(-2;-2)	$x+y+8=0$	17.24	(1;1)	$3x-y-12=0$
17.15	(7;3)	$3x+2y-14=0$	17.25	(0;4)	$x+y-2=0$
17.16	(-2;0)	$x-3y-8=0$	17.26	(1;-4)	$2x+3y-3=0$
17.17	(5;-1)	$2x-y-6=0$	17.27	(1;0)	$3x-2y+10=0$
17.18	(-5;2)	$3x+y+3=0$	17.28	(1;-2)	$x+3y-10=0$
17.19	(3;2)	$x+3y+1=0$	17.29	(-1;3)	$x+y+2=0$
17.20	(-5;4)	$x-y+5=0$	17.30	(-2;0)	$x-y-4=0$

**ЗАДАНИЕ 18.** Даны вершины треугольника  $ABC$ . Составить уравнение его средней линии, параллельной стороне  $AB$  (для вариантов 1-10); параллельной стороне  $AC$  (для вариантов 11-20); параллельной стороне  $BC$  (для вариантов 21-30). Координаты точек  $A, B, C$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$A$	$B$	$C$	№	$A$	$B$	$C$
18.1	(2;-1)	(10;-7)	(-6;-13)	18.16	(-3;2)	(11;-4)	(-11;2)
18.2	(-3;4)	(11;-6)	(-7;4)	18.17	(-1;-2)	(5;-12)	(-5;-4)
18.3	(-1;0)	(5;-4)	(-11;-2)	18.18	(1;3)	(13;-1)	(-9;-1)
18.4	(1;-4)	(13;-12)	(-5;-8)	18.19	(3;-1)	(7;-9)	(-3;-7)
18.5	(3;1)	(7;-1)	(1;-5)	18.20	(-2;4)	(8;2)	(-4;-4)
18.6	(-2;-3)	(8;-9)	(-10;-11)	18.21	(0;0)	(2;-6)	(-8;-10)
18.7	(0;2)	(2;-8)	(-4;-8)	18.22	(2;-4)	(10;-14)	(-2;-16)
18.8	(2;-2)	(10;-6)	(-8;-14)	18.23	(-3;1)	(11;-3)	(-13;1)
18.9	(-3;3)	(11;-5)	(-9;-3)	18.24	(-1;-3)	(5;-11)	(-7;-5)
18.10	(-1;-1)	(5;-3)	(-3;-3)	18.25	(1;2)	(13;0)	(-1;-2)
18.11	(1;4)	(13;-2)	(-7;0)	18.26	(3;-2)	(7;-8)	(-5;-8)
18.12	(3;0)	(7;-10)	(-1;-6)	18.27	(-2;3)	(8;-7)	(-6;-5)
18.13	(-2;-4)	(8;-8)	(-12;-12)	18.28	(0;-1)	(2;-5)	(-10;-11)
18.14	(0;1)	(2;-7)	(-6;-9)	18.29	(2;4)	(10;-4)	(-4;-8)
18.15	(2;-3)	(10;-5)	(0;-15)	18.30	(-3;0)	(11;-2)	(-5;0)

**ЗАДАНИЕ 19.** Даны точки  $A, B, C, D$ . Найти точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Координаты точек  $A, B, C, D$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$A$	$B$	$C$	$D$
19.1	(-1;2)	(11;-7)	(6;2)	(-3;-7)
19.2	(-9;10)	(12;-5)	(7;5)	(1;-10)
19.3	(-1;3)	(8;-3)	(3;3)	(0;-3)
19.4	(-8;7)	(10;-5)	(8;3)	(-4;-9)
19.5	(-1;1)	(5;-2)	(4;1)	(-5;-2)
19.6	(-7;7)	(8;-2)	(5;4)	(-1;-5)
19.7	(4;4)	(7;-11)	(6;4)	(3;-11)
19.8	(-6;4)	(6;-2)	(6;2)	(-6;-4)
19.9	(-3;5)	(18;-7)	(7;5)	(-2;-7)
19.10	(-5;1)	(4;-2)	(3;0)	(-3;-3)
19.11	(-3;3)	(15;-6)	(4;3)	(1;-6)
19.12	(1;11)	(7;-4)	(9;6)	(-3;-9)
19.13	(-3;1)	(12;-5)	(5;1)	(-4;-5)
19.14	(2;8)	(5;-4)	(6;4)	(0;-8)
19.15	(-3;2)	(9;-1)	(2;2)	(-1;-1)
19.16	(-11;5)	(10;-4)	(7;2)	(-5;-7)
19.17	(2;5)	(11;-10)	(8;5)	(-1;-10)
19.18	(-10;5)	(8;-1)	(4;3)	(-2;-3)
19.19	(2;3)	(8;-9)	(5;3)	(2;-9)
19.20	(-9;2)	(6;-1)	(5;1)	(-7;-2)
19.21	(2;-4)	(5;-5)	(6;4)	(-3;-5)
19.22	(-3;9)	(9;-6)	(7;4)	(1;-11)
19.23	(-5;2)	(16;-4)	(3;2)	(0;-4)
19.24	(-2;9)	(7;-3)	(8;5)	(-4;-7)
19.25	(-5;0)	(13;-3)	(4;0)	(-5;-3)
19.26	(-1;6)	(5;-3)	(5;3)	(-1;-6)
19.27	(0;6)	(15;-9)	(6;6)	(3;-9)
19.28	(0;3)	(3;-3)	(6;1)	(-6;-5)
19.29	(0;4)	(12;-8)	(7;4)	(-2;-8)
19.30	(-13;3)	(8;0)	(3;2)	(-3;-1)

**ЗАДАНИЕ 20.** Задачи на окружность.

20.1. Найти радиус и центр окружности  $x^2 + y^2 = 4x$  и построить ее.

20.2. Составить уравнение окружности с центром в точке  $O_1(3;4)$  и радиуса 5.

Построить ее.

20.3. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ .

Построить ее.

20.4. Составить уравнение, определить координаты центра и радиус окружности, проходящей через точки  $A(4;0)$ ,  $B(0;2)$ ,  $O(0;0)$ . Построить ее.

20.5. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 = 2y$ . Построить ее.

20.6. Центр окружности находится в середине радиус-вектора  $\vec{r} = \text{col}(6;8)$ . Составить уравнение окружности и построить ее.

20.7. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ . Построить ее.

20.8. Концы диаметра окружности находятся в точках  $A(6;0)$  и  $B(0;8)$ . Определить координаты центра и радиус окружности; составить уравнение окружности и построить ее.

20.9. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ . Построить ее.

20.10. Составить уравнение окружности, касающейся оси  $OX$ , с центром в точке  $O_1(-3;6)$ . Построить ее.

20.11. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 = 2x + 4y$ . Построить ее.

20.12. Составить уравнение окружности с центром в точке  $O_1(-6;8)$  и радиуса 10. Построить ее.

20.13. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 6y = 0$ . Построить ее.

20.14. Составить уравнение, определить координаты центра и радиус окружности, проходящей через точки  $A(5;0)$ ,  $B(0;-5)$ ,  $O(0;0)$ . Построить ее.

20.15. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ . Построить ее.

20.16. Центр окружности находится в середине радиус-вектора  $\vec{r} = \text{col}(-24;10)$ . Составить уравнение окружности и построить ее.

20.17. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 = 6x$ . Построить ее.

20.18. Концы диаметра окружности находятся в точках  $A(-8;0)$  и  $B(0;6)$ . Определить координаты центра и радиус окружности; составить уравнение окружности и построить ее.

20.19. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$ . Построить ее.

20.20. Составить уравнение окружности с центром в точке  $O(-8;3)$ , касающейся оси  $OY$ . Построить ее.

20.21. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 = 8y$ . Построить ее.

20.22. Составить уравнение окружности с центром в точке  $O_1(-12;-5)$  и радиуса 13. Построить ее.

20.23. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ . Построить ее.

20.24. Определить координаты центра и радиус окружности, проходящей через точки  $A(-6;0)$ ,  $B(0;-8)$ ,  $O(0;0)$ . Составить уравнение окружности и построить ее.

20.25. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 8x = 0$ . Построить ее.

20.26. Центр окружности находится в середине радиус-вектора  $\vec{r} = \text{col}(8;-6)$ . Составить уравнение окружности и построить ее.

20.27. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 = 4x + 8y$ . Построить ее.

20.28. Концы диаметра окружности находятся в точках  $A(0;-5)$  и  $B(-12;0)$ . Составить уравнение окружности и построить ее.

20.29. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 4y = 0$ . Построить ее.

20.30. Составить уравнение окружности с центром в точке  $O_1(-1;-4)$ , касающейся оси  $OX$ . Построить ее.

**ЗАДАНИЕ 21.** Составить каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Полуоси  $a$  и  $b$  следует найти, используя данные таблицы в соответствии с вариантом. Сделать чертеж.

№ варианта	полуось $a$	полуось $b$	Фокусное расстояние $2c$	Эксцентриситет $\varepsilon$
21.1	—	9	—	0,8
21.2	15	—	—	0,6
21.3	—	8	30	—
21.4	—	15	—	$\frac{8}{17}$
21.5	—	—	32	0,8
21.6	20	—	—	0,6
21.7	—	7	—	0,96
21.8	—	—	40	0,8
21.9	—	20	—	0,6
21.10	—	24	—	0,28
21.11	—	—	48	$\frac{12}{13}$
21.12	21	—	—	$\frac{5}{13}$
21.13	29	—	42	—
21.14	—	21	—	$\frac{20}{29}$
21.15	30	—	—	0,8
21.16	—	—	36	0,6
21.17	—	16	—	$\frac{15}{17}$
21.18	—	—	32	$\frac{8}{17}$
21.19	—	21	—	$\frac{28}{35}$
21.20	—	28	—	$\frac{21}{35}$

№ варианта	полуось $a$	полуось $b$	Фокусное расстояние $2c$	Эксцентриситет $\varepsilon$
21.21	—	—	70	$\frac{35}{37}$
21.22	—	35	—	$\frac{12}{37}$
21.23	—	—	72	$\frac{12}{13}$
21.24	—	—	30	$\frac{5}{13}$
21.25	—	—	64	0,8
21.26	40	—	—	0,6
21.27	41	—	80	—
21.28	—	40	—	$\frac{9}{41}$
21.29	—	—	72	0,8
21.30	—	36	—	0,6

**ЗАДАНИЕ 22.** Используя свойства гиперболы, решить в соответствии с вариантом следующую задачу:

22.1. На гиперболе  $x^2 - 4y^2 = 16$  взята точка  $M$  с ординатой, равной 1. Найти расстояние от точки  $M$  до фокусов гиперболы.

22.2. Записать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между её фокусами равно 10 и её действительная ось равна 8.

22.3. Записать каноническое уравнение гиперболы, зная, что её действительная полуось равна  $2\sqrt{5}$ , а эксцентриситет  $\sqrt{1,2}$ .

22.4. Составить каноническое уравнение гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и проходящей через точку  $M(6; -2\sqrt{2})$ .

22.5. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

22.6. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния от одной из её вершин до фокусов равны 9 и 1.

22.7. Найти точки пересечения асимптот гиперболы  $x^2 - 3y^2 = 12$  с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

22.8. На гиперболе  $9x^2 - 16y^2 = 144$  найти точку, расстояние от которой до левого фокуса вдвое меньше, чем до правого.

22.9. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{1}{2 - \sqrt{5} \cos \varphi}$ .

22.10. Фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы  $x^2 - y^2 = 8$ . Составить уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точку  $M(4;6)$ .

22.11. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{3}{1 - 2 \cos \varphi}$ .

22.12. Асимптоты гиперболы задаются уравнениями  $4y \pm 3x = 0$ . Расстояние между фокусами равно 20. Составить каноническое уравнение гиперболы.

22.13. Составить каноническое уравнение гиперболы, если её действительная ось 10, а эксцентриситет 1,4.

22.14. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{32}{3 - 5 \cos \varphi}$ .

22.15. На гиперболе  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  взята точка  $M$  с абсциссой, равной 1. Найти расстояние от точки  $M$  до фокусов гиперболы.

22.16. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{25}{6 - \sqrt{61} \cos \varphi}$ .

22.17. Асимптоты гиперболы задаются уравнениями  $4y \pm 3x = 0$ . Расстояние между вершинами равно 16. Составить каноническое уравнение гиперболы.

22.18. Мнимая полуось гиперболы равна 6, а эксцентриситет равен 1,25. Составить каноническое уравнение такой гиперболы.

22.19. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку  $M(\sqrt{6}; \sqrt{2})$ , зная, что эксцентриситет такой гиперболы равен  $\sqrt{\frac{5}{3}}$ .

22.20. Найти точки пересечения асимптот гиперболы  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$  с её директрисами.

22.21. Найти траекторию точки, которая при своём движении остаётся всё время в два раза дальше от точки  $F(0; 4)$ , чем от прямой  $y = 1$ .

22.22. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{25}{12 - 13 \cos \varphi}$ .

22.23. Найти точки пересечения асимптот гиперболы  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  с её директрисами.

22.24. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{1}{6 - \sqrt{37} \cos \varphi}$ .

22.25. Записать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между её фокусами равно 10, а мнимая ось равна 6.

22.26. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{25}{7 - \sqrt{94} \cos \varphi}$ .

22.27. Записать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между её фокусами равно 20, а действительная полуось равна 8.

22.28. Привести к каноническому виду уравнение гиперболы, записанное в полярной системе координат  $\rho = \frac{25}{8 - \sqrt{89} \cos \varphi}$ .



22.29. Записать каноническое уравнение гиперболы, асимптоты которой  $y = \pm x$ , а директрисы  $x = \pm\sqrt{6}$ .

22.30. Записать уравнение траектории точки  $M$ , которая в каждый момент движения находится вдвое дальше от точки  $F(-8; 0)$ , чем от прямой  $x = -2$ .

### ЗАДАНИЕ 23. Задачи на параболу.

#### Варианты 23.1-23.9.

Известно, что парабола с вершиной  $O_1$  и осью симметрии, параллельной оси  $oy$ , отсекает на оси  $ox$  хорду длиной  $l$ . Составить уравнение параболы, найти координаты фокуса, параметр и уравнение директрисы; дать геометрическую иллюстрацию. Координаты вершин  $O_1$  и длину  $l$  хорды взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$O_1$	$l$	№ варианта	$O_1$	$l$	№ варианта	$O_1$	$l$
23.1	(-2;1)	6	23.4	(-5;2)	3	23.7	(5;2)	4
23.2	(2;5)	2	23.5	(4;-3)	8	23.8	(-5;-3)	3
23.3	(7;-8)	4	23.6	(1;-3)	5	23.9	(-5;-6)	2

#### Варианты 23.10-23.18.

Парабола с осью симметрии, параллельной оси  $ox$  и вершиной  $C$ , отсекает на оси  $oy$  хорду длиной  $l$ . Составить уравнение параболы, найти координаты фокуса, параметр и уравнение директрисы; дать геометрическую иллюстрацию. Координаты точки  $C$  и длину  $l$  хорды взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$C$	$l$	№ варианта	$C$	$l$	№ варианта	$C$	$l$
23.10	(-2;-3)	6	23.13	(4;3)	8	23.16	(1;2)	2
23.11	(-3;5)	3	23.14	(5;3)	5	23.17	(-1;-2)	3
23.12	(7;1)	2	23.15	(5;6)	3	23.18	(3;4)	4

#### Варианты 23.19-23.24

Составить уравнение параболы с вершиной  $C$  и направлением оси симметрии, совпадающим с положительным направлением оси  $ox$ , если известно, что парабола проходит через точку  $M$ . Дать геометрическую иллюстрацию. Координаты точек  $C$  и  $M$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№ варианта	$C$	$M$	№ варианта	$C$	$M$
23.19	(1;2)	(4;8)	23.22	(2;1)	(-3;2)
23.20	(-2;1)	(3;-4)	23.23	(2;3)	(-4;3)
23.21	(2;4)	(-6;8)	23.24	(4;2)	(5;6)

#### Варианты 23.25-23.30

Известно, что фокус параболы находится в точке  $F$ , а прямая " $a$ " — директриса параболы. Составить уравнение параболы и найти ее параметр; дать геометрическую иллюстрацию.

№ варианта	$F$	$a$	№ варианта	$F$	$a$
23.25	$(3; \frac{1}{2})$	$2y - 7 = 0$	23.28	$(-3; -\frac{1}{2})$	$2y + 3 = 0$
23.26	(-6;-1)	$x - 2 = 0$	23.29	$(-\frac{11}{4}; -3)$	$4x + 5 = 0$
23.27	$(\frac{9}{2}; -1)$	$2x - 3 = 0$	23.30	(6;3)	$y - 7 = 0$

### ЗАДАНИЕ 24. Построить кривую.

24.1.  $y = -\sqrt{25 - x^2}$ .

24.3.  $y = \sqrt{36 - x^2}$ .

24.5.  $x = \sqrt{49 - y^2}$ .

24.7.  $y = 1 - \sqrt{16 - x^2}$ .

24.9.  $x + 3 = \sqrt{16 - y^2}$ .

24.11.  $y = 2 + \sqrt{9 - (x + 1)^2}$ .

24.13.  $y = 3 - \sqrt{24 - x^2 + 2x}$ .

24.2.  $x^2 - 4x + 9y^2 + 36y - 56 = 0$ .

24.4.  $4x^2 + 8x + 9y^2 - 54y - 100 = 0$ .

24.6.  $4x^2 + 16x + 25y^2 + 10y - 50 = 0$ .

24.8.  $x^2 - 2x - 9y^2 + 36y - 60 = 0$ .

24.10.  $4x^2 + 24x - 9y^2 - 18y - 80 = 0$ .

24.12.  $9x^2 - 36x - 4y^2 - 36y - 100 = 0$ .

24.14.  $25x^2 - 20x - 9y^2 - 54y - 160 = 0$ .

24.15.  $y = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ .

24.17.  $y = 4\sqrt{1 - 9x^2}$ .

24.19.  $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ .

24.21.  $x = -\frac{3}{5}\sqrt{25 + y^2}$ .

24.23.  $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4}$ .

24.25.  $y = \frac{2}{7}\sqrt{x^2 - 49}$ .

24.27.  $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 10$ .

24.29.  $x^2 - 2x + 4y^2 + 24y = 53$ .

24.16.  $x^2 - 2x + y = 0$ .

24.18.  $x^2 - 4x + 3 + y = 0$ .

24.20.  $x^2 + 3x - y - 6 = 0$ .

24.22.  $2x^2 + 8x - 4y - 10 = 0$ .

24.24.  $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ .

24.26.  $y^2 - 6y + 4x + 5 = 0$ .

24.28.  $4y^2 - 8y + 3x + 6 = 0$ .

24.30.  $9y^2 - 36y - 4x - 4 = 0$ .

**ЗАДАНИЕ 25.** В соответствии с вариантом, исключив параметр  $t$ , найти уравнение кривой в виде  $F(x, y) = 0$  и построить её.

25.1.  $\begin{cases} x = 3 \operatorname{sect}, \\ y = 2 \operatorname{tgt}. \end{cases}$

25.7.  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sin t}, \\ y = 3 \operatorname{ctgt}. \end{cases}$

25.13.  $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sh}4t, \\ y = 4 \operatorname{ch}4t. \end{cases}$

25.2.  $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sect}, \\ y = 3 \operatorname{tgt}. \end{cases}$

25.8.  $\begin{cases} x = 4 \operatorname{cosect}, \\ y = \operatorname{ctgt}. \end{cases}$

25.14.  $\begin{cases} x = -4 \operatorname{sh}5t, \\ y = 5 \operatorname{ch}5t. \end{cases}$

25.3.  $\begin{cases} x = -\operatorname{sect}, \\ y = 3 \operatorname{tgt}. \end{cases}$

25.9.  $\begin{cases} x = \operatorname{ctgt}, \\ y = -\frac{2}{\sin t}. \end{cases}$

25.15.  $\begin{cases} x = \frac{2}{\operatorname{ch}2t}, \\ y = 4 \operatorname{th}2t. \end{cases}$

25.4.  $\begin{cases} x = 4 \operatorname{tgt}, \\ y = 3 \operatorname{sect}. \end{cases}$

25.10.  $\begin{cases} x = -\operatorname{ctgt}, \\ y = 3 \operatorname{cosect}. \end{cases}$

25.16.  $\begin{cases} x = \frac{4}{\operatorname{ch}4t}, \\ y = 2 \operatorname{th}4t. \end{cases}$

25.5.  $\begin{cases} x = 3 \operatorname{tgt}, \\ y = \frac{4}{\operatorname{cost}}. \end{cases}$

25.11.  $\begin{cases} x = 3 \operatorname{ch}2t, \\ y = 2 \operatorname{sh}2t. \end{cases}$

25.17.  $\begin{cases} x = \operatorname{th}5t, \\ y = \frac{5}{\operatorname{ch}5t}. \end{cases}$

25.6.  $\begin{cases} x = -4 \operatorname{tgt}, \\ y = -\frac{2}{\operatorname{cost}}. \end{cases}$

25.12.  $\begin{cases} x = 2 \operatorname{ch}3t, \\ y = -3 \operatorname{sh}3t. \end{cases}$

25.18.  $\begin{cases} x = \frac{1}{\operatorname{sh}t}, \\ y = -\operatorname{cht}. \end{cases}$

25.19.  $\begin{cases} x = \frac{1+t}{1-t}, \\ y = \frac{2+t}{2-t}. \end{cases}$

25.23.  $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = t^2 + 4t + 4. \end{cases}$

25.27.  $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t - 1. \end{cases}$

25.20.  $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{t-1}. \end{cases}$

25.24.  $\begin{cases} x = t^2 + 2t + 5, \\ y = t + 1. \end{cases}$

25.28.  $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \operatorname{cost}, \\ y = \frac{3}{2} \operatorname{sint}. \end{cases}$

25.21.  $\begin{cases} x = \frac{2+t}{2-t}, \\ y = \frac{1+t}{1-t}. \end{cases}$

25.25.  $\begin{cases} x = 2t^2 + 2t + 1, \\ y = t + \frac{1}{2}. \end{cases}$

25.29.  $\begin{cases} x = -\operatorname{cost}, \\ y = -\frac{5}{2} \operatorname{sint}. \end{cases}$

25.22.  $\begin{cases} x = \frac{2t+1}{1+t}, \\ y = \frac{1-4t}{1-t}. \end{cases}$

25.26.  $\begin{cases} x = t - 2, \\ y = t^2 - 4t + 5. \end{cases}$

25.30.  $\begin{cases} x = \operatorname{tgt}, \\ y = \frac{1}{\operatorname{cost}}. \end{cases}$

**ЗАДАНИЕ 26.** Построить кривую.

26.1.  $r = \cos\varphi - \sin\varphi$ .

26.11.  $r = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi$ .

26.21.  $r = 3 \cos\varphi$ .

26.2.  $r = 2 \cos 2\varphi$ .

26.12.  $r = 3 \sin\varphi$ .

26.22.  $r = \sqrt{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)$ .

26.3.  $r = 3 \sin 2\varphi$ .

26.13.  $r = 2 \cos\varphi$ .

26.23.  $r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi$ .

26.4.  $r = \sin 3\varphi$ .

26.14.  $r = 3 + 3 \cos\varphi$ .

26.24.  $r = 1 - \cos\varphi$ .

26.5.  $r = 2 \cos 3\varphi$ .

26.15.  $r = \frac{1}{2} \cos 2\varphi$ .

26.25.  $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\varphi$ .

26.6.  $r = \sin\varphi + \cos\varphi$ .

26.16.  $r = 4 \cos 2\varphi$ .

26.26.  $r = \cos 2\varphi$ .

26.7.  $r = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cos\varphi$ .

26.17.  $r = \sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)$ .

26.27.  $r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\varphi$ .

26.8.  $r = 2 \sin 3\varphi$ .

26.18.  $r = 3(\sin\varphi + \cos\varphi)$ .

26.28.  $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\varphi$ .

26.9.  $r = 3 \cos 2\varphi$ .

26.19.  $r = 9 \cos 2\varphi$ .

26.29.  $r = 4 \sin\varphi$ .

26.10.  $r = 5(1 + \cos\varphi)$ .

26.20.  $r = \frac{1}{2} \sin\varphi$ .

26.30.  $r = \frac{1}{3} \cos\varphi$ .

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

**ЗАДАНИЕ 27.** Решить следующие задачи.

### ВАРИАНТ 27.1

1. Через точку  $M(1;1;-1)$  провести плоскость, перпендикулярную к плоскости  $x - y + z - 1 = 0$  и плоскости  $2x + y + z + 11 = 0$ .

2. Через точку  $M(-1;2;-1)$  провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 20 = 0, \\ x - y - z + 2z = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{4}.$$

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через центр сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0$ , перпендикулярной прямой  $x = 2t - 1$ ,  $y = -3t + 5$ ,  $z = 4t + 7$ .

5. Ось  $OZ$  — ось круглого конуса с вершиной в начале координат, точка  $M_1(3;4;7)$  лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

### ВАРИАНТ 27.2

1. Найти расстояние между параллельными плоскостями  $x - 2y + z - 1 = 0$  и  $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

2. Через точку  $M(1;1;2)$  провести плоскость, параллельную прямым

$$l_1 \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad l_2 \quad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

3. Найти точку  $Q$ , симметричную точке  $P(3;-4;6)$  относительно плоскости, проходящей через точки  $M_1(-6;1;5)$ ,  $M_2(7;-2;-1)$  и  $M_3(0;-7;1)$ .

4. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей  $6x - 3y - 2z - 35 = 0$  и  $6x - 3y - 2z + 63 = 0$ , причем одной из них в точке  $M_1(5;-1;-1)$ .

5. Установить, какая линия является сечением плоскости  $z + 2 = 0$  и

поверхности  $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ . Дать геометрическую иллюстрацию.

### ВАРИАНТ 27.3

1. Найти угол между плоскостями  $2x + y - 2z - 4 = 0$  и  $3x + 6y - 2z - 12 = 0$ .

2. Через точку  $C(2;1;3)$  провести прямую, параллельную плоскости  $x + y + z = 3$  и пересекающую прямую

$$\begin{cases} x = y, \\ y = 2z. \end{cases}$$

3. Найти расстояние от точки  $C(3;-4;-2)$  до плоскости, проходящей через

прямые  $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$  и  $\begin{cases} \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1}, \\ \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}. \end{cases}$

4. Составить уравнение диаметра сферы  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$ , перпендикулярного к плоскости  $5x - y + 2z - 17 = 0$ .

5. Построить поверхности

а)  $x^2 + y = 25$ ,      б)  $x^2 - 2x + z^2 = 0$ ,

в)  $x^2 + z^2 = -z$ ,      г)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = -1$ .

### ВАРИАНТ 27.4

1. Найти углы, образованные перпендикуляром к плоскости  $x - 2y + z - 1 = 0$  с осями координат.

2. Через точку  $A(2;2;1)$  провести плоскость, перпендикулярную прямой

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

3. Найти проекцию точки  $P(2;-1;3)$  на прямую  $\frac{x}{3} = \frac{y+z}{5} = \frac{z-2}{2}$ .

4. Вычислить радиус сферы, которая касается плоскостей  $3x + 2y - 6z - 15 = 0$ ,  $3x + 2y - 6z + 55 = 0$ .

5. Установить, что плоскость  $x - 2 = 0$  пересекает эллипсоид

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$  по эллипсу; найти его полуоси, сделать чертеж.

### ВАРИАНТ 27.5

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1;2;-1)$  и  $M_2(-3;2;1)$  и отсекающей на оси  $OY$  отрезок  $b=3$ .

2. Через прямую  $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + y - z = 0, \end{cases}$  и точку  $M(2;2;2)$  провести плоскость.

3. Найти проекцию точки  $P(5;2;-1)$  на плоскость  $2x - y + 3z + 23 = 0$ .

4. Составить уравнение сферы с центром  $C(3;-5;-2)$ , для которой плоскость  $2x - y - 3z + 11 = 0$  является касательной.

5. Определить сечение поверхности  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$  плоскостью, проведенной через точку  $M(0;0;1)$  параллельно плоскости  $XOY$ .

### ВАРИАНТ 27.6

1. Найти расстояние между плоскостями  $\begin{cases} 2x + y - 3z + 5 = 0, \\ 2x + y - 3z + 8 = 0. \end{cases}$

2. Найти точки пересечения прямой с координатными плоскостями, если прямая задана уравнениями  $2x + y - z - 3 = 0$ ,  $z + y + z - 1 = 0$ .

3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью  $2x - 3y + 8z - 12 = 0$  и координатными плоскостями.

4. Найти центр и радиус сферы  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y - 5z = 0$ .

5. Найти точки пересечения поверхностей и прямой  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$  и

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}.$$

### ВАРИАНТ 27.7

1. Написать уравнение плоскости, равноудаленной от двух заданных плоскостей  $P_1$  и  $P_2$ :  $4x - y - 2z - 3 = 0$  и  $4x - y - 2z - 5 = 0$ .

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(3;-2;-4)$  параллельно плоскости  $3x - 2y - 3z - 7 = 0$  и пересекающей прямую

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

3. Найти расстояние между прямыми  $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases}$  и

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}.$$

4. Составить уравнение сферы, центр которой лежит на прямой  $2x + 4y - z - 7 = 0$ ,  $4x + 5y + z - 14 = 0$  и которая касается плоскостей  $x + 2y - 2z - 2 = 0$  и  $x + 2y - 2z + 4 = 0$ .

5. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой  $\begin{cases} y = z^2, \\ x = 0, \end{cases}$  вокруг оси  $OY$ . Сделать чертеж.

### ВАРИАНТ 27.8

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1;1;1)$  параллельно векторам  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , если  $\vec{a}_1 = \{0;1;2\}$ , и  $\vec{a}_2 = \{-1;0;1\}$ .

2. Найти расстояние от точки  $M(0;1;2)$  до прямой  $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{0}$  и проекцию точки  $M$  на прямую.

3. Убедиться, что прямые  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$  и  $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$  принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

4. Составить уравнение сферы, если  $M_1(2;3;5)$ ,  $M_2(4;1;-3)$  – концы диаметра сферы.

5. Найти точки пересечения поверхности  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$  и прямой

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

### ВАРИАНТ 27.9

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(0;1;2)$ , перпендикулярной прямой  $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$ .

2. Вычислить расстояние между прямыми:  $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$  и

$$\frac{x-21}{5} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$  перпендикулярно плоскости  $x+y-z+1=0$ .

4. Составить уравнение сферы, если известно, что точка  $C(3;5;2)$  – центр сферы и плоскость  $2x-y-3z+11=0$  касается сферы.

5. Убедиться в том, что поверхность  $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$  и плоскость  $2x-2y-z-10=0$  имеют одну общую точку, найти ее координаты, сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.10

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(3;-8;-4)$ ,  $Q(-3;0;0)$ ,  $R(0;0;5)$ .

2. Найти точку пересечения прямых  $\begin{cases} x+y-z+4=0, \\ 2x-3y-z-5=0, \end{cases}$  и

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

3. Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую  $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$  на плоскость  $x+4y-3z+7=0$ .

4. Установить тип поверхности  $9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0$  и сделать чертеж.

5. Исследовать методом сечений форму поверхности  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$  и сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.11

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(2;-15;1)$  и  $M_2(3;1;-2)$  перпендикулярно плоскости  $3x-y-4z=0$ .

2. Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую  $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ x+4y-z+1=0, \end{cases}$  на плоскость  $x-2y+z-5=0$ .

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(4;0;-1)$  и пересекающей две прямые  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$  и  $x=5t$ ,  $y=2-t$ ,  $z=-1+2t$ .

4. Составить уравнение сферы радиуса  $R=9$ , проходящей через точки  $M_1(1;-2;-1)$ ,  $M_2(-5;10;-1)$  и  $M_3(-8;-2;2)$ .

5. Какая поверхность определяется уравнением  $2x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 4z + 7 = 0$ ? Сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.12

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2;2;-2)$  перпендикулярно линии пересечения плоскостей  $3x-2y-z+1=0$  и  $x-y-z=0$ .

2. Составить уравнение биссектрисы угла  $A$  треугольника с вершинами  $A(2;3;-1)$ ;  $B(1;-2;0)$  и  $C(-3;2;2)$ .

3. Найти проекцию точки  $A(4;3;10)$  на прямую  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ .

4. Сфера с центром  $C(1;-2;4)$  касается плоскости  $2x-y+2z-3=0$ . Составить уравнение сферы.

5. Построить поверхность, заданную уравнением  $9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0$ .

#### ВАРИАНТ 27.13

1. Найти высоту пирамиды  $SABC$ , опущенную на вершины  $S$  на грань, если  $S(1;4;-2)$ ,  $A(0;-1;1)$ ,  $B(3;5;-1)$ ,  $C(1;-3;-1)$ .

2. Найти угол между прямой, проходящей через точку  $M_1(-1;0;-5)$  и  $M_2(1;2;0)$ , и плоскостью  $x-3y+z+5=0$ .

3. Найти уравнение проекций прямой  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$  на плоскость  $x-y+3z+8=0$ .

4. Сфера проходит через точку  $M(2;2;2)$  и имеет центр в точке  $C(1;-1;-1)$ . Составить ее уравнение.

5. Методом сечения исследовать форму и затем построить поверхность  $2y^2 + z^2 = 1 - x$ .

#### ВАРИАНТ 27.14

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1;1;-1)$  и  $M_2(-1;1;-1)$  параллельно прямой, определяемой точками  $A(5;-2;3)$  и  $B(6;1;0)$ .

2. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости  $XOZ$ , проходящей через  $O(0;0;0)$  и перпендикулярной к прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$ .

3. Найти уравнение плоскостей, проектирующих прямую  $\begin{cases} 2x - 4y + z - 1 = 0, \\ 5x + 8y - 3z + 9 = 0, \end{cases}$  на все координатные плоскости.

4. Построить поверхность  $z^2 + 2z - 4x + 1 = 0$ .

5. Методом сечений исследовать форму поверхности и построить ее:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 0$ .

#### ВАРИАНТ 27.15

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки  $A(2;0;4)$  на плоскости  $x - 7y + 2z = 0$  и  $5x + 3y - z = 0$ .

2. Составить уравнения проекции прямой  $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-1}{1}$  на все координатные плоскости.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$  параллельно прямой  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-5}$ .

4. Найти центр и радиус сферы, заданной уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 4z = 0$ .

5. В каких точках прямая  $\frac{x-4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$  пересекает однополостный

гиперболоид  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ ? Сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.16

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $x + y + 5z - 1 = 0$ ,  $2x + 3y - z + 2 = 0$  и через точку  $M(3;2;1)$ .

2. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из  $O(0;0;0)$  на прямую  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

3. Треугольник  $ABC$  образован пересечением  $x + 2y + 4z - 8 = 0$  плоскости с координатными осями. Найти уравнение средних линий треугольника  $ABC$ .

4. Точки  $M(4;-1;-3)$  и  $N(0;3;-1)$  — концы одного из диаметров сферы. Составить ее уравнение.

5. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой  $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ z = 0, \end{cases}$  вокруг осей  $OX$  и  $OY$ . Сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.17

1. Найти точку  $N$ , симметричную точке  $M(1;1;1)$  относительно данной плоскости  $x + y - 2z - 6 = 0$ .

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1;-2;3)$  и образующей с осями  $OX$  и  $OY$  углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$ .

3. Найти уравнение проекции прямой  $\frac{x}{2} = y + 3 = \frac{z-2}{-2}$  на плоскость  $2x + 3y - z - 5 = 0$ .

4. Составить уравнение сферы, проходящей через точки  $A(1;2;-4)$ ,  $B(1;-3;1)$ ,  $C(2;2;3)$ , если ее центр находится в плоскости  $XOY$ .

5. Построить поверхность:  $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$ .

#### ВАРИАНТ 27.18

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей  $2x + 2y + z - 7 = 0$ ,  $2x - y + 3z - 3 = 0$ ,  $4x + 5y - 2z - 12 = 0$  и точки  $M(0;3;0)$  и  $N(1;-1;1)$ .

2. Найти точку  $N$ , симметричную точке  $M(1;1;1)$  относительно данной прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ .

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{4}$  и перпендикулярной плоскости  $3x + y - z + 2 = 0$ .

4. Найти центр и радиус окружности: 
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$$

5. Построить поверхность  $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$ .

#### ВАРИАНТ 27.19

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $2x - y - 12z - 3 = 0$  и  $3x + y - 7z - 2 = 0$  и перпендикулярной плоскости  $x + 2y + 5z - 1 = 0$ .

2. Через прямую  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$  провести плоскость, параллельную вектору  $\vec{s} \{-1; 2; -3\}$ .

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(0; 2; 1)$  и образующей равные углы с векторами  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 5\vec{j}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{k}$ .

4. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой  $\begin{cases} 2y + z - 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$  вокруг оси  $OZ$ .

5. Составить уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в точке  $O(0; 0; 0)$ , осью которого является ось  $OZ$ , если на его поверхности заданы точки  $M_1(-1; -2; 2)$  и  $M_2(1; 1; 1)$ .

#### ВАРИАНТ 27.20

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки  $P(4; -2; 1)$  и  $Q(2; -4; -3)$ .

2. Через прямую  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$  провести плоскость, перпендикулярную плоскости  $2x - 3y + 5z - 3 = 0$ .

3. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $A$  и перпендикулярной векторам  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ , если  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(2; 3; 3)$ ,  $C(3; 3; 2)$ .

4. Найти уравнение линий пересечения поверхности  $z = x^2 - y^2$  плоскостями  $z = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x = -1$ . Сделать чертеж.

5. Составить уравнение эллипсоида, осями симметрии которого служат оси координат, если на его поверхности заданы три точки  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(-2; \frac{5}{3}; 0)$ ,  $C(0; -1; \frac{2}{\sqrt{5}})$ .

#### ВАРИАНТ 27.21

1. Составить уравнение плоскости, относительно которой точки  $M_1(1; -4; 2)$  и  $M_2(7; 1; 5)$  симметричны.

2. Найти уравнения проекции прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{3}$  на плоскость  $x - y - 2z - 5 = 0$ .

3. Даны вершины параллелограмма  $ABCD$ :  $C(-2; 3; -5)$  и  $D(0; 4; -7)$  и точка пересечения диагоналей  $M(1; -2; -3)$ . Найти уравнение сторон и диагоналей параллелограмма.

4. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ ,  $2x + 2y - z = 18$ .

5. Построить поверхность  $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$ .

#### ВАРИАНТ 27.22

1. Лежат ли точки  $M_1(2; 1; 1)$  и  $M_2(2; 1; 3)$  по одну сторону от плоскости  $x + 2y - z - 2 = 0$ ?

2. Определить  $\lambda$  так, чтобы прямые  $x-1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$  и  $x+1 = y-1 = z$  пересекались.

3. Найти уравнение общего перпендикуляра к прямым  $\begin{cases} x + 4z + 1 = 0, \\ x - 4y + 9 = 0, \end{cases}$  и

$$\begin{cases} y=0, \\ x+2z+4=0. \end{cases}$$

4. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси  $x=7+3t$ ,  $y=1+4t$ ,  $z=3+2t$  и координаты одной из ее точек  $M_0(2;-1;0)$ .

5. Исследовать методом сечений поверхность  $x^2+y^2-z^2=-1$ . Сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.23

1. Через точку  $M(0;1;2)$  провести плоскость перпендикулярно к плоскости  $x+2y-z=0$  и к плоскости  $XOY$ .

2. Найти проекцию точки  $M(2;3;1)$  на прямую  $x=t-7$ ,  $y=2t-2$ ,  $z=3t-2$ .

3. Составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые  $x-1=\frac{y+1}{-1}=(z-1)\frac{1}{2}$  и  $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=z-1$ .

4. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы  $z^2=10y$ ,  $x=0$  вокруг оси  $OZ$ . Сделать чертеж.

5. Определить сечение поверхности  $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$  плоскостью, проведенной через точку  $A(0;0;1)$  параллельно плоскости  $OXY$ . Сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.24

1. Найти геометрическое место точек, таких, что объем тетраэдра с вершинами  $M(x;y;z)$ ,  $A(1;2;1)$ ,  $B(-1;1;1)$ ,  $C(2;1;-1)$  равен 10.

2. Найти проекцию точки  $M(2;1;1)$  на плоскость  $x+y+3z+5=0$ .

3. Составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые

$$\begin{cases} x=2t-1, \\ y=3t+2, \\ z=2t-3, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=2t+3, \\ y=3t-1, \\ z=2t+1. \end{cases}$$

4. В плоскости  $OYZ$  дана окружность с центром в точке  $A(0;4;0)$  радиуса  $r=1$ . Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной окружности вокруг оси  $OZ$ .

5. Установить, какая линия является сечением плоскости  $x-2=0$  и поверхности  $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}$ . Дать геометрическую иллюстрацию.

#### ВАРИАНТ 27.25

1. Составить уравнение плоскости, равноудаленной от плоскостей  $x+y-2z-1=0$  и  $x+y-2z+3=0$ .

2. Через прямую  $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y+3z=0, \end{cases}$  провести плоскость, параллельную прямой  $x=2y=3z$ .

3. Найти уравнения и длину перпендикуляра, опущенного из точки  $A(0;-1;1)$  на прямую  $y+1=0$ ,  $x+2z-7=0$ .

4. Определить координаты центра и радиус сферы  $36x^2+36y^2+36z^2-36x+24y-72z-95=0$ .

5. Исследовать методом сечений поверхность  $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}$ . Сделать чертеж.

#### ВАРИАНТ 27.26

1. Найти расстояние между прямыми  $\begin{cases} x=t+1, \\ y=2t-1, \\ z=2t, \end{cases}$  и  $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=-2t-1, \\ z=-2t. \end{cases}$

2. Найти уравнение проекций прямой  $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0, \end{cases}$  на плоскость  $x+2y-z=0$ .

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной, опущенной из точки  $A(1;-1;0)$  на прямую  $\begin{cases} x=z+3, \\ y=-2z-3. \end{cases}$

4. Составить уравнение окружности, образующейся в сечении сферы  $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$  координатной плоскостью  $z=0$ . Дать геометрическую иллюстрацию.

5. Построить поверхность  $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$ .



ВАРИАНТ 27.27

1. Найти угол между прямыми  $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0, \end{cases}$  и  $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$

2. Составить уравнения проекций прямой  $\begin{cases} x + 2y + 3z - 28 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0, \end{cases}$  на координатные плоскости.

3. Через точку  $A(1;2;1)$  провести плоскость, параллельную прямым

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

4. Найти центр и радиус сферы  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 0$ .

5. Определить сечение поверхности  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = 1$  с плоскостью, проведенной через точку  $N(1;0;0)$  параллельно плоскости  $YOZ$ . Дать геометрическую иллюстрацию.

ВАРИАНТ 27.28

1. Найти расстояние между плоскостями

$$x - y + z - 15 = 0 \text{ и } 2x - 2y + 2z - 10 = 0.$$

2. Найти проекцию прямой  $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 3y + z = 0, \end{cases}$  на плоскость  $x + 2y + 3z - 2 = 0$  и

определить угол, составляемой этой проекцией с плоскостью  $XOY$ .

3. Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тот двугранный угол между плоскостями  $x + 2y - z - 1 = 0$  и  $x + 2y + z + 1 = 0$ , в котором лежит точка  $A(1;-1;1)$ .

4. Составить уравнение сферы, если  $M_1(2;0;5)$  и  $M_2(8;1;9)$  – концы диаметра сферы.

5. Найти точки пересечения поверхности  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$  и прямой

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}.$$

ВАРИАНТ 27.29

1. На оси  $OZ$  найти точку, равноудаленную от плоскостей  $12x + 9y - 20z - 19 = 0$  и  $16x - 12y + 15z - 9 = 0$ .

2. Составить уравнения плоскостей, проектирующих прямую  $\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0, \\ 2x - y - z + 1 = 0, \end{cases}$  на координатные плоскости  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

3. Через точку  $A(2;1;1)$  провести прямую, параллельную плоскостям  $2x - y + 1 = 0$ ,  $y - 1 = 0$ .

4. Составить уравнение сферы, если известно, что  $O_1(2;3;-2)$  – центр сферы и прямая  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = z$  касается сферы.

5. Исследовать методом сечений форму поверхности  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 2z$  и сделать чертеж.

ВАРИАНТ 27.30

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1(0;0;5)$ ,  $M_2(0;-2;0)$ ,  $M_3(-5;0;0)$ .

2. Найти расстояние от точки  $A(3;-1;2)$  до прямой  $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$

3. Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую  $\frac{x-2}{5} = y-3 = \frac{z+1}{2}$  на плоскость  $x + 4y - 3z + 7 = 0$ .

4. Установить тип поверхности  $3y^2 + 3z^2 + 12y + 18z - 25 = 0$  и сделать чертеж.

5. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой  $\begin{cases} x + 3z = 2, \\ y = 0, \end{cases}$  вокруг оси  $OX$  и  $OZ$ . Сделать чертеж.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЗАДАНИЕ 28. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Выражение для  $a_n$  и значение  $a$

взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$a_n$	$a$	№	$a_n$	$a$
28.1	$\frac{2-3n}{1+2n}$	$-\frac{3}{2}$	28.16	$\frac{n+1}{n+4}$	1
28.2	$\frac{2n-1}{4n+1}$	$\frac{1}{2}$	28.17	$\frac{n+1}{n+2}$	1
28.3	$\frac{2n-3}{n+2}$	2	28.18	$\frac{2n-3}{n+5}$	2
28.4	$\frac{n+1}{1+2n}$	$\frac{1}{2}$	28.19	$\frac{3-n}{3n-1}$	$-\frac{1}{3}$
28.5	$\frac{n-2}{3n+1}$	$\frac{1}{3}$	28.20	$\frac{5n+1}{3-2n}$	$-\frac{5}{2}$
28.6	$\frac{3n}{2n+1}$	$\frac{3}{2}$	28.21	$\frac{3+n}{2n-1}$	$\frac{1}{2}$
28.7	$\frac{1-3n}{n+5}$	-3	28.22	$\frac{4n+1}{1-2n}$	-2
28.8	$\frac{7n+5}{3+2n}$	$\frac{7}{2}$	28.23	$\frac{1+3n}{4n-1}$	$\frac{3}{4}$
28.9	$\frac{3n+4}{6n-2}$	$\frac{1}{2}$	28.24	$\frac{3n+5}{n+3}$	3
28.10	$\frac{1-2n}{4n-3}$	$-\frac{1}{2}$	28.25	$\frac{2-3n}{2n-1}$	$-\frac{3}{2}$
28.11	$\frac{n}{n-3}$	1	28.26	$\frac{1-5n}{3n-2}$	$-\frac{5}{3}$
28.12	$\frac{2n}{8n+1}$	$\frac{1}{4}$	28.27	$\frac{4n-1}{2n+1}$	2
28.13	$\frac{n+1}{n+3}$	1	28.28	$\frac{3n-1}{2n-1}$	$\frac{3}{2}$
28.14	$\frac{n+1}{3n+3}$	$\frac{1}{3}$	28.29	$\frac{5n-2}{3n+1}$	$\frac{5}{3}$
28.15	$\frac{n+5}{n+1}$	1	28.30	$\frac{n+5}{4n+1}$	$\frac{1}{4}$

ЗАДАНИЕ 29. В соответствии с вариантом, используя определение предела функции по Коши (на "языке  $\varepsilon - \delta$ "), доказать, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . Дать геометрическую иллюстрацию.

- |   |  |
|---|--|
| 29.1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 16x + 16}{x + 4} = -8.$ | 29.16. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x - 5} = 9.$   |
| 29.2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 14x + 15}{x - 3} = 4.$   | 29.17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} = 5.$     |
| 29.3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 1.$     | 29.18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 - 7x - 6}{x - 2} = 13.$   |
| 29.4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = 3.$     | 29.19. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x + 2} = -1.$ |
| 29.5. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 + 20x + 25}{x + 5} = 10.$ | 29.20. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2 + 18x + 9}{x + 3} = -12.$ |
| 29.6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x + 3} = -10.$  | 29.21. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 - 23x + 12}{x - 4} = 17.$ |
| 29.7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = -6.$    | 29.22. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 5x - 2}{x + 1} = -9.$   |
| 29.8. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 - 29x + 4}{x - 4} = 27.$  | 29.23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 7x + 3}{x - 1} = 1.$    |
| 29.9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1.$      | 29.24. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$   |
| 29.10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1.$    | 29.25. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x - 4} = 7.$    |
| 29.11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1.$   | 29.26. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 13x + 15}{x - 5} = 7.$  |
| 29.12. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -1.$   | 29.27. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 - 23x + 30}{x - 6} = 13.$ |
| 29.13. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$  | 29.28. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 4x - 6}{x + 2} = -13.$  |
| 29.14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1} = -4.$  | 29.29. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x - 3} = 3.$     |
| 29.15. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x^2 - 15x + 18}{x - 6} = 9.$ | 29.30. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 + 26x - 8}{x + 4} = -30.$ |

**ЗАДАНИЕ 30.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . Выражение для  $f(x)$ ,

предельные значения функции  $A$  и аргумента  $x_0$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

№	$f(x)$	$x_0$	$A$	№	$f(x)$	$x_0$	$A$
30.1	$\frac{1}{x-2}$	2	$\infty$	30.16	$\frac{1}{\log_3 x}$	$+\infty$	0
30.2	$-\frac{1}{x^2}$	0	$-\infty$	30.17	$\log_3 2x$	$+\infty$	$+\infty$
30.3	$1-2x$	$-\infty$	$+\infty$	30.18	$4-x$	$+\infty$	0
30.4	$2x+1$	$\infty$	$\infty$	30.19	$\operatorname{ctgx}$	$\pi-0$	$-\infty$
30.5	$-x^2$	$\infty$	$-\infty$	30.20	$x-4$	$-\infty$	$-\infty$
30.6	$\log_2 x$	0+	$-\infty$	30.21	$\frac{1}{4-x}$	$+\infty$	0
30.7	$\operatorname{tgx}$	$\frac{\pi}{2}-0$	$+\infty$	30.22	$2-x$	$+\infty$	$-\infty$
30.8	$\frac{1}{x-2}$	2+0	$+\infty$	30.23	$x-3$	$-\infty$	$-\infty$
30.9	$x^2$	$\infty$	$+\infty$	30.24	$2^x$	$-\infty$	0
30.10	$\frac{1}{x^2}$	0	$+\infty$	30.25	$\operatorname{tgx}$	$-\frac{\pi}{2}+0$	$-\infty$
30.11	$\frac{1}{2-x}$	2-0	$+\infty$	30.26	$\operatorname{ctgx}$	0+	$+\infty$
30.12	$\frac{1}{x^2}$	$\infty$	0	30.27	$\frac{1}{\log_2 x}$	$+\infty$	0
30.13	$\frac{1}{x}$	0+	$+\infty$	30.28	$x+3$	$+\infty$	$+\infty$
30.14	$e^{2x}$	$+\infty$	$+\infty$	30.29	$\operatorname{ctgx}$	0-	$-\infty$
30.15	$\frac{1}{3-x}$	3+0	$-\infty$	30.30	$\operatorname{tgx}$	$\frac{\pi}{2}+0$	$-\infty$

**ЗАДАНИЕ 31.** Найти предел функции в соответствии с вариантом.

- |   |  |
|---|--|
| 31.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 3x}$ .                               | 31.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ .                 |
| 31.2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$ .                              | 31.17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5-x}}{\sin \pi x}$ .                  |
| 31.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 6x}{\sin 3x}$ .                                      | 31.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - 2x) - 1}$ .                 |
| 31.4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 5x^2 + 6x}$ .                           | 31.19. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{\sin \pi x}$ .                         |
| 31.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(1+x)}$ .                                       | 31.20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{\sin \pi x}$ .                           |
| 31.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$ .  | 31.21. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ . |
| 31.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 5x - \cos 3x}$ .                          | 31.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 10x}{1 - \cos 4x}$ .                     |
| 31.8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\pi x}{\operatorname{tg}^2 2\pi x}$ . | 31.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{2x^2} - 1}$ .                   |
| 31.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ .                                   | 31.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{e^{2x} - 1}$ .            |
| 31.10. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{\sin^2 3x}$ .                               | 31.25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{\ln(1+x^2)}$ .                         |
| 31.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1-2x)}$ .                                     | 31.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ .                      |
| 31.12. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ . | 31.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x \cos \sqrt{x}}$ .      |
| 31.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{3 \operatorname{arctg} 2x}$ .              | 31.28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ .                        |
| 31.14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ .           | 31.29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}$ .               |
| 31.15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{\sin \pi x}$ .                                    | 31.30. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$ .              |

**ЗАДАНИЕ 32.** Найти предел функции в соответствии с вариантом.

- |  |  |
|--|--|
| 32.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2+3x)^2(3x-1)(x-2)}{(1-x)(1-2x)^3(2-3x)^2}$ . | 32.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-1)^2}}$ . |
|--|--|

- 32.3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)(3x-1)^2(1-x)^3}{x^2(4x-1)^2(3x+1)^2}$
- 32.4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x}}{3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x^2+1} + 3\sqrt[3]{x} - 2}$
- 32.5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-x)(1-2x)^3}{(2+3x)^2(3x-1)^2(2x-4)^2}$
- 32.6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x^2}}{3 - 2\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
- 32.7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-x)^2(3x+1)(x-3)^3}{2x^6 - 4x + 5}$
- 32.8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} - (x+1)\sqrt{2x+1}}$
- 32.9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-3x)(2x+1)^2(4x-1)}{x(2x-1)^3}$
- 32.10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{(2x+1)^3} - x\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} - x\sqrt{x}}$
- 32.11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+4)^2(x-1)(3x+1)^3}{(2x-1)^3(x+2)^2(2x+3)}$
- 32.12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 3\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt{3x}}{\sqrt{3x-1} - 2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x+4}}$
- 32.13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^4 - x^3 - 1}{(2x-1)^3(2x+1)^2}$
- 32.14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2x-3)^3} - \sqrt{2x-1} + 3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x} - 7}$
- 32.15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^5(3x+2)^{10}}{(2x+1)^{15}}$
- 32.16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}{\sqrt{2x+1}}$
- 32.17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-5)^2(x-1)(x-2)(x-3)}{\dots \dots \dots (2x+1)^5}$
- 32.18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x+1} - 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt{x+2}}$
- 32.19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^2(2x+5)^2(1-x)^5}{x^5(x-2)^2(3x-2)^2}$
- 32.20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{x} + 7\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{(x-3)^2}}{3\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x^2}}$
- 32.21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 3}{(2x-1)^2(x+1)(3x-2)}$
- 32.22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1} + x\sqrt{x}}{3x\sqrt{x+1} + 2x + \sqrt{2x+1}}$
- 32.23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x - 3}{(3x-1)^2(2x+1)^2(x+1)}$
- 32.24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{(2x+1)^2}}{\sqrt{(2x-1)^3} - \sqrt[4]{(2x-5)^3}}$
- 32.25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2(3x-1)(x+2)^2}{4x^5 - 2x^2 + 4x - 3}$
- 32.26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(2x-5)^2} - 2x\sqrt[3]{x} - x\sqrt{x}}{\sqrt{(2x+1)^3} - \sqrt[4]{(2x-3)^3}}$
- 32.27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(2x-7)^2(3x-2)}{x^2(2x+3)^4}$
- 32.28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x\sqrt{2x+1} - \sqrt{(2x-5)^2} + 1}{\sqrt[3]{x^4} + 4(x+1)\sqrt{2x+3}}$
- 32.29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-3)^2(3x-1)^2x^2}{(x-1)^3(2x+1)(3x+1)^2}$
- 32.30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x-1} + 2\sqrt[3]{2x-1}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x}}$

№	$f(x)$	$x_0$	№	$f(x)$	$x_0$
33.1	$x^2 \sin \frac{1}{3x^2-5}$	$\infty$	33.16	$\cos \frac{x}{2} \operatorname{ctg} 5x$	$\pi$
33.2	$\sqrt[3]{x^2} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 \right)$	$\infty$	33.17	$\sqrt{x} \operatorname{tg} \frac{5}{3\sqrt{x+7}}$	$+\infty$
33.3	$(e^{\operatorname{arctg}(x-2)} - 1) \operatorname{ctg}(2x-4)$	2	33.18	$(e^{3x} - 1) \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$	0
33.4	$x^3 \operatorname{arcsin} \frac{1}{5x^3+2}$	$\infty$	33.19	$\sqrt{x+1} (e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} - 1)$	$\infty$
33.5	$x \ln \frac{3x+5}{3x-7}$	$+\infty$	33.20	$x^5 \operatorname{arctg} \frac{3}{5x^5-2}$	$\infty$
33.6	$\sin(2x-\pi) \operatorname{tg} 7x$	$\frac{\pi}{2}$	33.21	$(5x-2) \sin \frac{1}{x}$	$\infty$
33.7	$x^3 \operatorname{tg} \frac{2}{3x^3+5}$	$\infty$	33.22	$x^4 \left( \cos \frac{1}{x^2} - 1 \right)$	$\infty$
33.8	$\sqrt[4]{x+2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\infty$	33.23	$(e^{x^{x+1}} - e) \operatorname{ctg}(3x+3)$	-1
33.9	$(e^{x+1} - e) \operatorname{ctg} 3x$	0	33.24	$(2x+1) \operatorname{arcsin} \frac{1}{3x}$	$\infty$
33.10	$(x+3)(e^{\frac{1}{5x+3}} - 1)$	$\infty$	33.25	$x^2 \ln \frac{3x^2-2}{3x^2+6}$	$\infty$
33.11	$\sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{8x+2}}$	$\infty$	33.26	$\sin 2x \operatorname{ctg} 3x$	0
33.12	$x^2 \left( 1 - \cos \frac{1}{3x-2} \right)$	$\infty$	33.27	$(2x-3) \operatorname{tg} \frac{5}{7x+1}$	$\infty$
33.13	$(e^{x^2-3x+4} - e) \operatorname{ctg}(x-3)$	3	33.28	$(5x+2) \operatorname{arctg} \frac{3}{2x-7}$	$\infty$
33.14	$\sqrt{x} \operatorname{arcsin} \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$	$+\infty$	33.29	$(e^{\frac{x}{2}} - 1) \operatorname{ctg} 8x$	0
33.15	$\sqrt[3]{x} \ln \frac{1+\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt[3]{x}}$	$\infty$	33.30	$x^2 (e^{\frac{1}{2x^2+1}} - 1)$	$\infty$

**ЗАДАНИЕ 33.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Выражение для функции  $f(x)$  и предельное значение  $x_0$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

**ЗАДАНИЕ 34.** Найти предел функции в соответствии с вариантом.

34.1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$	34.4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)} - \sqrt{x^4-9})$
34.2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x^2-3})$	34.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+2} - x)$
34.3	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}(x - \sqrt[3]{x^3-5})$	34.6	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{4-x^3})$

34.7	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x^2 - 2x + 3})$	34.19	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (\sqrt[3]{x^2(x^6+4)} - \sqrt[3]{(x^8-1)})$
34.8	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+3)})$	34.20	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} - \sqrt{x(x+1)(x+2)})$
34.9	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt{x(x^4-1)} - \sqrt{x^5-8})$	34.21	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x(x-1)})$
34.10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt[3]{5+8x^3} - 2x)$	34.22	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4})$
34.11	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[3]{5+x^3} - \sqrt[3]{3+x^3})$	34.23	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^4+3} - \sqrt{x^4-2})$
34.12	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2})$	34.24	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+1)(x+2)} (\sqrt{x^3-3} - \sqrt{x^3-2}))$
34.13	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^2-3})$	34.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x)$
34.14	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$	34.26	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+2})$
34.15	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+5)} - x)$	34.27	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+1} - x)$
34.16	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3+8} (\sqrt{x^3+2} - \sqrt{x^3-1})$	34.28	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-8x+3} - \sqrt{x^2-4x+2})$
34.17	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x^2+1)(x^2+2)} - \sqrt{(x^2-1)(x^2-2)})$	34.29	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x+6} - x)$
34.18	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x(x-1)})$	34.30	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$

**ЗАДАНИЕ 35.** Вычислить предел функции в соответствии с вариантом.

$$35.1. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-5} \right)^{\frac{x}{2}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$$

$$35.2. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2+x+4} \right)^{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{ctg} 4x}$$

$$35.3. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+5x}{2+5x} \right)^{x^2+x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x - \sqrt{2+1})^{\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$35.4. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+5x-6}{3x^2+4} \right)^{x^2-4x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\operatorname{ctg} 2x}$$

$$35.5. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^{x^2-4}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 6x+1)^{1/(1-\cos x)}$$

$$35.6. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2 \cos x)^{1/\sin(x-\frac{\pi}{3})}$$

$$35.7. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-5}{4x+7} \right)^{x+8}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x+1)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+2x)}$$

$$35.8. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+x-x^2}{3-x^2} \right)^{\sqrt{x}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos 2x)^{1/(\sin x - \cos x)}$$

$$35.9. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2(1+x^2)}{3+x+2x^2} \right)^{5x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x - \sin x)^{1/\operatorname{tg} 8x}$$

$$35.10. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5\sqrt{x+x}}{x-8} \right)^{\sqrt{x}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x+1)^{\operatorname{ctg} 4x}$$

$$35.11. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3-1}{x^3-1} \right)^{x^3-x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin 3x+2)^{1/\cos x}$$

$$35.12. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x+1)^3}{x^3} \right)^{x-3}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left( \sin x + \frac{1}{2} \right)^{\operatorname{tg} 3x}$$

$$35.13. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5-x^2}{x-x^2} \right)^{5x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{1/\sin^2 x}$$

$$35.14. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x^2+3x} \right)^{x\sqrt{x+5}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x - \sin 2x)^{1/\sin 3x}$$

$$35.15. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x-x^2}{\sqrt{x-x^2}} \right)^{x\sqrt{x}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\sin x}{1+\sin 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$35.16. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1} \right)^{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-\cos x}{\sin x+1} \right)^{1/x}$$

$$35.17. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-3+2x^2}{2x^2+4+5x} \right)^{x+8}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$$

$$35.18. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+\sqrt{3x}}{5(x-1)} \right)^{2\sqrt{x+1}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x}$$

$$35.19. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4-1}{x^4+1} \right)^{x^2+x^4}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\cos x}{1+\cos 2x} \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$35.20. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+x^2} \right)^{x\sqrt{x+4}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left( \frac{\sin x + \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} \right)^{1/(\cos x - \frac{1}{2})}$$

$$35.21. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+x^3} \right)^{3x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+\sin x}{\sin 3x+2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$35.22. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5\sqrt{x+4x}}{4x-6} \right)^{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 8x)^{1/(x+\sin x)}$$

- 35.23. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 8}{4x + 2x^2} \right)^{6x^2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3 - 2 \cos x}{\sin x + 1} \right)^{\operatorname{ctg} 3x}$ .
- 35.24. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{8x + x^3}{x^3 - 3x} \right)^{x^2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos^2 x)^{\operatorname{ctg} 2x}$ .
- 35.25. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 8}{x - \sqrt{x} + x^2} \right)^{4x-2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin 2x} \right)^{1/x}$ .
- 35.26. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4 + x + 1}{4 + x^4} \right)^{x^2 - x}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{\operatorname{ctg} 5x}$ .
- 35.27. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{5x + 4} \right)^{\sqrt{x}}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}}$ .
- 35.28. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3\sqrt{x} + 2}{(x+1)^3} \right)^{x^2 \sqrt{x}}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x + \pi + 2)}{\cos(2x)} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
- 35.29. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 2x^2 + 1}{2x^2 + \sqrt{x}} \right)^{x + 5\sqrt{x}}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{2 + \cos x}{2 + \sin x} \right)^{1/(\sin x - \cos x)}$ .
- 35.30. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^5 + x^3}{(x^3 + x)x^2 + 1} \right)^{2x^2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \sin 2x}{\cos x + 1} \right)^{1/(1 - \cos x)}$ .

### ЗАДАНИЕ 36.

Найти предел вида  $\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha(x)]^{\beta(x)}$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ . Выражения

для  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  и значение  $x_0$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

Указание. При вычислении предела следует использовать пределы вида

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0} u(x) \ln u(x) = 0 \text{ и } \lim_{v(x) \rightarrow +\infty} \frac{\ln v(x)}{v(x)} = 0.$$

№ варианта	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$x_0$	№ варианта	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$x_0$
36.1	$\sin x$	$\operatorname{tg} 6x$	0	36.5	$\sin 3x$	$\operatorname{tg} 2x$	0
36.2	$\cos x$	$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	36.6	$\operatorname{tg} 2x$	$\sin 5x$	0
36.3	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} 2x$	0	36.7	$\cos x$	$\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\pi^2}$	$\frac{\pi}{2}$
36.4	$\cos 3x$	$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	36.8	$\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\pi^2}$	$\cos x$	$\frac{\pi}{2}$

№ варианта	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$x_0$	№ варианта	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$x_0$
36.9	$1 - \frac{x}{2}$	$\operatorname{tg}(x - 2)$	2	36.20	$x - \frac{\pi}{3}$	$\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x$	$\frac{\pi}{3}$
36.10	$\frac{1}{\ln(2^x - 1)}$	$x$	0	36.21	$\operatorname{ctg} x$	$\cos 3x$	$\frac{\pi}{2}$
36.11	$x$	$\sin 2x$	0	36.22	$\sin \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\infty$
36.12	$\sin x$	$2x$	0	36.23	$\frac{1}{x}$	$\sin \frac{1}{x}$	$\infty$
36.13	$x - 3$	$\operatorname{tg}(x - 3)$	3	36.24	$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$	$\cos x - \sin x$	$\frac{\pi}{4}$
36.14	$\operatorname{tg}(x - 3)$	$x - 3$	3	36.25	$\cos x - \sin x$	$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$
36.15	$\cos \frac{\pi}{3}x$	$x - \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	36.26	$\operatorname{tg} x$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$	0
36.16	$x - \frac{3}{2}$	$\cos \frac{\pi}{3}x$	$\frac{3}{2}$	36.27	$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$	$\operatorname{tg} \sqrt{x}$	0
36.17	$\operatorname{tg} \sqrt{x}$	$x$	0	36.28	$\sqrt{x} - 2$	$\cos \frac{\pi}{8}x$	4
36.18	$x$	$\operatorname{tg} \sqrt{x}$	0	36.29	$\cos \frac{\pi}{6}x$	$3 - \sqrt{3x}$	3
36.19	$\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x$	$x - \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	36.30	$\cos(\frac{2x}{\pi})$	$\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{4}$

ЗАДАНИЕ 37. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Выражение для функции  $f(x)$  и

предельное значение  $x_0$  взять из таблицы в соответствии с вариантом.

Указание. При вычислении предела следует использовать предел вида

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0} u(x) \ln u(x) = 0.$$

№	$f(x)$	$x_0$	№	$f(x)$	$x_0$
37.1	$x^{\frac{1}{\ln(x+1)}}$	$+\infty$	37.4	$\left( \ln \frac{1}{x} \right)^x$	$0+$
37.2	$\frac{1}{x^x}$	$+\infty$	37.5	$(\operatorname{tg} x)^{x - \frac{\pi}{2}}$	$\frac{\pi}{2}$
37.3	$(e^x + 1)^{\frac{1}{x}}$	$\infty$	37.6	$(e^x + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$	$\infty$

№	$f(x)$	$x_0$	№	$f(x)$	$x_0$
37.7	$(e^x + 2)^{\frac{1}{x^2}}$	$\infty$	37.19	$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{\lg x}}$	$\frac{\pi}{2} - 0$
37.8	$(x^5 + x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$	$\infty$	37.20	$(e^x + x)^{\frac{1}{x^2}}$	$\infty$
37.9	$\left(e^x + \frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	$\infty$	37.21	$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{\operatorname{tg}(x-3)}$	$3+0$
37.10	$(x^2 - 3)^{\frac{5}{\ln^2 x}}$	$+\infty$	37.22	$\left(e^x - \frac{x}{x^2 - 1}\right)^{\frac{x}{x^2 + 1}}$	$\infty$
37.11	$(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$	$\frac{\pi}{2} - 0$	37.23	$\left(\frac{1}{x+4}\right)^{\frac{\cos \frac{\pi}{8}}{8}}$	$-4+0$
37.12	$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{\ln(x-2)}}$	$2+0$	37.24	$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}}$	$-1+0$
37.13	$\left(\frac{1}{(x-2)^3}\right)^{\frac{4}{\ln(x-2)}}$	$2+0$	37.25	$(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$	$\frac{\pi}{2} - 0$
37.14	$\left(x + \frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{2 \ln x}}$	$+\infty$	37.26	$(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$	$0+$
37.15	$\left(x^3 + \frac{\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x^2}}$	$\infty$	37.27	$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$	$0$
37.16	$\left(x^2 + \frac{\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln \frac{\cos x}{x}}}$	$0+$	37.28	$\left(\ln \frac{1}{x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$	$+\infty$
37.17	$(\operatorname{tg} x + x)^{\cos x}$	$\frac{\pi}{2}$	37.29	$(\ln(2^x - 1))^x$	$0+$
37.18	$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln(x-\frac{\pi}{2})}}$	$\frac{\pi}{2} + 0$	37.30	$\left(\ln \frac{1}{2^x - 1}\right)^{2^x - 1}$	$0+$

**ЗАДАНИЕ 38.** Найти точки разрыва функции  $f(x)$  и исследовать их характер. Дать геометрическую иллюстрацию.

$$38.1. \begin{cases} -2x, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } -1 < x < 2, \\ x - 1, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.2. \begin{cases} x + 2, & \text{если } x < -2, \\ 4 - x^2, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 3 - 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$38.3. \begin{cases} -1,5 - x, & \text{если } x \leq -2, \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } 2 < x < 0, \\ x^2 - 5, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 7 - 2x, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$38.5. \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x < -1, \\ -\frac{2}{x}, & \text{если } -1 < x < 0, \\ x^2, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ 6 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$38.7. \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{если } x < -2, \\ \frac{2}{x}, & \text{если } -2 \leq x < 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{3}{2}\pi, \\ x - \frac{3}{2}\pi, & \text{если } x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

$$38.9. \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{если } x < -2, \\ x^2, & \text{если } -2 \leq x < 0, \\ 2 \cos x, & \text{если } 0 \leq x < \pi, \\ -2, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

$$38.11. \begin{cases} x + 4, & \text{если } x < -3, \\ -\frac{3}{x}, & \text{если } -3 < x < 0, \\ x^2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 2x + 1, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$38.13. \begin{cases} \frac{1}{x+5}, & \text{если } x < -5, \\ x + 4, & \text{если } -5 \leq x < 0, \\ (x-2)^2, & \text{если } 0 \leq x < 4, \\ x - 5, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

$$38.4. \begin{cases} -3x, & \text{если } x \leq 0, \\ -\frac{1}{x} - 2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x^2 - 4, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 2x - 5, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.6. \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x < -2, \\ x + 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & \text{если } 0 < x < e, \\ \frac{x}{e}, & \text{если } x > e. \end{cases}$$

$$38.8. \begin{cases} -x - \frac{1}{2}, & \text{если } x < -1, \\ -\frac{1}{2x}, & \text{если } -1 < x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi, \\ -3, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$38.10. \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x < 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq 4, \\ \frac{1}{x-4}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

$$38.12. \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x < 3, \\ -x + 2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$38.14. \begin{cases} 2x^2 + 10, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ -x + 2, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.15. \begin{cases} x-1, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } 0 \leq x < 2, \\ 2x, \text{ если } 2 < x \leq 3, \\ -\frac{1}{x-3}, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.17. \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ x, \text{ если } 0 < x < 2, \\ 2, \text{ если } 2 \leq x \leq 3, \\ -\frac{1}{x-3}, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.19. \begin{cases} x+2, \text{ если } x < -2, \\ x^2+1, \text{ если } -2 \leq x < 1, \\ 2x, \text{ если } 1 < x < 3, \\ \frac{5}{x-3}, \text{ если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$38.21. \begin{cases} x+3, \text{ если } x < -2, \\ (x+1)^2, \text{ если } -2 < x < 0, \\ -\ln x, \text{ если } 0 < x < e, \\ x-e, \text{ если } x \geq e. \end{cases}$$

$$38.23. \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, \text{ если } x < -2, \\ x, \text{ если } -2 \leq x < 0, \\ \operatorname{tg} x, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 2, \text{ если } x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$38.25. \begin{cases} \frac{2}{x+1}, \text{ если } x < -1, \\ 2x^2, \text{ если } -1 \leq x < 0, \\ x, \text{ если } 0 < x < 1, \\ 2, \text{ если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$38.16. \begin{cases} 1-x^2, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } 0 < x < 2, \\ x-2, \text{ если } 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{2}{x-3}, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.18. \begin{cases} x^2+4x+50, \text{ если } x \leq -2, \\ -2, \text{ если } -2 < x < 0, \\ \operatorname{tg} x, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x, \text{ если } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$38.20. \begin{cases} x-1, \text{ если } x < -1, \\ -x^2-1, \text{ если } -1 < x < 0, \\ 2x+1, \text{ если } 0 \leq x \leq 2, \\ -\frac{1}{x-2}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

$$38.22. \begin{cases} \frac{2}{x+\frac{\pi}{4}}, \text{ если } x < -\frac{\pi}{4}, \\ \cos 2x, \text{ если } -\frac{\pi}{4} \leq x < 0, \\ 1, \text{ если } 0 < x < 2, \\ x^2, \text{ если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$38.24. \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ если } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \\ x-\pi, \text{ если } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$38.26. \begin{cases} \frac{1}{x+\pi}, \text{ если } x < -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi \leq x < 0, \\ 3x, \text{ если } 0 < x < 2, \\ 0, \text{ если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$38.27. \begin{cases} \log_2(-x), \text{ если } x < 0, \\ 2x, \text{ если } 0 \leq x < 2, \\ 0, \text{ если } 2 \leq x < 3, \\ 3x-9, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

$$38.29. \begin{cases} 2x, \text{ если } x < -1, \\ 5, \text{ если } -1 \leq x < 0, \\ 5-x^2, \text{ если } 0 < x < \sqrt{5}, \\ \frac{2}{x-\sqrt{5}}, \text{ если } x > \sqrt{5}. \end{cases}$$

$$38.28. \begin{cases} -\frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ -x, \text{ если } 0 \leq x < 2, \\ x^2-6, \text{ если } 2 < x < 3, \\ 5, \text{ если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$38.30. \begin{cases} x+\pi, \text{ если } x < -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi < x < 0, \\ 2, \text{ если } 0 \leq x < 2, \\ -2x+4, \text{ если } x \geq 2. \end{cases}$$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ЗАДАНИЕ 39. Пользуясь только определением производной, найти  $y'$  в соответствии с вариантом.

$$39.1. y = \frac{x^2}{x+1}.$$

$$39.2. y = x \ln x.$$

$$39.3. x = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}.$$

$$39.4. y = \ln^2 x.$$

$$39.5. y = \sqrt{\cos 3x}.$$

$$39.6. y = \frac{2x+3}{3x+5}.$$

$$39.7. y = e^{\sin 2x}.$$

$$39.8. y = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x}.$$

$$39.9. y = \ln^3 x.$$

$$39.10. y = \sin^2 2x.$$

$$39.11. x = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}.$$

$$39.12. y = \frac{3x-2}{4x+3}.$$

$$39.13. y = \sqrt{\operatorname{tg} x}.$$

$$39.14. y = \frac{1}{x^3+3}.$$

$$39.15. y = \sqrt[3]{x^2+1}.$$

$$39.16. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$39.17. y = e^{\sqrt{x}}.$$

$$39.18. y = \sqrt{x^3+1}.$$

$$39.19. y = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}.$$

$$39.20. y = \sqrt[3]{\sin 2x}.$$

$$39.21. y = 5^{\cos 2x}.$$

$$39.22. y = \sqrt[3]{1-x^2}.$$

$$39.23. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

$$39.24. y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$39.25. y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$39.26. y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

$$39.27. y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$39.28. y = \frac{x}{\sqrt{x+3}}.$$

$$39.29. y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$39.30. y = \frac{\cos x}{x}.$$



**ЗАДАНИЕ 40.** Найти производную функции  $y = f(x)$  в соответствии с

вариантом.

$$40.1. \quad y = 3\sqrt{x^2} \log_3 \operatorname{tg} x + \frac{e^x - 2^x}{x^2}.$$

$$40.2. \quad y = x \arcsin \ln x + \frac{e^{\cos x} + 3}{3x^2 + x}.$$

$$40.3. \quad y = \frac{(3x - 2)^2}{3x^2 - 2x + 1} + \operatorname{arctg} \ln \sqrt{x}.$$

$$40.4. \quad y = \arccos \sqrt{1 - 3x} + \sqrt[3]{\frac{5x}{3x^2 - 4}}.$$

$$40.5. \quad y = 5\sqrt{x^2 + x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln \sin(2x + 5)}{\arcsin 2x}.$$

$$40.6. \quad y = \frac{\operatorname{tg}^3 x - \sin x}{\cos^3 2x} + x \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1}.$$

$$40.7. \quad y = \frac{x 5^{\sin x}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{\ln(1 + x)}.$$

$$40.8. \quad y = \cos \ln(1 - x^2) + \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{1 + 2 \sin x}}.$$

$$40.9. \quad y = \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} \sqrt{2x} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$40.10. \quad y = 3^{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{1 - \sin^3 2x}{1 + \cos x}.$$

$$40.11. \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}} + 2\sqrt{\operatorname{tg}^3 x (x^2 + 1)}.$$

$$40.12. \quad y = (3x^2 - 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}) \operatorname{tg}^2 x + \frac{(x - 2)^3}{\ln \cos x}.$$

$$40.13. \quad y = \ln x^3 \arcsin \sqrt{x} + \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

$$39.14. \quad y = \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 1}) + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$40.15. \quad y = \frac{3}{\sqrt{x^3 + x + 1}} + \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x} 3^x.$$

$$40.16. \quad y = \operatorname{arctg} \ln(5x + 3) + \frac{\sqrt{\ln^3 2x}}{\sin \sqrt{x + 1}}.$$

$$40.17. \quad y = \frac{3^{\cos 5x}}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} - \arcsin 3x \log_3 x.$$

$$40.18. \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}} + \operatorname{tg}^3 7x(3x^2 - 4x + 2).$$

$$40.19. \quad y = 3\sqrt{x^3 + 2x^2 + \sqrt{x}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$40.20. \quad y = \frac{1}{\arcsin^2 3x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$40.21. \quad y = \sqrt{\frac{5x}{3x^2 - 4}} + e^{\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} x^2.$$

$$40.22. \quad y = 5^x \arcsin \sqrt{x} - \frac{\operatorname{tg}^3 x - \sin x}{\ln x}.$$

$$40.23. \quad y = \frac{\arccos^2 x}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} + \operatorname{tg}(1 - 3x)e^{x^2}.$$

$$40.24. \quad y = e^{\sin x} \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x} + \frac{x^2}{x - 1} e^{3x}.$$

$$40.25. \quad y = \log_3(7x + \sqrt[3]{x^2 + 1}) + \frac{4 \sin x}{\cos^2 5x}.$$

$$40.26. \quad y = 2 \operatorname{tg}^4(x^2 + 1) - \frac{\sqrt{x + 1}}{3(x + 2)}.$$

$$40.27. \quad y = 2^{\frac{x}{3}} \cos^2 \frac{x}{3} + \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - 2 \sin x}}.$$

$$40.28. \quad y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{4 + x^2} - \frac{3\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}.$$

$$40.29. \quad y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}) + \frac{(\cos 3x - 1)^2}{\sqrt[3]{x^3 + x + \frac{1}{x}}}.$$

$$40.30. \quad y = e^{\frac{2}{x}} \arccos \frac{1}{x} - \sqrt[3]{\frac{(x - 2)^2}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

**ЗАДАНИЕ 41.** Найти производную функции, заданной неявно, то есть уравнением  $F(x, y) = 0$ , в соответствии с вариантом.

$$41.1. \quad y + xy - \arcsin(x + y) = 0.$$

$$41.2. \quad x + xy - \arccos(x^2 + y^2) = 0.$$

$$41.3. \quad y \sin x - \sin y + \cos(x + y) = 0.$$

$$41.4. \quad x^2 + xy - \operatorname{ctg}(x + y) = 0.$$

$$41.5. \quad x^2 + y^2 - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xy = 0.$$

$$41.6. e^{x+y} + (x+y)\sin y = 0.$$

$$41.7. 5^{\frac{x+y}{x}} - \sin(x+y) = 0.$$

$$41.8. x+y - \operatorname{arctg} 2y - \sin(x+y^2) = 0.$$

$$41.9. 3^{2x} + 3^{x+y^2} - \cos(x^2 + y^2) = 0.$$

$$41.10. e^{\sin x} y + e^{x+y} \sin 2x = 0.$$

$$41.11. x^2 + 3x^3 y^3 + x + \sin(x+y^2) - 3 = 0.$$

$$41.12. shx + ch(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}(1+y) = 0.$$

$$41.13. thx^2 + ch(x+y) - x^3 - y^3 = 0.$$

$$41.14. 2th(x+y) - x^2 - y^2 + chy = 0.$$

$$41.15. sh(x^2 + 1) + x^2 y^2 - \sin(x^2 + y^2) = 0.$$

$$41.16. y^2 + xy^2 - \arccos(x^2 + y^3) = 0.$$

$$41.17. \cos y - x^2 - y^2 + 4\operatorname{ctg}(x^2 + y^2) = 0.$$

$$41.18. y\operatorname{tg}(x^2 + 1) - \cos y + \arcsin(x+y) = 0.$$

$$41.19. x^2 + y^2 + \operatorname{tg}(x^2 + y^2) + xy = 0.$$

$$41.20. 2^{x^2+y^2} - (x^2 + y^2)\cos y = 0.$$

$$41.21. 2^{\sin(x+y)} - \ln(x^2 + y^2) + xy = 0.$$

$$41.22. \operatorname{tg}(x+y) - x^2 - y^2 + \ln(x+y) = 0.$$

$$41.23. e^{\cos y} x - \sin(x+y^3) - x^2 - y^2 = 0.$$

$$41.24. x^3 + 4x^2 y^2 - x + \cos(x-y^2) + 5 = 0.$$

$$41.25. ch(x+y) + \frac{x}{y} - \operatorname{arctg}(x+y) = 0.$$

$$41.26. th(x+y) + 3\ln(x^2 + y^2) - x^2 y^2 = 0.$$

$$41.27. \operatorname{ctg}(x^2 + xy) - ch(x+y) + x^2 - y^2 = 0.$$

$$41.28. xy^2 + x - \arccos(x^2 + y) = 0.$$

$$41.29. \frac{y}{x} + \sin(x^2 + y^2) + 2^{x+y} - xy = 0.$$

$$41.30. \sin(x+y) + \ln(x^2 + y^2) - x^2 y^2 = 0.$$

**ЗАДАНИЕ 42.** Для функции, заданной параметрически, найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  в

соответствии с вариантом.

$$42.1. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t, \\ y = t^4. \end{cases}$$

$$42.2. \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = t^2 \cdot e^{-3t}. \end{cases}$$

$$42.3. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$42.4. \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$$

$$42.5. \begin{cases} x = \frac{1}{1-t^2}, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$42.6. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 4}, \\ y = 2t^3 + 3t^2 + 7. \end{cases}$$

$$42.7. \begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$$

$$42.8. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln(\cos 2t). \end{cases}$$

$$42.9. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = e^{-2t}. \end{cases}$$

$$42.10. \begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = t^3. \end{cases}$$

$$42.11. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 3 + \cos t. \end{cases}$$

$$42.12. \begin{cases} x = t^3 - 3, \\ y = \sqrt{3t^4 - 2t^3 + 1}. \end{cases}$$

$$42.13. \begin{cases} x = 2\sin 3t, \\ y = 2\cos 3t. \end{cases}$$

$$42.14. \begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2}, \\ y = \arcsin 2t. \end{cases}$$

$$42.15. \begin{cases} x = 4(\sin t - t \cos t), \\ y = 4(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

$$42.16. \begin{cases} x = \sqrt{t+1}, \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$$

$$42.17. \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = \operatorname{ctg} 2t. \end{cases}$$

$$42.18. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

$$42.19. \begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \frac{1}{\cos 3t}. \end{cases}$$

$$42.20. \begin{cases} x = \ln 5t, \\ y = \frac{2}{t^2}. \end{cases}$$

$$42.21. \begin{cases} x = \cos 4t, \\ y = \sin^3 4t. \end{cases}$$

$$42.22. \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$42.23. \begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$$

$$42.24. \begin{cases} x = \frac{t^2}{2}, \\ y = \operatorname{arctg} 3t. \end{cases}$$

$$42.25. \begin{cases} x = \sin^2 2t, \\ y = \sqrt[3]{\cos^2 2t}. \end{cases}$$

$$42.26. \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = (t^3 + 2t^2 + 1)e^{2t}. \end{cases}$$

$$42.27. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = (t^2 + 1)\cos 2t. \end{cases}$$

$$42.28. \begin{cases} x = e^{-t} \sin 2t, \\ y = e^{-t} \cos 2t. \end{cases}$$

$$42.29. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 2}, \\ y = \ln(t^2 - 2). \end{cases}$$

$$42.30. \begin{cases} x = 5^{-t}, \\ y = 3^t. \end{cases}$$

**ЗАДАНИЕ 43.** В соответствии с вариантом, используя формулу

Лейбница, найти  $y^{(4)}$  от следующих функций:

- |   |  |
|---|--|
| 43.1. $y = e^{-x} \sin x$                     | 43.16. $y = (1 - x^2) \cos x$                            |
| 43.2. $y = (x^2 + x + 1) \cos x$              | 43.17. $y = x^2 \arcsin x$                               |
| 43.3. $x = x^2 \log_2 x$                      | 43.18. $y = \frac{\cos x}{x}$                            |
| 43.4. $y = (x^2 - x) e^x$                     | 43.19. $y = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$                   |
| 43.5. $y = x^2 \operatorname{tg} x$           | 43.20. $y = (x^2 - 5x + 4) \cdot 3^{5x}$                 |
| 43.6. $y = (5x^2 + 2x + 7) \ln 5x$            | 43.21. $y = (1 - x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ |
| 43.7. $y = \frac{\sin x}{x}$                  | 43.22. $y = x^2 \operatorname{sh} x$                     |
| 43.8. $y = x \ln^2 x$                         | 43.23. $y = (x^2 - 3x + 2) \sin 2x$                      |
| 43.9. $y = x^2 \arccos x$                     | 43.24. $y = \sqrt{x} \operatorname{ch} x$                |
| 43.10. $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$             | 43.25. $y = \frac{\ln(x+5)}{x+5}$                        |
| 43.11. $x = (1 - \cos x) \operatorname{tg} x$ | 43.26. $y = x \cos x^2$                                  |
| 43.12. $y = e^{-2x} \cos 3x$                  | 43.27. $y = \frac{2+x}{\cos x}$                          |
| 43.13. $y = x^2 \cdot 7^{x^2}$                | 43.28. $y = x^2 \operatorname{ch} x$                     |
| 43.14. $y = \frac{e^x}{x^2}$                  | 43.29. $y = (x^2 + 1) \operatorname{ctg} x$              |
| 43.15. $y = x^3 \ln x$                        | 43.30. $y = e^{-x} \ln x$                                |

**ЗАДАНИЕ 44.** В соответствии с вариантом, для функции  $y=f(x)$  найти

$dy$  и  $d^2y$ :

а) если  $x$  - независимая переменная,

б) если  $x$  - зависимая переменная.

44.1. а) $y = \operatorname{arctg}(2x+1)$ ; б) $y = \operatorname{arctg}(2x+1)$ , $x = \cos 2t$ .	44.4. а) $y = e^{3-x^2}$ ; б) $y = e^{3-x^2}$ , $x = \sin t$ .
44.2. а) $y = \ln(\operatorname{tg} 3x)$ ; б) $y = \ln(\operatorname{tg} 3x)$ , $x = e^{3t}$ .	44.5. а) $y = \arcsin(2-x)$ ; б) $y = \arcsin(2-x)$ , $x = e^{-4t}$ .
44.3. а) $y = \sin^2 3x$ ; б) $y = \sin^2 3x$ , $x = \log_2 t$ .	44.6. а) $y = 3^{\cos 2x}$ ; б) $y = 3^{\cos 2x}$ , $x = \ln t$ .

44.7. а) $y = (4 - \cos 2x)^2$ ; б) $y = (4 - \cos 2x)^2$ , $x = \operatorname{ctg} t$ .	44.19. а) $y = \cos^2(x+1)$ ; б) $y = \cos^2(x+1)$ , $x = \ln t$ .
44.8. а) $y = \operatorname{tg} 4x$ ; б) $y = \operatorname{tg} 4x$ , $x = e^{2-t}$ .	44.20. а) $y = 5^{\sin 2x}$ ; б) $y = 5^{\sin 2x}$ , $x = \sqrt{4-t}$ .
44.9. а) $y = e^{\sqrt{2-x}}$ ; б) $y = e^{\sqrt{2-x}}$ , $x = \ln(t-1)$ .	44.21. а) $y = \ln(\operatorname{tg} 4x)$ ; б) $y = \ln(\operatorname{tg} 4x)$ , $x = \arcsin t$ .
44.10. а) $y = \log_3 \sqrt{3-x}$ ; б) $y = \log_3 \sqrt{3-x}$ , $x = 4^{2-t}$ .	44.22. а) $y = \operatorname{arctg} 3x$ ; б) $y = \operatorname{arctg} 3x$ , $x = \log_4 t$ .
44.11. а) $y = \arccos(3-2x)$ ; б) $y = \arccos(3-2x)$ , $x = \log_2 t$ .	44.23. а) $y = e^{\sqrt{x+3}}$ ; б) $y = e^{\sqrt{x+3}}$ , $x = \sqrt[3]{1-t}$ .
44.12. а) $y = \ln(\operatorname{ctg} 2x)$ ; б) $y = \ln(\operatorname{ctg} 2x)$ , $x = \ln(2-t)$ .	44.24. а) $y = \ln(\operatorname{ctg} 5x)$ ; б) $y = \ln(\operatorname{ctg} 5x)$ , $x = e^{3t+1}$ .
44.13. а) $y = (\cos 4x - 5)^2$ ; б) $y = (\cos 4x - 5)^2$ , $x = \operatorname{ctg} t$ .	44.25. а) $y = \arccos 4x$ ; б) $y = \arccos 4x$ , $x = \log_2 t$ .
44.14. а) $y = 2^{\sin 3x}$ ; б) $y = 2^{\sin 3x}$ , $x = \cos 2t$ .	44.26. а) $y = \operatorname{ctg}(1-2x)$ ; б) $y = \operatorname{ctg}(1-2x)$ , $x = \arccos t$ .
44.15. а) $y = \operatorname{arctg}(3x-1)$ ; б) $y = \operatorname{arctg}(3x-1)$ , $x = 5^{t-6}$ .	44.27. а) $y = \arcsin 3x$ ; б) $y = \arcsin 3x$ , $x = e^{2t}$ .
44.16. а) $y = \log_5(3-x^2)$ ; б) $y = \log_5(3-x^2)$ , $x = \sin 2t$ .	44.28. а) $y = (\sin 3x + 4)^2$ ; б) $y = (\sin 3x + 4)^2$ , $x = \ln(t+4)$ .
44.17. а) $y = \operatorname{tg}(3x+2)$ ; б) $y = \operatorname{tg}(3x+2)$ , $x = \operatorname{arctg} t$ .	44.29. а) $y = \operatorname{arctg}(x+2)$ ; б) $y = \operatorname{arctg}(x+2)$ , $x = \cos t$ .
44.18. а) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ ; б) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ , $x = 3^{2t}$ .	44.30. а) $y = x e^{2x}$ ; б) $y = x e^{2x}$ , $x = \arcsin t$ .

**ЗАДАНИЕ 45.** В соответствии с вариантом написать формулу Тейлора 3-

го порядка для функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ :

- |   |   |
|---|---|
| 45.1. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ , $x_0 = 1$ . | 45.5. $f(x) = (1 - e^{-x})^2$ , $x_0 = 1$ .                           |
| 45.2. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ , $x_0 = 7$ .                    | 45.6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , $x_0 = \sqrt{3}$ .            |
| 45.3. $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ , $x_0 = 2$ .             | 45.7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$ , $x_0 = 0$ .                |
| 45.4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^2}}$ , $x_0 = 0$ .        | 45.8. $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ , $x_0 = \frac{\pi}{6}$ . |

$$\begin{array}{ll}
45.9. f(x) = x^3 \sqrt{8-x}, & x_0 = 1. \\
45.10. f(x) = \sin x - x^2 e^{-x}, & x_0 = 0. \\
45.11. f(x) = \arcsin x, & x_0 = \frac{1}{2}. \\
45.12. f(x) = \ln(x^2 - 7x + 10), & x_0 = 1. \\
45.13. f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x_0 = 2. \\
45.14. f(x) = 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x, & x_0 = \frac{\pi}{3}. \\
45.15. f(x) = 2x \cos^2 \frac{x}{2} + x, & x_0 = \frac{\pi}{3}. \\
45.16. f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}, & x_0 = 1. \\
45.17. f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, & x_0 = \frac{1}{2}. \\
45.18. f(x) = \frac{\arcsin x}{x} - 1, & x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
45.19. f(x) = x - 2 \sin x, & x_0 = \frac{\pi}{2}. \\
45.20. f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3), & x_0 = -1. \\
45.21. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}, & x_0 = 1. \\
45.22. f(x) = \frac{\ln(1+5x)}{x}, & x_0 = 2. \\
45.23. f(x) = 1 - \cos x, & x_0 = \frac{\pi}{6}. \\
45.24. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}, & x_0 = 0. \\
45.25. f(x) = e^{-x^2}, & x_0 = \sqrt{\pi}. \\
45.26. f(x) = \sqrt[4]{16-x^2}, & x_0 = 0. \\
45.27. f(x) = \sin(x^2), & x_0 = \frac{\pi}{3}. \\
45.28. f(x) = 1 + 3 \cos x, & x_0 = \frac{\pi}{6}. \\
45.29. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}, & x_0 = 0. \\
45.30. f(x) = \sqrt{1+x^2}, & x_0 = 0.
\end{array}$$

**ЗАДАНИЕ 46.** Используя правило Лопиталя, найти предел в соответствии с вариантом.

$$\begin{array}{ll}
46.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}. & 46.7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}. \\
46.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}. & 46.8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}. \\
46.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin(x^2)}{x \cos x - \sin x}. & 46.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}. \\
46.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[3]{x^2} - 1}. & 46.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99}. \\
46.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{(x-1)^2}. & 46.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}. \\
46.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}. & 46.12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
46.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}. & 46.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 3x - 6 \operatorname{tg} x}{3 \arctg x - \arctg 3x}. \\
46.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 - 8)}{2x^2 - 5x - 3}. & 46.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}. \\
46.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}. & 46.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}. \\
46.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}. & 46.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}. \\
46.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6}. & 46.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}. \\
46.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}. & 46.27. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}. \\
46.19. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt[3]{3 \operatorname{tg}^2 x} - 1}{2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3}. & 46.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}. \\
46.20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x - 4}{3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2}. & 46.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}. \\
46.21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}}. & 46.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \arcsin x}.
\end{array}$$

**ЗАДАНИЕ 47.** Используя правило Лопиталя, найти предел в соответствии с вариантом.

$$\begin{array}{ll}
47.1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x}. & 47.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 2x}{x \ln x}. \\
47.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}. & 47.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}. \\
47.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{\ln(1+x)}. & 47.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{e^{4x}}. \\
47.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2 + 1)}. & 47.9. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})}{\ln \frac{1}{x}}. \\
47.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2-4}}{\sqrt{\ln x}}. & 47.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x+7}}.
\end{array}$$

$$47.11. \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{\operatorname{ctg} \pi x}{\ln(3-x)}$$

$$47.12. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$$

$$47.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x^3}$$

$$47.14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-4)^3}{\ln x}$$

$$47.15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

$$47.16. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}$$

$$47.17. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + \ln \sin x}$$

$$47.18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$$

$$47.19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{(1+x)^2}$$

$$47.20. \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$$

$$47.21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x^5}$$

$$47.22. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}$$

$$47.23. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)}{\ln \frac{1}{x^2}}$$

$$47.24. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$47.25. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$$

$$47.26. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{\sqrt{x}}$$

$$47.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln \sqrt[3]{x}}$$

$$47.28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{(1-x)^2}$$

$$47.29. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$47.30. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln(1+x^2)}$$

$$48.11. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln\left(\sin \frac{1}{x} + 1\right)$$

$$48.12. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)$$

$$48.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(1 + \operatorname{tg} x)$$

$$48.14. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^3 + 3}{x^3 - 3}\right)$$

$$48.15. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$48.16. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$48.17. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$48.18. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

$$48.19. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$$

$$48.20. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$$

$$48.21. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x$$

$$48.22. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \arcsin 3x$$

$$48.23. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$$

$$48.24. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot 3^{-x}$$

$$48.25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot 2^{-x}$$

$$48.26. \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x$$

$$48.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \cdot 4^{-x}$$

$$48.28. \lim_{x \rightarrow 0+} \arcsin 3x \cdot \ln x$$

$$48.29. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$48.30. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right)$$

**ЗАДАНИЕ 48.** Используя правило Лопиталю, найти предел в соответствии с вариантом.

$$48.1. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) \operatorname{ctg} x$$

$$48.2. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^2) \operatorname{ctg} 2x$$

$$48.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)(x+3)$$

$$48.4. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$$

$$48.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$$

$$48.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$48.7. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x) \operatorname{ctg} 2x$$

$$48.8. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+5}\right)$$

$$48.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x)$$

$$48.10. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

**ЗАДАНИЕ 49.** Используя правило Лопиталю, найти предел в соответствии с вариантом.

$$49.1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$$

$$49.2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$49.3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4+2-1} - \sqrt{x^4-2x^2-1})$$

$$49.4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\arcsin(\sqrt{x^2+x+x}))$$

$$49.5. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3})$$

$$49.6. \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2-7x+4})$$

$$49.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x+1}}\right)$$

$$49.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$49.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x\right)$$

$$49.10. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$$

$$49.11. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$$

$$49.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$$

- 49.13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2)$ . 49.22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$ .
- 49.14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4})$ . 49.23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$ .
- 49.15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2})$ . 49.24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})$ .
- 49.16.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right)$ . 49.25.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$ .
- 49.17.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ . 49.26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2 + x^3} - x)$ .
- 49.18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$ . 49.27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 2x})$ .
- 49.19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$ . 49.28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt{x-6})$ .
- 49.20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ . 49.29.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$ .
- 49.21.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ . 49.30.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{\sqrt{x-1}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \right)$ .

**ЗАДАНИЕ 50.** Используя правило Лопиталья, найти предел в соответствии с вариантом.

- 50.1.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \cos 2\pi x)^{\operatorname{tg} \pi x}$ . 50.9.  $\lim_{x \rightarrow 5} (1 - e^{\sin \pi x})^{\ln(6-x)}$ .
- 50.2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2x \right)^{\frac{1}{3x}}$ . 50.10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \ln(1-x)} \right)^{\frac{1}{1-x}}$ .
- 50.3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 1 + \cos \frac{3\pi}{2} x \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} x}$ . 50.11.  $\lim_{x \rightarrow 6} (1 - \cos \pi x)^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{6}}$ .
- 50.4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\pi - \operatorname{arctg} 3x)^{\frac{1}{2x^2}}$ . 50.12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{1+x^4} \right)^{\frac{\pi^2}{4} - \operatorname{arctg}^2 x}$ .
- 50.5.  $\lim_{x \rightarrow 3} (\operatorname{tg} \pi x)^{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{3}}$ . 50.13.  $\lim_{x \rightarrow 7} (1 + \cos \pi x)^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{7}}$ .
- 50.6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi^2}{4} - \operatorname{arctg}^2 4x \right)^{\frac{1}{x^2}}$ . 50.14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x^3} \right)^{\operatorname{arctg} 3x}$ .
- 50.7.  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \pi x}$ . 50.15.  $\lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{8} \right)^{\operatorname{tg} \pi x}$ .
- 50.8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+e^{2x}} \right)^{\ln(1-\frac{1}{x})}$ . 50.16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2x \right)^{\frac{1}{1-2x}}$ .

- 50.17.  $\lim_{x \rightarrow 9} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos}(x-9) \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x}$ . 50.24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x^2 - x^3 + 4})^{\ln(1+\frac{1}{x^2})}$ .
- 50.18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+e^{x^2}} \right)^{\ln(1-\frac{1}{x^2})}$ . 50.25.  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + \sin x^2)^{x^2}$ .
- 50.19.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin \pi x)^{1 - \cos \pi x}$ . 50.26.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln(1 + \frac{1}{x}) \right)^{e^{-x}}$ .
- 50.20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}$ . 50.27.  $\lim_{x \rightarrow 3} (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} x)^{\sin \pi x}$ .
- 50.21.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sin \frac{\pi}{2} x)^{\operatorname{tg}^2 \pi x}$ . 50.28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - \operatorname{arccotg} 5x)^{\frac{x}{1-x^2}}$ .
- 50.22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1-x^2} \right)^{\pi - \operatorname{arctg} x}$ . 50.29.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \operatorname{tg} x)^{1 - \cos 2x}$ .
- 50.23.  $\lim_{x \rightarrow 2} (1 + \sin \frac{3\pi}{4} x)^{1 - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} x}$ . 50.30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \ln(1+x^2)} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**ЗАДАНИЕ 51.** Используя правило Лопиталья, найти предел в соответствии с вариантом.

- 51.1.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}$ . 51.10.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}}$ .
- 51.2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ . 51.11.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$ .
- 51.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$ . 51.12.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\ln(1+2x^2)}}$ .
- 51.4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 6x}$ . 51.13.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ .
- 51.5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ . 51.14.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{\sin^2 x})^{\frac{1}{x^2}}$ .
- 51.6.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ . 51.15.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{5}{\ln x + x^2 - 1}}$ .
- 51.7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2 \cos x)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ . 51.16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (thx)^x$ .
- 51.8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ . 51.17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
- 51.9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ . 51.18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

51.19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

51.20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$

51.21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

51.22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{ctgx}}$

51.23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$

51.24.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$

51.25.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$

51.26.  $\lim_{x \rightarrow 0} (6-5 \sec x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

51.27.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$

51.28.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2-3^{x^2})^{\frac{1}{\ln(\cos x)}}$

51.29.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2-e^{x^2})^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

51.30.  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln^2(ex))^{\frac{1}{x^2-1}}$

52.21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+2^x)^{\frac{1}{x^2-1}}$

52.22.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x$

52.23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

52.24.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \ln \frac{3}{x} \right)^{2x}$

52.25.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{arctg} x}$

52.26.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{x}{x^2+1}}$

52.27.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sin x}$

52.28.  $\lim_{x \rightarrow -1+0} \left( \frac{1}{x+1} \right)^{\sin(x+1)}$

52.29.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{x+1}-1)^{\frac{1}{x}}$

52.30.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} \right)^x$

**ЗАДАНИЕ 52.** Используя правило Лопиталья, найти предел в соответствии с вариантом.

52.1.  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$

52.2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

52.3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$

52.4.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x}$

52.5.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} \right)^{\operatorname{tg} x}$

52.6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \cdot 3^x + 1)^{\frac{1}{x}}$

52.7.  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \left( \frac{1}{x-2} \right)^{\sin(x-2)}$

52.8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x - 1))^{\frac{1}{x}}$

52.9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x)^{\frac{1}{2 \ln x}}$

52.10.  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{x}{3}}$

52.11.  $\lim_{x \rightarrow 3+0} \left( \frac{1}{x-3} \right)^{\operatorname{tg}(x-3)}$

52.12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

52.13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)^{\frac{1}{e^x}}$

52.14.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^x$

52.15.  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^x$

52.16.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}$

52.17.  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$

52.18.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$

52.19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{x-2 \operatorname{arctg} x}$

52.20.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$