Серия «Высшее образование»

И.В. ВИЛЕНКИН, В.М. ГРОВЕР

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ, ТЕХНИЧЕСКИХ, ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗОВ

Издание четвертое, исправленное

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
КТК 11
В-44

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор МФТИ *Е.И. Леванов*
доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ *Ю.Н. Карамзин*
доктор техн. наук, профессор ДГТУ *М.А. Краплин*

Виленкин И.В.
В-44 Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов / И.В. Виленкин, В.М. Гробер. — Изд. 4-е, испр. — Ростов н/Д : Феникс, 2008. — 414, [1] с. : ил. — (Высшее образование).
ISBN 978-5-222-12237-2

Пособие предназначено для студентов, не специализирующихся в области математики, основных вопросов линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений.

Большое число детально разобранных задач поможет студентам усваивать важнейшие идеи и методы решения примеров, данных для самостоятельной работы. Этот же набор примеров может быть использован преподавателями вузов как задачник.

ISBN 978-5-222-12237-2

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие призвано помочь студентам освоить фундаментальные факты высшей математики. Основная цель, которую преследовали авторы — научить студентов решать задачи. В связи с этим многие примеры (около 300) излагаются с подробными объяснениями, после чего читатель получает возможность проверить понимание изучаемого материала, решая самостоятельно задачи (их около 800), приведенные в конце каждой главы или параграфа. Эти задания, как правило, расположены в порядке усложнения, по уровням. Здесь же даются ответы.

Пособие не претендует на полноту. Его теоретическая часть представляет собой сравнительно небольшой курс лекций. Авторы пытаются акцентировать внимание читателя на самых основных понятиях и их приложениях к решению задач.

Предлагаемый первый том пособия должен помочь студентам технических и экономических специальностей усвоить материал первого курса обучения. Кроме того, студенты, углубленно изучающие математику, могут использовать книгу в качестве «стартового материала».

Пособие составлено авторами на основании опыта их многолетнего преподавания в РГСУ, Ростовском институте сервиса, Ростовском филиале РТА.

Большое влияние на авторов оказал профессор Наум Самойлович Ландкоф, руководивший в течение многих лет кафедрой высшей математики РИСИ (ныне РГСУ). Авторы выражают профессору свою искреннюю признательность и глубокую благодарность.

Предлагаемый первый том является значительным расширением учебного пособия авторов «Пределы, производные, ряды», имеющего гриф Ассоциации строительных вузов России. Мы выражаем признательность профессорам Г.И. Белявскому, В.И. Павлову, В.С. Шевелеву и доценту Н.И. Скибе за указанные недочеты в опубликованном пособии, которые учтены авторами.

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение нашего труда и ценные советы.

Глава 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

МАТРИЦЕЙ размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов. Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: i – номер строки и k номер столбца. Краткая форма записи матрицы:

$$A = (a_{ik})_{m,n}.$$

Матрица называется **КВАДРАТНОЙ** порядка n, если она состоит из n строк и n столбцов.

Матрица размера $1 \times n$ называется **МАТРИЦЕЙ-СТРОКОЙ**, а матрица размера $m \times 1$ – **МАТРИЦЕЙ-СТОЛБЦОМ.**

НУЛЕВОЙ матрицей заданного размера называется матрица, все элементы которой равны нулю.

ТРЕУГОЛЬНОЙ матрицей n-го порядка называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & & t_{3n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

ЕДИНИЧНОЙ называется квадратная матрица n-го порядка, у которой элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы — нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются **РАВНЫМИ**, если $a_{ik} = b_{ik} \quad \forall i = 1,\dots,m \quad \forall k = 1,\dots,n$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

СУММОЙ матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{m,n}$.

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ik})_{m,n}$.

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел λ и μ выполняются свойства:

1) $A + B = B + A$ 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) $A + 0 = A$ 4) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

Докажем свойство 5):

$$\lambda(A + B) = (\lambda(a_{ik} + b_{ik}))_{m,n} = (\lambda a_{ik} + \lambda b_{ik})_{m,n} =$$

$$= (\lambda a_{ik})_{m,n} + (\lambda b_{ik})_{m,n} = \lambda A + \lambda B$$

Доказательство остальных свойств читатель проведет самостоятельно.

ТРАНСПОНИРОВАННОЙ для матрицы A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы A, а столбцы — строками матрицы A.

ПРИМЕР 1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 4\\ -3 & 1 & -5\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & 5 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Построить матрицу $C = 2A - 3B + A^T$.

РЕШЕНИЕ.

$$C=\begin{pmatrix}10 & 0 & -4\\ 2 & 6 & 8\\ -6 & 2 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 3 & -6\\ 0 & 15 & 9\\ 6 & 12 & -3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ -2 & 4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 2 & -6 & 0\\ -14 & -6 & -12\end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ матрицы $A=(a_{ik})_{m,\,p}$ на матрицу $B=(b_{ik})_{p,\,n}$ называется матрица D размера $m\times n$ с элементами

$$d_{ik}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}$$

Иными словами, для получения элемента, стоящего в i-ой строке результирующей матрицы и в k-ом её столбце, следует вычислить сумму попарных произведений элементов i-ой строки матрицы A на k-ый столбец матрицы B.

ПРИМЕР 2. Найти произведение матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix} \text{ на матрицу } B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -4 & 4\end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ.

$$A\ B=\begin{pmatrix} 3\cdot1+(-1)\cdot0+2\cdot1 & 3\cdot(-2)+(-1)\cdot3+2\cdot(-4) & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot2+2\cdot4 \\ 4\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & 4\cdot(-2)+0\cdot3+1\cdot(-4) & 4\cdot(-1)+0\cdot2+1\cdot4 \\ (-2)\cdot1+2\cdot0+(-3)\cdot1 & -2\cdot(-2)+2\cdot3+(-3)\cdot(-4) & (-2)(-1)+2\ 2+(-3)\cdot4 \end{pmatrix}$$

т. е. $A\ B=\begin{pmatrix} 5 & -17 & 3 \\ 5 & -12 & 0 \\ -5 & 22 & -6 \end{pmatrix}$.

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Это – условие согласования матриц при умножении. Если оно нарушено, матрицы перемножить нельзя. Поэтому возможна ситуация, когда произведение $A\cdot B$ существует, а произведения $B\ \ A$ – нет. Кроме того, когда существуют оба произведения, то чаще всего они не совпадают, т. е. в большинстве случаев произведение матриц некоммутативно: $A\cdot B\neq B\cdot A$. Если A, B, C – квадратные матрицы одинакового порядка и E – единичная матрица того же размера, то справедливы тождества:

1) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$; 3) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
2) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$; 4) $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Свойство 1) оставим без доказательства ввиду его громоздкости.

Докажем 2):

$$A\cdot(B+C)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(b_{jk}+c_{jk}\right)\right)_{n,n}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right)_{n,n}=A\ \ B+A\cdot C$$

Свойство 3) доказывается аналогично, а 4) следует из определения умножения матриц.

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка.

Определителем 2-го порядка (матрицы A) называется число $\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

ПРИМЕР. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. $\Delta(A) = \begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = (-11) \cdot 12 - 4 \cdot 5 = -152$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица 3-го порядка.

Минором элемента a_{ik} называется определитель M_{ik}, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания из матрицы A i-ой строки и k-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Определителем 3-го порядка (матрицы A) называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Находим миноры и алгебраические дополнения элементов 1-ой строки матрицы:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 7, \ M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35, \ M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \ 7 = 7, \ \ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 35 = -35,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-7) = -7.$$

Вычисляем искомый определитель:

$$\Delta(A) = 3 \cdot 7 + (-2) \cdot (-35) + 4 \cdot (-7) = 63.$$

Далее индуктивно вводится понятие определителей более высоких порядков.

Определителем n-го порядка называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots a_{1n}A_{1n}$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Изложенные ниже свойства справедливы для любого n-го порядка. Доказательства будем проводить для $n = 3$.

1. Определитель не меняется при транспонировании, т. е. $\Delta(A^T) = \Delta(A)$. Поэтому в дальнейшем большинство свойств формулируется и доказывается для строк.

2. Если две строки определителя поменять местами, то определитель меняет знак.

3. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен нулю.

6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{11} & & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменяется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) на свои алгебраические дополнения равна самому определителю. Сумма произведений любой строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна 0.

Свойства 1), 2), 8) доказываются непосредственно полным раскрытием определителя. Докажем 3).

Если равны нулю все элементы 1-ой строки, то по определению $\Delta = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 0$.

Если нулю равны все элементы другой строки, то, поменяв ее местами с первой (что может повлиять лишь на знак определителя), мы сведем дело к предыдущему. Свойства 4), 6) читатель докажет самостоятельно, используя понятие определителя.

Док-во 5). Если поменять местами одинаковые строки, то, с одной стороны, определитель не изменится, а с другой – на основании св. 2, он поменяет знак, т. е.

$$\Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \cdot$$

Док-во 7) следует теперь из 6) и 5).

9. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

Доказательство. Раскладывая Δ по элементам 1-го столбца, получаем произведение ведущего элемента a_{11} на определитель такого же вида (n-1)-го порядка с ведущим элементом a_{22}. Раскладывая этот определитель по элементам 1-го столбца, имеем произведение a_{22} на определитель такого же вида (n-2)-го порядка. Это значит, что Δ равен произведению $a_{11} \cdot a_{22}$ на этот новый определитель. Продолжая этот процесс необходимое число раз, приходим к равенству $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$.

Сформулируем без доказательства еще один важный факт.

ТЕОРЕМА 1.1. Если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

СЛЕДСТВИЕ. $\Delta(A \cdot B) = \Delta(B \cdot A)$.

1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. СУЩЕСТВОВАНИЕ И СТРУКТУРА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т. е. чтобы $\Delta(A) \neq 0$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Дано: $\Delta(A) \neq 0$. Докажем, что обратной к матрице A является матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

В самом деле,

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} & a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31} & a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31} \\ a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32} & a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32} & a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32} \\ a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33} & a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33} & a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

Каждый из элементов главной диагонали равен определителю $\Delta(A)$, ибо представлят собой сумму произведений элементов одной из строк матрицы на свои алгебраические дополнения. Все остальные числа в результирующей матрице равны нулю на основании второй части свойства 8).

Поэтому,

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} \Delta(A) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(A) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Совершенно аналогично доказывается, что $A \cdot A^{-1} = E$. Это завершает доказательство достаточности.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Дано, что матрица A^{-1} существует. Надо доказать, что $\Delta(A) \neq 0$. Допуская, что $\Delta(A) = 0$, мы бы получили из равенства $A \cdot A^{-1} = E$, $\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = \Delta E$, откуда $\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1$, что невозможно, ибо левая часть этого равенства есть 0.

ПРИМЕР 4. Найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Находим определитель матрицы A:

$$\Delta(A) = 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-10) + (-2) \cdot 11 = 2$$

Теперь записываем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

ПРОВЕРКА:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Значит, матрица A^{-1} найдена верно.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ. ВЫЧИСЛИТЬ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

Доказать, что $\Delta(AB) = \Delta(BA) = \Delta(A)\Delta(B)$

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 10) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$;

11) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

12) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

НАЙТИ A^{-1} И СДЕЛАТЬ ПРОВЕРКУ

13) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 14) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 15) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

16) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1) -35. 2) 0. 3) -49. 4) 12. 5) -30. 6) -24. 7) 400. 8) -61.

§2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных алгебраических уравнений имеет в общем случае вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

Число уравнений m может совпадать, а может и не совпадать с числом неизвестных n. В настоящем пособии будем подробно изучать лишь случай $m = n$. Более того, все доказательства будут, в целях простоты и наглядности, приводиться для $n = 3$, хотя справедливы они, несомненно, для любого натурального n.

2.1. МЕТОД КРАМЕРА

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1.2)$$

ТЕОРЕМА 1.3. если определитель системы (1.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнения системы на алгебраические дополнения элементов первого столбца и складывая их, получим:

$$+\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \begin{vmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{vmatrix}$$

$$\overline{(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y +}$$
$$+ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

Коэффициент при x представляет собой сумму произведений элементов первого столбца на свои алгебраические дополнения и, поэтому, он равен определителю системы Δ. Коэффициент при y есть сумма произведений элементов второго столбца на алгебраические дополнения элементов первого столбца; значит он равен нулю (на основании свойства 8) определителей). По той же причине равен нулю коэффициент при z. Тогда имеем:

$$\Delta \cdot x = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \cdot$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, отличается от Δ тем, что на местах элементов первого столбца здесь стоят элементы столбца свободных членов. Определитель, в который собирается это выражение, обозначается Δx и мы пришли к равенству:

$$\Delta \quad x = \Delta_x .$$

Принимая во внимание, что $\Delta \neq 0$ по условию, получаем формулу $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$. Формулы $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ и $z \quad \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

выводятся аналогично. Докажем единственность найденного решения. Допустим, что есть еще хотя бы одно решение x_0, y_0, z_0. Это значит, что являются истинными равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 = b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 = b_2 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 = b_3 \end{cases}.$$

Производя над ними те же операции, что при выводе формул Крамера, приходим к соотношениям

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

т. е. новое решение совпадает с найденным выше.

Единственность доказана. ●

ПРИМЕР 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Теперь, воспользовавшись формулами Крамера, найдем значения неизвестных:

$$x = \frac{-21}{7} = -3, \quad y = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{-7}{7} = -1.$$

ОТВЕТ: $x = -3$, $y = 2$, $z = -1$.

367300

2.2. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Снова рассмотрим систему (1.2). Обозначим через A – матрицу коэффициентов этой системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

через $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из неизвестных

и через $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец свободных членов.

Принимая во внимание правило умножения матриц, можно заключить, что данная система уравнений эквивалентна матричному уравнению

$$A \cdot X = B \tag{1.3}$$

ТЕОРЕМА 1.4. Если $\Delta(A) \neq 0$, то система (1.2) имеет единственное решение, определяемое равенством $X = A^{-1} \cdot B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т. к. $\Delta(A) \neq 0$, то матрица A имеет обратную A^{-1}. Умножив обе части (1.3) на матрицу A^{-1} слева, получим: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$. Воспользовавшись свойствами умножения матриц в левой части этого равенства, имеем:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

откуда

$$E \cdot X = A^{-1} \quad B \Rightarrow X = A^{-1} \quad B \tag{1.4}$$

Единственность решения можно обосновать так. Допуская, что есть еще одно решение X_0, мы бы имели истиное равенство $AX_0 = B$, умножение которого слева на A^{-1}, приводит к соотношению $X_0 = A^{-1} \cdot B$.

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -13 \\ x + 3y - z = -11 \\ 4x - 2y - 3z = -12 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Выписываем матрицу системы

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ и находим обратную к ней

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Остается лишь умножить эту матрицу на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ОТВЕТ: $x = -1$, $y = -2$, $z = 4$.

2.3. МЕТОД ГАУССА

Изложенные выше методы решения линейных систем обладают существенными недостатками, ибо их применение возможно только, если:

а) $\Delta(A) \neq 0$,

б) число уравнений m равно числу неизвестных n.

Кроме того, когда $n > 3$, указанные методы становятся очень громоздкими. Значительно более универсальным является метод **Гаусса**. Основан этот метод на элементарных преобразованиях матриц, к числу которых относятся:

1) перемена местами строк $C_i \Leftrightarrow C_k$, $i \neq k$,

2) умножение всех элементов строки на любое, отличное от нуля, число:

$$a \cdot C_i,$$

3) прибавление ко всем элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число:

$$C_i + \alpha C_k.$$

Для простоты изложения будем рассматривать системы, в которых $m = n$. С каждой системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

будем связывать не только квадратную матрицу A, но и расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ & & & \cdots \\ & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Две расширенные матрицы называются ***ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ***, если соответствующие им системы линейных уравнений равносильны, т. е. имеют одни и те же решения. Эквивалентные матрицы будем обозначать знаком $\sim$.

Идея метода Гаусса состоит в том, чтобы над матрицей $\tilde{A}$ произвести элементарные преобразования, приводящие матрицу A к треугольному виду (прямой ход), а затем и к единичной матрице (обратный ход). Тогда в новой расширенной матрице на месте столбца свободных членов окажется решение исходной системы уравнений.

Если при переходе матрицы A к треугольной в новой матрице не возникло ни одной нулевой строки (столбца), то исходная система имеет единственное решение. Объясняется это тем, что определитель преобразованной матрицы равен произведению элементов главной диагонали (свойство 9 определителей) и, в отсутствии нулевой строки (столбца), отличен от нуля[1].

ПРИМЕР 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ x + 4y + z = -11 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем расширенную матрицу системы и начнем ее преобразование с того, что поставим на первое место в первой строке 1, для чего достаточно поменять местами первую и третью строки. Затем под этим элементом получим нули:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 \\ \\ \\ \end{array} \underset{\sim}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} C_3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 3C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -11 & -5 & 38 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim$$

Создадим 1 на месте второго диагонального элемента. С этой целью сначала умножим вторую строку на 4, а затем от полученной вычтем третью строку, умноженную на 5. Далее продолжаем движение к треугольной, а затем и к единичной матрице:

$$\underset{\sim}{4C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -44 & -20 & 152 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_2 - 5C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim$$

---

[1] Заметим, что если A_1 — матрица, полученная в результате элементарных преобразований матрицы A, то $\Delta(A_1) = 0 \Leftrightarrow \Delta(A) = 0$.

$$\underset{\sim}{C_3+9C_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&1&-11\\0&1&-25&22\\0&0&-224&224\end{array}\right)\underset{\sim}{-\frac{1}{224}C_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&1&-11\\0&1&-25&22\\0&0&1&-1\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{C_1-C_3}{\overset{C_2+25C_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&0&-10\\0&1&0&-3\\0&0&1&-1\end{array}\right)\underset{\sim}{C_1-4C_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

ОТВЕТ: $x = 2,\ y = -3,\ z = -1.$

Если при переходе к треугольной матрице в матрице системы возникает хотя бы одна нулевая строка (или столбец), то система либо не имеет решений, либо имеет их бесконечное множество.

ПРИМЕР 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+2x_4=3\\ 2x_1+5x_2-2x_3+x_4=-1\\ 3x_1+7x_2-x_3+2x_4=2\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=6\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-4&2&3\\2&5&-2&1&-1\\3&7&-1&2&2\\1&2&1&1&6\end{array}\right)\begin{array}{c}C_2-2C_1\\ \sim\\ C_3-3C_1\\ C_4-C_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-4&2&3\\0&-1&6&-3&-7\\0&-2&11&-4&-7\\0&-1&5&-1&3\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{\sim}{(-1)C_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-4&2&3\\0&1&-6&3&7\\0&-2&11&-4&-7\\0&-1&5&-1&3\end{array}\right)\begin{array}{c}C_3+2C_2\\ \sim\\ C_4+C_2\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-4&2&3\\0&1&-6&3&7\\0&0&-1&2&7\\0&0&-1&2&10\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{\sim}{C_4-C_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-4&2&3\\0&1&-6&3&7\\0&0&-1&2&7\\0&0&0&0&3\end{array}\right).$$

Последняя строка матрицы выражает уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3$, которое противоречиво. Значит, система уравнений решений не имеет.

ПРИМЕР 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 15 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 2 & 1 & 20 \\ 4 & -1 & -1 & 2 & 15 \\ 3 & -3 & -4 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 \; C_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & -1 & 2 & 15 \\ 3 & -3 & -4 & 3 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 20 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} C_2 - 4C_1 \\ \sim \\ C_3 - 3C_1 \\ C_4 - 5C_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -9 & -13 & 6 & -5 \\ 0 & -9 & -13 & 6 & -5 \\ 0 & -9 & -13 & 6 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{(-1)C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 13 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Заметив, что матрица содержит три одинаковые строки, мы оставляем лишь одну из них (ибо нет смысла иметь в системе одинаковые уравнения), отбрасывая остальные. В результате получим систему двух уравнений с четырьмя неизвестными. Оставим в левых частях равенства лишь переменные x_1 и x_2, которые назовем базисными; другие переменные x_3 и x_4 перенесем вправо

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 - 3x_3 + x_4 \\ 0 & 9 & 5 - 13x_3 + 6x_4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{1}{9}C_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 - 3x_3 + x_4 \\ 0 & 1 & \dfrac{5 - 13x_3 + 6x_4}{9} \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{C_1 - 2C_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{1}{9}(35 - x_3 - 3x_4) \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{9}(5 - 13x_3 + 6x_4) \end{array}\right).$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{35 - x_3 - 3x_4}{9} \\ x_2 = \dfrac{5 - 13x_3 + 6x_4}{9} \end{cases} \qquad (1.5)$$

Переменным x_3 и x_4 можно задавать любые конкретные значения и по ним однозначно определять значения неизвестных x_1 и x_2. Полученные в результате решения системы называются **ЧАСТНЫМИ**. Таких частных решений существует бесчисленное множество. Вот примеры некоторых:

$$x_3 = 0,\ x_4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{35}{9};\ \frac{5}{9} : 0;\ 0\right)$$

$$x_3 = 1,\ x_4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{34}{9};\ -\frac{8}{9} : 1;\ 0\right)$$

$$x_3 = 2,\ x_4 = 2 \Rightarrow (3;\ -1;\ 2;\ 2).$$

Неизвестные x_3 и x_4 называются свободными, а формулы (1.5) называются общим решением системы.

ОТВЕТ:

$$\begin{cases} x_3,\ x_4 - \textit{свободные неизвестные} \\ x_1 = \dfrac{35 - x_3 - 3x_4}{9} \\ x_2 = \dfrac{5 - 13x_3 + 6x_4}{9} \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе метода Крамера и матричного метода лежит следующий важный факт: если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{21} \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n12}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.6}$$

отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение. Обратное утверждение тоже имеет место. Его доказательство выходит за рамки настоящего пособия. Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.5. Для того чтобы система n линейных уравнений с n неизвестными имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был отличен от нуля.

ОДНОРОДНОЙ называется система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ясно, что $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ – есть решение такой системы. Это решение называется тривиальным и вопрос относительно однородной системы стоит обычно так: при каком условии система имеет нетривиальное решение? Ответ на этот вопрос вытекает из предыдущей теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы $\Delta = 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ. ПЕРВЫЙ УРОВЕНЬ

Каждую из следующих систем решить методами Крамера, матричным и Гаусса.

1) $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-3y+z=8 \\ 5x-y-z=10 \\ x+3y+4z=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 5x+y-2z=-1 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+2y+4z=11 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-y+2z=13 \\ 2x+y-z=0 \\ 5x+3y+7z=28 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-y+2z=10 \\ 7x+z=22 \\ -x+3y+2z=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+2y+5z=10 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x-y+4z=7 \\ 7x+3y-z=3 \\ 5x-2y-3z=4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 3x-y+2z=12 \\ 4x+3y-3z=9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x+4y-3z=-7 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-z=-2 \end{cases}$

Следующие системы решить методом Гаусса.

11) $\begin{cases} x+3y-4z=5 \\ 2x-3y+6z=11 \\ 8x-3y+10z=21 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x+y-3z=7 \\ 3x-y+2z=4 \\ 7x-y+z=17 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x-y+3z=1 \\ 7x+7y+3z=2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+2y-z=3 \\ 13x+2y+z=13 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 3x + 2y - 4z = 15 \\ 4x + 3y - 7z = 19 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ 5x + 4y - 7z = 15 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$

ОТВЕТЫ:

1) (1; 2; 3). 2) (2; –1; 1). 3) (1; 2; 4). 4) (1; 1; 1). 5) (2; –1; 3). 6) (3; 1; 1). 7) (1; 1; 1). 8) (1; –1; 1). 9) (3; 1; 2). 10) (1; –2; 1). 11) нет решений. 12) нет решений.

13) $x_1 = \dfrac{3 - 8x_3}{7}$, $x_2 = \dfrac{5x_3 - 1}{7}$. 14) $x = \dfrac{5 - z}{5}$, $y = \dfrac{4z}{5}$.

15) $x = 7 - 2z$, $y = -3 + 5z$. 16) нет решений.

17) $\left(0; 2; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$. 18) нет решений. 19) $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_3 = 6 + 2x_4$. 20) (2; 1; 1; 1).

21) $x_1 = \dfrac{4 + x_3 + x_4}{5}$, $x_2 = \dfrac{3 + 7x_3 + 7x_4}{5}$. 22) (2; –1; 0; 3).

23) $x_1 = -3 - 4x_3 + 2x$, $x_2 = 5 + 5x_3 - 3x_4$. 24) (1; 2; 2; –1).

§3. ПРОСТРАНСТВА R^n

Обозначим через R^n множество упорядоченных наборов по n чисел: $a = (a_1, a_2, \dots a_n)$, $n \in N$. В частности, R^1 – множество вещественных чисел или множество точек числовой оси, R^2 – множество пар вещественных чисел или множество точек плоскости, R^3 – множество троек вещественных чисел или множество точек трехмерного пространства.

Определим в R^n линейные операции – сложение элементов и умножение элементов на вещественные числа: $\forall a$, $b \in R^n$ и $\forall \lambda \in R^1$

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

При этом выполняются свойства:

$$a + b = b + a \qquad 1 \cdot a = a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

$$a + 0 = a \qquad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$a + (-a) = 0 \qquad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$$

где λ, μ – произвольные вещественные числа, $0 = (0, 0, \dots, 0)$ – нулевой элемент R^n и $-a = (-a_1, -a_2, \dots -a_n)$ – элемент, называемый противоположным к a.

Все эти свойства можно считать доказанными, если смотреть на элементы множества R^n как на матрицы размера $1 \times n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество R^n, $n \in N$, с введенными операциями, называется пространством R^n или просто n-мерным пространством.

Выше было отмечено, что элементы пространств R^1, R^2, R^3 можно интерпретировать как точки. Другая удобная интерпретация – представлять элементы этих пространств в виде векторов, поскольку теперь есть возможность складывать их, умножать на вещественные числа с выполнением всех соответствующих свойств. В связи со сказанным имеет смысл и в любом пространстве R^n каждый элемент интерпретировать либо как точку a с координатами

$(a_1, a_2, \ldots a_n)$, либо как вектор $\overline{a}$ с теми же координатами.

В линейной алгебре и в аналитической геометрии на R^n удобно смотреть как на векторное пространство.

3.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $\overline{b}$ называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ с коэффициентами c_1, c_2, ..., c_k, если

$$\overline{b} = c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 + \ldots + c_k\overline{a}_k.$$

ПРИМЕР 1. Найти линейную комбинацию векторов $\overline{a}_1 = (3; -1; 2; 4)$, $\overline{a}_2 = (5; 2; -3; 1)$, $\overline{a}_3 = (-4; 1; -1; 5)$ с коэффициентами $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 4$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{array}{r}
2\overline{a}_1 = (6;\ -2;\ 4;\ 8) \\
+\ -3\overline{a}_2 = (-15;\ -6;\ 9;\ -3) \\
4\overline{a}_3 = (-16;\ 4;\ -4;\ 20) \\
\hline
\overline{b} = 2\overline{a}_1 - 3\overline{a}_2 + 4\overline{a}_3 = (-25;\ -4;\ 9;\ 25)
\end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система векторов $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k\} \subset R^n$ называется линейно зависимой, если хотя бы один из векторов системы есть линейная комбинация остальных; например, если вектор $\overline{a}_1$ допускает представление $\overline{a}_1 = a_2\overline{a}_2 + a_3\overline{a}_3 + \ldots + a_k\overline{a}_k$ с некоторыми коэффициентами a_2, a_3, a_k. Если ни один из векторов системы $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k\}$ не представляется как линейная комбинация других, система называется ***ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМОЙ***.

Два вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда все их соответствующие координаты пропорциональны. Действительно,

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 \\ \\ a_n = \lambda b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{a_1}{b_1} \\ \lambda = \dfrac{a_2}{b_2} \\ \\ \lambda = \dfrac{a_n}{b_n} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \quad = \frac{a_n}{b_n}$$

Понимать эти равенства надо с таким условием: если какой-то знаменатель равен нулю, то равен нулю и соответствующий числитель.

Линейная зависимость векторов в R^2 означает их коллинеарность. Поэтому линейно независимой является любая пара неколлинеарных векторов.

Линейная зависимость трех векторов в R^3 означает их компланарность (т. е. то, что они лежат в одной плоскости). Действительно, если $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, то геометрически вектор $\bar{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha\bar{a}$ и $\beta\bar{b}$. Значит вектор $\bar{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 1).

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

СЛЕДСТВИЕ. Любые три некомпланарные и попарно неколлинеарные вектора в R^3 линейно независимы.

Теперь основной вопрос таков: при каком условии система n-векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ является линейно зависимой (или линейно независимой) в R^n?

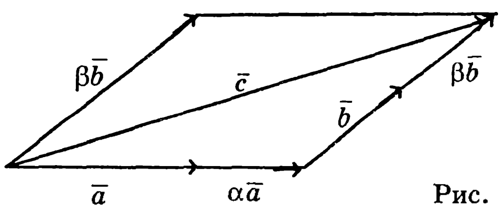


Рис. 1

ЛЕММА. Векторы $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n\}$ – линейно зависимы в R^n тогда и только тогда, когда уравнение

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + ... + x_n\bar{a}_n = \bar{0} \tag{1.7}$$

имеет нетривиальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n\}$ линейно зависимы. Это значит, что хотя бы один из них (пусть это $\bar{a}_1$) есть линейная комбинация остальных, т. е. существуют числа a_2, a_3, ..., a_n такие, что:

$$\bar{a}_1 = \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 + ... + \alpha_n\bar{a}_n .$$

Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $-\bar{a}_1$, получим:

$$-\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0} .$$

Это равенство говорит о том, что уравнение (1.7) имеет нетривиальное решение

$$(-1;\ \alpha_2;\ ...;\ \alpha_n).$$

Обратное докажите самостоятельно.

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), \\ \bar{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), \\ & \\ \bar{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}), \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.6. Для того чтобы система векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n\}$ была линейно независимой в R^n, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы указанная система векторов была линейно независимой, согласно предыдущей лемме, необходимо и достаточно, чтобы векторное уравнение (1.7) имело только тривиальное решение или, что то же, чтобы система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

имела только тривиальное решение. Это может случиться в том и только том случае, когда определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

ПРИМЕР 2. При каких x и y векторы $\bar{a} = (6;\ x;\ -4;\ 12)$ и $\bar{b} = (3;\ 5;\ y;\ 6)$ линейно зависимы?

РЕШЕНИЕ. Два вектора в пространстве R^4 линейно зависимы при условии пропорциональности всех соответствующих координат, т. е. при условии, что

$$\frac{6}{3} = \frac{x}{5} = \frac{-4}{y} = \frac{12}{6},$$

откуда сразу следует, что $x = 10$, $y = -2$.

ПРИМЕР 3. Определить, являются ли линейно зависимыми векторы

$\bar{a} = (3;\ -2;\ 1)$, $\bar{b} = (4;\ 1;\ -3)$ и $\bar{c} = (2;\ -3;\ -1)$?

РЕШЕНИЕ. Составляем и подсчитываем определитель из координат данных векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1-9) - 4(2+3) + 2(6-1) = -40.$$

Т. к. $\Delta \neq 0$, то векторы $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ линейно независимы.

3.2. БАЗИС ПРОСТРАНСТВА R^n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система векторов $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$ называется ***БАЗИСОМ*** пространства R^n, если всякий вектор $\overline{a} \in R^n$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{b}_1 + \alpha_2\overline{b}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{b}_n .$$

Если система векторов $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$ образует базис в R^n, то она линейно независима. В самом деле, нулевой вектор (как и всякий другой) может быть единственным образом представлен в виде:

$$\alpha_1\overline{b}_1 + \alpha_2\overline{b}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{b}_n = \overline{0} .$$

Ясно, что $\alpha_1 = \alpha_2 = .. = \alpha_n = 0$. Другими словами, векторное уравнение

$$x_1\overline{b}_1 + x_2\overline{b}_2 + \ldots + x_n\overline{b}_n = \overline{0}$$

имеет только тривиальное решение, что и означает линейную независимость системы $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$.

Интересно, что обратное утверждение тоже имеет место. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1.7. Если система векторов $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$, где

$$\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \\ \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \\ \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \overline{b}_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \\ \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

линейно независима, то она является базисом пространства R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ \\ a_n \end{pmatrix}$ – произвольный вектор в R^n. Надо доказать существование единственного набора чисел α_2, α_3, ..., α_n, таких, что

$\alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{b}_n = \bar{a}$ или, что то же,

$$\begin{cases} b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \ldots + b_{1n}\alpha_n = a_1 \\ b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \ldots + b_{2n}\alpha_n = a_2 \\ \\ \\ b_{n1}\alpha_1 + b_{n2}\alpha_2 + \ldots + b_{nn}\alpha_n = a_n \end{cases} \tag{1.8}$$

Другими словами, надо убедиться в том, что система линейных уравнений (1.8) имеет единственное решение. Но это действительно так, поскольку определитель системы составлен из координат векторов $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ и, значит, отличен от нуля в силу их линейной независимости. Принимая во внимание теорему 1.6., получим важнейший результат:

ТЕОРЕМА 1.8. Для того чтобы система векторов $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ была базисом в пространстве R^n, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

Рассмотрим в R^n систему ортов:

$$\bar{e}_1 = (1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$$
$$\bar{e}_2 = (0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$$

$$\bar{e}_n = (0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$$

Согласно теореме 1.8, система $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_1,\ \ldots,\ \bar{e}_n\}$ образует базис в пространстве R^n, поскольку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Этот базис называется ***ЕСТЕСТВЕННЫМ*** в связи с тем, что коэффициентами разложения любого вектора $\bar{a} - (a_1, a_2, \ldots a_n)$ по базису $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_1,\ \ldots,\ \bar{e}_n\}$ являются координаты этого вектора.

В самом деле,

$$\begin{array}{r} a_1\bar{e}_1 = (a_1;\quad 0;\qquad\quad 0) \\ a_2\bar{e}_2 = (0;\quad a_2;\qquad\quad 0) \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ a_n\bar{e}_n = (0;\quad 0;\quad \cdots;\quad a_n) \\ \hline a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \cdots + a_n\bar{e}_n = (a_1;\quad a_2;\qquad\quad a_n) \end{array}$$

т. е.

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \ldots + a_n\bar{e}_n .$$

В частном случае $n = 3$ часто используются обозначения

$$\bar{e}_1 = \bar{i}\ ,\ \bar{e}_2 = \bar{j}\ ,\ \bar{e}_3 = \bar{k}\ .$$

Каждый вектор $\overline{OA}$, выходящий из начала координат и направленный в точку A $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, имеет представление

$$\overline{OA} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}\,.$$

Для вектора $\overline{AB}$, соединяющего точки A $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и B $(b_1;\ b_2;\ b_3)$, получаем (рис. 2):

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

$$\overline{AB} = b_1\bar{i} + b_2 j + b_3\bar{k} - \left(a_1 i + a_2 j + a_3\bar{k}\right)$$

и, значит,

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1)\bar{i} + (b_2 - a_2)\bar{j} + (b_3 - a_3)\bar{k}\,,$$

т. е. координаты любого вектора определяются вычитанием из координат его конца координат начала.

В случае любого другого базиса, кроме естественного, коэффициенты разложения интересующего нас вектора приходится находить.

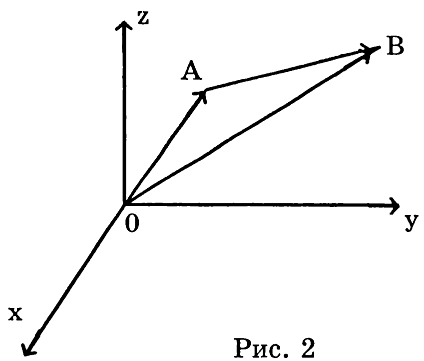


Рис. 2

ПРИМЕР 4. Доказать, что векторы

$$\bar{a} = (2;\ -1;\ 2),\quad \bar{b} = (-3;\ 1;\ -1),\quad \bar{c} = (1;\ -2;\ -3)$$

образуют базис в R^3 и разложить вектор $\bar{d} = (17;\ -15\cdot\ -7)$ по этому базису.

РЕШЕНИЕ. Составляем и подсчитываем определитель из координат векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 10 .$$

Т. к. $\Delta \neq 0$, то система $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ является базисом.

В частности, вектор $\bar{d}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} \qquad (1.9)$$

с пока неизвестными коэффициентами x, y, z. Переходя от равенства векторов к равенству их соответствующих координат, приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 17 \\ -x + y - 2z = -15 \\ 2x - y - 3z = -7 \end{cases}$$

Решая ее любым из методов, получим: $x = 3$, $y = -2$, $z = 5$. Возвращаясь к (1.9), имеем:

$$\bar{d} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c} \cdot$$

3.3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. НОРМА ВЕКТОРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярным произведением вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ на вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ называется число

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Свойства скалярного произведения.

Для любых $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in R^n$ и для любого числа λ:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

2) $\lambda\bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$

3) $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$

4) $\bar{a}\cdot\bar{a}\geq 0$, причем $\bar{a}\cdot\bar{a}=0\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{0}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=b_1a_1+b_2a_2+\dots+$
$+b_na_n=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

2) $\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}=\lambda a_1b_1+\lambda a_2b_2+\dots+\lambda a_nb_n=$
$=\lambda\left(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\right)=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$

3) $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=a_1\left(b_1+c_1\right)+a_2\left(b_2+c_2\right)+\ldots+a_n\left(b_n+c_n\right)=$
$=\left(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\right)+\left(a_1c_1+a_2c_2+\dots+a_nc_n\right)=$
$=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$

4) $\bar{a}\cdot\bar{a}=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$. Но сумма квадратов вещественных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда $a_1=0,\ a_2=0,\ \ldots,\ a_n=0\ \Rightarrow\bar{a}=\bar{0}$. Обратное тривиально.

НОРМА ВЕКТОРА. СВОЙСТВА НОРМЫ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нормой вектора $\bar{a}\in R^n$ (обозначается $\|\bar{a}\|$) называется арифметический корень из скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на себя:

$$\|\bar{a}\|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

Геометрический смысл нормы в пространствах R^2 и R^3

Для любого вектора $\bar{a}(a_1,\ a_2)\in R^2$ имеем по определению

$$\|\bar{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Из теоремы Пифагора (рис. 3) следует простой вывод: норма вектора в R^2 – это его длина. Если $\bar{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ – произвольный вектор пространства R^3, то его норма

$$\|\bar{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

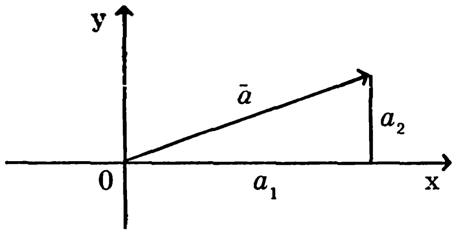


Рис. 3

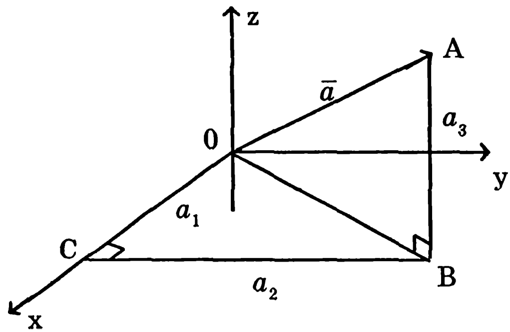


Рис. 4

С другой стороны, из прямоугольного треугольника OAB следует, что длина этого вектора может быть вычислена по теореме Пифагора

$OA = \sqrt{OB^2 + BA^2}$. (рис. 4)

Учитывая, что в треугольнике ΔOCB:
$OB^2 = OC^2 + CB^2$, имеем

$$OA = \sqrt{OC^2 + CB^2 + BA^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

и мы снова получаем, что норма вектора – это его длина. Норму вектора в пространстве R^n также принято называть длиной.

ПРИМЕР 5. Доказать, что ΔABC с вершинами в точках $A(-5;\ 1;\ -1)$, $B(-2;\ 3;\ 2)$, $C(3;\ 5;\ -8)$ – равнобедренный.

РЕШЕНИЕ. Запишем векторы – стороны ΔABC и найдем их длины:

$$\overline{AB} = (3;\quad 2;\quad 3),\quad \left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22},$$

$$\overline{AC} = (8;\ \ 4;\ \ -7),\quad \left\|\overline{AC}\right\| = \sqrt{64+16+49} = \sqrt{129},$$

$$\overline{BC} = (5;\ \ 2;\ \ -10),\quad \left\|\overline{BC}\right\| = \sqrt{25+4+100} = \sqrt{129}.$$

ΔABC равнобедренный, т. к. $\left\|\overline{AC}\right\| = \left\|\overline{BC}\right\|$.

СВОЙСТВА НОРМЫ.

Для любых $\overline{a},\ \overline{b} \in R^n$ и любого числа λ:

1) $\|\overline{a}\| \geq 0$; причем $\|\overline{a}\| = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$;

2) $\|\lambda\overline{a}\| = |\lambda| \cdot \|\overline{a}\|$;

3) $\left|\overline{a} \cdot \overline{b}\right| \leq \|\overline{a}\| \cdot \left\|\overline{b}\right\|$ – неравенство Коши-Буняковского;

4) $\left\|\overline{a} + \overline{b}\right\| \leq \|\overline{a}\| + \left\|\overline{b}\right\|$ – неравенство треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) совпадает со свойством 4) скалярного произведения;

2) $\|\lambda\overline{a}\| = \sqrt{\lambda\overline{a} \cdot \lambda\overline{a}} = \sqrt{\lambda^2\overline{a} \cdot \overline{a}} = |\lambda|\sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = |\lambda| \cdot \|\overline{a}\|$

3) для любого вещественного числа x, согласно свойству 1) скалярного произведению, имеем

$$\left(x\overline{a} - \overline{b}\right) \cdot \left(x\overline{a} - \overline{b}\right) \geq 0$$

С учетом других свойств скалярного произведения, получаем

$$\|\overline{a}\|^2 x^2 - 2\overline{a}\ \ \overline{b}\,x + \left\|\overline{b}\right\|^2 \geq 0 .$$

Принимая во внимание, что квадратный трехчлен, стоящий в левой части неравенства, неотрицателен при всех x, делаем вывод, что его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left(\overline{a}\ \ \overline{b}\right)^2 - \|\overline{a}\|^2\ \ \left\|\overline{b}\right\|^2 \leq 0$$

или

$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2 \le \|\bar{a}\|^2\cdot\|\bar{b}\|^2,$$

что после извлечения квадратного корня из обеих частей приводит к нужному результату.

4) $\|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = \left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = \bar{a}\cdot\bar{a} + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{b} \le$

$\le \|\bar{a}\|^2 + 2\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right| + \|\bar{b}\|^2$

Использование неравенства Коши-Буняковского позволит продолжить неравенство:

$$\|\bar{a}+\bar{b}\|^2 \le \|\bar{a}\|^2 + 2\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\| + \|\bar{b}\|^2 = \left(\|\bar{a}\|+\|\bar{b}\|\right)^2$$

Остается лишь извлечь арифметический корень из обеих частей неравенства:

$$\|\bar{a}+\bar{b}\| \le \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|.$$

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между векторами $\bar{a},\ \bar{b}\in R^n$ называется число $\varphi\in[0;\ \pi]$, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|} \tag{1.9}$$

ПРИМЕР 6. Найти угол между векторами $\bar{a} = (4;\ -1;\ 2;\ 3)$ и $\bar{b} = (2;\ 0;\ -3;\ 1)$.

РЕШЕНИЕ. По определению

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|} = \frac{4\cdot2+(-1)\cdot0+2\cdot(-3)+3\cdot1}{\sqrt{16+1+4+9}\cdot\sqrt{4+0+9+1}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{420}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{420}}.$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***ОРТОГОНАЛЬНЫМИ*** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Из (1.9) следует, что $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Заметим, что векторы естественного базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ попарно ортогональны.

ПРИМЕР 7. При каком m векторы

$\bar{a} = (5; -2; m; 3)$ и $\bar{b} = (m; 4; -1; 8)$ ортогональны?

РЕШЕНИЕ.

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot m + (-2) \cdot 4 + m \cdot (-1) + 3 \cdot 8 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow m = -4 .$$

Покажем, что в случае пространства R^2 угол, определяемый формулой (1.9), есть обычный угол на плоскости, на который следует повернуть вектор $\bar{a}$, чтобы получить вектор $\bar{b}$.

Обратимся к рис. 5, где α – угол наклона к оси абсцисс вектора $\bar{a}$, а β – угол наклона к этой же оси вектора $\bar{b}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|} = \frac{a_1}{\|\bar{a}\|} \cdot \frac{b_1}{\|\bar{b}\|} + \frac{a_2}{\|\bar{a}\|} \cdot \frac{b_2}{\|\bar{b}\|} =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha)$$

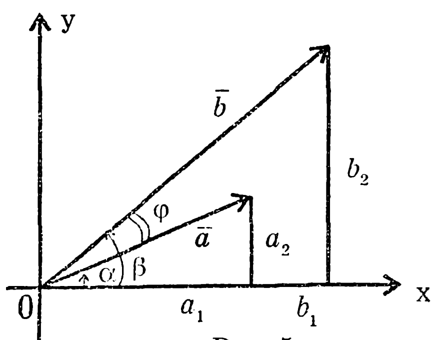


Рис. 5

откуда следует, что $\varphi = \beta - \alpha$. Аналогичное утверждение имеет место и в R^3.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется произведение нормы вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 6):

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \|\bar{a}\| \cos \varphi \tag{1.10}$$

Исходя из (1.9), имеем: $np_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}$.

В частности, если $\bar{e}$ — единичный вектор, то

$np_{\bar{b}}\bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{e}$

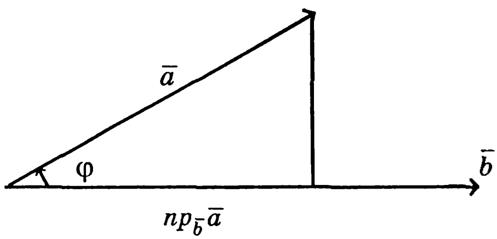


Рис. 6

Пусть $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ — произвольный вектор пространства R^3. Проекции вектора $\bar{a}$ на вектора естественного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ называются его проекциями на координатные оси. Умножая $\bar{a}$ скалярно на $\bar{i}$, получим:

$$\bar{a} \cdot \bar{i} = \left(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}\right) \cdot i = a_1,$$

поскольку $\bar{i} \perp \bar{j}$ и $\bar{i} \perp \bar{k}$. Значит, проекция вектора $\bar{a}$ на ось Ox $np_{Ox}\bar{a} = a_1$. Аналогично, $np_{Oy}\bar{a} = a_2$ и $np_{Oz}\bar{a} = a_3$. Таким образом, проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси совпадают с его координатами.

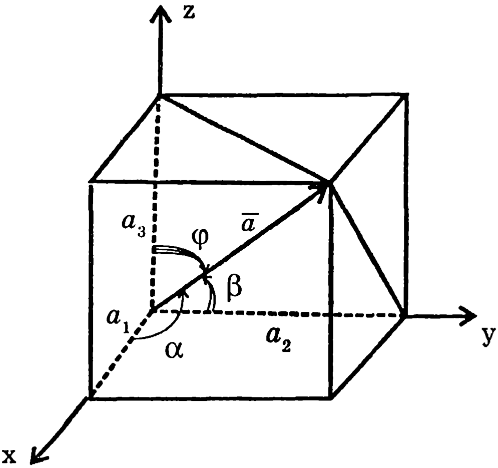


Рис. 7

Если α, β, γ – углы, образуемые вектором $\bar{a}$, соответственно, с координатными осями, то, по определению проекций, имеем (рис.7):

$$a_1 = \|\bar{a}\|\cos\alpha, \quad a_2 = \|\bar{a}\|\cos\beta, \quad a_3 = \|\bar{a}\|\cos\gamma \qquad (1.13)$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$. Если вектор $\bar{a}$ умножить на число $\dfrac{1}{\|\bar{a}\|}$, то получим единичный вектор того же направления $\bar{a}_0$. Из (1.13) следует, что координатами этого вектора являются направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\cdot\bar{a} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$$

и что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

ПРИМЕР 8. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (12;\ -15;\ -16)$.

РЕШЕНИЕ. $\|\bar{a}\| = \sqrt{144 + 225 + 256} = 25$.

Найдем единичный вектор направления $\bar{a}$:

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{25}(12; -15; -16) = \left(\frac{12}{25}; -\frac{15}{25}; -\frac{16}{25}\right).$$

Координаты этого вектора и есть направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, т. е.

$$\cos\alpha = \frac{12}{25},\ \cos\beta = -\frac{3}{5},\ \cos\gamma = -\frac{16}{25}.$$

ПРИМЕР 9. Даны векторы

$\bar{a} = (3; -6; -1)$, $\bar{b} = (1; 4; -5)$, $\bar{c} = (3; -4; 12)$.

Вычислить $пр_{\bar{c}}\left(\bar{a} + \bar{b}\right)$.

РЕШЕНИЕ.

$\bar{a} + \bar{b} = (4; -2; -6)$.

$$пр_{\bar{c}}\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = \frac{\left(\bar{a} + \bar{b}\right)\cdot \bar{c}}{\|\bar{c}\|} = \frac{4\cdot 3 + (-2)(-4) + (-6)\cdot 12}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = -4.$$

Из соотношения (1.9) следует, что

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cos\varphi,$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В этом состоит геометрический смысл скалярного произведения.

Для пояснения физического смысла вычислим работу по перемещению материальной точки из B в C под действием постоянной силы F, направленной под углом φ к перемещению $\bar{s} = \overline{BC}$ (рис. 8):

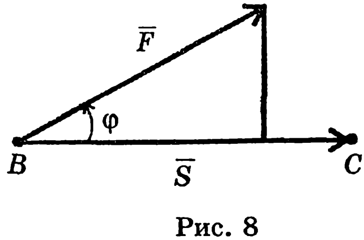


Рис. 8

$$A = np_{\bar{s}}\bar{F} \cdot \|\bar{s}\| = \|\bar{F}\|\cos\varphi \cdot \|\bar{s}\| = \bar{F} \cdot \bar{s}..$$

Таким образом, работа под действием постоянной силы по перемещению материальной точки вдоль прямолинейного отрезка равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Скалярное произведение векторов пространства R^n широко используется в экономике. Допустим, например, что предприятие производит и реализует продукцию n видов. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор производства, указывающий число единиц продукции каждого вида, произведенной и реализованной в течение месяца, а $\bar{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор прибыли; каждая его координата p_i, $i = 1, 2, ..., n$, показывает прибыль предприятия за счет реализации единицы продукции i-го вида. Тогда общая месячная прибыль предприятия может быть вычислена таким образом:

$$P = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n = \bar{p} \cdot \bar{x}.$$

Итак, прибыль предприятия есть скалярное произведение вектора прибыли на вектор производства. Аналогичным образом находится себестоимость изготавливаемой продукции и многие другие характеристики.

Рассмотрим еще некоторые задачи, связанные со скалярным произведением векторов.

ПРИМЕР 10. Треугольник задан вершинами $A(-2; 3; 4)$, $B(6; 0; -1)$, $C(4; -1; 2)$. Найти косинус внутреннего угла A, $np_{\overline{AC}}\overline{BC}$ и единичный вектор, направленный вдоль медианы BM.

РЕШЕНИЕ. $\cos A = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|}$,

$\overline{AB} = (8; -3; -5)$, $\overline{AC} = (6; -4; -2)$, $\overline{BC} = (-2; -1; 3)$

$\|\overline{AB}\| = \sqrt{64 + 9 + 25} = \sqrt{98}$, $\|\overline{AC}\| = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56}$.

Тогда $\cos A = \dfrac{8\cdot 6 + (-3)(-4) + (-5)(-2)}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{56}} = \dfrac{70}{7\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{14}}$,

т. е. $\cos A = \dfrac{5}{\sqrt{28}}$.

Далее,

$$np_{\overline{AC}}\overline{BC} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{6\cdot(-2) + (-4)(-1) + (-2)\cdot 3}{\sqrt{56}} =$$

$$= \frac{-14}{\sqrt{56}} = -\frac{7}{\sqrt{14}}.$$

Находим координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = 1,\ \ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 1,\ \ z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = 3..$$

Тогда

$$\overline{BM} = \left(x_M - x_B;\ y_M - y_B;\ z_M - z_B\right) = (-5;\ 1;\ 4),$$

$\left\|\overline{BM}\right\| = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$ и, значит, единичный вектор $\overline{m}$, направленный вдоль медианы BM, имеет вид:

$$\overline{m} = \left(\frac{-5}{\sqrt{42}};\ \frac{1}{\sqrt{42}};\ \frac{4}{\sqrt{42}}\right).$$

ПРИМЕР 11. Найти вектор $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, удовлетворяющий условиям:

$$\overline{x}\cdot\overline{a} = -10,\ \overline{x}\cdot\overline{b} = 3,\ \overline{x}\cdot\overline{c} = 15$$

где

$$\overline{a} = (2;\ \ -3;\ \ 1),\ \overline{b} = (3;\ \ 1;\ \ -2),\ \overline{c} = (-1;\ \ 3;\ \ -4).$$

РЕШЕНИЕ. Трижды использовав определение скалярного произведения, имеем:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 15 \end{cases}.$$

Решая эту систему любым методом, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

ОТВЕТ: $\bar{x} = (-1; 2; -2)$.

ПРИМЕР 12. Стороны параллелограмма заданы векторами

$$\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n} \text{ и } \bar{b} = -\bar{m} + 4\bar{n},$$

где $\|\bar{m}\| = 4$, $\|\bar{n}\| = 5$, $\left(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти длину его бо́льшей диагонали. (Докажите самостоятельно: $\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$).

РЕШЕНИЕ. Бо́льшая диагональ параллелограмма $\bar{d}$ является суммой его смежных сторон:

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} = 2\bar{m} + 3\bar{n} - \bar{m} + 4\bar{n} = \bar{m} + 7\bar{n}.$$

Далее, используя свойства 1–4 скалярного произведения, имеем:

$$\|\bar{d}\|^2 = \bar{d} \cdot \bar{d} = (\bar{m} + 7\bar{n}) \cdot (\bar{m} + 7\bar{n}) =$$

$$= \|\bar{m}\|^2 + 7\bar{m}\ \ \bar{n} + 7\bar{n} \cdot \bar{m} + 49\|\bar{n}\|^2 =$$

$$= 16 + 14 \cdot \|\bar{m}\| \cdot \|\bar{n}\| \cos\left(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}\right) + 49 \cdot 25 =$$

$$= 16 + 14 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 1225 = 1381.$$

Отсюда $\|\bar{d}\| = \sqrt{1381}$.

3.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$) называется вектор $\bar{c}$, который:

1) ортогонален обоим векторам: $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) его норма численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) направлен он так, что если смотреть из его конца,

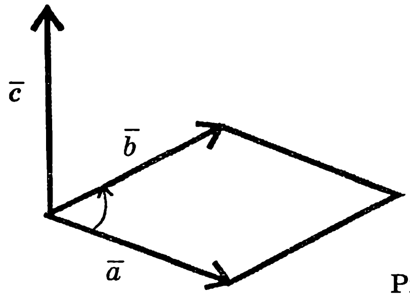


Рис. 9

то кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ должен происходить против часовой стрелки. В таких случаях говорят, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку (рис. 9).

СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

1) $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$

2) $\lambda\bar{a}\times\bar{b} = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$

3) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$

4) $\bar{a}\parallel\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$

5) таблица умножения ортов:

$$\begin{array}{lll} \bar{i}\times\bar{i} = \bar{0} & \bar{i}\times\bar{j} = \bar{k} & \bar{i}\times\bar{k} = -\bar{j} \\ \bar{j}\times\bar{i} = -\bar{k} & \bar{j}\times\bar{j} = \bar{0} & \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i} \\ \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j} & \bar{k}\times\bar{j} = -\bar{i} & \bar{k}\times\bar{k} = \bar{0} \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА:

1) следует из того, что векторы $\bar{a}\times\bar{b}$ и $\bar{b}\times\bar{a}$ отличаются лишь направлением;

2) докажите самостоятельно сначала для $\lambda > 0$, а затем для $\lambda < 0$;

3) доказательство выходит за рамки настоящего пособия;

4) предполагая, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые векторы, имеем:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\Leftrightarrow\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|=0\Leftrightarrow\left\|\bar{a}\right\|\cdot\left\|\bar{b}\right\|\sin\varphi=0\Leftrightarrow\sin\varphi=0\Leftrightarrow$$

либо $\varphi=0$, либо $\varphi=\pi\Leftrightarrow\bar{a}\parallel\bar{b}$

5) вытекает непосредственно из определения векторного произведения.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В КООРДИНАТАХ

Даны векторы $\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$ и $\bar{b}=b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$.

Выразить вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ через координаты заданных векторов. Анализируя нижеприведенные выкладки, обратите особое внимание на использование всех свойств векторного произведения.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}\right)\times\left(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}\right)\overset{св.3),2)}{=}a_1b_1\bar{i}\times\bar{i}+$$

$$+a_1b_2\bar{i}\times\bar{j}+a_1b_3\bar{i}\times\bar{k}+a_2b_1\bar{j}\times\bar{i}+a_2b_2\bar{j}\times\bar{j}+a_2b_3\bar{j}\times\bar{k}+$$

$$+a_3b_1\bar{k}\times\bar{i}+a_3b_2\bar{k}\times\bar{j}+a_3b_3\bar{k}\times\bar{k}\overset{св.5),4),1)}{=}a_1b_2\bar{k}-a_1b_3\bar{j}$$

$$-a_2b_1\bar{k}+a_2b_3\bar{i}+a_3b_1\bar{j}-a_3b_2\bar{i}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\bar{i}-$$

$$-\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\bar{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

Итак, $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{Vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{Vmatrix}$.

ПРИМЕР 13. Найти площадь треугольника, имеющего вершины в точках
$A\ (5;\ 2;\ -1)$, $B\ (3;\ 1;\ -2)$, $C\ (4;\ -2;\ 2)$.

РЕШЕНИЕ.

$\overline{AB}=(-2;\ -1;\ -1)$, $\overline{AC}=(-1;\ -4;\ 3)$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}=-7\bar i+7\bar j+7\bar k$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{49+49+49}=\frac{1}{2}\sqrt{147}$$

ПРИМЕР 14. Упростить выражение

$\bar a=\left(2\bar i-3\bar j+4\bar k\right)\times\left(\bar i-2\bar j\right)-3\bar i-4\bar j$.

РЕШЕНИЕ. Используя распределительный закон векторного произведения (св.3), а также возможность вынесения числового множителя, получаем

$\bar a=2\bar i\times\bar i-4\bar i\times\bar j-3\bar j\times\bar i+6\bar j\times\bar j+4\bar k\times\bar i-8\bar k\times\bar j-3\bar i-4\bar j$.

Далее пользуемся таблицей умножения ортов:

$\bar a=\bar 0-4\bar k+3\bar k+\bar 0+4\bar j+8\bar i-3\bar i-4\bar j$.

Значит, $\bar a=5\bar i-\bar k$.

ПРИМЕР 15. Даны векторы $\bar a=(3;-2;4)$ и $\bar b=(1;3;-1)$. Найти $\alpha=\left\|\left(2\bar a-\bar b\right)\times\left(4\bar a+5\bar b\right)\right\|$.

РЕШЕНИЕ.

$$\alpha=\left\|\left(2\bar a-\bar b\right)\times\left(4\bar a+5\bar b\right)\right\|=\left\|8\bar a\times\bar a+10\bar a\times\bar b-4\bar b\times\bar a-5\bar b\times\bar b\right\|=$$

$$=\left\|10\bar a\times\bar b+4\bar a\times\bar b\right\|=14\left\|\bar a\times\bar b\right\|$$

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-10\bar i+7\bar j+11\bar k,$$

$$\alpha=14\left\|\bar a\times\bar b\right\|=14\sqrt{100+49+121}=14\sqrt{270}$$

ПРИМЕР 16. Найти единичный вектор $\bar e$, ортогональный двум заданным векторам $\bar a=(2;1;-1)$ и $\bar b=(1;-3;3)$.

РЕШЕНИЕ. Одним из векторов, перпендикулярных двум заданным, является их векторное произведение $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Найдем разложение $\bar{c}$ в естественном базисе.

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -7\bar{j} - 7\bar{k}$$

и его норму $\|\bar{c}\| = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$. Искомый вектор

$$\bar{e} = \frac{1}{\|\bar{c}\|} \cdot \bar{c} = \frac{1}{7\sqrt{2}}(0;\ -7;\ -7) = \left(0;\ \frac{-1}{\sqrt{2}};\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

3.5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (обозначается $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$) называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}$$

Вычисление. Пусть векторы $\bar{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ и $\bar{c}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ заданы. Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\bar{j} +$$

$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k},$$

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3,$$

остается правую часть равенства собрать в определитель:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Перестановка двух любых строк определителя меняет его знак. Поменяв третью строку со второй, а затем новую вторую с первой, получим:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Это – удобная формула для вычисления смешанного произведения.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1) При перестановке местами двух множителей смешанное произведение меняет знак:

$\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, $\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, $\overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

2) При циклической перестановке множителей смешанное произведение не меняется:

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}$.

Доказательство немедленно вытекает из того, что перестановка двух любых строк определителя меняет его знак.

3) Если в смешанном произведении два любых вектора равны или коллинеарны, то оно равно нулю.

Действительно, это означает, что в определителе равны или пропорциональны две строки; следовательно, он равен нулю.

Следующее утверждение раскрывает геометрический смысл смешанного произведения.

ТЕОРЕМА 1.9. Абсолютная величина смешанного произведения трех векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Доказательство. Даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ (рис. 10). Най-

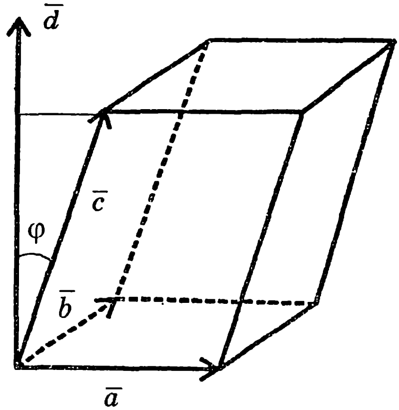


Рис. 10

дем сначала вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$. Этот вектор перпендикулярен параллелограмму, образованному векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и его длина $\|\bar{d}\| = S$ (численно). Далее, по определению,

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = \|\bar{d}\| \cdot \|\bar{c}\| \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Продолжая расчет смешанного произведения, получим:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \|\bar{d}\| \cdot np_{\bar{d}}\bar{c} = S \cdot H = V$$

где H – высота параллелепипеда, а V – его объем.

Получилось, что смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда, на них построенного. Так будет всегда, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (в указанном порядке) образуют правую тройку. Если же векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ представляют собой левую тройку , то их смешанное произведение отрицательно, однако $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = V$. Теорема доказана.

Заметим, что объем пирамиды, построенной на тех же векторах, равен $\frac{1}{6}$ части объема параллелепипеда, т. е. $V_{пирам.} = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 17. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины

$A\,(-4;\ 1;\ -3)$, $B\,(2;\ -5;\ 1)$, $C\,(3;\ 4;\ 3)$ и $D\,(5{:}\ 2;\ -4)$.

Решение. Рассмотрим три вектора, исходящие из одной точки (рис. 11):

$$\overline{AB} = (6;\ -6;\ 4),\quad \overline{AC} = (7;\ 3;\ 6),\quad \overline{AD} = (9;\ 1;\ -1).$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| \quad V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 9 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-500\right| = \frac{250}{3}$$

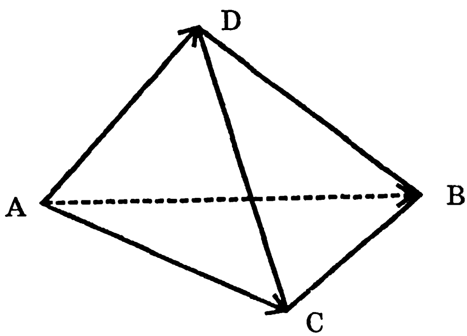


Рис. 11

Следствие. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежат в одной плоскости (компланарны) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. В самом деле компланарность векторов означает, что объем параллелепипеда, на них «построенного», равен нулю. Это естественно и с алгебраической точки зрения, ибо компланарность трех векторов означает из линейную зависимость, т. е. равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов, или равенство нулю смешанного произведения.

ПРИМЕР 18. Выяснить, лежат ли точки M_1 (2; 5; 3), M_2 (3; 7; 4), M_3 (−5; −5; −1), M_4 (−4; −3; 0) в одной плоскости?

Решение. Указанные четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда компланарны векторы

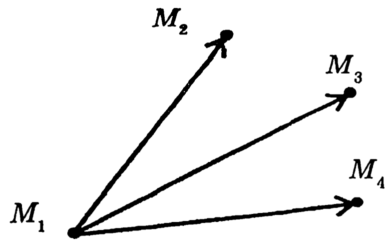


Рис. 12

$\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M_4}$ (рис. 12). Определяем координаты этих векторов и вычисляем их смешанное произведение

$$\overline{M_1M_2} = (1;\ 2;\ 1),\ \overline{M_1M_3} = (-7;\ -10;\ -4),$$

$$\overline{M_1M_4} = (-6;\ -8;\ -3)$$

$$\overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3}\ \overline{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & -10 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(30-32)-$$

$$-2\cdot(21-24)+1\cdot(56-60)=0.$$

Т. к. смешанное произведение равно 0, то рассматриваемые векторы компланарны, откуда следует, что данные точки лежат в одной плоскости.

ПРИМЕР 19. Доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}=\bar{0}$, компланарны.

Решение. Умножив обе части данного векторного равенства скалярно на вектор $\bar{c}$, получим:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}+(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{c}+(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{c}=0$$

или, на языке смешанных произведений,

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}\bar{c}=0\cdot$$

Второе и третье слагаемые в левой части равенства равны нулю на основании свойства 3) смешанного произведения. Остается равенство $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, которое и означает компланарность данных векторов.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
1-й уровень

Проверить линейную зависимость (независимость) указанных векторов.

1) $\overline{a} = (1; 2)$, $\overline{b} = (-2; -4)$.

2) $\overline{a} = (3; 1)$, $\overline{b} = (4; 5)$.

3) $\overline{a} = (1; -1; 2)$, $\overline{b} = (0; 3; 5)$, $\overline{c} = (1; 2; 10)$.

4) $\overline{a} = (2; 3; -1)$, $\overline{b} = (4; -1; 2)$, $\overline{c} = (7; 1; 8)$.

5) $\overline{a} = (-1; 2; 0; 3; 4)$, $\overline{b} = (2; -4; 0; -6; -8)$.

6) $\overline{a} = (1; -1; 2; 3; 5)$, $\overline{b} = (2; 3; 1; 5; 3)$.

Доказать, что векторы $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ образуют базис в R^2 и разложить по этому базису вектор $\overline{c}$.

7) $\overline{a} = (1; -2)$, $\overline{b} = (3; 1)$, $\overline{c} = (-7; -7)$.

8) $\overline{a} = (2; -1)$, $\overline{b} = (-1; 1)$, $\overline{c} = (4; -1)$.

Доказать, что векторы $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ образуют базис в R^3 и разложить по этому базису вектор $\overline{d}$.

9) $\overline{a} = (3; 0; 2)$, $\overline{b} = (1; -1; -2)$, $\overline{c} = (2; 1; 2)$, $\overline{d} = (3; -3; -4)$.

10) $\overline{a} = (-1; 1; 2)$, $\overline{b} = (2; 0; 2)$, $\overline{c} = (3; -1; 1)$, $\overline{d} = (-6; 4; 4)$.

Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$

11) $\overline{a} = (3; -2; 4)$, $\overline{b} = (1; -2; 5)$.

12) $\overline{a} = (-1; 2; -3)$, $\overline{b} = (4; 1; -3)$.

13) $\bar{a} = (-2; 2; 1; 3)$, $\bar{b} = (4; 5; -1; -2)$.

Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

14) $\bar{a} = (2; -4; 4)$, $\bar{b} = (-3; 2; 6)$.

15) $\bar{a} = (1; 2; -3; 4; 5)$, $\bar{b} = (3; -2; 0; 1; -2)$.

Вычислить внутренние углы ΔABC.

16) A (1; 2; 1), B (3; −1; 7), C (7; 4; −2).

17) A (−1; −2; 4), B (−4; −2; 0), C (3; −2; 1).

18) Даны вершины четырехугольника

$A(1;\ -2;\ 2),\ B(1;\ 4;\ 0),\ C(-4;\ 1;\ 1)$

$D(-5;\ -5;\ 3)$

Докажите, что его диагонали $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ взаимно ортогональны.

19) Определить, при каком α векторы

$\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \alpha\bar{k}$ ортогональны.

20) Даны векторы $\bar{a} = (5; 1; -2)$ и $\bar{b} = (3; 0; 4)$. Найти $np_{\bar{a}}\bar{b}$, $np_{\bar{b}}\bar{a}$, $np_{\bar{a}}(\bar{a} + \bar{b})$.

21) На векторах $\bar{a} = (3; 1; -1)$ и $\bar{b} = (5; 3; -3)$ построен параллелограмм. Записать единичные векторы, направленные вдоль его диагоналей.

22) Даны векторы $\bar{a} = (2; 1; -3)$ и $\bar{b} = (1; -2; -1)$. Найти $\left\|(2\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + 3\bar{b})\right\|$.

23) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (-4; 1; 2)$ и $\bar{b} = (5; -1; 1)$.

24) Дан треугольник с вершинами в точках A (−3; 1; −2), B (1; 3; 2), C (4; 5; 4). Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины C.

25) Даны вершины пирамиды A (−4; −1; 2), B (−1; 0; 3), C (2; 2; 5), D (3; −2; −1). Найти площади всех граней.

26) Упростить $(\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) \times \bar{i} + (2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) \times \bar{i}$.

27) Упростить $(3\bar{i} - 4\bar{j} \times \bar{k} + 2\bar{i} \times \bar{j}) \times (2\bar{i} - 3\bar{j})$.

28) Вычислить смешанное произведение векторов

$\bar{a} = (1; -1; 2)$, $\bar{b} = (3; 1; -1)$, $\bar{c} = (-2; 4; 2)$.

29) Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах

$\bar{a} = (2; -1; 0)$, $\bar{b} = (3; 2; -1)$, $\bar{c} = (-2; 4; 2)$.

30) Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A\,(-2; 1; 3)$, $B\,(-1; -2; 1)$, $C\,(-2; 1; 2)$, $D\,(4; 2; -2)$ и длину высоты, опущенной из точки D.

31) Установить, лежат ли в одной плоскости точки $A\,(1; 1; -2)$, $B\,(3; 0; 1)$, $C\,(-2; 1; 2)$, $D\,(5; 4; -2)$?

32) Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, если:

а) $\bar{a} = (2; 3; -1)$, $\bar{b} = (1; -1; 3)$, $\bar{c} = (1; 9; -11)$;

б) $\bar{a} = (-2; 1; -2)$, $\bar{b} = (3; 1; 3)$, $\bar{c} = (-1; 3; -4)$?

2-й уровень

33) Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (4; 2; 4)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x} \cdot \bar{a} = 180$.

34) Даны векторы $\bar{a} = (3; -1; 5)$, $\bar{b} = (1; 2; -3)$. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к оси Oz и удовлетворяющий условиям $\bar{x} \cdot \bar{a} = 9$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = -4$.

35) Даны векторы

$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$ Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям $\bar{x} \cdot \bar{a} = -5$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = -11$, $\bar{x} \cdot \bar{c} = 20$.

36) Даны векторы

$\bar{a} = (-2; 3; 4)$, $\bar{b} = (1; 1; -2)$, $\bar{c} = (3; 0; -1)$. Найти $np_{\bar{a}}\left(2\bar{b} - \bar{c}\right)$.

37) При каком условии для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ возможно равенство $\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\| = \left\|\bar{a} - \bar{b}\right\|$?

38) Даны точки A (5; 1; −2), B (4; −2; 3), C (0; 3; 2). Найти единичный вектор, ортогональный векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

39) Вычислить длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB} = 2\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{AD} = \overline{a} + 3\overline{b}$, $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 2$, $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

40) В условиях задачи 39) вычислить площадь параллелограмма.

41) В условиях задачи 39) найти угол между диагоналями параллелограмма.

42) На векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построен параллелограмм. Найти длины его высот.

43) На векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ построена пирамида. Найти длину высоты, опущенной из конца вектора $\overline{c}$.

44) На векторах $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AC} = \overline{b}$ построен треугольник. Найти векторы медианы $\overline{AM}$ и биссектрисы $\overline{AK}$

45) Доказать, что если в треугольнике длины двух медиан совпадают, то этот треугольник равнобедренный.

46) Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны. Зная, что $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 4$, вычислить

а) $\left\|\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \times \left(\overline{a} - \overline{b}\right)\right\|$, б) $\left\|\left(3\overline{a} - \overline{b}\right) \times \left(\overline{a} + 2\overline{b}\right)\right\|$

47) Доказать, что если коллинеарны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то коллинеарны и векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$

48) Доказать тождество $\left(\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \times \left(\overline{b} + \overline{c}\right)\right) \cdot \left(\overline{c} + \overline{a}\right) = 2\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

ОТВЕТЫ:

1) Линейно зависимы. 2) Линейно независимы 3) Линейно независимы. 4) Линейно независимы. 5) Линейно

зависимы. 6) Линейно независимы. 7) $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.
8) $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$. 9) $\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$. 10) $\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$.

11) 27. 12) 7. 13) −5. 14) $\frac{5}{21}$. 15) $-\frac{7}{3\sqrt{110}}$.

16) $A = \arccos\left(-\frac{12}{49}\right)$, $B = \arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$,

$C = \arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$. 17) $A = 90^\circ, B = 45^\circ, C = 45^\circ$. 19) $\alpha = -6$.

20) $\frac{7}{\sqrt{30}}; \frac{7}{5}; \frac{37}{\sqrt{30}}$. 21) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,

$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 22) $35\sqrt{3}$. 23) $\sqrt{206}$. 24) 3; 1.

25) $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{ACD} = \frac{3\sqrt{254}}{2}$; $S_{ABD} = 3\sqrt{10}$;

$S_{BCD} = \sqrt{153}$. 26) $-3\bar{k}$. 27) $6\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$. 28) 38. 29) 20.

30) $\frac{19}{6}; \frac{19}{\sqrt{10}}$. 31) нет. 32) а) да; б) нет. 33) 5. 34) (2; −3; 0).

35) (2; 3; −2). 36) $-\frac{4}{\sqrt{29}}$. 37) $\bar{a} \perp \bar{b}$.

38) $\left(\frac{-22}{\sqrt{1214}}; \frac{-21}{\sqrt{1214}}; \frac{-17}{\sqrt{1214}}\right)$. 39) $\sqrt{133}$; 7. 40) $21\sqrt{3}$.

41) $\varphi = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{133}}\right)$. 42) $\frac{1}{\|\bar{a}\|}\sqrt{\left(\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|\right)^2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2}$

$\frac{1}{\|\bar{b}\|}\sqrt{\left(\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|\right)^2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2}$. 43) $\frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$. 44) $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$; $\frac{\bar{a}\|\bar{b}\| + \bar{b}\|\bar{a}\|}{\|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|}$.

46) а) 24; б) 84.

Глава 2.
ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В R^3

1.1. ВЕКТОРНОЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Составим уравнение прямой (рис.13), проходящей через известную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в заданном направлении $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Обозначим через $\bar{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, а через $\bar{r}$ – радиус-вектор текущей точки $M(x, y, z)$. Вектор $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ коллинеарен вектору $\bar{b}$; значит, эти векторы линейно зависимы, и поэтому найдется число t, $-\infty < t < \infty$, такое, что $\overline{M_0M} = t\bar{b}$, т. е. $\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{b}$.

Тогда

$$\bar{r} = t\bar{b} + \bar{r}_0, \quad -\infty < t < \infty \qquad (2.1)$$

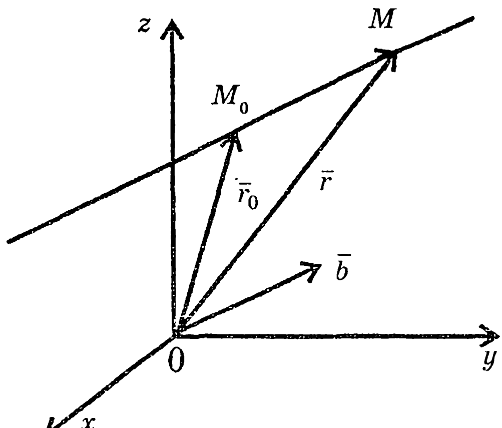


Рис. 13

Это векторное уравнение прямой. Поскольку равенство векторов означает равенство всех их соответствующих координат, то уравнение (2.1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x = tb_1 + x_0 \\ y = tb_2 + y_0 \\ z = tb_3 + z_0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Уравнения (2.2)называются параметрическими уравнениями прямой. Здесь t пробегает все числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$; при этом существует взаимно однозначное соответствие между значениями параметра t и точками прямой.

ПРИМЕР 1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ -5;\ -2)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -3t \\ z = 5t + 4 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку прямые параллельны, то в качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять вектор $\bar{b} = (4;\ -3;\ 5)$. Учитывая, что эта прямая проходит через точку $M_0(2;\ -5;\ -2)$, записываем ее уравнение в виде (2.2):

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = -3t - 5 \\ z = 5t - 2 \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3;\ -1;\ 1)$ и $M_2(2;\ -2;\ 4)$.

РЕШЕНИЕ. В качестве направляющего берем вектор $\bar{b} = \overline{M_1M_2} = (-1;\ -1;\ 3)$. Используя точку M_1, записываем параметрические уравнения искомой прямой в виде

$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t - 1 \qquad -\infty < t < \infty \\ z = 3t + 1, \end{cases}$$

Если бы мы воспользовались точкой M_2, то пришли бы к такому уравнению:

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -t - 2, \qquad -\infty < t < \infty \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$

По внешнему виду эти уравнения различаются, хотя, на самом деле, выражают одну и ту же прямую.

1.2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ДАННЫЕ ТОЧКИ. ОТРЕЗОК ПРЯМОЙ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Решим теперь эту задачу в общем виде, т. е. составим уравнение прямой, проходящей через точки

$$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \text{ и } M_2(x_2;\ y_2;\ z_2).$$

Если $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ – радиусы-векторы точек M_1 и M_2 (рис. 14), то направляющий вектор прямой $\bar{b} = \overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, а уравнение прямой будет иметь вид:

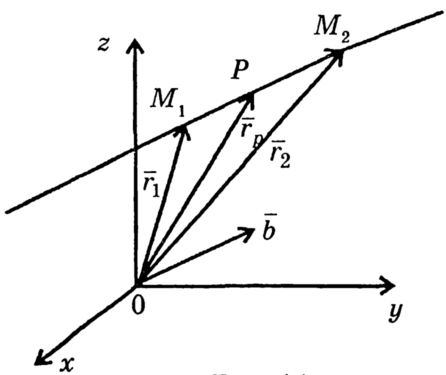


Рис. 14

$$\bar{r} = t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + \bar{r}_1$$

или

$$\bar{r} = (1-t)\bar{r}_1 + t\bar{r}_2, \quad -\infty < t < +\infty . \tag{2.3}$$

При этом значениям $t \in [0;\ 1]$ соответствуют точки отрезка $\overline{M_1M_2}$. Пусть точка P делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении равном λ , т. е.

$$\frac{\left\|\overline{M_1P}\right\|}{\left\|\overline{PM_2}\right\|} = \lambda \tag{2.4}$$

Найдем радиус-вектор такой точки P (рис. 14) и ее координаты:

$$\overline{M_1P} = \bar{r}_P - \bar{r}_1 = (1-t)\bar{r}_1 + t\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1),$$
$$\overline{PM_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_P = \bar{r}_2 - (1-t)\bar{r}_1 - t\bar{r}_2 = (1-t)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1);$$

Тогда из (2.4) получаем:

$$\frac{\left\|t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\right\|}{\left\|(1-t)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\right\|} = \lambda \Rightarrow \frac{|t|}{|1-t|} = \lambda .$$

С учетом того, что $0 < t < 1$, имеем отсюда $\dfrac{t}{1-t} = \lambda$ и, значит, $t = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$.

Возвращая это значение t в (2.3), получаем:

$$\bar{r}_P = \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda} \tag{2.5}$$

В частности, если точка P – середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, то

$$\lambda = 1 \quad и \quad \bar{r}_P = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2} . \tag{2.6}$$

Переходя в (2.5) и (2.6) от равенства векторов к равенству их координат, имеем:

$$
\begin{cases}
x_P = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\
y_P = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\
z_P = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}
\end{cases}
\qquad (2.7)
$$

для точки P, делящей отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ и

$$
x_P = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_P = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad (2.8)
$$

если P середина отрезка $\overline{M_1M_2}$.

ПРИМЕР 3. Найти координаты центра тяжести однородной треугольной пластины, имеющей форму треугольника с вершинами в точках A, B, C (рис. 15).

РЕШЕНИЕ. Центром тяжести однородной треугольной пластины является точка пересечения медиан. Возьмем медиану BM. Координаты точки M определяем по формулам (2.6):

$$
x_M = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_C}{2}
$$

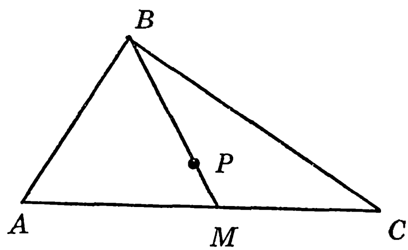


Рис. 15

В точке P каждая медиана делится (начиная от вершины) в отношении $\lambda = 2$. Поэтому из (2.7):

$$
x_P = \frac{x_B + 2x_M}{1+2} = \frac{x_B + 2\dfrac{x_A + x_C}{2}}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.
$$

Аналогично,

$$y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_P = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

ПРИМЕР 4. Определить, пересекаются ли прямые

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 4 \\ z = t + 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = -t + 3 \\ z = 4t - 1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Прямые пересекаются в том и только в том случае, когда они находятся в одной плоскости и не являются параллельными. Это возможно тогда и только тогда, когда в одной плоскости оказываются направляющие векторы прямых $\bar{b}_1 = (2;\ -3;\ 1)$, $\bar{b}_2 = (5;\ -1;\ 4)$ и вектор $\overline{M_1M_2} = (3;\ -1;\ -3)$, соединяющий известные точки данных прямых (рис. 16). Значит, прямые пересекаются тогда и только тогда, когда смешанное произведение указанных векторов равно нулю. В данном случае,

$$\bar{b}_1\bar{b}_2\overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -69 \neq 0,$$

и поэтому прямые не пересекаются, т. е. являются скрещивающимися.

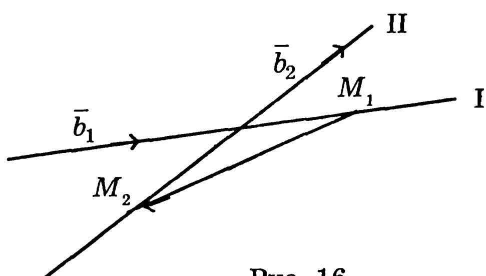


Рис. 16

§ 2. ПЛОСКОСТЬ

2.1. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

Вектором нормали к плоскости называется вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Обозначать его будем буквой $\overline{N}$, а буквами A, B, C будем обозначать координаты этого вектора (рис. 17). Составим уравнение плоскости, проходящей через известную точку $M_0(x_0,\ \ y_0,\ \ z_0)$ с заданным нормальным вектором $\overline{N} = (A,\ \ B,\ \ C)$. Пусть $M(x,\ \ y,\ \ z)$ – текущая точка плоскости. Построим вектор

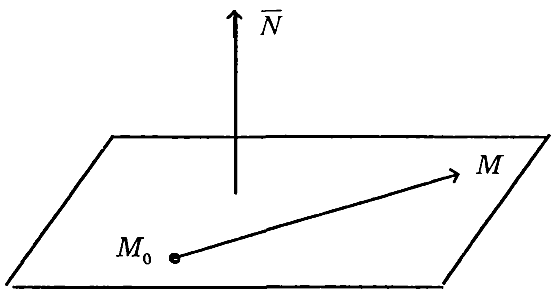


Рис. 17

$$\overline{M_0M} = (x - x_0,\ \ y - y_0,\ \ z - z_0).$$

Т. к. вектор $\overline{N} \perp \overline{M_0M}$, то $\overline{N}\ \ \overline{M_0M} = 0$,

отсюда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.9)$$

Это уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

Если в (2.9) менять параметры A, B, C, т. е. менять координаты вектора нормали плоскости, то каждый раз будем получать уравнение другой плоскости, содержащей точку M_0. Множество всех таких плоскостей называется связкой плоскостей, проходящих через точку M_0.

ПРИМЕР 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;\ -1;\ 2)$ перпендикулярно к прямой

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t - 6 \\ z = 3t + 7 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Т. к. плоскость должна быть перпендикулярна заданной прямой, то в качестве вектора нормали плоскости можно взять направляющий вектор прямой $\overline{N} = \overline{b} = (4;\ -1;\ 3)$, и тогда уравнение плоскости будет таким:

$$4(x-5)-(y+1)+3(z-2)=0$$

или

$$4x - y + 3z - 27 = 0\,.$$

2.2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ЕГО ИССЛЕДОВАНИЕ

Рассмотрим уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

и преобразуем его, собрав в одно слагаемое все постоянные

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0\,,$$

и, обозначив выражение в скобках одной буквой D, получим:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.10)$$

Это общее уравнение плоскости. Равенство нулю отдельных коэффициентов этого уравнения вносит особенности в расположение плоскости.

1. $D = 0$. Уравнение принимает вид:

$$Ax + By + Cz = 0\,,$$

откуда ясно, что точка O (0; 0; 0) лежит на плоскости. Другими словами, плоскость проходит через начало координат.

2. $A = 0$. В таком случае

$$\overline{N} = (0;\ \ B;\ \ C),\ \ \overline{N} \cdot \overline{i} = \left(0\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}\right) \cdot i = 0.$$

Получилось, что направляющий вектор оси Ox (вектор $\overline{i}$) ортогонален вектору $\overline{N}$, т. е. плоскость параллельна оси Ox (рис. 18).

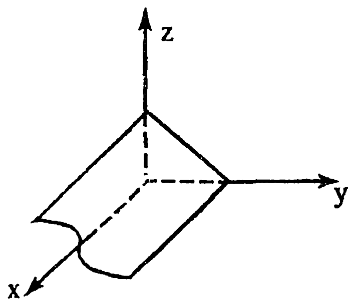


Рис. 18

Аналогично,

$B = 0 \Rightarrow$ плоскость параллельна оси Oy;

$C = 0 \Rightarrow$ плоскость параллельна оси Oz.

3. $A = 0$, $B = 0$. Плоскость параллельна и оси Ox, и оси Oy; значит, она параллельна плоскости xOy.

$A = 0$, $C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz;

$B = 0$, $C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz.

4. $A = 0$, $D = 0$. Первое условие означает, что плоскость параллельна оси Ox, второе – что она проходит через начало координат. Значит, плоскость проходит через ось Ox.

$B = 0$, $D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy;

$C = 0$, $D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz.

5. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – координатные плоскости.

ПРИМЕР 2. Построить плоскость $3x + 5y - 15 = 0$.

Решение. Т. к. в уравнении отсутствует переменная z (т. е. $C = 0$), то плоскость параллельна оси Oz. Для построения этой плоскости сначала изобразим ее

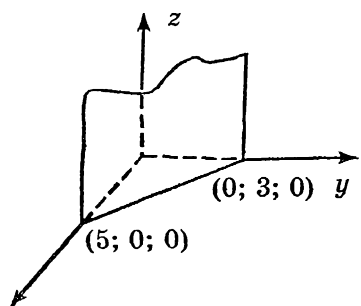


Рис. 19

«след» на плоскости xOy: $3x + 5y - 15 = 0$. Это – прямая, проходящая через две точки (5; 0; 0) и (0; 3; 0). Затем через полученную прямую проведем плоскость, параллельную оси Oz (рис. 19).

2.3. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Углом между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

называется любой из углов между их нормалями $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_2$ (рис. 20). Находится этот угол из соотношения

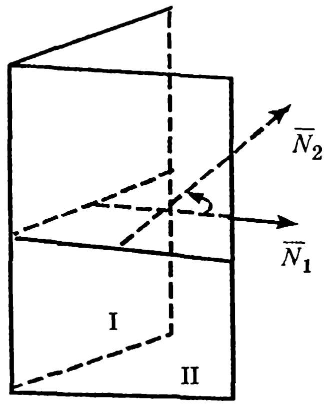


Рис. 20

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \ \overline{N}_2}{\|\overline{N}_1\| \|\overline{N}_2\|} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Параллельность плоскостей равносильна коллинеарности векторов $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ и, значит, пропорциональности их координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Две плоскости взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$, т. е. когда

$$A_1 \ A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

ПРИМЕР 3. Найти угол между плоскостями:

$$x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0, \quad x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0.$$

Решение. Угол между плоскостями определяется как угол φ между их нормалями $\overline{N}_1\left(1;\ -\sqrt{2};\ 1\right)$ и $\overline{N}_2\left(1;\ \sqrt{2};\ -1\right)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1\ \overline{N}_2}{\left\|\overline{N}_1\right\|\left\|\overline{N}_2\right\|} = \frac{1\ 1+\left(-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}+1\ \left(-1\right)}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}} = -\frac{1}{2},$$

откуда $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

ПРИМЕР 4. При каких значениях параметров α и β плоскости $3x+\alpha y+4z-1=0$ и $9x+2y-\beta z+3=0$ параллельны?

Решение. Параллельность плоскостей равносильна коллинеарности векторов $\overline{N}_1(3;\ \alpha;\ 4)$ и $\overline{N}_2(9;\ 2;\ \beta)$, т. е. пропорциональности их координат:

$$\frac{3}{9} = \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{-\beta} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3},\quad \beta = -12.$$

Таким образом, данные плоскости параллельны при условии, что

$$\alpha = \frac{2}{3},\ \text{а}\ \beta = -12.$$

2.4. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

В основу решения таких задач положен принцип использования уравнения связки плоскостей, проходящих через конкретную точку $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \qquad (2.11)$$

В каждой задаче остается разобраться лишь с нахождением нормального вектора плоскости $\overline{N} = \left(A,\ B,\ C\right)$.

ПРИМЕР 5. Составить уравнение плоскости, проходя-

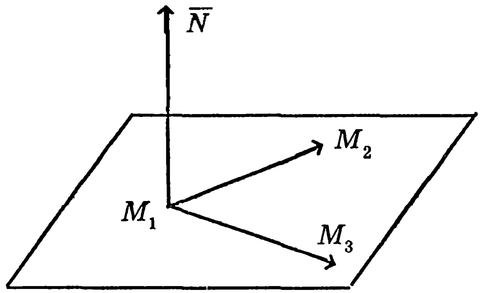


Рис. 21

щей через три заданные точки $M_1(2;\ -3;\ 2)$, $M_2(4;\ -1;\ 3)$, $M_3(0;\ 3;\ 4)$.

Решение. Построим векторы $\overline{M_1M_2} = (2;\ 2;\ 1)$ и $\overline{M_1M_3} = (-2;\ 6;\ 2)$ (рис. 21), лежащие в искомой плоскости. Теперь ясно, что в качестве вектора нормали можно взять их векторное произведение

$$\overline{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}: \quad \overline{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 6\bar{j} + 16\bar{k}$$

Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1:

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-2) = 0,$$

и заменим его коэффициенты координатами вектора

$$\overline{N} = (-2;\ -6;\ 16),$$

в результате чего получим:

$$-2(x-2) - 6(y+3) + 16(z-2) = 0.$$

После упрощения уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$x + 3y - 8z + 23 = 0.$$

ПРИМЕР 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(3;\ 4;\ -1)$ и данную прямую

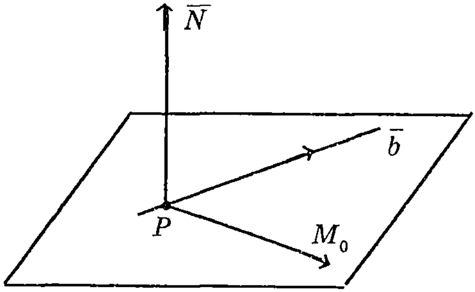


Рис. 22

$$\begin{cases} x = 5t - 2 \\ y = -t + 3 \\ z = 2t \end{cases}$$

Решение. Поскольку прямая принадлежит плоскости (рис. 22), то на плоскости находится точка прямой $P(-2;\ \ 3;\ \ 0)$ и ее направляющий вектор $\overline{b} = (5;\ \ \ \ 1;\ \ 2)$.

Далее $\overline{N} = \overline{b} \times \overline{PM_0}$, где $\overline{PM_0} = (5;\ \ 1;\ \ -1)$.

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 15\overline{j} + 10\overline{k}$$

Остается в уравнение связки плоскостей, проходящих через точку $M_0(3;\ \ 4;\ \ -1)$:

$$A(x-3) + B(y-4) + C(z+1) = 0,$$

подставить $A = -1$, $B = 15$, $C = 10$ и упростить его, в результате чего получим:

$$x - 15y - 10z + 47 = 0.$$

ПРИМЕР 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3\text{t} \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 3t + 2. \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

Решение. Записываем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку $M_0(-1;\ \ 0;\ \ 4)$ (рис. 23):

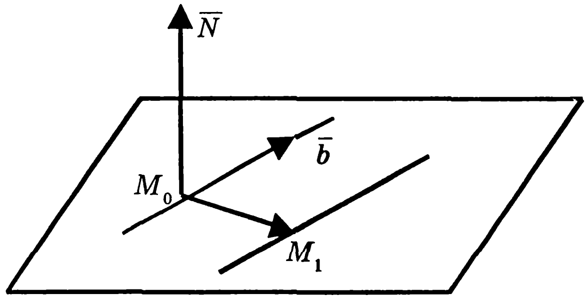


Рис. 23

$$A(x+1)+By+C(z-4)=0\,.$$

На плоскости находятся векторы $\overline{b}(2;\ \ 3;\ \ -1)$ и $\overline{M_0M_1}=(6;\ \ 2;\ \ -3)$. Тогда

$$\overline{N}=\overline{b}\times\overline{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 6 & 2 & -3\end{vmatrix}=-7\overline{i}-0\overline{j}-14\overline{k}$$

Значит, уравнение искомой плоскости

$$-7(x+1)-14(z-4)=0\,,$$

откуда

$$x+2z-7=0\,.$$

Еще один важный метод получения уравнения плоскости и решения некоторых других задач основан на условии компланарности векторов: если три вектора лежат в одной плоскости, то они линейно зависимы и, значит, определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю.

ПРИМЕР 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t \quad 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = -t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

Решение. Пусть $M(x,\ y,\ z)$ – текущая точка плоскости. Соединив точку $M_1(1;\quad 1;\ 3)$ с точкой M, получим вектор $\overline{M_1M} = (x-1;\ \ y+1;\ \ z-3)$.

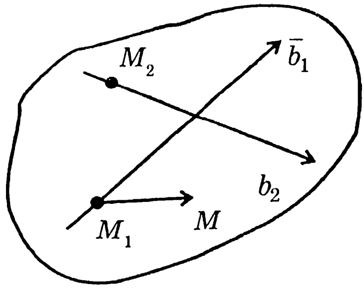


Рис. 24

Этот вектор лежит в одной плоскости с векторами $\bar{b}_1 = (-2;\ \ 3;\ \ 1)$ и $\bar{b}_2 = (3;\ \ -1;\ \ 2)$. Значит, указанные три вектора линейно зависимы (компланарны), в силу чего их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.12)$$

Фактически (2.12) уже выражает уравнение искомой плоскости. После раскрытия определителя и упрощений получим:

$$7(x-1) - 7(y+1) - 7(z-3) = 0,$$

т. е.

$$x + y - z + 3 = 0.$$

ПРИМЕР 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4;\quad 1;\ 3)$ и перпендикулярную к двум заданным плоскостям

$$x - 3y + 2z - 1 = 0 \ \text{ и } \ 5x + 2y - z + 4 = 0.$$

Решение. Найдем три вектора, которые должны лежать в искомой плоскости. Если $M(x,\ y,\ z)$ - текущая точка плоскости, то одним из них является вектор $\overline{M_0M} = (x-4;\ \ y+1;\ \ z-3)$. Два других – это векторы нормалей к данным плоскостям (рис. 25):

$$\overline{N}_1 = (1; \ -3; \ 2)$$

и

$$\overline{N}_2 = (5; \ 2; \ -1).$$

Принимая во внимание линейную зависимость этих векторов, имеем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z-3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

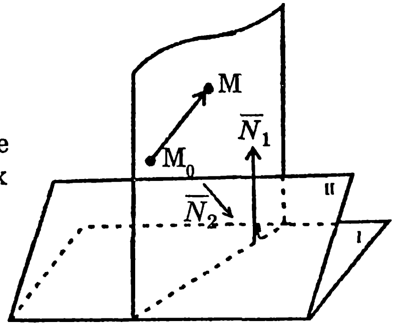


Рис. 25

откуда

$$x - 11y - 17z + 36 = 0.$$

ПРИМЕР 10. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = b_1 t + x_0 \\ y = b_2 t + y_0 \\ z = b_3 t + z_0 \end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 26), может быть представлено в виде:

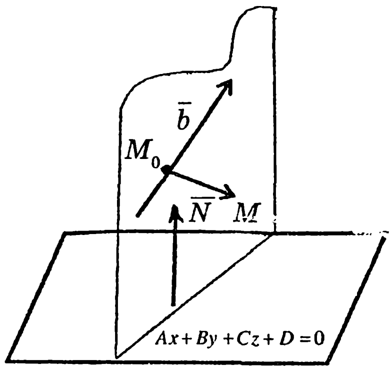


Рис. 26

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Решение. Т. к. плоскость проходит через прямую, то в этой плоскости находится точка прямой $M_0(x_0, \ y_0, \ z_0)$ и ее направляющий вектор $\overline{b} = (b_1, \ b_2, \ b_3)$. Соединив M_0 с текущей точкой $M(x, \ y, \ z)$, получим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, \ y - y_0, \ z - z_0)$. Третьим вектором, лежащим в плоскости, является вектор нормали к данной плоскости $\overline{N} = (A, \ B, \ C)$. Указанные три вектора линейно зависимы, поскольку принадлежат одной плоскости. Поэтому определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось.

Упражнение:

Решить примеры 5, 6, 7, используя л.з. векторов, а примеры 8, 9, 10, построив нормальный вектор.

§3. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

3.1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Для выяснения взаимного расположения прямой

$$\begin{cases} x = b_1 t + x_0 \\ y = b_2 t + y_0 \\ z = b_3 t + z_0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

и плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.10)$$

попытаемся найти точку их пересечения. С этой целью надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \begin{cases} x = b_1 t + x_0 \\ y = b_2 t + y_0 \\ z = b_3 t + z_0 \end{cases} \end{cases}$$

Подставляя параметрические уравнения прямой в урав нение плоскости, получим одно уравнение с неизвестным t:

$$A(b_1 t + x_0) + B(b_2 t + y_0) + C(b_3 t + z_0) + D = 0,$$

откуда

$$(Ab_1 + Bb_2 + Cb_3)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D). \qquad (2.13)$$

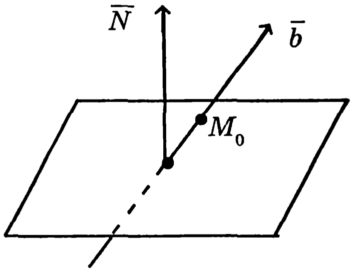


Рис. 27

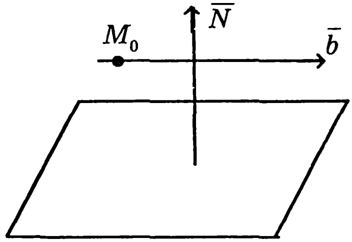


Рис. 28

1-й случай

$$Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 \neq 0 \tag{2.14}$$

Тогда уравнение (2.13) определяет единственное значение t, подставив которое в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения прямой с плоскостью. С геометрической точки зрения условие (2.14) означает, что $\overline{N} \cdot \overline{b} \neq 0$, т. е. что $\overline{N} \not\perp \overline{b}$; другими словами, прямая не параллельна плоскости, а значит, она пересекает ее (рис. 27).

2-й случай

$$\begin{cases} Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Тогда левая часть в (2.13) не может быть равна правой. Это говорит о том, что прямая параллельна плоскости.

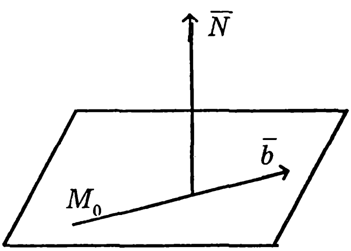


Рис. 29

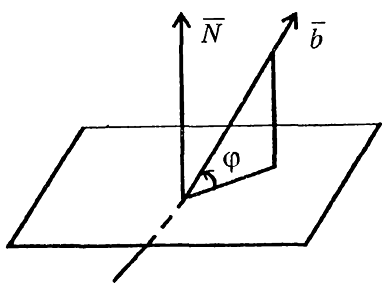


Рис. 30

С геометрической точки зрения первое условие в (2.15) означает, что $\overline{N}\perp\overline{b}$, т. е. прямая параллельна плоскости, а второе условие – что точка M_0 не принадлежит плоскости (рис. 28).

3-й случай

$$\begin{cases} Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Уравнение (2.13) удовлетворяется при любых значениях t; значит вся прямая лежит в плоскости (рис. 29). С геометрической точки зрения условия (2.16) означают, что прямая параллельна плоскости и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит в плоскости. Следовательно, и вся прямая принадлежит плоскости.

3.2. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Углом между прямой (2.2) и плоскостью (2.10) называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 30):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\overline{N}\cdot\overline{b}}{\|\overline{N}\|\,\|\overline{b}\|},$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{\overline{N}\ \ \overline{b}}{\|\overline{N}\|\,\|\overline{b}\|} = \frac{Ab_1 + Bb_2 + Cb_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{b_1^2 + b_3^2 + b_3^2}}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\overline{N}\|\overline{b} \Leftrightarrow \frac{A}{b_1} = \frac{B}{b_2} = \frac{C}{b_3}$$

ПРИМЕР 1. Найти точку пересечения прямой

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \end{cases}$$ с плоскостью $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. Искомая точка является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \end{cases} \end{cases}$$

Подставляя параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, имеем: $2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t - 1 = 0$, откуда $2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$. Возвращая найденное значение в уравнение прямой, получаем

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6.$$

Ответ: (2; –3; 6).

ПРИМЕР 2. Найти проекцию точки P (5; 2; –1) на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$. Найти точку Q, симметричную точке P относительно данной плоскости (рис. 31).

Решение. Составим сначала уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно к плоскости, приняв направляющим вектором прямой $\bar{b} = \bar{N} = (2;\ -1;\ 3)$, получаем

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \qquad (2.17)$$

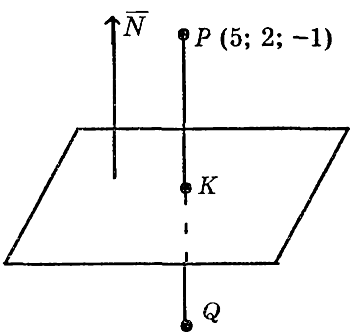


Рис. 31

Теперь находим точку пересечения полученной прямой с данной плоскостью, совместно решая их уравнения:

$$2(2t+5) - (-t+2) +$$
$$+ 3(3t-1) + 23 = 0,$$

откуда $t = -2$. Возвращаем это значение в уравнения (2.17), в результате чего получим

$$x_K = 1, \quad y_K = 4, \quad z_K = -7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow K(1;\ \ 4;\ \ -7)$. Это и есть проекция точки P на данную плоскость. Координаты точки Q, симметричной точке P относительно плоскости, находятся теперь из соотношений:

$$x_K = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_K = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_K = \frac{z_P + z_Q}{2}.$$

Действительно,

$$x_Q = 2x_K \quad x_P = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$y_Q = 2y_K - y_P = 2 \cdot 4 - 2 = 6$$

$$z_Q = 2z_K \quad z_P = 2 \cdot (-7) + 1 = -13$$

Итак, $Q(-3;\ \ 6;\ \ -13)$

ПРИМЕР 3. Доказать, что прямая

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

лежит в плоскости

$$4x - 3y + 7z - 7 = 0 \tag{2.19}$$

Решение. Здесь прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Направляющий вектор $\bar{b}$ этой прямой ортогонален каждому из векторов нормалей $\bar{N}_1 = (5;\ \ -3;\ \ 2)$ и $\bar{N}_2 = (2;\ \ -1;\ \ -1)$ и поэтому может быть получен как их векторное произведение:

$$\bar{b} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\bar{i} + 9\bar{j} + \bar{k}$$

Для того, чтобы найти одну из точек прямой, положим в (2.18) $z_0 = 0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

откуда $x_0 = -2$, $y_0 = -5$, $M_0(-2;\ -5;\ 0)$. Параметрические уравнения прямой (2.18) имеют вид

$$\begin{cases} x = 5t - 2 \\ y = 9t - 5 \\ z = t \end{cases}$$

Если $\overline{N}$ – вектор нормали к плоскостям (2.19), то

$$\overline{N} \cdot \overline{b} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 9 + 7 \cdot 1 = 0\,.$$

В то же время точка $M_0(-2;\ 5;\ 0)$ удовлетворяет уравнению (2.19), т. к.

$$4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 - 7 = 0.$$

Значит, оба условия (2.16) выполнены, что и доказывает принадлежность прямой к плоскости.

3.3. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Вычислим расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Для этого, прежде всего, составим уравнение прямой, проходящей через точку M_0, перпендикулярно к плоскости. В качестве направляющего вектора прямой возьмем вектор нормали: $\overline{b} = \overline{N} = (A, B, C)$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0 \\ z = Ct + z_0 \end{cases} \qquad (2.20)$$

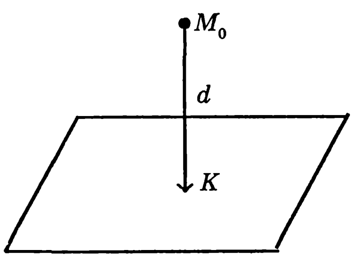


Рис. 32

Находим координаты точки K пересечения прямой с плоскостью:

$$A(At + x_0) + B(Bt + y_0) + C(Ct + z_0) + D = 0$$

$$\left(A^2 + B^2 + C^2\right)t = -(Ax_0 + By_0 + cz_0 + D) \qquad (2.21)$$

Т. к. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то из (2.21) находим значение параметра t, соответствующее точке K, единственным образом:

$$t_K = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad (2.22)$$

и, возвращая его в (2.20), определяем координаты точки K:

$$x_K = At_K + x_0, \quad y_K = Bt_K + y_0, \quad z_K = Ct_K + z_0 .$$

Тогда получаем, что

$$\overline{M_0K} = (x_K - x_0;\ y_K - y_0;\ z_K - z_0) = (At_K; Bt_K; Ct_K)$$

и значит, искомое расстояние

$$d = \left\|\overline{M_0K}\right\| = \sqrt{(At_K)^2 + (Bt_K)^2 + (Ct_K)^2} = |t_K|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

С учетом (2.22), имеем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2.23)$$

ПРИМЕР 4. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x - 3y + 6z - 8 = 0 \text{ и } 2x - 3y + 6z + 6 = 0.$$

Решение. Выберем какую-нибудь точку на первой плоскости. Для этого полагаем в ее уравнении $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$; в результате имеем $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$, т. е. $x_0 = 4$. Значит, на первой плоскости нами выбрана точка M_0 (4; 0; 0). Расстояние d от этой точки до второй плоскости будет как раз расстоянием между плоскостями. Вычислим его с помощью формулы (2.23):

$$d = \frac{|2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = 2 .$$

В заключение этого параграфа решим еще одну задачу.

ПРИМЕР 5. Составить уравнение плоскости, параллельной двум заданным плоскостям, проходящей через середину расстояния между ними (рис. 33).

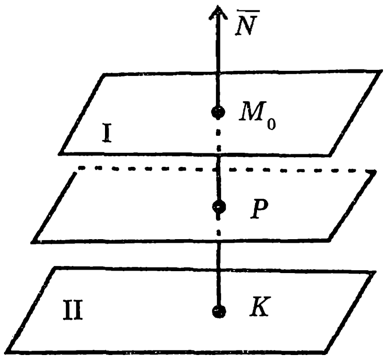


Рис. 33

(I): $3x - y + 2z - 21 = 0$

(II) : $3x - y + 2z + 7 = 0$

Изложим алгоритм решения, сопровождая каждый этап результатом. Рекомендуем читателю развернуть это решение.

1) На плоскости (I) выбираем одну точку M_0 (7; 0; 0).

2) Через точку M_0 (7; 0; 0) проведем прямую, перпендикулярную данным плоскостям:

$$\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

3) Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью (II) : $K(1;\ 2;\ -4)$.

4) Определяем координаты точки P – середины отрезка M_0K : $P(4;1;-2)$.

5) Через точку P проводим плоскость, параллельную данным плоскостям, т.е. находим уравнение искомой плоскости: $3x - y + 2z - 7 = 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Даны вершины треугольника $A(1;-2;3)$, $B(4;-1;0)$, $C(5;1-2)$. Найти уравнения сторон AB и AC.

2. Даны вершины треугольника

$A(3;-1;-3)$, $B(5;1;-5)$, $C(-3;5;1)$. Найти уравнение медианы AM и написать уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно этой медиане.

3. В условиях задачи 2 найти точку пересечения медиан треугольника.

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;3)$, $B(3;4;0)$, $C(-1;5;2)$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-1;8)$ и прямую $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t+7 \\ z = -t+8 \end{cases}$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = t+4 \\ z = -t+2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t \\ y = t+7 \\ z = -t+1 \end{cases}$

7. Доказать, что прямые $\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = 2t-1 \\ z = 5t+3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = t+3 \\ y = 3t-5 \\ z = 4t \end{cases}$ пересекаются, найти точку их пересечения и составить уравнение плоскости, содержащей эти прямые.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;3)$, перпендикулярную $\overline{AB}$, где $B(3;-1;2)$.

9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;3)$ перпендикулярно плоскостям $2x-3y+z-1=0$, $3x+y+z-11=0$.

10. Написать параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-3y+4z+7=0 \\ 3x+2y-5z-9=0 \end{cases}$$

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$$ и точку $A(3; -1; 4)$.

12. Найти угол между плоскостями

$$3x - 4y + z + 8 = 0, \quad x + y + z - 11 = 0.$$

13. Найти проекцию точки $A(2; -1; 3)$ на плоскость

$$2x - y + 4z + 7 = 0.$$

14. Найти проекцию точки $A(3; -1; 8)$ на прямую

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 5 \\ z = 3t + 7 \end{cases}.$$

15. Найти точку, симметричную точке $A(3; 1; 2)$ относительно плоскости

$$5x - 2y + z - 15 = 0$$

16. Найти точку симметричную точке $A(2; -1; 4)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

17. Найти расстояние от точки $A(2; 5; 0)$ до прямой

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = 2t + 5 \end{cases}.$$

18. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x - y + 4z - 7 = 0, \quad 2x - y + 4z - 11 = 0.$$

19. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

20. Найти проекцию прямой $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$ на плоскость

$$x + y + z - 12 = 0.$$

21. Найти проекцию прямой $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = 4t + 5 \end{cases}$ на плоскость

$$2x + y - z + 4 = 0.$$

22. Найти уравнение плоскости, все точки которой равноудалены от плоскостей $2x - y - z + 7 = 0$, $2x - y - z + 15 = 0$.

23. Найти уравнение плоскости, все точки которой равноудалены от плоскостей $3x + 2y - z + 8 = 0$, $x - 3y + 2z - 7 = 0$.

24. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$ и касающейся сферы $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 21$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1;0)$, перпендикулярно прямой $\begin{cases} x = t \\ y = -3t - 1 \\ z = -2t - 1 \end{cases}$ и пересекающей ее. Ответ представить как линию пересечения двух плоскостей.

26. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\begin{cases} x=4t+2 \\ y=t-1 \\ z=-t+1 \end{cases} \begin{cases} x=2t-4 \\ y=-2t+2 \\ z=-3t-2 \end{cases}.$$

ОТВЕТЫ:

1. $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t-2 \\ z=-3t+3, \end{cases} \begin{cases} x=4t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-5t+3 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=4t-1 \\ z=t-3, \end{cases} \begin{cases} x=-2t+5 \\ y=4t+1 \\ z=t-5 \end{cases}$

3. $\left(\frac{5}{3};\ \frac{5}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$. 4. $13x+10y+21z-79=0$

5. $4x+y+14z-123=0$. 6. $2x-y+3z+4=0$.

7. $(5;\ 1;\ 8)$, $x+y-z+2=0$. 8. $4x-3y-z+13=0$.

9. $4x-y-11z+24=0$. 10. $\begin{cases} x=7t+1 \\ y=22t+3 \\ z=13t \end{cases}$

11. $2x+23y-11z+61=0$. 12. $\frac{\pi}{2}$.

13. $\left(-\frac{2}{7};\ \frac{1}{7};\ -\frac{11}{7}\right)$. 14. $\left(\frac{32}{11};\ \frac{45}{11};\ \frac{107}{11}\right)$.

15. $(1;\ -7;\ -4)$. 16. $\left(\frac{26}{7};\ \frac{62}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$.

17. $5\sqrt{3}$. 18. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. 19. $\sqrt{30}$. 20. $\begin{cases} x=1 \\ y=t+3 \\ z=-t+8 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = 4t+4 \end{cases}$ 22. $2x - y - z + 11 = 0$.

23. $2x + 5y - 3z + 15 = 0$, $4x - y + z + 1 = 0$.

24. $2x + y - 4z - 25 = 0$, $2x + y - 4z + 17 = 0$.

25. $\begin{cases} x - 3y - 2z - 5 = 0 \\ 3x + 5y - 6z - 1 = 0 \end{cases}$. 26. $d = 6$.

§4. ПРЯМАЯ В R^2

4.1. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ. ПУЧОК ПРЯМЫХ

Мы уже знаем (§1), что прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ в направлении вектора $\bar{b} = (b_1; b_2)$, имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = tb_1 + x_0 \\ y = tb_2 + y_0 \end{cases}, \tag{2.24}$$

где $-\infty < t < \infty$ (рис. 34), а $M(x; y)$ – текущая точка прямой. Если $b_1 = 0$, то $\bar{b} = (0; b_2) \parallel \bar{j}$, т. е. прямая вертикальна и из (2.24) следует, что она имеет уравнение

$$x = x_0 \tag{2.25}$$

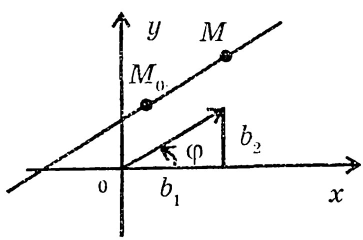


Рис. 34

Если $b_1 \neq 0$, то из (2.24) можно исключить t и получить связь между координатами текущей точки

$$y - y_0 = \frac{b_2}{b_1}(x - x_0) \tag{2.26}$$

Напомним, что угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс.

Из рис. 34 видно, что $k = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b_2}{b_1}$; поэтому из (2.26) получаем:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{2.27}$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с заданным угловым коэффициентом.

Любая другая прямая, проходящая через точку M_0, будет иметь уравнение такого же вида, но у нее – другой угловой коэффициент. Таких прямых существует, конечно, бесконечное множество. Совокупность всех прямых, проходящих через точку M_0 , называется пучком прямых. Таким образом, если в уравнении (2.27) мыслить k переменным, то оно выражает пучок прямых, проходящих через точку M_0 (за исключением вертикальной прямой) (рис. 35).

Переписав уравнение (2.27) в виде $y = kx + y_0 - kx_0$ и обозначив $y_0 - kx_0 = b$, получим:

$$y = kx + b \tag{2.28}$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом. При $x = 0$ $y = b$. Значит, b – есть отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (рис. 36). Меняя k и b, можно получить все прямые на плоскости, кроме вертикальных.

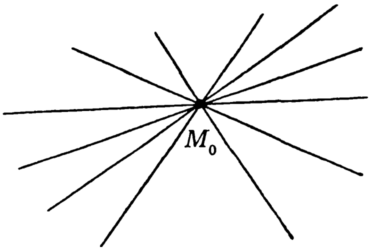


Рис. 35

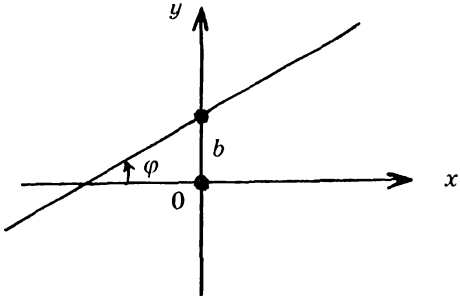


Рис. 36

4.2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$. Для этого мы должны из пучка прямых, проходящих через точку A

$$y - y_A = k(x - x_A) , \qquad (2.29)$$

выделить ту, что проходит еще через точку B. Из ΔACB (рис. 37) следует, что $k_{AB} = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Остается это значение подставить в (2.29), после чего имеем

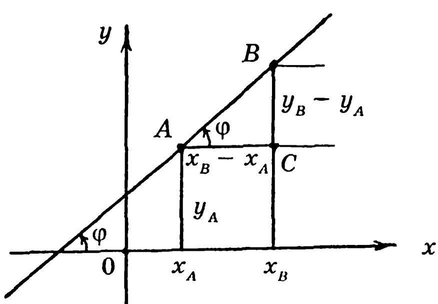


Рис. 37

$y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ – уравнение прямой, проходящей через точки A и B. Разумеется, этим уравнением нельзя воспользоваться, если $x_B = x_A$. В таком случае прямая вертикальна и имеет уравнение $x = x_A$.

4.3. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ, УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Углом между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ называется угол θ, на который следует повернуть первую прямую вокруг точки K (рис. 38), чтобы получить вторую. Из определения вытекает, что $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Отсюда

$\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_1 \mathrm{tg}\varphi_2}$. Учитывая, что $\mathrm{tg}\varphi_1 = k_1$ и $\mathrm{tg}\varphi_2 = k_2$, получаем:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (2.31)$$

Формула (2.31) неприменима, если

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \qquad (2.32)$$

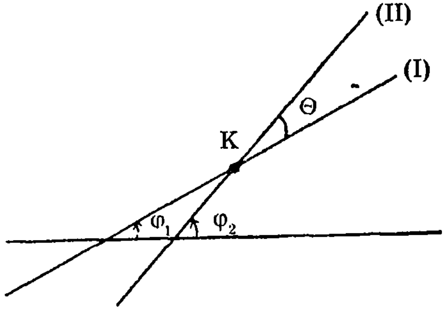


Рис. 38

Смысл условия (2.32) раскрывается следующим образом:

$$1 + k_1 \ k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{ctg}\varphi_1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \Leftrightarrow (\mathrm{I}) \perp (\mathrm{II})$$

Следовательно, условие (2.32) или условие

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{2.33}$$

означает перпендикулярность двух прямых. Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

4.4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ.

Вектором нормали к данной прямой называется вектор, перпендикулярный ей. Составим уравнение прямой по известному вектору нормали $\overline{N} = (A; B)$ и заданной точке $M_1(x_1; y_1)$. Если $M(x; y)$ – текущая точка прямой, то векторы $\overline{N} = (A; B)$ и $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ ортогональны (рис. 39). Это значит, что $\overline{N} \ \overline{M_1M} = 0$, т. е.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

или

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.34}$$

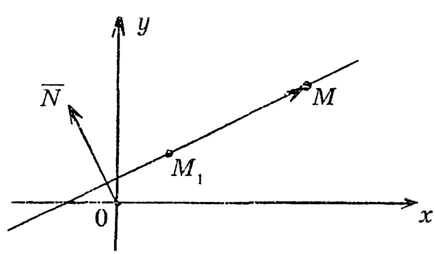


Рис. 39

где $C = -Ax_1 - By_1$. Уравнение (2.34) называется общим уравнением прямой. Если $B \neq 0$, оно выражает прямую $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{A}{B}$. Если же $B = 0$, то $A \neq 0$ (подумайте, почему) и тогда (2.34) выражает вертикальную прямую $x = -\frac{C}{A}$.

ЗАДАЧА 1. Треугольник задан вершинами $A(-4;-2)$, $B(-1;3)$, $C(6;-4)$. Составить уравнения стороны BC, медианы BM и высоты BH.

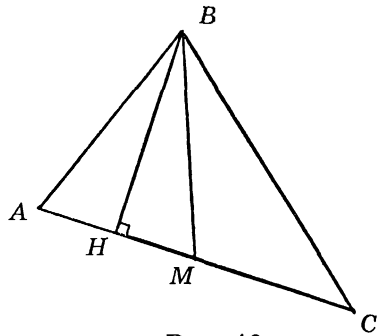


Рис. 40

Решение.

Все три прямые (рис. 40) принадлежат пучку

$$y - y_B = k(x - x_B)$$

или

$$y - 3 = k(x + 1) \qquad (2.35)$$

Найдем для каждой из них угловой коэффициент и возвратим его в (2.35)

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4-3}{6-(-1)} = -1.$$

Тогда уравнение стороны BC имеет вид

$$(BC): y-3=-1(x+1) \text{ или } x+y-2=0.$$

Далее, поскольку M – середина отрезка AC, то

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3,$$

$$k_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{-3-3}{1+1} = -3,$$

и значит, уравнение медианы выглядит так:

$$(BM): y-3=-3(x+1) \text{ или } 3x+y=0.$$

Далее $k_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow k_{BH} = -\dfrac{1}{k_{AC}}$ в силу условия перпендикулярности прямых AC и BH. Поэтому $k_{BH} = 5$ и, следовательно,

$$(BH): y-3=5(x+1) \text{ или } 5x-y+8=0.$$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между двумя прямыми:

а) $y=-2x+3, \quad y=3x+5;$

б) $3x+5y-7=0, \quad 2x-4y+5=0;$

в) $4x-3y+8=0, \quad 3x+4y-15=0.$

Решение.

а) Выписываем угловые коэффициенты прямых $k_1=-2, \ k_2=3$. Используя формулу (2.31), находим тангенс угла между данными прямыми

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3-(-2)}{1+(-2)\cdot 3} = -1,$$

откуда следует, что

$$\varphi = 135^\circ.$$

б) переписав каждое из уравнений данных прямых как уравнение с угловым коэффициентом, имеем:

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}, \quad y = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}.$$

Отсюда ясно, что

$$k_1 = -\frac{3}{5}, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right)}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{11}{7} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{11}{7}.$$

в) здесь $k_1 = \frac{4}{3}$, $k_2 = -\frac{3}{4}$. Мы видим, что угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку. Это означает, что прямые взаимно перпендикулярны.

ЗАДАЧА 3. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямых, проходящих через точку $M_0(2;1)$ и образующих с данной прямой углы по 45°.

Решение. Запишем сначала уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_0(2;1)$: $y - 1 = k(x - 2)$. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{2}{3}$. Поскольку угол в 45° можно отложить от данной прямой либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке, то угловые коэффициенты искомых прямых мы найдем из соотношений

$\operatorname{tg}45^\circ = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ и $\operatorname{tg}45^\circ = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$ т. е. либо $1 + k_1 k_2 = k_2 - k_1$, либо $1 + k_1 k_2 = k_1 - k_2$, откуда в первом случае,

$$k_2 = \frac{1 + k_1}{1 - k_1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

и, значит, уравнение искомой прямой

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2) \Rightarrow x - 5y + 3 = 0,$$

а во втором случае

$$k_2 = \frac{1 - k_1}{1 + k_1} = -5$$

и поэтому уравнение еще одной искомой прямой

$$y - 1 = -5(x - 2) \Rightarrow 5x + y - 11 = 0 .$$

ЗАДАЧА 4. Даны уравнения двух сторон ромба

$$x - 3y - 7 = 0 \text{ и } x - 3y - 12 - 0$$

и одной диагонали $x + 2y + 3 = 0$. Найти координаты всех вершин.

Решение.

Поскольку коэффициенты при переменных в уравнениях сторон одинаковы, то нам даны параллельные сто-

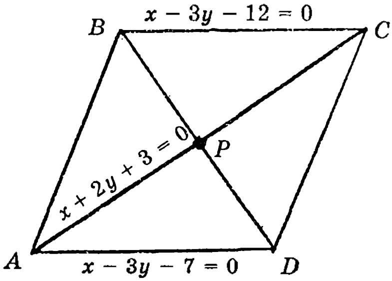


Рис. 41

роны ромба (рис. 41). Решая совместно уравнение стороны AD и диагонали AC, находим координаты точки A:

$$\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;\ \ -2).$$

Аналогично, рассматривая совместно уравнения стороны BC и диагонали AC, находим координаты точки C:

$$\begin{cases} x - 3y - 12 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3;\ \ -3).$$

Так как диагонали ромба в точке пересечения P делятся пополам, то координаты точки P определяются просто:

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, \quad y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Угловой коэффициент диагонали AC: $k_{AC} = -\dfrac{1}{2}$. Тогда угловой коэффициент другой диагонали $k_{BD} = -\dfrac{1}{k_{AC}} \Rightarrow k_{BD} = 2$, поскольку диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Используя уравнение пучка прямых, проходящих через точку $P\left(2; -\dfrac{5}{2}\right)$, мы можем записать уравнение диагонали BD:

$$(BD): \ y + \frac{5}{2} = 2(x - 2),$$

т. е.

$$(BD): \ 4x - 2y - 13 = 0.$$

Теперь, решая систему уравнений (BC) и (BD), находим координаты точки B:

$$\begin{cases} x - 3y - 12 = 0 \\ 4x - 2y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right).$$

Координаты точки D получаем из соотношений

$$\frac{x_B + x_D}{2} = x_P, \quad \frac{y_B + y_D}{2} = y_P,$$

в результате чего имеем

$$D\left(\frac{5}{2}; \ -\frac{3}{2}\right).$$

ЗАДАЧА 5. Составить уравнение сторон треугольника, если даны вершина $B(-4; -5)$ и уравнения двух высот

$$(CD): 5x + 3y - 4 = 0 \ \text{и} \ (AE): 3x + 8y + 13 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку B:

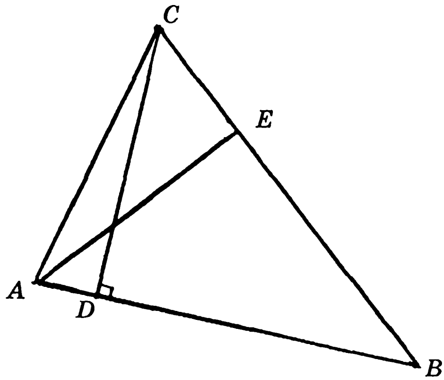


Рис. 42

$$y + 5 = k(x + 4) \tag{2.36}$$

Исходя из уравнений данных высот, имеем:

$$k_{CD} = -\frac{5}{8}, \quad k_{AE} = -\frac{3}{8}.$$

Используя условие перпендикулярности прямых, получаем отсюда:

$$k_{AB} = -\frac{1}{k_{CD}} = \frac{3}{5}, \quad k_{BC} = -\frac{1}{k_{AE}} = \frac{8}{3}.$$

Возвращая найденные значения угловых коэффициентов в (2.36), имеем:

$$(AB):\ y+5=\frac{3}{5}(x+4)\Rightarrow 3x-5y-13=0$$

$$(BC):\ y+5=\frac{8}{3}(x+4)\Rightarrow 8x-3y+17=0\,.$$

Далее решением системы уравнений AB и AE находим координаты точки A, а решением системы уравнений BC и CD – координаты точки C:

$$\begin{cases}3x-5y-13=0\\3x+8y+13=0\end{cases}\Rightarrow A(1;\ \ -2),$$

$$\begin{cases}8x-3y+17=0\\5x+3y-4=0\end{cases}\Rightarrow C(-1;\ \ 3).$$

Остается найти k_{AC} и использовать уравнение пучка

$$y-y_A=k(x-x_A):k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{3+2}{-1-1}=-\frac{5}{2}$$

$$(AC):\ y+2=-\frac{5}{2}(x-1)\ \text{или}\ 5x+2y-1=0\,.$$

ЗАДАЧА 6. Даны вершины треугольника $A(4;\ 1)$, $B(8;\ 7)$, $C(1;\ 3)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A.

Решение. Известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

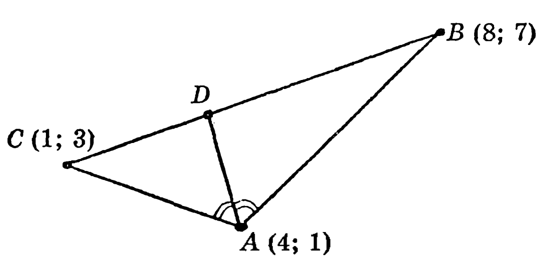


Рис. 43

$$\lambda = \frac{\left\|\overline{BD}\right\|}{\left\|\overline{CD}\right\|} = \frac{\left\|\overline{AB}\right\|}{\left\|\overline{AC}\right\|}; \quad \overline{AB} = (4;\ \ 6), \quad \overline{AC} = (-3;\ \ 2),$$

$$\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13},\ \left\|\overline{AC}\right\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 2.$$

Находим координаты точки D:

$$x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{8 + 2\ \ 1}{1+2} = \frac{10}{3},$$

$$y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot 3}{3} = \frac{13}{3}.$$

Теперь определяем угловой коэффициент искомой биссектрисы

$$k_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{\frac{13}{3} - 1}{\frac{10}{3} - 4} = -5$$

и записываем ее уравнение $(AD): y - 1 = -5(x - 4)$.

4.5. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Дана прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$, не лежащая на ней. Получим формулу, выражающую расстояние d от точки до прямой (рис. 44).

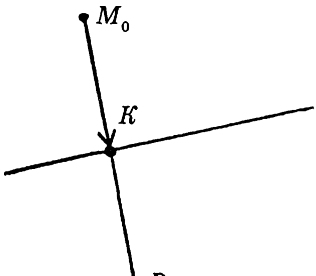


Рис. 44

План действий:

1) составим уравнение прямой M_0P, перпендикулярной заданной;

2) найдем точку пересечения K рассматриваемых прямых;

3) составим вектор $\overline{M_0K}$ и найдем его норму $\left\|\overline{M_0K}\right\| = d$.

Принимая во внимание, что вектор $\overline{N} = (A; B)$ перпендикулярен данной прямой, запишем уравнение прямой M_0P в параметрическом виде $\begin{cases} x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0 \end{cases}$. Для нахождения точки пересечения K решаем систему

$$\begin{cases} \begin{cases} x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0 \end{cases} \Rightarrow \\ Ax + Bt + C = 0 \end{cases}$$

$$A(At + x_0) + B(Bt + y_0) + C = 0 \Rightarrow$$

$$(A^2 + B^2)t = -Ax_0 - By_0 - C,$$

откуда

$$t_K = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

и, значит,

$$\begin{cases} x_K = At_K + x_0 \\ y_K = Bt_K + y_0 \end{cases}$$

Записываем теперь вектор $\overline{M_0K} = (x_K - x_0; \quad y_K - y_0)$ и находим его норму

$$d = \left\|\overline{M_0K}\right\| = \sqrt{(x_K - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} = \sqrt{(At_K)^2 + (Bt_K)^2} =$$

$$= |t_K| \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$$

Итак,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{2.37}$$

ЗАДАЧА 7. Стороны квадрата лежат на параллельных прямых $5x - 3y - 10 = 0$ и $5x - 3y + 7 = 0$. Найти площадь этого квадрата.

Решение. Длина стороны квадрата равна расстоянию от любой точки первой прямой до второй прямой. Выбираем на первой прямой точку M_0, полагая $y_0 = 0$; тогда $x_0 = 2$, $M_0(2; 0)$. Расстояние от этой точки до второй прямой определяем по формуле (2.37):

$$d = \frac{|5 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{25+9}} = \frac{17}{\sqrt{34}}.$$

Искомая площадь квадрата

$$S = d^2 = \frac{17^2}{34} = 8{,}5.$$

ЗАДАЧА 8. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $(\mathrm{I}): 10x - 8y + 3 = 0$ и $(\mathrm{II}): 4x + 5y - 7 = 0$.

Решение основано на том, что каждая биссектриса представляет собой множество точек, одинаково удаленных от сторон угла (рис. 45). Обозначим через X и Y координаты текущей точки M биссектрисы. Тогда, согласно (2.37), расстояние d_1 от точки M до прямой (I) определяется формулой

$$d_1 = \frac{|10X - 8Y + 3|}{\sqrt{100+64}} = \frac{|10X - 8Y + 3|}{2\sqrt{41}},$$

а расстояние от этой же точки до прямой (II)

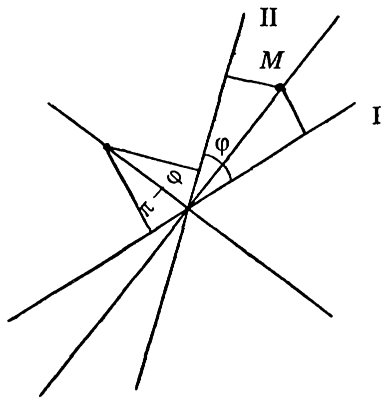


Рис. 45

$$d_2 = \frac{|4X + 5Y - 7|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{|4X + 5Y - 7|}{\sqrt{41}}$$

Для точек, лежащих на биссектрисе, $d_1 = d_2$; поэтому

$$\frac{|10X - 8Y + 3|}{2\sqrt{41}} = \frac{|4X + 5Y - 7|}{\sqrt{41}},$$

т. е.

$$|10X - 8Y + 3| = 2|4X + 5Y - 7|.$$

Равенство модулей означает, что либо

$$10X - 8Y + 3 = 2(4X + 5Y - 7),$$

т. е.

$$2X - 18Y + 17 = 0,$$

либо

$$10X - 8Y + 3 = -2(4X + 5Y - 7),$$

т. е.

$$18X + 2Y - 11 = 0.$$

Мы получили уравнения сразу двух биссектрис: и угла φ, и угла $\pi - \varphi$. Принимая во внимание, что смысл уравнения заключается в зависимости между координатами текущей точки, а не в том, как они обозначены, можно записать искомые уравнения, заменив X на x, а Y на y:

$$2x - 18y + 17 = 0$$
$$18x + 2y - 11 = 0$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ. 1-Й УРОВЕНЬ

1. Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями.

2. Стороны треугольника заданы уравнениями (AB): $4x + 3y - 5 = 0$, (BC): $x - 3y + 10 = 0$, (AC): $x - 2 = 0$

Определить координаты его вершин.

3. Написать уравнение прямых, проходящих через точку $A(5;\ -2)$:

а) параллельно прямой $3x - 4y + 1 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $2x - 3y + 4 = 0$;

в) параллельно оси ординат;

г) перпендикулярно оси ординат.

4. Найти углы между заданными прямыми:

а) $2x - 5y - 1 = 0$ и $4x + 3y + 2 = 0$;

б) $x - 2y + 5 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$;

в) $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + 2y - 7 = 0$.

5. Проверить, лежат ли точки *A, B, C* на одной прямой

а) $A(2;1)$, $B(0;5)$, $C(4;-3)$;

б) $A(-1;0)$, $B(1;-2)$, $C(3;-1)$.

6. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;4)$, $B(3;-1)$, $C(0;2)$. Найти координаты четвертой вершины.

7. Даны вершины треугольника $A(1;\ 2)$, $B(2;\ -3)$, $C(-1;\ 7)$. Найти уравнения всех его сторон.

8. Даны вершины треугольника $A(1;\ -2)$, $B(3;\ 4)$, $C(7;\ 6)$. Найти уравнения всех медиан и доказать, что они пересекаются в одной точке. Указать эту точку.

9. Найти точку пересечения высот треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-2;\ -2)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ -5)$.

10. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2;\ -3)$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

11. Через точку пересечения прямых $x + 2y - 3 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $2x + 5y - 14 = 0$.

12. Найти проекцию точки $A(2;\ 3)$ на прямую, проходящую через точки $B(1;\ 5)$ и $C(-3;\ -1)$.

13. Найти точку B, симметричную точке $A(-1;\ 4)$ относительно прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

14. Составить уравнение прямой, рабноудаленной от двух параллельных прямых:

а) $x + y + 3 = 0,\quad 2x + 2y - 1 = 0$;

б) $2x - y = 0,\quad 4x - 2y + 5 = 0$.

15. В треугольнике ABC даны уравнения стороны (AB): $4x + y - 12 = 0$, высоты (AH): $2x + 2y - 9 = 0$ и высоты (BD): $5x - 4y - 15 = 0$. Составить уравнения сторон BC и AC.

16. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2;\ -7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.

17. Зная координаты двух вершин ромба $A(0;\ 4)$ и $B(2;\ 3)$ и уравнение стороны (CD): $x + 2y - 3 = 0$, вычислить координаты остальных вершин.

18. Точка $A(-4;\ 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

19. Даны вершины треугольника $A(1;\ -2)$, $B(5;\ 4)$, $C(-2;\ 0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.

20. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;\ 3)$ $C(6;\ 2)$. Составить уравнения его сторон.

21. Начало координат является центром квадрата, уравнение одной из его сторон $x + 2y - 1 = 0$. Найти координаты вершин квадрата.

ОТВЕТЫ:

1. $(6;0)$, $(0;-4)$. 2. $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$.

3. а) $3x-4y-23=0$, б) $3x+2y-11=0$, в) $x=5$, г) $y=-2$.

4. а) $-\operatorname{arctg}\dfrac{26}{7}$, б) $\dfrac{\pi}{4}$, в) $\dfrac{\pi}{2}$. 5. а) да, б) нет. 6. $(-2;\ 7)$.

7. (AB): $5x+y-7=0$, (BC): $10x+3y-11=0$,

(AC): $5x+2y-9=0$

8. (AM_1): $7x-4y-15=0$ (BM_2): $2x+y-10=0$

(CM_3): $x-y-1=0$, $\left(\dfrac{11}{3},\dfrac{8}{3}\right)$ 9. $\left(-\dfrac{18}{13};-\dfrac{23}{13}\right)$.

10. $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$. 11. $5x-2y-3=0$.

12. $\left(\dfrac{5}{13};\dfrac{53}{13}\right)$. 13. $(3;\ -2)$. 14. а) $4x+4y+5=0$,

б) $8x-4y+5=0$.

15. (BC): $x-y-3=0$ (AC): $4x+5y-20=0$.

16. $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$.

17. $C(1;1)$, $D(-1;2)$. 18. $4x+3y+1=0$,

$3x-4y+32=0$.

$4x+3y-24=0, 3x-4y+7=0, x+7y-31=0$.

19. $5x+y-3=0$ — биссектриса внутреннего угла,

$x-5y-11=0$ — биссектриса внешнего угла.

20. $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$

21. $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5}\right)$, $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$, $\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Глава 3
КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

§1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Всякая линия, которая в некоторой системе координат описывается уравнением второй степени относительно переменных x и y, называется кривой второго порядка.

В самом общем виде уравнение кривой второго порядка таково:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.1)$$

Рассмотрим, прежде всего, конкретные виды кривых второго порядка и уже затем вернемся к уравнению (3.1).

1.1. ЭЛЛИПС. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Для вывода уравнения эллипса введем систему координат: ось абсцисс проведем через фокусы F_1 и F_2, а ось ординат – перпендикулярно оси абсцисс через середину расстояния между ними. Обозначим через $2c$ – расстоя-

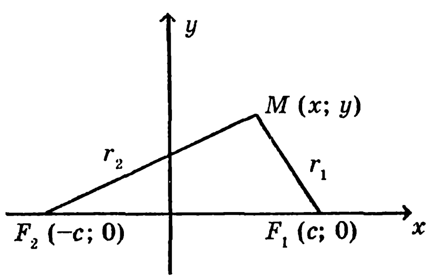


Рис. 46

ние между фокусами. Тогда (рис. 46) фокусы имеют координаты $F_1(c;\ 0)$; $F_2(-c;\ 0)$ Пусть $M(x;\ y)$ – текущая точка эллипса.

Расстояние $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ называются радиусами - векторами точки и вычисляются очень просто:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad (3.2)$$

Из определения эллипса следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad (3.3)$$

а простой подсчет показывает, что

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx \qquad (3.4)$$

Разделив (3.4) на (3.3), имеем:

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x. \qquad (3.5)$$

Складываем и вычитаем (3.3) с (3.5). Результатом являются формулы, связывающие радиус-векторы текущей точки эллипса с ее абсциссой и заданными параметрами:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \ r_2 = a + \frac{c}{a}x \qquad (3.6)$$

Приравнивая r_2^2 в формулах (3.2) и (3.6), имеем:

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \qquad (3.7)$$

Из условия $2a > 2c$ (сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны) следует, что $a > c$, разность $a^2 - c^2$ положительна. Обозначив $a^2 - c^2 = b^2$, получаем из (3.7) :

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$$

После деления обеих частей равенства на b^2, приходим к каноническому уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.8)$$

Исследование формы и построение эллипса.

1) Если точка $(x;\ y)$ лежит на эллипсе , то точка $(x;\ -y)$ тоже лежит на эллипсе. Это означает, что эллипс симметричен относительно оси абсцисс. Аналогично показывается, что эллипс симметричен и относительно оси ординат.

2) Находим точки пересечения эллипса с координатными осями: при $y = 0$ имеем $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$. Значит, эллипс пересекает ось абсцисс в точках $A_1(a;\ 0)$ и $A_2(-a;\ 0)$. Эти точки называются вершинами эллипса. Если $x = 0$, то $y = \pm b$, и мы отмечаем еще две вершины эллипса $B_1(0;\ b)$ и $B_2(0;\ -b)$.

3) Выражая из уравнения эллипса y явно через x, получаем $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Область определения этой функции $-a \le x \le a$, т. е. эллипс не выходит за пределы этой полосы. Рассуждая подобным образом, увидим, что эллипс не выходит и за пределы полосы $-b \le y \le b$. Значит, весь эллипс находится в прямоугольнике $\begin{Bmatrix} -a \le x \ge a \\ -b \le y \le b \end{Bmatrix}$.

4) В первом квадранте $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ Из этого равенства следует, что с увеличением x от 0 до a y убывает от b до 0.

Принимая во внимание все сказанное, делаем вывод о форме эллипса (рис. 47). Механически эллипс можно построить таким образом: нить длиной $2a$ закрепить в фокусах F_1 и F_2, в точку M поместить острие карандаша и, натянув нить, описать точкой M эллипс.

Полагая в каноническом уравнении эллипса $b = a$, по-

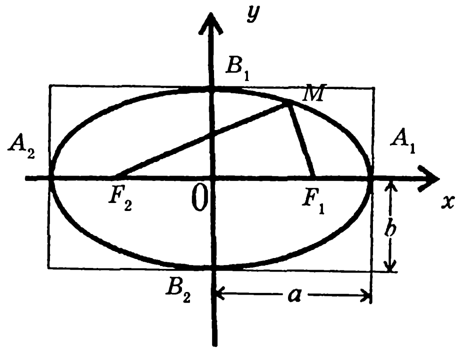


Рис. 47

лучаем $x^2 + y^2 = a^2$ – окружность радиуса a с центром в начале координат. Значит, окружность – частный случай эллипса.

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ЭЛЛИПСА

Определение. Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Из равенства $a^2 - c^2 = b^2$ или $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ следуют два важных соотношения

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

которые показывают, что эксцентриситет эллипса характеризует степень сжатия (растяжения) эллипса вдоль оси Oy: чем меньше ε, тем больше отношение $\frac{b}{a}$ и, значит. эллипс более вытянут вдоль оси Oy; минимальное значение эксцентриситета $\varepsilon = 0$ соответствует тому, что $b = a$. т. е. равенство нулю эксцентриситета отвечает случаю окружности. Формулы (3.6) позволяют установить связь радиусов-векторов текущей точки с эксцентриситетом:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x. \tag{3.9}$$

1.2. ГИПЕРБОЛА. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Систему координат выбираем, как и в предыдущем случае (при выводе уравнения эллипса). Фокусы имеют те же координаты: $F_1\,(c;\,0)$, $F_2\,(-c;\,0)$, но теперь $2c > 2a$ (длина любой их сторон треугольника больше разности длин двух других сторон) и через b^2 обозначим величину $c^2 - a^2$.

Далее, для текущей точки гиперболы, расположенной справа от оси Oy, имеем (рис.48):

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = 2a \\ r_2^2 - r_1^2 = 4cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 + r_1 = 2\dfrac{c}{a}x \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{c}{a}x - a \\ r_2 = \dfrac{c}{a}x + a \end{cases}$$

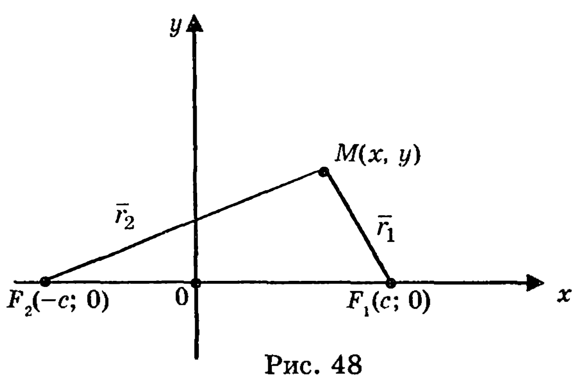


Рис. 48

И тогда

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2$$

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (3.10)$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Этому же уравнению удовлетворяют координаты любой точки гиперболы, расположенной слева от оси ординат.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ГИПЕРБОЛЫ

1) Если точка $(x;\ y)$ лежит на гиперболе, то на гиперболе лежат точки $(-x;\ y)$, $(x;\ -y)$ и $(-x;\ -y)$. Это значит, что обе координатные оси являются осями симметрии, а начало координат – центром симметрии гиперболы или просто ее центром. Ось абсцисс называется фокальной осью гиперболы (или действительной осью).

2) Находим точки пересечения гиперболы с осями координат. При $y = 0$ получаем $x = \pm a$. Точки $A_1(a;\ 0)$ и $A_2(-a;\ 0)$ называются действительными вершинами гиперболы. Если $x = 0$, то $y = \pm bi$. Это означает, что гипербола не имеет точек пересечения с осью Oy; тем не менее точки $B_1(0;\ b)$ и $B_2(0;\ b)$ имеют большое значение для построения гиперболы. Их называют мнимыми вершинами гиперболы.

3) Выразим y явно через x: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Эта функция определена тогда и только тогда, когда $x^2 - a^2 \geq 0$,

т. е. для $x \le -a$ и для $x \ge a$. Это говорит о том, что гипербола имеет две ветви: левую и правую.

4) В первом квадранте $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Когда $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$, возрастая.

5) Прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой* гиперболы.

Действительно,

$$\lim_{x \to +\infty}\left(y_{пр.} - y_{ф.}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x \to +\infty}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\cdot\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x \to +\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Из соображений симметрии следует, что прямая $y = -\frac{b}{a}x$ тоже является асимптотой гиперболы.

ПОСТРОЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Прежде всего, построим асимптоты гиперболы. С этой целью изобразим прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 49). Диагонали этого прямоугольника и есть асимптоты. Теперь в первом квадранте от вершины A_1 график гиперболы возрастая стремится к $+\infty$, приближаясь к асимптоте. В остальных квадрантах график гиперболы строится на основе симметрии.

Если $b = a$, гипербола называется равнобочной.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение

---

* Асимптотой называется прямая, к которой график кривой неограниченно приближается, когда точка вдоль кривой уходит в бесконечность.

фокусного расстояния к длине действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Т. к. $c > a$, то $\varepsilon > 1$ (в отличие от эксцентриситета эллипса). Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ следует, что

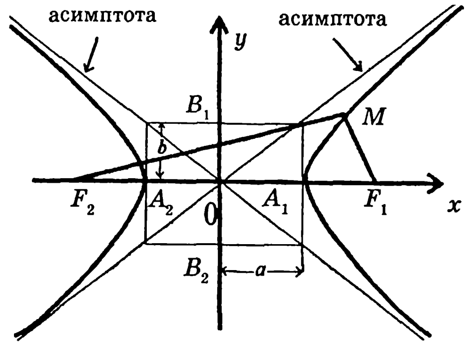


Рис. 49

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

откуда ясно, что эксцентриситет характеризует степень сжатия (растяжения) гиперболы вдоль оси Oy.

1.3. ПАРАБОЛА. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной прямой, называемой директрисой и от данной точки, называемой фокусом.

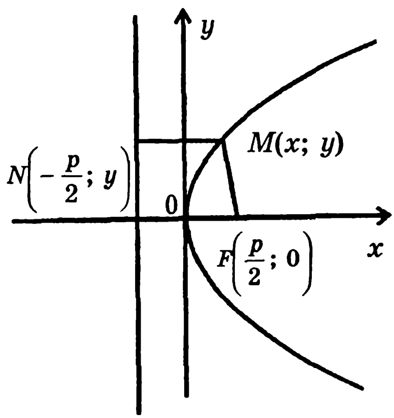


Рис. 50

Для составления уравнения параболы выбираем систему координат: ось абсцисс проводим через фокус F перпендикулярно директрисе, ось ординат – перпендикулярно оси Ox через середину расстояния p между фокусом и директрисой (рис. 50). Величина p называется параметром параболы. Пусть $M(x;\ y)$ – текущая точка параболы, $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$ – ее фокус, $N\left(-\frac{p}{2};\,0\right)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Тогда

$$\overline{FM}=\left(x-\frac{p}{2};\,y\right),\quad \overline{NM}=\left(x+\frac{p}{2};\,0\right)$$

По определению параболы

$$\left\|\overline{FM}\right\|=\left\|\overline{NM}\right\|$$

т. е.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

Отсюда

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$y^2=2px. \qquad (3.11)$$

Это и есть каноническое уравнение параболы.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ И ПОСТРОЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

1) Если точка $(x;\,y)$ лежит на параболе, то точка $(x;\,-y)$ тоже лежит на параболе. Значит, парабола симметрична относительно оси Ox, т. е. ось Ox – ось симметрии параболы.

2) $O(0;\,0)$ – единственная точка пересечения параболы с координатными осями. Эта точка называется вершиной параболы.

3) Выразив y явным образом через x, имеем:

$$y=\pm\sqrt{2px}.$$

Учитывая, что $p>0$, делаем вывод, что область определения параболы: $x\ge 0$. Это говорит о том, что парабола целиком расположена в правой полуплоскости.

4) Формула $y=+\sqrt{2px}$ (верхняя часть параболы) говорит о том, что с ростом x от 0 до $+\infty$ y тоже растет от 0 до $+\infty$. Парабола имеет вид, изображенный на рис. 50.

§2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ. ПРИВЕДЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

2.1. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Пусть xOy – исходная система координат и XO_1Y – другая система координат с началом координат O_1 $(a; b)$. Пусть $(x; y)$ – координаты точки M в исходной системе, а $(X; Y)$ – координаты этой точки в новой системе (рис. 51). Установим связь старых координат с новыми

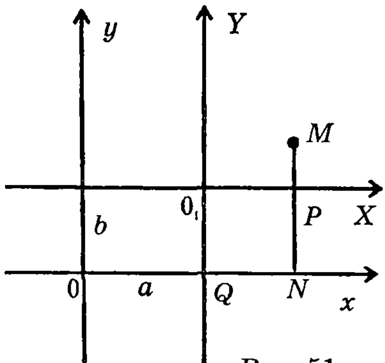


Рис. 51

$$x = ON = OQ + QN$$
$$y = MN = MP + PN,$$

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \qquad (3.12)$$

Формулы (3.12) называются формулами параллельного переноса координатных осей.

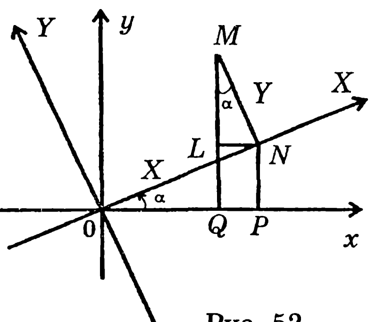


Рис. 52

2.2. ПОВОРОТ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Пусть xOy – исходная система координат и XOY – новая система, полученная поворотом исходной на угол α.

Пусть $(x; y)$ – координаты точки M в исходной системе, а $(X; Y)$ – координаты этой точки в новой системе. Выразим $(x; y)$ через $(X; Y)$ и угол α (рис. 52).

Из ΔOPN : $OP = ON \cos\alpha = X\cos\alpha$, $PN = X\sin\alpha$, а из ΔMLN : $LN = MN\sin\alpha = Y\sin\alpha$, $ML = Y\cos\alpha$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= OQ = OP - QP = OP - LN \\ y &= QM = QL + LM = PN + LM \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \quad (3.13)$$

2.3. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ И ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.14)$$

Оказывается, что за исключением отдельных вырожденных случаев (с которыми мы тоже познакомимся), любая кривая второго порядка представляет собой либо эллипс (в частности, окружность), либо гиперболу, либо параболу. Мы не станем доказывать этот факт в общем виде, а убедимся в нем на примерах. С этой целью достаточно привести уравнение данной кривой к каноническому виду. Если в уравнении (3.14) содержится произведение $x \quad y$ (т. е. $B \neq 0$), то необходимо произвести поворот координатных осей на специально выбранный угол α, что позволит от $x \quad y$ избавиться. Если в уравнении (3.14) произведение отсутствует, то привести его к одному из канонических уравнений (3.8), (3.10) или (3.11) можно с помощью параллельного переноса координатных осей (3.12).

Рассмотрим, прежде всего, как работает поворот координатных осей.

Приведем к каноническому виду уравнение кривой $y = \dfrac{k}{x}$ или $x \cdot y = k$. Повернем исходную систему координат xOy на угол α (пока неизвестный), для чего воспользуемся формулами (3.13):

$$(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)\cdot(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) = k,$$

откуда

$$X^2\cos\alpha\sin\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)X\ Y - Y^2\cos\alpha\sin\alpha = k.$$

Угол поворота координатных осей надо выбрать так, чтобы уравнение кривой в новой системе координат не содержало произведения $X \cdot Y$. Это будет тогда, когда угол поворота α удовлетворяет соотношению

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0,$$
т. е. $\cos 2\alpha = 0$,

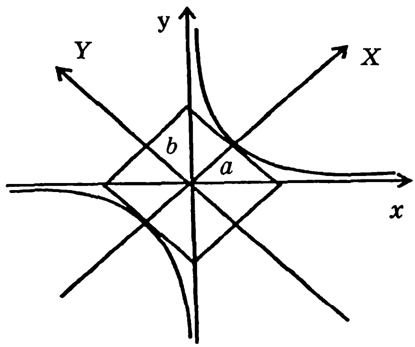


Рис. 53

отсюда

$2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$.

Итак, повернуть систему координат следует на 45°.

В новых координатах получим уравнение

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = k,$$

или, после деления на k обеих частей, уравнение

$$\frac{X^2}{2k} - \frac{Y^2}{2k} = 1.$$

Если $k > 0$, то оно выражает равнобочную гиперболу с полуосями $a = b = \sqrt{2k}$ (рис. 53). Если $k < 0$, то переписав уравнение в виде

$$\frac{Y^2}{-2k} - \frac{X^2}{-2k} = 1,$$

мы вновь имеем гиперболу; ее полуоси $a = b = \sqrt{-2k}$, а осью симметрии является ось OY, т. е. расположена она во втором и четвертом квадрантах.

Теперь будем рассматривать кривые, уравнения которых не содержат произведения координат.

Пример. Привести к каноническому виду и построить кривую

$$4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0.$$

Решение. Для выяснения координат нового начала выделяем полные квадраты обеих переменных:

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) + 61 = 0$$
$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 + 9(y^2 + 6y + 9) - 81 + 61 = 0$$
$$4(x - 2)^2 + 9(y + 3)^2 = 36$$
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1 \quad \textit{эллипс}$$

Теперь ясно, ясно параллельный перенос можно осуществить по формулам

$$\begin{cases} x - 2 = X \\ y + 3 = Y \end{cases}.$$

Новыми осями являются прямые $x = 2$, $y = -3$. Начало координат новой системы находится в точке $O_1(2; -3)$. Уравнение кривой в новых координатах:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Итак, данная кривая – эллипс с полуосями $a = 3$ и $b = 2$ (рис. 54). Можно в дальнейшем не переходить к новым координатам, а пользоваться тем, что найдены координаты центра эллипса (в исходной системе). В общем случае уравнение эллипса после дополнений до полных квадратов имеет вид:

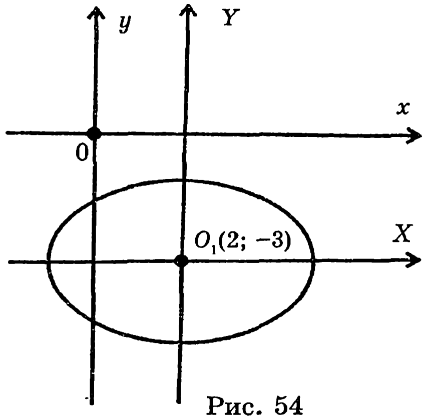


Рис. 54

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

Здесь (α, β) – координаты центра эллипса, а a и b – его полуоси. Аналогичным образом, можно получить следующие факты:

$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ – гипербола с полуосями a и b, действительной осью $y = \beta$ и центром в точке $C(\alpha, \beta)$;

$-\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ – гипербола с полуосями a и b, действительной осью $x = \alpha$ и центром в точке $C(\alpha, \beta)$;

$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$ – парабола с осью симметрии $y = \beta$, вершиной в точке $C(\alpha, \beta)$, ветвями вправо;

$(y-\beta)^2 = -2p(x-\alpha)$ – парабола с осью симметрии $y = \beta$, вершиной в точке $C(\alpha, \beta)$, ветвями влево;

$(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$ – парабола с осью симметрии $x = \alpha$, вершиной в точке $C(\alpha, \beta)$, ветвями вверх;

$(x-\alpha)^2 = -2p(y-\beta)$ – парабола с осью симметрии $x = \alpha$, вершиной в точке $C(\alpha, \beta)$, ветвями вниз.

Пример 1. Привести к каноническому виду и построить кривую

$$y = -x^2 + 4x.$$

Решение. Дополняем до полного квадрата:

$$y = -(x^2 - 4x)$$
$$y = -(x^2 - 4x + 4) + 4$$
$$y - 4 = -(x-2)^2.$$

Получилась парабола с вершиной в точке $C(2; 4)$, с осью симметрии параллельной оси Оу ($x = 2$) и расположенной ветвями вниз. Для удобства находим еще точки пересечения параболы с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4.$$

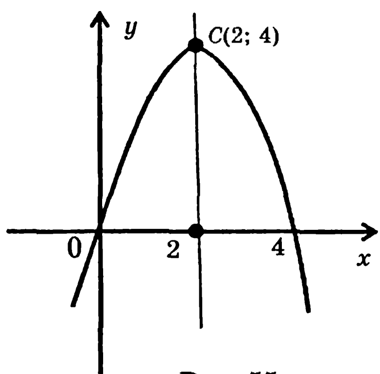


Рис. 55

Результат на рис. 55.

Теперь приведем примеры вырождения кривых второго порядка.

Пример 2. Каков геометрический смысл уравнения $x^2 - 6x - y^2 - 2y + 8 = 0$?

Решение. Дополняя левую часть до полных квадратов, имеем:

$(x^2 - 6x + 9) - 9 - (y^2 + 2y + 1) + 1 + 8 = 0$

т. е. $\qquad (x-3)^2 - (y+1)^2 = 0.$

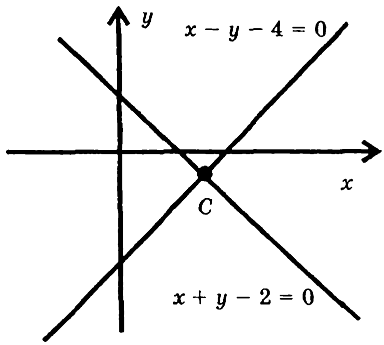
Представление левой части в виде разности квадратов приводит к уравнению

$$(x - 3 + y + 1) \quad (x - 3 - y - 1) = 0$$

или

$$(x + y - 2) \quad (x - y - 4) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно паре линейных уравнений $x + y - 2 = 0$ и $x - y - 4 = 0$. Таким образом, исходное уравнение выражает пару прямых, пересекающихся в точке $C(3; -1)$ (рис. 56).



Пример 3. Выяснить геометрический смысл уравнения

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y + 12 = 0.$$

Решение. Организовав в левой части полные квадраты, имеем:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 12 = 0$$
$$4(x - 1)^2 + (y^2 + 2y)^2 = -4$$
$$\frac{(x-1)^2}{-1} + \frac{(y+2)^2}{-4} = 1$$

Перед нами пустое множество, ибо левая часть уравнения неположительна, а правая равна 1. Уравнение не выражает никакого реального объекта. Можно назвать это множество точек мнимым эллипсом с полуосями $a = i = \sqrt{-1}$ и $b = 2i$

Пример 4. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0 \ ?$$

Решение. После дополнения до полных квадратов получаем:

$$\left(x^2 - 8x + 16\right) - 16 + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 1 + 17 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 = 0.$$

Сумма квадратов может быть равна нулю лишь тогда, когда одновременно равны нулю оба слагаемые $x - 4 = 0$ и $y + 1 = 0$. Это означает, что кривая второго порядка выродилась в одну точку с координатами $(4; -1)$.

§3. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Наряду с широко распространенной декартовой прямоугольной системой координат часто оказывается полезной полярная система. Она представляет собой выбранную на плоскости точку O, названную полюсом, и проходящую через эту точку числовую ось (а точнее, полуось) Op. Положение точки M на плоскости (рис. 57) определяется двумя координатами: $M(r, \varphi)$ полярным радиусом r и полярным углом φ. Полярный радиус – это длина вектора $\overline{OM}$, а полярный угол – угол наклона этого вектора к полярной оси. Для полюса $r = 0$, а φ – произвольно; для всех остальных точек плоскости $r > 0$, а φ имеет бесчисленное множество значений, отличающихся друг от друга

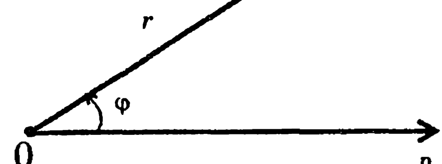


Рис. 57

на $2\pi n$, где n – целое. Значение $\varphi \in (-\pi; \pi]$ будем называть главным. Совместим декартову прямоугольную систему координат с полярной так, чтобы начало координат совпало с полюсом, а полярная ось – с положительной полуосью абсцисс (рис. 58). Это позволяет легко установить связь между декартовыми координатами $(x; y)$ точки M и ее полярными координатами $(r; \varphi)$:

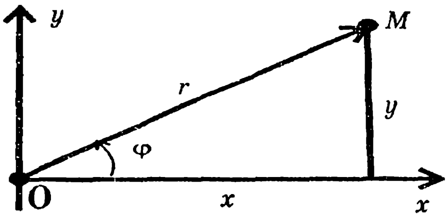


Рис. 58

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{3.15}$$

В полярной системе координат, также как и в декартовой, могут ставиться и решаться задачи:

1) составить уравнение данной кривой, т. е. найти зависимость между координатами r и φ текущей точки;

2) построить кривую по ее уравнению $r = f(\varphi)$.

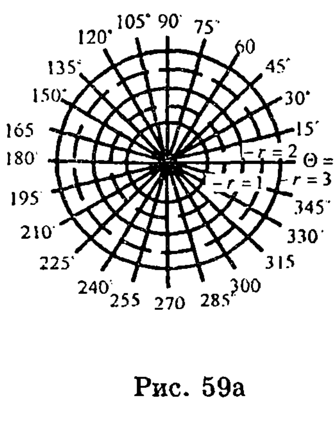


Рис. 59а

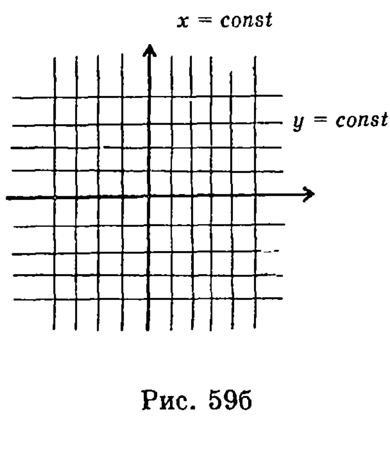


Рис. 59б

Самыми простыми в полярной системе координат являются окружности с центром в полюсе (они, очевидно, имеют уравнения $r = const$) и лучи, из него выходящие ($\varphi = const$). Эти два семейства линий образуют координатную сеть полярной системы (рис. 59 а). Напомним, что в декартовой прямоугольной системе координатную сеть образуют семейства $x = const$ и $y = const$ (рис. 59 б).

Для построения кривой по ее уравнению $r = f(\varphi)$ составляем небольшую таблицу значений (r_k, φ_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, полученные точки наносим на плоскость (откладывая на луче $\varphi = \varphi_k$ отрезок длиной r_k) и соединяем их плавной кривой. Работа упрощается, если функция $f(\varphi)$ – четная. Тогда график искомой линии симметричен относительно полярной оси.

Пример 1. Построить кривую $r = \cos\varphi$.

Решение. Составим таблицу значений функции, например, с помощью калькулятора. Поскольку рассматриваемая функция четная, будем брать ее значения лишь на отрезке $[0; \pi]$, а принимая во внимание требование $r \geq 0$, ограничимся отрезком $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

φ	0°	15°	30°	45°	60°	90°
r	1	0,965	0,865	0,705	0,5	0

Соединив плавной кривой точки с указанными координатами, получим верхнюю часть линии. Ее нижнюю часть построим, отобразив верхнюю зеркально относительно полярной оси (рис. 60).

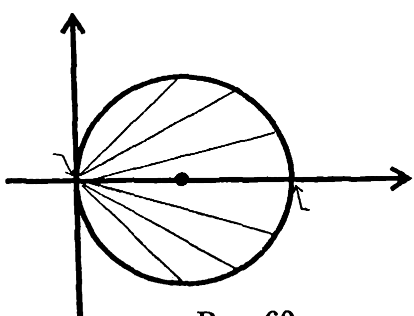


Рис. 60

В результате имеем

окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. В этом легко убедиться, переходя от полярных координат к декартовым:

$$r = \cos\varphi \Rightarrow r = \frac{x}{r} \Rightarrow r^2 = x \Rightarrow x^2 + y^2 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Ниже приводятся изображения и уравнения в полярных координатах некоторых часто встречающихся кривых.

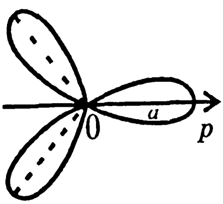


Рис. 61

$r = a\cos 3\varphi$, $a > 0$
трехлепестковая роза

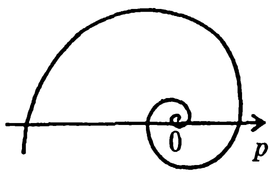


Рис. 62

$r = Ae^{a\varphi}$, $A > 0$
логарифмическая спираль

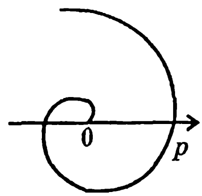


Рис. 63

$r = k\varphi$, $k > 0$
спираль Архимеда

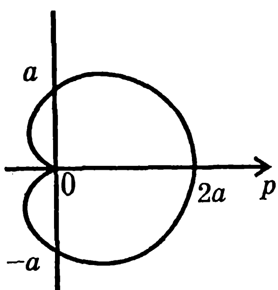


Рис. 64

$r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$
кардиоида

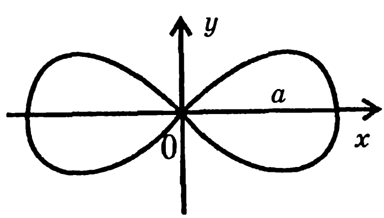


Рис. 65

$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$
лемниската

Для дальнейшего важно умение переходить от уравнения линии в декартовой системе к уравнению этой линии в полярных координатах.

Пример 2. Перейти к полярному уравнению кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0.$$

Решение. Принимая во внимание формулы
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$,

имеем:

$$r^4 = a^2r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \Rightarrow r^4 = a^2\cos 2\varphi \Rightarrow r = a\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

Мы получили уравнение лемнискаты (рис. 65).

Пример 3. Получить полярное уравнение окружности

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Решение.

$$x^2 + y^2 - 2Ry + R^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2Ry$$

$$\Rightarrow r^2 = 2Rr\sin\varphi \Rightarrow r = 2R\sin\varphi\,.$$

Пример 4. Составить полярное уравнение прямой

$$x + y = 4.$$

Решение.

$$x + y = 4 \Rightarrow r\cos\varphi + r\sin\varphi = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Изобразить линии, заданные уравнениями в полярных координатах.

1) $r\cos\varphi = 2$; 2) $r\sin\varphi = 3$; 3) $\operatorname{tg}\varphi = -1$;

4) $r = 4\cos\varphi$; 5) $r = 6\sin\varphi$; 6) $r = \sqrt{5\sin 2\varphi}$;

7) $r = \dfrac{1}{\varphi}$; 8) $r = a|\sin 2\varphi|$; 9) $r = a(1-\cos\varphi)$, $a > 0$.

ОТВЕТЫ: 1) прямая $x = 2$; 2) прямая $y = 3$; 3) прямая $y = -x$; 4) окружность $C(2;\ 0)$, $R = 2$; 5) $C(0;\ 3)$,$R = 3$; 6) лемниската; 7) гиперболическая спираль; 8) четырехлепестковая роза; 9) кардиоида.

§4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. МЕТОД СЕЧЕНИЙ.

Постановка задачи. По данному уравнению поверхности в прямоугольной системе координат выяснить вид этой поверхности и схематически построить ее. В основу решения такой задачи положен метод сечений, суть которого заключается в следующем.Находим последовательно линии пересечения исследуемой поверхности координатными плоскостями и (если необходимо) плоскостями, параллельными координатным. Сопоставление нескольких полученных линий создает представление о форме изучаемой поверхности.

4.1. ЭЛЛИПСОИД

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Определим форму этой поверхности. Линия ее пересечения с плоскостью xOy находится решением системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

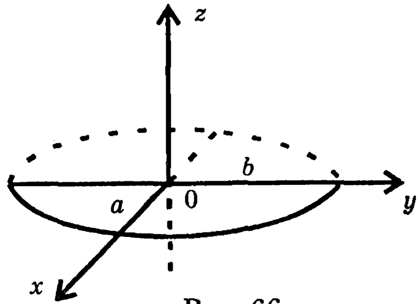


Рис. 66а

и представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с полуосями a и b (рис. 66а). В сечении поверхности другими координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ получаются соответственно эллипсы (рис. 66б и 66в)

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассекая поверхность плоскостями $y = \pm h$, где $0 < h < b$, мы получаем в сечениях линии

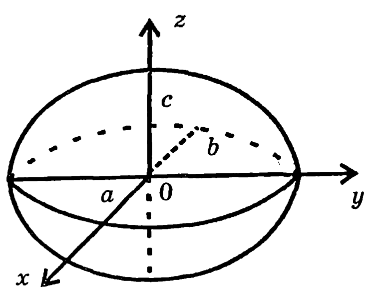


Рис. 66б

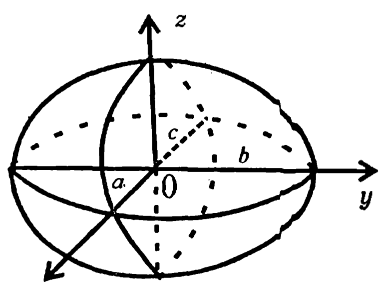


Рис. 66в

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

Т. к. $1-\frac{h^2}{b^2}>0$ то, обозначив $1-\frac{h^2}{b^2}=\alpha^2$, имеем:

$$\frac{x^2}{(\alpha a)^2}+\frac{z^2}{(c\alpha)^2}=1,$$

т. е. во всех сечениях, параллельных плоскости xOz, получаются эллипсы, полуоси которых $a\alpha$ и $c\alpha$ уменьшаются с удалением вдоль оси Oy вправо или влево от начала координат (рис. 66г). Аналогично показывается, что сечения нашей поверхности плоскостями $z = h$ и $x = h$ тоже являются эллипсами. Исследуемая поверхность называется эллипсоидом. Когда две полуоси эллипсоида равны (например, $a = b$), он называется эллипсоидом вращения; если же $a = b = c$, то эллипсоид является сферой

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Методом сечений можно исследовать все другие поверхности второго порядка. Рекомендуем читателю сделать это самостоятельно, а ниже лишь перечислим их и приведем к ним небольшие комментарии.

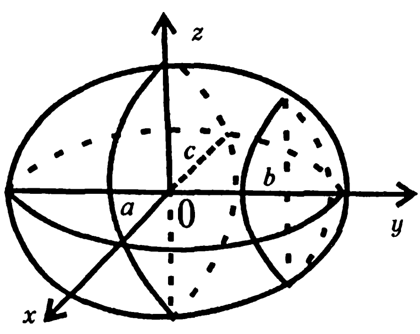


Рис. 66г

4.2. ПАРАБОЛОИДЫ

Эллиптический параболоид

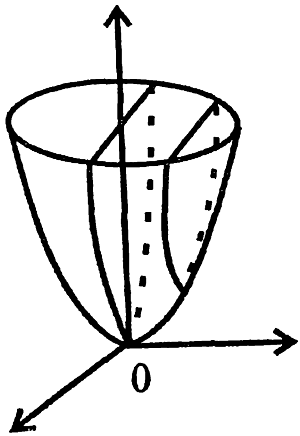


Рис. 67

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p > 0,\ q > 0,$$

(рис. 67).

Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ являются параболами, а сечения горизонтальными плоскостями $z = h$, $0 < h < \infty$ – эллипсами. В случаях, когда эти эллипсы являются окружностями, т. е. $p = q$ поверхность называется параболоидом вращения.

Гиперболический параболоид

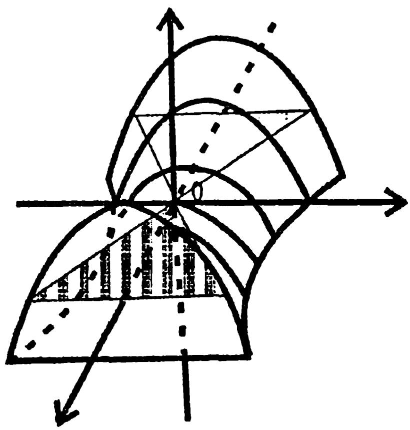


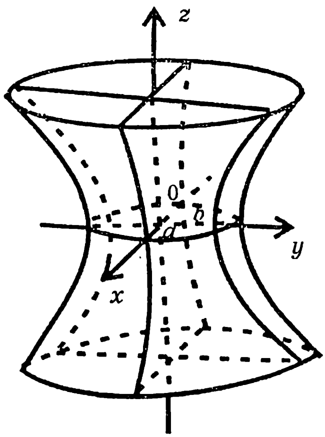
Рис. 68

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p > 0,\ q > 0$$

(рис. 68)

Сечение плоскостью $y = 0$ – парабола, плоскостями $x = h$ – параболы, плоскостями $z = h$ – гиперболы, плоскостью $z = 0$ – две пересекающиеся прямые.

Однополостный гиперболоид

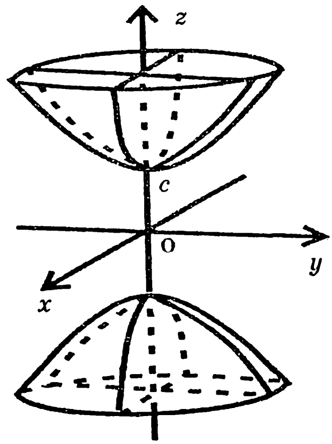


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(рис. 69).

Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ – гиперболы, сечения горизонтальными плоскостями – эллипсы. Если $a = b$, поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения.

Двуполостный гиперболоид



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(рис.70)

Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ – гиперболы, сечения плоскостями $z = \pm h$, где $h > c$ – эллипсы. Если $a = b$, поверхность называется двуполостным гиперболоидом вращения.

4.4. ЦИЛИНДРЫ И КОНУСЫ

Цилиндром называется поверхность, получаемая движением прямой (образующей) параллельно некоторой оси по кривой, называемой направляющей.

Мы будем рассматривать только цилиндры с образующими, параллельными какой-то координатной оси. В зависимости от направляющей цилиндры второго порядка могут быть эллиптическими (в частности, круговыми), гиперболическими и параболическими.

Эллиптический цилиндр

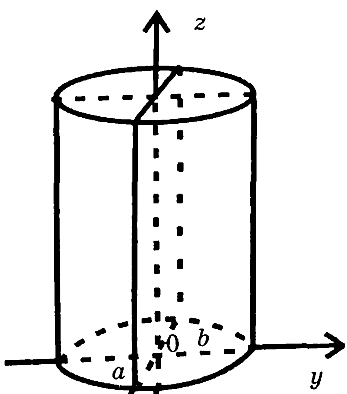


Рис. 71

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(рис. 71).

Гиперболический цилиндр

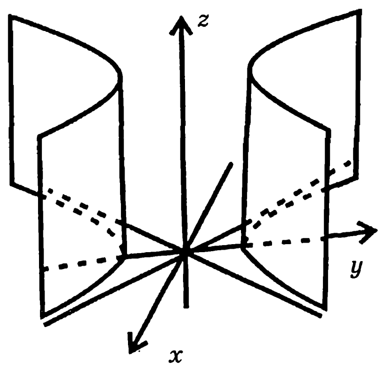


Рис. 72

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

(рис. 72).

Параболический цилиндр

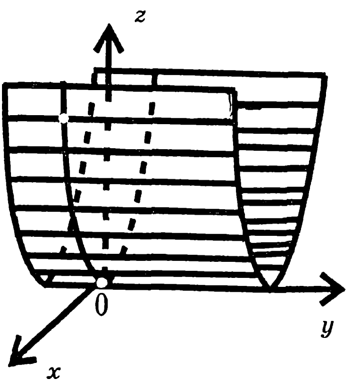


Рис. 73

$x^2 = 2pz$, где $p > 0$,
(рис. 73).

Эллиптический конус

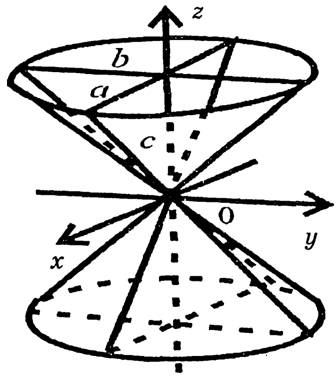


Рис. 74

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
(рис. 74).

Конусом называется поверхность, образованная прямыми (образующими), проходящими через данную точку и пересекающими данную кривую – направляющую конуса.

4.5. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность, образованная движением прямой, называется линейчатой.

Примерами таких поверхностей являются, конечно, цилиндры и конусы. Кроме того, среди поверхностей второго порядка прямолинейными образующими обладают также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид (рис. 75, 76).

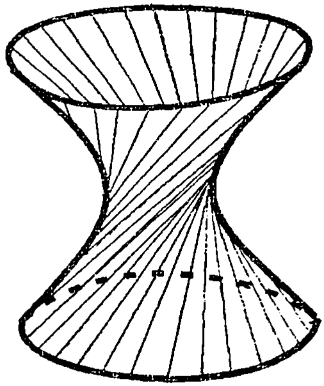


Рис. 75

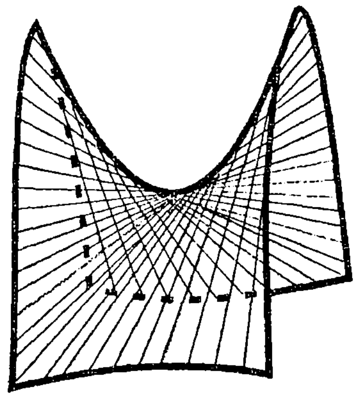


Рис. 76

Наличие прямолинейных образующих используется в строительной технике. Основоположником практического применения этого факта является известный русский инженер Владимир Григорьевич Шухов (1853–1939). В. Г. Шухов осуществил конструкции мачт, башен и опор, составленных из металлических балок, располагающихся по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида вращения. Высокая прочность таких конструкций в соединении с легкостью, невысокой стоимостью изготовления и изяществом обеспечивает широкое распространение их в современном строительстве.

ГЛАВА 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1.1. ФУНКЦИЯ КАК ОТОБРАЖЕНИЕ

Предположим, что E – некоторое множество в пространстве R^n.

Определение. Закон, который каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие вполне определенное число y $\left(y \in R^1\right)$ называется отображением множества E в R^1 или вещественной функцией, определенной на E.

Чаще всего мы будем обозначать функцию буквой f (но также и другими буквами: φ, ψ, h, g, ...). Запись $y = f(x)$ или $x \xrightarrow{f} y$ указывает как раз на то, что функция f точке $x \in E$ ставит в соответствие число y. Наиболее хорошо читатель знаком с функциями, определенными на множествах из R^1, иначе говоря, с функциями одной переменной. Однако в практической жизни мы значительно чаще сталкиваемся с функциями, определенными на множествах из R^n, т. е. с функциями от нескольких переменных. Например, количество тепла Q, выделяемое в участке проводника, пропорционально времени прохождения тока t, сопротивлению участка R и квадрату силы тока I : $Q = I^2Rt$. Мы имеем здесь дело с функцией трех переменных I, R, t, т. е. с отображением из R^3 в R^1.

1.2. ГРАФИК ФУНКЦИИ

При $n = 1$ и $n = 2$ возможно геометрическое изображение функций с помощью графика.

Случай $n = 1$. Пусть f – отображение множества $E \subset R^1$ в R^1.

Определение. Графиком функции f называется множество точек пространства R^2 с координатами $(x,\ f(x))$, $x \in E$. Обычно график функции одной переменной представляет собой некоторую линию на плоскости (рис. 77). Однако не всякая линия на плоскости является графиком некоторой функции. Исходя из определения функции, согласно которому для каждой точки $x \in E$ существует единственное значение y, можно заключить следующее: заданная на плоскости линия является графиком некоторой функции тогда и только тогда, когда каждая прямая, параллельная оси OY, пересекает ее не более чем в одной точке. Например, линия L, изображенная на рис. 78, не является графиком никакой функции.

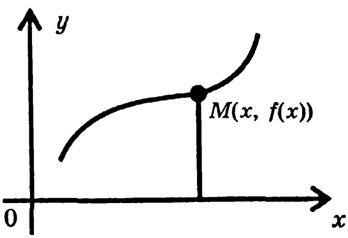


Рис. 77

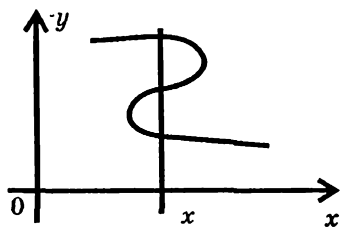


Рис. 78

Случай $n = 2$. f – отображение $E \subset R^2$ в R^1 : $z = f(x,\ y)$.

Определение. Графиком функции f называется множество точек пространства R^3 с координатами $(x,\ y,\ f(x,\ y))$.

График функции двух переменных обычно представляет собой некоторую поверхность (рис. 79).

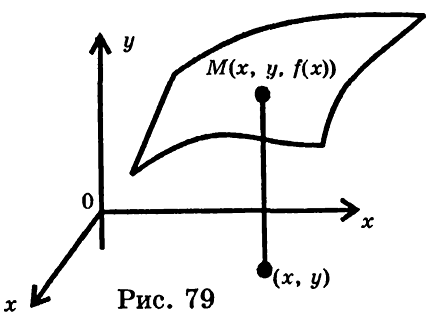


Рис. 79

1.3. ПОНЯТИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $u = \varphi(x)$ – функция, определенная на множестве $E \subset R^n$ со значениями на множестве $F \subset R^1$, а $y = f(u)$ – функция, определенная на F. В таком случае каждому $x \in E$ можно поставить в соответствие вещественное число y по закону $y = f[\varphi(x)]$. Тем самым на множестве E определена функция, которую мы будем обозначать $f \circ \varphi$ и называть сложной функцией или композицией функций f и φ ; при этом функцию φ будем называть внутренней, а функцию f внешней.

Пример. $y = \lg(1 - x^2)$ – сложная функция, $u = 1 - x^2$ – внутренняя функция, $y = \lg u$ – внешняя.

1.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Следующие функции относят обычно к числу основных элементарных:

1) степенная $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R^1$ – любое;

2) показательная $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$;.

Определение. Элементарными функциями называются все функции, которые можно составить из основных элементарных с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций.

Например, элементарными являются функции

$$y = \ln(\sin 7x),\ y = 4\mathrm{arctg}^5 x + \cos(x^3 + 1),\ y = \left(\frac{e^x + x^2}{x^4 + 5^x}\right)^7.$$

1.5. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множество E ($E \subset R^1$), а ее значения заполняют множество F. Если каждому $y \in F$ можно поставить в соответствие единственное значение $x \in E$ так, что $f(x) = y$, то говорят, что на множестве F определена функция $x = f^{-1}(y)$, которая называется обратной для $y = f(x)$.

Ясно, что, если $x = f^{-1}(y)$ – функция обратная для $y = f(x)$, то сама функция $y = f(x)$ является обратной для $x = f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются взаимно обратными.

Очевидно, что $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

Примерами взаимно обратных могут служить следующие пары функций:

1) $y = x^2$ на отрезке $[2; 3]$ и $x = \sqrt{y}$ на $[4; 9]$,

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ на всей числовой оси и $x = \log_a y$ на $(0; +\infty)$;

3) $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x = \arcsin y$ на $[-1; 1]$,

$y = \cos x$ на $[0; \pi]$ и $x = \arccos y$ на $[-1; 1]$,

$y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \operatorname{arctg} y$ на $(-\infty; +\infty)$,

$y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$ и $x = \operatorname{arcctg} y$ на $(-\infty; +\infty)$.

§ 2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

2.1. ПОНЯТИЕ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА. ОБЛАСТЬ, ГРАНИЦА ОБЛАСТИ

Пусть a – произвольная точка в R^n.

Определение. Дельта-окрестностью точки a (или открытым шаром радиуса δ с центром в точке a) называется множество точек из R^n, удаленных от точки a на расстояние меньшее, чем δ. Коротко это определение можно записать так:

$$U_\delta(a) = \{x \in R^n : \rho(x, a) < \delta\} \quad \rho(x, a) = \|x - a\|.$$

В случае пространства R^1 – окрестность точки а представляет собой интервал $(a - \delta,\ a + \delta)$, в случае R^2 – это внутренность круга радиуса δ с центром в точке a, в случае R^3 – внутренность шара (рис. 80, 81, 82).

В случае пространства R^1 мы будем иногда рассматривать в качестве точки a бесконечно удаленную точку $+\infty$ (или $-\infty$). Условимся окрестностью точки $+\infty$ называть любой интервал $(b, +\infty)$, а окрестностью точки $-\infty$ интервал $(-\infty; -b)$, где b – произвольное положительное число.

Пусть E – произвольное множество в R^n.

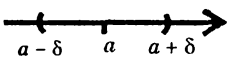


Рис. 80

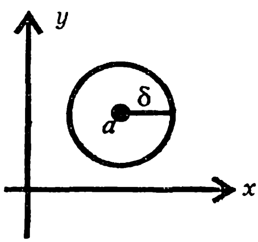


Рис. 81

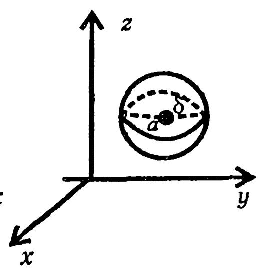


Рис. 82

Определение. Точка $a \in R^n$ называется предельной точкой множества E, если в любой сколь угодно малой окрестности точки a содержится бесконечное множество точек из E.

Примеры. 1. $E = (\alpha, \beta) \subset R^1$. Легко видеть, что предельными являются все точки отрезка $[\alpha, \beta]$.

2. E – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $\{a < x < b, c < y < d)$ (рис. 83).

Предельными являются точки, лежащие внутри прямоугольника, и все точки на его сторонах.

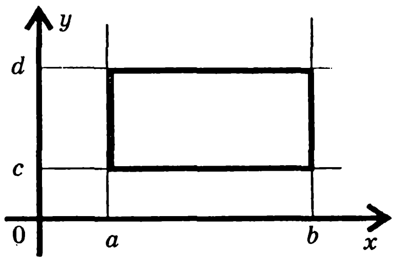


Рис. 83

3 $E = U_\delta(a) \subset R^n$

Предельные для множества E – суть точки самого этого множества и все точки сферы $\rho(x, a) = \delta$.

4. $E = N$ – множество натуральных чисел. Единственной предельной точкой этого множества является $+\infty$.

В самом деле, тот факт, что $+\infty$ является предельной точкой множества, следует из того, что какое бы большое вещественное число b мы ни взяли, в интервале $(b, +\infty)$ имеется бесчисленное множество натуральных чисел. Точки самого множества N предельными не являются, ибо, окружив каждую из них окрестностью радиуса, например $1/2$, мы увидим, что в этой окрестности нет других точек из N.

Приведенные примеры показывают, в частности, что предельные точки множества могут принадлежать этому множеству, а могут и не принадлежать.

Множество точек E называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Например, замкнутыми являются множество всех точек отрезка $[\alpha, \beta]$, множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям

$$a \le x \le b,\ \ c \le y \le d,$$

множество точек $x \in R^n$, удовлетворяющих ограничению

$$\rho(x,\ a) \le \delta,$$

где a – фиксированная точка в R^n, а δ – любое положительное число.

Точка $x_0 \in E$ называется внутренней, если существует окрестность этой точки $U_\delta(x_0)$, целиком содержащаяся в E. Множество, состоящее только из внутренних точек, называется открытым.

Областью называется открытое множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, состоящей из точек этого множества (свойство связности).

Граничными точками области называются точки, не принадлежащие этой области, но являющиеся для нее предельными. Совокупность всех граничных точек области образует ее границу. Если к области присоединить границу, то полученное множество называется замкнутой областью. Так, множество точек, расположенных внутри прямоугольника (рис. 83), представляет собой область (оно открыто и связно), точки, лежащие на сторонах прямоугольника, составляют его границу, а совокупность всех внутренних и граничных точек представляет собой замкнутый прямоугольник. Еще один пример получим, если к открытому шару $U_\delta(a)$ присоединим границу – сферу

$$S_\delta(a) = \{x \in R^n \quad \rho(x,\ a) = \delta\},$$

в результате чего образуется замкнутый шар

$$K_\delta(a) = \{x \in R^n : \rho(x,\ a) \le \delta\}.$$

Множество $E \subset R^n$ (в частности, область) называется ограниченным, если существует шар $U_R(0)$, $R < \infty$, такой, что $E \subset U_R(0)$.

Наряду с понятием окрестности важную роль играет еще одно понятие.

Определение. Проколотой δ окрестностью точки a называется ее δ— окрестность, из которой удалена сама точка a. Если $U_\delta(a)$ - δ — окрестность точки a, то проколотая δ-окрестность обозначается $\dot{U}_\delta(a)$ Таким образом,

$$\dot{U}_\delta(a) = \{x \in R^n : \rho(x, a) < \delta, \ x \neq a\}.$$

Геометрическими иллюстрациями проколотой δ-окрестности в случаях пространств R^1, R^2, R^3 могут служить фигуры, изображенные на рисунках 80, 81, 82, если удалить соответственно середину интервала, центр круга, центр шара.

2.2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

Рассмотрим функцию $\alpha(x) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенную на множестве $E \subset R^n$. Пусть a — предельная точка множества E. Термин «бесконечно малая функция при x, стремящемся к a», призван выразить то обстоятельство, что когда точка x приближается к точке a, значения функции становятся как угодно малыми по абсолютной величине. Можно добиться того, что значения функции $|\alpha(x)|$ будут меньше сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если только точки x будут попадать в очень малую окрестность точки a.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или в точке a), если для всякого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $\dot{U}_\delta(a)$, что для всех $x \in E \cap \dot{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. На рис. 84 мы видим, что, когда x приближается к a, значения функции уменьшаются по абсолютной величине, принимая значения, меньшие любого положительного числа.

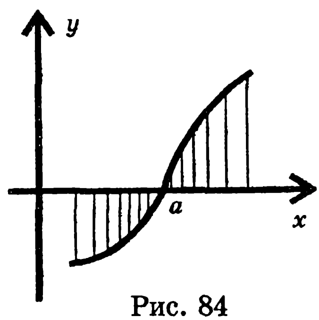


Рис. 84

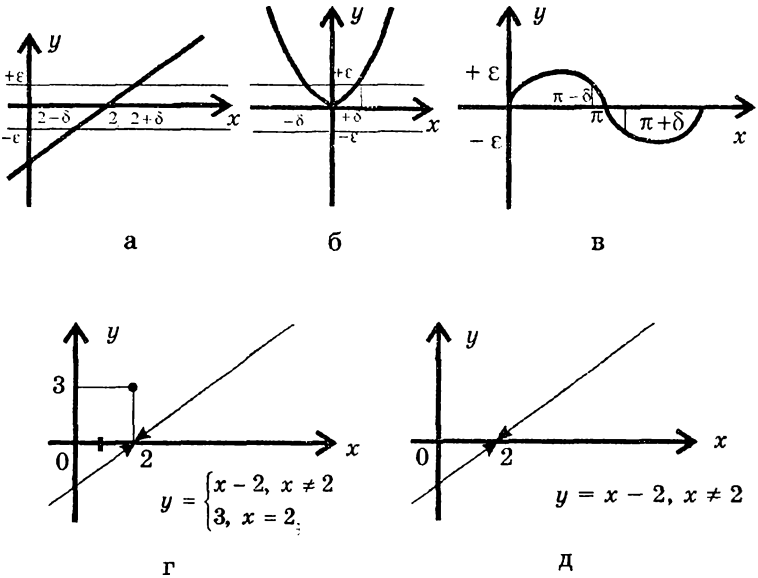


Рис. 85

Примеры.

1. Функция $y = x - 2$ является б.м.ф. в точке $a = 2$ (рис. 85а).

2. Функция $y = x^2$ является б.м.ф. в точке $a = 0$ (рис. 85б).

3. Функция $y = \sin x$ является б.м.ф. в точке $a = \pi$ (рис. 85в).

На приведенных рисунках легко увидеть, что если взять узкую полосу вдоль оси $Ox: -\varepsilon < y < \varepsilon$, то на оси абсцисс можно указать интервал $(a - \delta,\ a + \delta)$ такой, что $\forall x$ из этого интервала ординаты графика окажутся внутри заданной полосы.

В более сложных примерах б.м. функций значение функции в точке a может быть не равным нулю или вообще не определено (рис. 85г и 85д.).

Обратите внимание на то, что на рисунках 85а, 85г и 85д изображены графики разных функций хотя бы потому, что в случае 85а $y(2) = 0$, в 85г $y(2) = 3$, а в 85д $y(2)$ вообще не определено. Тем не менее, все эти функции являются б.м.ф. в точке $a = 2$.

2.3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЯХ

Все функции, о которых ниже будет идти речь, предполагаются определенными в некоторой области $E \subset R^n$, для которой точка a – предельная.

Теорема 1. Сумма двух б.м.ф. (при $x \to a$) является б.м.ф. (при $x \to a$).

Дано: $\alpha_1(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$), $\alpha_2(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$). Доказать, что $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое положительное число. Мы должны указать такую окрестность точки a, где $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| < \varepsilon$. Так как $\alpha_1(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$), то $\exists \dot{U}_{\delta_1}(a)$ такая, что

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in \dot{U}_{\delta_1}(a) \qquad (4.1)$$

Так как $\alpha_2(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$), то $\exists \dot{U}_{\delta_2}(a)$ такая, что

$$|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in \dot{U}_{\delta_2}(a) \qquad (4.2)$$

Окрестности $\dot{U}_{\delta_1}(a)$ и $\dot{U}_{\delta_2}(a)$ представляют собой концентрические шары.

Если мы выберем наименьший из них (обозначим его $\dot{U}_{\delta}(a)$) то в $\dot{U}_{\delta}(a)$ выполняются и неравенство (4.1), и неравенство (4.2).

Тогда

$$|\alpha_1(x)+\alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in \dot{U}_\delta(a).$$

Это и означает, что функция $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ является б.м.ф. (при $x \to a$).

Теорема остается справедливой, если взять k функций. Рекомендуем читателю провести доказательство в этом случае.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, называется ограниченной, если существует число $M > 0$ такое, что

$$|f(x)| < M \quad \forall x \in E.$$

Примеры. 1) Функция $y = \sin x$ ограничена на всей действительной оси ($M = 1$).

2) Функция $y = \operatorname{tg} x$ ограничена на множестве $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ($M = 1$), но не ограничена на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) Функция $y = \frac{1}{x}$ на множестве $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$ ограничена ($\delta > 0$), а на множестве $(-\infty, -0) \cup (0, +\infty)$ не ограничена.

Теорема 2. Произведение б.м.ф. $\alpha(x)$ (при $x \to a$) на ограниченную функцию $f(x)$ есть б.м.ф. (при $x \to a$).

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ ограниченная функция (на множестве E), то $\exists M > 0$ такое, что $|f(x)| < M$, $\forall x \in E$. Так как $\alpha(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$), то $\exists \dot{U}_\delta(a)$ такая, что

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}, \forall x \in \dot{U}_\delta(a).$$

Теперь ясно, что

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)|\cdot|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a).$$

Чтобы понять, что доказательство закончено, вспомните определение б.м.ф.

Теорема 3. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$) и если $\forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ функция $\gamma(x)$ удовлетворяет неравенству $\alpha(x) \le \gamma(x) \le \beta(x)$, то $\gamma(x)$ тоже б.м.ф. (при $x \to a$). Рекомендуем читателю доказать эту теорему самостоятельно.

2.4. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ (Б.Б.Ф.)

Определение. Функция $\Phi(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\Phi(x) \ne 0$ в некоторой окрестности точки a и $\dfrac{1}{\Phi(x)}$ является б.м.ф. (при $x \to a$). Тот факт, что $\Phi(x)$ – б.б.ф (при $x \to a$), записывается так: $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x) = \infty$; причем, если $\Phi(x) > 0$ в окрестности точки a, то следует писать $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x) = +\infty$, а если $\Phi(x) < 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x) = -\infty$.

Примеры

1) Функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x \in R^1$, $x \ne 1$ является б.б.ф. при $x \to 1$. Более точно $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ (см. рис. 86). Это очевидно, так как $\dfrac{1}{\Phi(x)} = (x-1)^2$ – есть б.м.ф. при $x \to 1$.

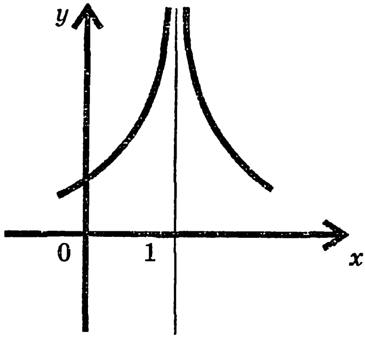


Рис. 86

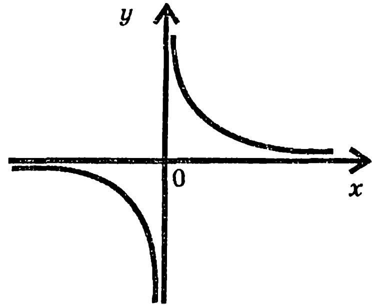


Рис. 87

2) Функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{x} (x \neq 0)$ является б.б.ф. при $x \to 0$,

причем $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \text{(слева)}}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, а $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \text{(справа)}}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (рис. 87).

Поскольку мы определили б.б.ф. как функцию, полученную делением единицы на б.м.ф., то отсюда вытекает свойство б.б.ф., по существу оправдывающее ее название. Каким бы большим ни было число $K > 0$, всегда можно подобрать настолько малую окрестность $\dot{U}_\delta(a)$ точки a (можно так близко подойти к точке a), что $\forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ будет выполняться неравенство $|\Phi(x)| > K$.

Действительно, так как функция $\dfrac{1}{\Phi(x)}$ является б.м.ф. (при $x \to a$), то $\exists \dot{U}_\delta(a)$, где $\left|\dfrac{1}{\Phi(x)}\right| < \dfrac{1}{K}$, но тогда в той же окрестности $|\Phi(x)| > K$, ч.т.д. Этот факт очень хорошо иллюстрируется геометрически в случае функции одной переменной.

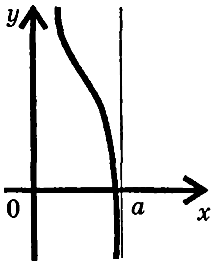


Рис. 88

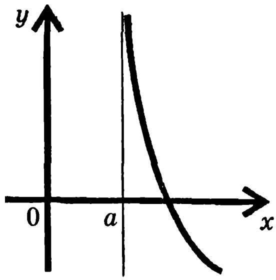


Рис. 89

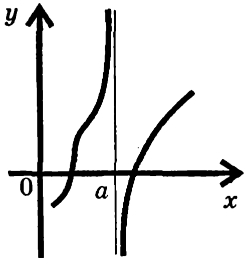


Рис. 90

То обстоятельство, что $f(x)$ – б.б.ф при $x \to a$, геометрически означает, что график функции $f(x)$ «взвивается» вверх (на $+\infty$) или резко уходит вниз (на $-\infty$) при подходе точки x к точке a с одной стороны или с обеих сторон. В этом случае прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика. На рис. 88 прямая является левосторонней асимптотой, на рис. 89 – правосторонней, а на рис. 90 – двусторонней.

В заключение этого параграфа отметим еще два важных факта.

Теорема 4. Если при $x \to a$ $\Phi(x) \to +\infty$ и $G(x) \to +\infty$, то $\Phi(x) + G(x) \to +\infty$.

Аналогичный результат имеет место, если обе функции стремятся к $-\infty$.

Теорема 5. Если $\Phi(x)$ – б.б.ф. (при $x \to a$), а функция $f(x)$ удовлетворяет условию $|f(x)| \ge m > 0$ в окрестности точки a, то $f(x)\Phi(x)$ – б.б.ф. (при $x \to a$). Рекомендуем читателю доказать эти теоремы самостоятельно.

§3. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Будем предполагать, что все рассматриваемые ниже функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и т. д. определены в области $E \subset R^n$ и что точка a является предельной для E.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$, при $x \to a$, если $f(x)$ представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$). Кратко: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$).

Эта запись согласуется с записью $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ для б.м.ф.

Из данного определения вытекает:

Следствие. Если $f(x) \equiv C$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$.

Рекомендуем читателю, пользуясь определением предела, доказать, что если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Теорема 1 (о пределе суммы). Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, то существует $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + \varphi(x)]$ и справедливо равенство $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + \varphi(x)] = A + B$.

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф (при $x \to a$). Так как $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, то $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\beta(x)$ – б.м.ф. (при $x \to a$). Тогда $f(x) + \varphi(x) = A + B + [\alpha(x) + \beta(x)]$. Слагаемое, стоящее в квадратных скобках, представляет собой б.м.ф. при $x \to a$

на основании т. 1 п. 2.3. Таким образом, функция $f(x)+\varphi(x)$ отличается от $A+B$ на б.м.ф. при $x \to a$. По определению это означает, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)]=A+B$.

Теорема 2 (о пределе произведения).

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, то существует $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]$ и справедливо равенство $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=A\cdot B$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x\to a$. Так как $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, то $\varphi(x)=B+\beta(x)$, где $\beta(x)$ – б.м.ф. (при $x\to a$).

Тогда

$$f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B+[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)].$$

Каждое слагаемое в квадратных скобках представляет собой б.м.ф. при $x\to a$ на основании теоремы 2 п. 2.3; значит, и все выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой б.м.ф. при $x\to a$ (теорема 1, п. 2.3).

Таким образом, функция $f(x)\varphi(x)$ отличается от числа $A\cdot B$ на б.м.ф. при $x\to a$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=A\cdot B$.

Теорема 3 (о пределе частного). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B\neq 0$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и справедливо равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Для случая функций одной переменной с доказательством теоремы можно ознакомиться в (1, с. 44). Такое же доказательство проходит и в общем случае.

Теорема 4 (о позитивности предела). Пусть в каждой окрестности точки a имеется точка $x \neq a$, где $f(x) \geq 0$. Тогда из $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ следует, что $A \geq 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > 0$, то $\exists U_\delta(a) : f(x) > 0$ $\forall x \in \dot{U}_\delta(a)$.

Теорема 5 (о пределе промежуточной функции).

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$ и если $\forall x$ из некоторой окрестности точки a выполняется неравенство

$$f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x), \tag{4.3}$$

то $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство. Вычитая из обеих частей каждого из неравенств (4.3) число A, получим

$$f(x) - A \leq g(x) - A \leq \varphi(x) - A \tag{4.4}$$

Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $f(x) - A = \alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$. Так как $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$, то $\varphi(x) - A = \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$. Если мы теперь обозначим через $g(x) - A$ через $\gamma(x)$, то из (4.4) получим:

$$\alpha(x) \leq \gamma(x) \leq \beta(x) \tag{4.5}$$

Из теоремы 3 п. 2.3 следует, что $\gamma(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$. Таким образом, функция $g(x)$ отличается от числа A на б.м.ф. Значит, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

При изучении всего курса математического анализа приходится вычислять пределы различных функций. Сейчас мы познакомимся на примерах с некоторыми простейшими приемами нахождения пределов.

Пример 1. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+5x+2}{x^2+4}$

Решение. Используя последовательно теоремы о пределах 3, 1 и 2, получаем:

$$A = \frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+5x+2\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+4\right)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^3 + 5\lim\limits_{x\to 2} x + 2}{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 + 4} =$$

$$= \frac{2^3+5\cdot 2+2}{2^2+4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

В дальнейшем мы не будем писать столь подробно. В случаях, когда предел знаменателя отличен от нуля, а предел числителя конечен, можно непосредственно переходить к пределу, подсчитывая результат.

Пример 2. $A = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4+2x+9}{x+3} = 16$.

Рассмотрим теперь случай, когда числитель стремится к конечному пределу, отличному от нуля (или когда числитель просто ограничен), а знаменатель стремится к нулю.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+5}{(x-4)^2}$.

Решение. Выражение, стоящее под знаком предела, представим как произведение множителей x^2+5 и $\dfrac{1}{(x-4)^2}$. Первый из них – ограниченная функция (так как имеет конечный предел, равный 21); второй множитель представляет собой бесконечно большую функцию при $x \to 4$. Но произведение бесконечно большой функции на ограниченную есть б.б. функция (теорема 5 п. 2.4).

Поэтому

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+5}{(x-4)^2}=\lim_{x\to 4}(x^2+5)\cdot\frac{1}{(x-4)^2}=\infty.$$

Итак, если числитель – ограниченная функция в окрестности некоторой точки a, а предел знаменателя при $x\to a$ равен 0, то в ответе всегда будем иметь ∞.

Значительно сложнее ситуация, когда одновременно стремятся к нулю и числитель и знаменатель дроби. В таких случаях говорят, что мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чему равен предел такого отношения заранее сказать невозможно. Предел отношения двух б.м.ф. может оказаться и нулем и любым другим числом и бесконечностью. Наша задача – вычислить предел в каждом конкретном примере, раскрыв тем самым имеющуюся неопределенность. Сейчас мы покажем некоторые приемы раскрытия неопределенностей. Все они объединены одной важной идеей. Если при $x\to a$ мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, то и в числителе, и в знаменателе «запрятан» «опасный» множитель $(x-a)$. Его надо выделить в числителе, знаменателе и сократить до того, как перейдем к пределу.

Пример 4. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-8x+15}$.

Решение. Множитель $(x-5)$ в числителе обнаруживается очень легко, разложением на множители разности квадратов; в знаменателе мы разлагаем на линейные множители квадратный трехчлен. Тогда получаем

$$A=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-3)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)}{(x-3)}=\frac{10}{2}=5.$$

Пример 5. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$.

Решение. «Опасный» множитель $x - 2$ в знаменателе обнаруживается разложением разности кубов. Для того чтобы выделить такой множитель в числителе, умножим числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$ – выражение, сопряженное числителю. Тогда имеем

$$A = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x^2+2x+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x^2+2x+4\right)} = \frac{1}{4\cdot 12} = \frac{1}{48}.$$

Пример 6. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$.

Решение. Здесь нам придется умножать дробь и на выражение, сопряженное числителю, и на выражение, сопряженное знаменателю:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{3}{2}.$$

Пример 7. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+5x^3+2x-8}{x^3+6x^2-7}$.

Решение. Каждый из многочленов в числителе и знаменателе дроби делится на $x - 1$, ибо при $x = 1$ он обращается в ноль. Для выделения этого множителя используем метод непосредственного деления «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+5x^3+2x-8 & x-1 \\ \hline
-\,x^4-x^3 & x^3+6x^2+6x+8 \\ \cline{1-1}
\quad 6x^3+2x & \\
\quad -\,6x^3-6x^2 & \\ \cline{1-1}
\quad 6x^2+2x & \\
\quad -\,6x^2-6x & \\ \cline{1-1}
\qquad 8x-8 & \\
\qquad 8x-8 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^3+6x^2-7 & x-1 \\ \hline
-\,x^3-x^2 & x^2+7x+7 \\ \cline{1-1}
\quad 7x^2-7 & \\
\quad -\,7x^2-7x & \\ \cline{1-1}
\qquad 7x-7 & \\
\qquad -\,7x-7 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Теперь мы имеем:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+6x^2+6x+8)}{(x-1)(x^2+7x+7)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+6x^2+6x+8}{x^2+7x+7}=$$

$$=\frac{21}{15}=\frac{7}{5}.$$

Пример 8. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

Решение. Несложно проверить, что $x=2$ является корнем числителя и корнем знаменателя; разделив «уголком» на $x-2$ числитель и знаменатель (проделайте это самостоятельно), мы получим $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$. Интересно то, что перед нами снова неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Это говорит о том, что и числитель, и знаменатель снова содержат «опасный» множитель. Разлагая соответствующие квадратные трехчлены на множители, имеем $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}=\dfrac{1}{3}$.

Другой важный вид неопределенностей (будем обозначать его $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$) представляет собой отношение б.б. функций. Здесь часто приходится иметь дело с отношением многочленов.

Пример 9. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2}{5x^4 + 7x^3 + 2x + 3}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на самую высокую степень аргумента (на x^4):

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}}{5 + \dfrac{7}{x} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}}.$$

Все слагаемые числителя и знаменателя, кроме первых, стремятся к нулю, ибо представляют собой б.м. функции при $x \to \infty$. Поэтому в пределе имеем $A = \dfrac{3}{5}$.

Пример 10. Найти $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 + 3x^4 - 2}{3x^4 + 4x^2 + 1}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^4, имеем:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 3 - \dfrac{2}{x^4}}{3 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}} = \infty.$$

Пример 11. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 - 5x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 5}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x^4, получаем $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{4}{x^4}}{2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^4}} = 0.$

Проанализировав результаты последних трех примеров, приходим в выводу, что при $x \to \infty$ существенную роль играет старшая степень многочлена; именно она характеризует скорость ухода на ∞. Поэтому предел отношения многочленов одинаковых степеней (при $x \to \infty$) всегда равен отношению их старших коэффициентов. Если степень многочлена в числителе выше степени многочлена в знаменателе, то в пределе получается ∞ (как в примере 10). Если же числитель уступает знаменателю в скорости роста на бесконечности, то в пределе имеем ноль (как в примере 11).

Мы еще не раз вернемся к вычислению пределов в последующих главах.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{\left(x^2-x-2\right)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)^2}{x^2+2x-15}$; 11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$; $(x>0,\ a>0)$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+4x^3+3}{7x^5-4}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^5+7x+8}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^7-2}{4x^5+7x^6+1}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3x^4}{9x^4+5}$; 19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+3n-2}{6n^5+2n+3}$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2}}$.

Замечание. В примерах 13 и 14 мы имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. В таких случаях рекомендуется приведение дробей к общему знаменателю.

2-Й УРОВЕНЬ

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+7x+3}}$; 22) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$;

23) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; 24) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

25) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; 26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$; 28) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

29) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ 30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

31) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2-(3+n)^2}{(3-n)^2+(3+n)^2}$; 32) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

Ответы: 1) -3. 2) 5. 3) -7. 4) 49. 5) 0. 6) $-\infty$. 7) $\frac{4}{3}$.

8) $\frac{1}{4}$. 9) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 10) 2. 11) $2\sqrt{a}$. 12) 1. 13) $\frac{1}{2}$. 14) $-\frac{1}{4}$.

15) $\frac{4}{7}$. 16) 0. 17) ∞. 18) $-\frac{1}{3}$. 19) $\frac{2}{3}$. 20) 0. 21) 5. 22) 2.

23) $\frac{1}{3}$. 24) $-\frac{1}{16}$. 25) $\frac{12}{5}$. 26) $\frac{2}{3}$ 27) $\frac{1}{4}$. 28) $-\frac{4}{3}$.

29) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 30) 1. 31) 0. 32) $\frac{1}{6}$.

§4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. АСИМПТОТЫ

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. По определению это значит, что $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \infty$. Функция $\alpha(x)$ показывает в каждой точке разность ординат функции $y = f(x)$ и горизонтальной прямой. Тот факт, что $\alpha(x)$ является б.м.ф. при $x \to +\infty$, говорит о том, что при $x \to +\infty$ график функции неограниченно приближается к прямой $y = A$.

В таких случаях прямую $y = A$ будем называть горизонтальной правосторонней асимптотой (рис. 91).

Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то прямая $y = A$ – левосторонняя горизонтальная асимптота; если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, то $y = A$ – двусторонняя асимптота (рис. 92).

Обобщим теперь понятие асимптоты.

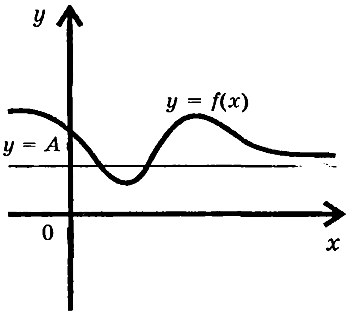


Рис. 91

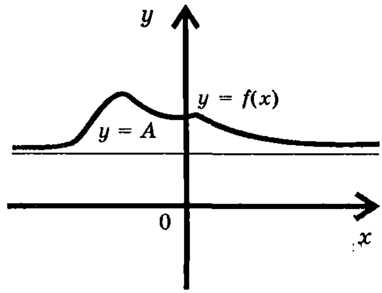


Рис. 92

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $f(x)$, если разность $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$ является б.м.ф. при $x \to \infty$. Геометрический смысл этого понятия ясен из рис. 93.

Теорема. Пусть прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $f(x)$. Тогда

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \tag{4.6}$$

Доказательство. Так как $y = kx + b$ – асимптота, то

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x) \tag{4.7}$$

где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \infty$. Отсюда

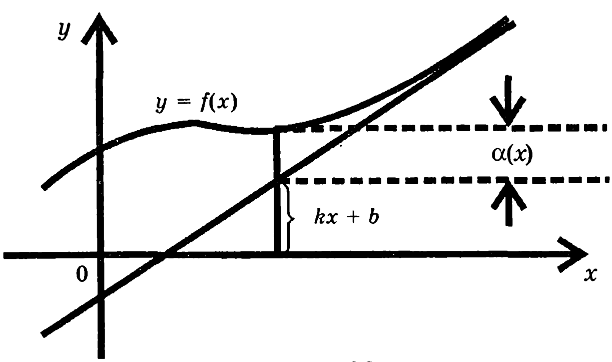


Рис. 93

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to \infty$, получим $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Возвращаясь к соотношению (4.7), запишем его в виде $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ и снова переходя к пределу, получим $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b$. Теорема доказана. Сформулируем обратное утверждение.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$. Формулы (4.6) служат удобным средством для практического нахождения асимптот.

Пример 1. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Решение. Вычисляем параметры k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - 1\ x\right) =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, так как скорость стремления к бесконечности числителя уступает скорости роста знаменателя. Итак, асимптота имеет уравнение $y = x$.

Замечание. Нетрудно видеть, что в рассмотренном примере значения параметров k и b не зависят от того, стремится ли x к $+\infty$ или $-\infty$. В таких случаях говорят, что асимптота является двусторонней.

Пример 2. Найти невертикальную асимптоту кривой $y = 2^x$.

Решение. Если $x \to +\infty$, мы имеем $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{x} = +\infty$, так как показательная функция растет значительно быстрее степенной (этот факт будет строго доказан в главе 3). Тот факт, что $k = +\infty$ говорит о том, что правосторонней асимптоты не существует. Если же $x \to -\infty$, то ;

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x \cdot 2^{-x}} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x \to -\infty} 2^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2^{-x}} = 0$$

Таким образом, уравнение левосторонней асимптоты $y = 0$, т. е. левосторонней асимптотой является ось абсцисс.

§5. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

5.1. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Пусть сначала $x > 0$.

Докажем прежде всего следующее неравенство:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

С этой целью в круге единичного радиуса (рис. 94) рассмотрим сектор AOB и два треугольника AOB и AOC.

Их площади связаны неравенствами: $S_{\Delta AOB} < S_{сек.AOB} < S_{\Delta AOC}$.

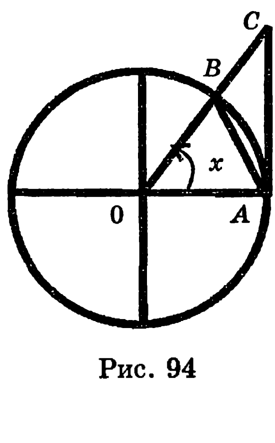


Рис. 94

После подсчета этих площадей получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Разделив все члены неравенства на $\frac{1}{2}$, будем иметь

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.[1] На основании теоремы 5 (о пределе промежуточной функции) получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Пусть теперь $x < 0$, тогда, принимая во внимание нечетность функции $\sin x$, увидим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{(-x)} = 1,$$

так как $-x > 0$.

Предлагаем читателю обратить внимание на следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Обоснование этих следствий находится, например, в [1].

5.2. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Касательной к плоской кривой $y = f(x)$ в точке M_0 (рис. 95а) называется предельное положение секущей (хорды) M_0M, когда точка М приближается вдоль кривой к точке M_0.

---

[1] Действительно, $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$, т.е. при $x \to 0$ $1 - \cos x$ – б.м.ф. Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

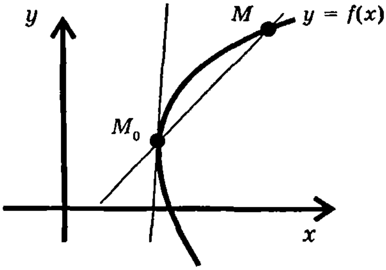


Рис. 95а

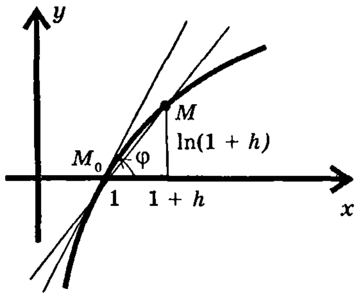


Рис. 95б

Рассмотрим семейство функций $y = \log_a x$ ($a > 1$). Можно доказать (мы здесь этого делать не будем), что среди всех этих кривых есть такая, которая в точке (1, 0) наклонена к оси абсцисс под углом $\frac{\pi}{4}$ (рис. 95б). Основание этой логарифмической функции называют натуральным, его обозначают числом e; приближенно оно равно 2,71. Логарифмы чисел при основании e называются натуральными и обозначаются $\ln x$. В частности, $\ln e = 1$.

Покажем теперь, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1. \tag{4.8}$$

Из рис. 95б видно, что $\frac{\ln(1+h)}{h} = \operatorname{tg}\varphi$. Когда $h \to 0$ точка $M \to M_0$, угол φ — наклона хорды стремится к углу наклона касательной $\frac{\pi}{4}$.

Поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Вообще говоря, введенное здесь понятие числа e недостаточно обосновано, ибо существование в семействе логарифмических функций $\{y = \log_a x,\ a > 1\}$ кривой с указанным выше свойством здесь не доказано.

Приведем важное следствие равенства (4.8). Заключается оно в том, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

В самом деле, из (4.8) следует, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{\ln(1 + h)} = 1 . \qquad (4.9)$$

Сделав в (4.9) замену переменной

$$\ln(1 + h) = t \Rightarrow 1 + h = e^t \Rightarrow h = e^t - 1,$$

получим:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 . \qquad (4.10)$$

В этом рассуждении есть тонкий момент. После замены переменной мы записали $t \to 0$, хотя раньше знали лишь о том, что $h \to 0$. Тот факт, что из этого следует $t = \ln(1 + h) \to 0$ вытекает из понятия непрерывности, речь о которой пойдет в следующем параграфе этой главы. Заметим тут же, что фактически мы уже неоднократно использовали факт непрерывности элементарных функций в областях их определения при вычислении пределов.

Например, заявляя, что $\lim\limits_{x \to 64} \sqrt[3]{x} = 4$, мы уже используем непрерывность функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 64$, а утверждая, что $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x} = 1$ мы пользуемся непрерывностью сложной функции $e^{\sin x}$ в точке $x = 0$.

5.3. СРАВНЕНИЕ Б.М.Ф. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ Б.М.Ф.

Во многих вопросах анализа, связанных с изучением б.м.ф., имеет значение не только сам факт стремления функции $\alpha(x)$ к нулю (при $x \to a$), но и то, «с какой скоростью» $\alpha(x)$ стремится к нулю. С этой позиции б.м.ф. можно сравнивать. В основу такого сравнения положен предел отношений этих функций.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ – б.м.ф. более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$; этот факт символически записывается так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ или $\alpha(x) << \beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0, \neq \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются б.м.ф. одного порядка; этот факт записывается так: $\alpha(x) = O(\beta(x))$. В частности, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м.ф.; этот факт символически записывается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Примеры.

1) Сравнить б.м.ф. при $x \to 2$. $\alpha(x) = (x-2)^2$ и $\beta(x) = x^2 - 4$.

Находим предел их отношения: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = 0$. Значит, $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to 2$ или $\alpha(x) << \beta(x)$.

2) Сравнить б.м.ф. при $x \to 1$ $\alpha(x) = x^4 + x^2 - 2$ и $\beta(x) = x^2 - 1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{x^2 - 1} = 3$.

Значит, $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

3) Сравнить б.м.ф. при $x \to 0$ $\alpha(x) = \operatorname{tg}(x)$ и $\beta(x) = \ln(1 + x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

Значит, $\operatorname{tg}x \sim \ln(1 + x)$.

Важность понятия эквивалентности устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Предел отношения функций равен пределу отношения их эквивалентных, т. е. если при $x \to a$ $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \delta(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\left[\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\cdot\frac{\delta(x)}{\beta(x)}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}}_{=1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\delta(x)}{\beta(x)}}_{=1} = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}.$$

Для практического пользования этой теоремой полезно иметь «набор» эквивалентных функций. Мы рекомендуем следующую цепочку эквивалентных б.м.ф. при $\alpha(x) \to 0$:

$\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \mathrm{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \mathrm{arctg}\alpha(x) \sim$
$\sim \ln(1 + \alpha(x)) \sim e^{\alpha(x)} - 1.$

Пример. Найти $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}^2(5x)\cdot\left(e^{\arcsin^5 x} - 1\right)}{\sin^2\left(4x^2\right)\ln(1+x^3)}$.

Так как

$$\mathrm{tg}5x \sim 5x,\ e^{\arcsin^5 x} - 1 \sim \arcsin^5 x \sim x^5,$$
$$\sin 4x^2 \sim 4x^2,\ \ln(1 + x^3) \sim x^3,$$

то

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2(5x)\cdot x^5}{\left(4x^2\right)^2\cdot x^3} = \frac{25}{16}.$$

Следующий полезный факт представляет собой

Теорема 2. Если $\beta(x) << \alpha(x)$ при $x \to a$, то $\alpha(x) \pm \beta(x) \sim \alpha(x)$.

Докажите ее самостоятельно.

5.4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ Б.Б. ФУНКЦИИ

Пусть $\Phi(x)$ и $G(x)$ – б.б. функции при $x \to a$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\Phi(x)}{G(x)} = k \neq 0, \neq \infty$, то говорят, что $\Phi(x)$ и $G(x)$ являются б.б. функциями одного порядка или что $\Phi(x)$ и $G(x)$ стремятся к бесконечности с одинаковой скоростью. Обозначают этот факт таким образом $\Phi(x) = O(G(x))$. Если, в частности, $k = 1$, то б.б. функции $\Phi(x)$ и $G(x)$ называются эквивалентными (обозначение обычное: $\Phi(x) \sim G(x)$).

При $x \to \infty$ каждый многочлен эквивалентен своему старшему члену $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_n \sim a_0x^n$. В самом деле,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{a_0x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right)=1.$$

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\Phi(x)}{G(x)}=\infty$, то говорят, что $\Phi(x)$ есть б.б. функция более высокого порядка, чем $G(x)$ или что $\Phi(x)\to\infty$ с большей скоростью, чем $G(x)$. Обозначается этот факт так: $\Phi(x) >> G(x)$ или $G(x) << \Phi(x)$.

Докажите самостоятельно следующие факты.

Теорема 1. Предел отношения б.б. функций равен пределу отношения их эквивалентных.

Теорема 2. Если $G(x) << \Phi(x)$, то $\Phi(x)\pm G(x)\sim\Phi(x)$.

Покажем примеры использования эквивалентных при вычислении пределов.

Пример 1. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{10x}-1}{\operatorname{tg}5x}$.

Решение. При $x\to 0$ величины $10x$ и $5x$ являются бесконечно малыми, поэтому $e^{10x}-1\sim 10x$ и $\operatorname{tg}5x\sim 5x$.

Тогда $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{10x}-1}{\operatorname{tg}5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{5x}=2.$

Пример 2. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. Учитывая, что $\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$, получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}.$$

Из этого примера вытекает следующий полезный факт:

при $x \to 0$ $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Пример 3. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+5x)} = \dfrac{1}{5}$.

Решение. Заменяя эквивалентными числитель и знаменатель, получаем $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{5x} = \dfrac{1}{5}$.

Пример 4. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Решение. Мы имеем здесь неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к 1; поэтому мы можем записать его в виде (1 + б.м.ф.). Тогда имеем:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(\cos x - 1)]}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$.

Решение. Знаменатель сразу заменяем эквивалентной б.м.ф., в числителе вычитаем и прибавляем 1 и разбиваем предел на сумму пределов:

Так как при $x \to 0$ $\sin x$ и $\sin 5x$ являются б. м. функциями, то $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$, $e^{\sin 5x} - 1 \sim \sin 5x$ и тогда

$$A = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{5x}{x} - 1\right) = 2.$$

Пример 6. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{(2x-\pi)^2}$

Решение.

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln[1 + (\sin x - 1)]}{(2x-\pi)^2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{(2x-\pi)^2} =$$

$$= -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{(2x-\pi)^2} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2(2x-\pi)^2} = -\frac{1}{8}.$$

Пример 7. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6}{7x^4 + 6x^2 + 3x + 8}$.

Решение. Заменяя каждый из многочленов своим старшим членом, имеем: $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4}{7x^4} = \dfrac{3}{7}$.

Пример 8. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

Решение. $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x)^3 \cdot (3x)^2}{x^5} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^3 \cdot 9x^2}{x^5} = 72.$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\ln(1+3x)}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-x}}{\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{(x-2)^2\sin(x^3-8)}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot[\ln(x+1)-\ln x]$;

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{arctg}5x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5x^{10}+2x^3+1}}{x^2\sqrt[3]{625x^4+x+7}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{3x}}{\operatorname{tg}20x}$.

2-Й УРОВЕНЬ

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4x\right)}{x}$;

21) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$; 22) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x-a}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin(x^2)}-1}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$ $(\alpha\neq\beta)$;

25) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}$ 26) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$; 28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-e}{\sqrt{2-x}-1}$; 30) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{\frac{x}{\sqrt{1+x+x^3}}}-1}{\ln\left(x+\sqrt{x}+1\right)-\ln(x+1)}$;

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x+3\right)\right]}{\ln x}$; 32) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-3x}}{\ln(1+\operatorname{tg}8x)}$;

33) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x}-x^2}{x-2}$; 34) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; 36) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+5}\right)^{x}$; 37) $\lim\limits_{x\to \infty}x^2\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+5}$;

38) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$; 39) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x}+b^{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

40) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0)$

Ответы: 1) $\dfrac{4}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\cos a$; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) 1; 6) $a-b$;

7) $\dfrac{49}{16}$; 8) 0; 9) ∞; 10) 1; 11) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 12) $\dfrac{1}{4}$; 13) $\dfrac{1}{4}$;

14) $-\dfrac{5}{3}$; 15) $-\dfrac{2}{5}$; 16) $\dfrac{7}{\pi}$; 17) $\dfrac{1}{5}$; 18) $\dfrac{1}{5}$; 19) $\dfrac{25}{16}$; 20) 8;

21) $-\dfrac{\pi^2}{2}$; 22) $\dfrac{1}{a}$; 23) 2; 24) 1; 25) $-2\pi^2$; 26) 1; 27) -9;

28) $\frac{3}{2}$; 29) $-2e$; 30) 1; 31) -2; 32) $\frac{1}{2}$; 33) $4\ln 2-4$;

34) e^{-2}; 35) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 36) e^{-3}; 37) -4; 38) e^{2}; 39) $\sqrt{ab}$;

40) $a^{\frac{a}{a+b}}\cdot b^{\frac{b}{a+b}}$.

§6. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ

6.1. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Пусть a – фиксированная точка пространства R^n, x – переменная точка этого пространства. Будем считать, что все функции, о которых будет идти речь, определены в точке a и в некоторой ее окрестности.

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Обозначим через $\Delta\rho$ расстояние между точками x и a.

Пусть $\Delta y=f(x)-f(a)$. Тогда непрерывность f означает, что из $\Delta\rho\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$. Для функции одной переменной определение 1 можно перефразировать так.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. из $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$ (здесь $\Delta\rho=|\Delta x|$). Самым очевидным примером непрерывной функции служит функция $y=x$, где $x\in R^1$. Приведем другие примеры.

Пример 1. Линейная функция $y=kx+b$, $x\in R^1$, непрерывна в любой точке $a\in R^1$.

Доказательство. Дадим x приращение Δx; тогда $\Delta y = (kx + b) - (ka + b) = k\Delta x$ и, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Пример 2. Функция $y = \sin x$, $x \in R^1$, непрерывна в любой точке $a \in R^1$. Приращение функции Δy соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - a$, можно представить в виде $\Delta y = \sin x - \sin a = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{x+a}{2}$. При $\Delta x \to 0$ $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$, а $2\cos\frac{x+a}{2}$ – функция ограниченная. Поэтому Δy – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$ (теорема 2, с. 11).

Можно показать, что все основные элементарные функции непрерывны (в области определения).

6.2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ. КОМПОЗИЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Сумма непрерывных в точке a функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ представляет собой непрерывную (в этой точке) функцию.

Доказательство. Так как

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = f_1(a),\ \lim_{x\to a} f_2(x) = f_2(a),\ \ldots,\ \lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a),$$

то, используя теорему о пределе суммы (теорема 1, п. 5), получим:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_{12}(x) +$$
$$+ \cdots + \lim_{x\to a} f_n(x) = f_1(a) + f_2(a) + \cdots + f_n(a).$$

Таким образом, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, где $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, ч.т.д.

Рекомендуем читателю (совершенно аналогичным образом) доказать следующие две теоремы.

Теорема 2. Произведение непрерывных в точке a функций является непрерывной (в этой точке) функцией.

Теорема 3. Частное от деления двух непрерывных в точке a функций представляет собой непрерывную функцию, если делитель в точке a отличен от нуля.

Теорема 4 (о непрерывности сложной функции).

Пусть функция φ, являющаяся отображением из R^n в R^1, непрерывна в точке a, а функция f – отображение из R^1 в R^1 – непрерывна в точке $\varphi(a)$. Тогда сложная функция $g(x) = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть $x \to a$. Так как φ непрерывна в точке a, то $\varphi(x) \to \varphi(a)$. Из непрерывности функции f в точке $\varphi(a)$ следует, что $\varphi(x) \to \varphi(a) \Rightarrow f[\varphi(x)] \to f[\varphi(a)]$.

Следовательно, $x \to a \Rightarrow g(x) \to g(a)$.

Следствие. Все элементарные функции непрерывны в области определения. Этот факт вытекает из непрерывности основных элементарных функций и того обстоятельства, что всякая элементарная функция есть результат последовательного применения к основным элементарным функциям конечного числа арифметических операций и композиций.

Приведем без доказательства еще один интересный факт.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для нее существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго возрастающая (убывающая) и непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.

6.3. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом пункте мы хотим указать читателю на факты, имеющие исключительно важное значение в математическом анализе. Все теоремы относятся к функциям, определенным на множествах из R^n. Мы будем сопровождать

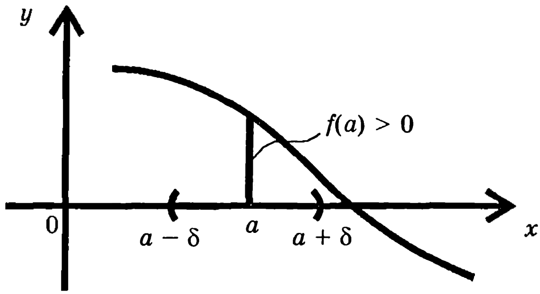


Рис. 96

их рисунками, относящимися к функциям одной переменной. Доказательства приводиться не будут.

Теорема 1 (о сохранении знака).

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то она положительна и в некоторой ее окрестности (рис. 96).

Теорема 2 (о наибольшем и наименьшем значениях).

Если f непрерывна в замкнутой * ограниченной области $\overline{D} \subset R^n$, то хотя бы в одной точке $\overline{D}$ она принимает свое наибольшее значение и хотя бы в одной – наименьшее.

Наибольшее (наименьшее) значение функции может достигаться либо во внутренних точках области (тогда их называют соответственно точками максимума и минимума), либо в граничных точках области $\overline{D}$. Так, для функции одной переменной, изображенной на рис. 97, наименьшее значение достигается во внутренней точке x_0, а наибольшее – в граничной точке b. Заметим, что условие замкнутости области существенно. Если его снять, то теорема перестает быть верной, что показывает пример функции $y = \operatorname{tg} x$, непрерывной в области $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и не

* Напомним, что замкнутая область $\overline{D}$ получается из области D путем присоединения всех ее предельных точек.

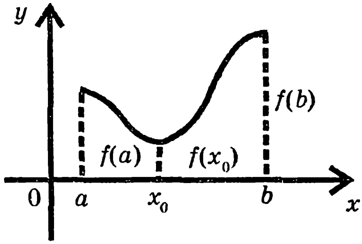


Рис. 97

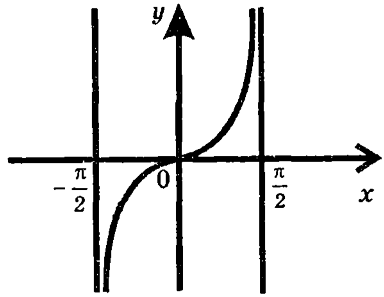


Рис. 98

имеющей в этой области ни наибольшего, ни наименьшего значений (рис. 98).

Теорема 3 (о промежуточном значении). Пусть f – непрерывная функция в области $D \in R^n$. Предположим, что в двух точках $x_1, x_2 \in D$ функция принимает различные значения $f(x_1) = A, f(x_2) = B, A \neq B$. Тогда каково бы ни было число γ, заключенное между ними, $A < \gamma < B$, найдется точка $x_0 \in D$ такая, что $f(x_0) = \gamma$ (рис. 99,а.), т.е. непрерывная функция не пропускает своих промежуточных значений.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то уравнение $f(x) = 0$ имеет в интервале (a, b) хотя бы один корень (рис. 99б).

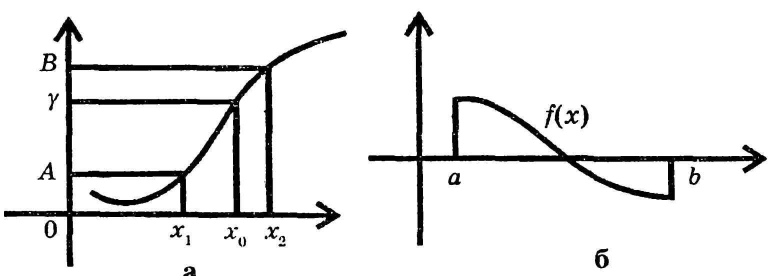


Рис. 99

6.4. ТОЧКИ РАЗРЫВА. НАХОЖДЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ АСИМПТОТ

Непрерывность в точке a функции одной переменной означает, что она определена в этой точке, имеет предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и что все эти величины совпадают:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Если нарушено хотя бы одно из указанных условий, то говорят что точка a есть точка разрыва. Существуют точки разрыва различных типов. Мы рассмотрим два вида разрывов.

Разрывы 1-го рода (разрывы с конечным скачком). Точка a называется точкой разрыва 1-го рода, если существует $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, но они не совпадают, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Величина $\Delta = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) - \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называется скачком $f(x)$ при переходе аргумента через точку a.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию

$$\begin{cases} x+2, & x<-1, \\ x^2, & -1 \le x \le 2, \\ -2x+6, & x>2. \end{cases}$$

Решение. На каждом из рассматриваемых интервалов $f(x)$, очевидно, непрерывна. Поэтому интерес представляют только точки стыка. Рассмотрим каждую из этих точек.

Пусть $x = -1$. Тогда

$$f(-1) = (-1)^2 = 1; \quad \lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x+2) = 1;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2 = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$. Это значит, что $x = -1$ – точка непрерывности.

Пусть теперь $x = 2$,

$f(2) = 2^2 = 4$; $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to 2}(-2x+6) = 2$.

Ясно, что $x = 2$ – точка разрыва 1-го рода. При этом скачок $\Delta = 2 - 4 = -2$. Результаты исследования хорошо видны на графике (рис. 100).

Стрелка показывает, что при $x = 2$ значение нельзя принимать равным 2. Мы уже отметили выше, что $f(2) = 4$.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

Решение. При любом $x \neq 0$ функция непрерывна (докажите самостоятельно). Покажем, что точка 0 является точкой разрыва 1-го рода. В самом деле, когда $x \to 0$ слева,

$\frac{1}{x} \to -\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = -1$.

Если же $x \to 0$ справа, то $\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ и

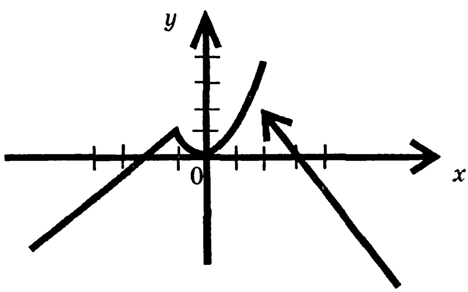


Рис. 100

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Пределы слева и справа различны. Значит, 0 – точка разрыва 1-го рода. Скачок $\Delta = 2$.

Переходим к разрывам 2-го рода, к бесконечным разрывам. Будем говорить, что a – точка разрыва 2-го рода или точка бесконечного разрыва функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ является бесконечным, т. е. $f(x)$ является б.б. функцией в точке a, а значит, прямая $x = a$ служит вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

Вывод: для нахождения вертикальных асимптот следует найти точки бесконечного разрыва; при этом если точка a является таковой, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Читателю рекомендуется после нахождения и построения вертикальной асимптоты исследовать поведение функции в окрестности точки разрыва.

Пример 5. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Данная функция определена и непрерывна для всех x, кроме точек, где знаменатель дроби обращается в нуль. Значит, точками бесконечного разрыва функции являются точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Поэтому прямые $x = 1$ и $x = 2$ служат вертикальными асимптотами графика. Для исследования графика по отношению к асимптотам найдем пределы

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty; \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = +\infty.$$

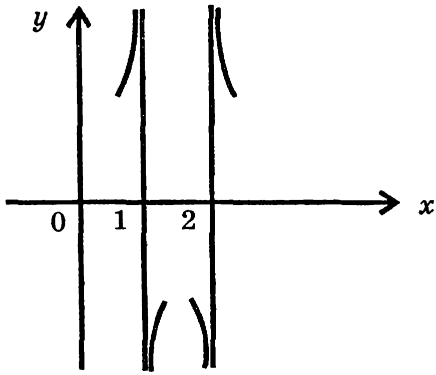


Рис. 101

На рис. 101 изображено поведение функции $f(x)$ в окрестностях точек разрыва.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти вертикальные асимптоты графиков функций. Показать на рисунках поведение функции в окрестностях точек разрыва.

1) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$; 2) $y = \dfrac{x+1}{x^3-1}$; 3) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

4) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4x-5}$; 5) $y = \dfrac{x^2-1}{x-2}$; 6) $y = \dfrac{x^2+1}{x^4-x}$;

7) $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$; 8) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

ГЛАВА 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

При исследовании функции одним из основных вопросов является определение скорости изменения функции. Анализ этого понятия, имеющего физическое происхождение, приведет нас к одному из самых основных математических построений: к определению производной.

Рассмотрим какой-либо физический процесс $u = f(t)$, т. е. функцию одного переменного – времени t.

Физическая природа величины u при этом безразлична (в механике это может быть координата движущейся точки или угол поворота вращающегося вокруг оси твердого тела, в теории теплоты – температура, в теории электричества – сила тока или напряжение и т. д.).

Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$ и вычислим соответствующее приращение Δu величины u:

$$\Delta u = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{5.1}$$

Отношение $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ естественно назвать средней скоростью изменения величины u на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ в случае $\Delta t > 0[t + \Delta t, t]$, если $\Delta t < 0$). Ясно, что чем величина Δt меньше, тем более подробную информацию о характере изменения u вблизи точки t мы имеем. Естественно поэтому произвести характерную для математики идеализацию и ввести величину

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \tag{5.2}$$

Будем предполагать., что предел (5.2) существует (более подробно об этом ниже). Важно отметить, что величина u' имеет локальный характер, т. е. связана уже не с интервалом времени $[t,t + \Delta t]$ (или $[t + \Delta t,t]$), а с одним только моментом t, и носит название мгновенной скорости процесса $u = f(t)$ в момент времени t. Обобщим это рассуждение. Пусть рассматривается функция одной переменной $y = f(x)$, причем независимая переменная x уже не обязательно является временем. Поднимая вопрос о скорости изменения $y(x)$ по отношению к изменению величины x, придем к выражению

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{5.3}$$

называемому производной функции $y = f(x)$ в точке x. Итак, производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Если предел (5.3) существует, то функцию $f(x)$ называют дифференцируемой в точке x, в противном случае – недифференцируемой.

Отметим, что величина $f'(x)$ зависит, конечно, от выбора точки x, так что $f'(x)$ следует рассматривать как новую функцию аргумента x.

ПРОИЗВОДНЫЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1) Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$.

Действительно, если $f(x) \equiv C$, то

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

2) Производная самого аргумента равна единице. В самом деле,

$$x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

3) $(\sin x)' = \cos x$, так как

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$

Здесь мы заменили б.м. функцию $\sin\frac{\Delta x}{2}$ эквивалентной $\frac{\Delta x}{2}$ и воспользовались непрерывностью функции $\cos x$.

4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Действительно,

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

С производными других элементарных функций мы познакомимся дальше.

Упражнение: на основании определения производной доказать, что

$$\left(x^2\right)' = 2x, \quad \left(x^3\right)' = 3x^2, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Понятия дифференцируемости и непрерывности функции связаны между собой.

Теорема. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке. Обратное неверно.

Доказательство. Поскольку дифференцируемость означает существование предела (5.3), то по определению предела имеем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Далее

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)(\Delta x). \tag{5.4}$$

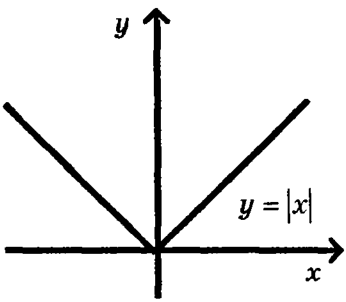


Рис. 102

Переходя в (5.4) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\Delta y \to 0$, что и означает непрерывность $f(x)$ в точке x. Для доказательства того, что обратное неверно, построим контрпример. Рассмотрим функцию $y = |x|$ (рис. 102).

В точке $x = 0$ эта функция непрерывна, ибо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \text{слева}}} y = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{справа}}} y = \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$ и $y(0) = 0$. Однако мы увидим сейчас, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x = 0$ не существует. Действительно,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

в то время как $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}} \dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

Пределы слева и справа различны; это означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует. Следовательно, производная функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ не существует.

Итак, из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Поэтому доказанная теорема говорит о том, что свойство дифференцируемости сильнее свойства непрерывности.

Рассмотрим еще один важный вопрос. Как мы видели, дифференцирование функции влечет равенство (5.4). Имеет место и обратное утверждение. Именно, если для функции f в точке x выполняется соотношение

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x, \qquad (5.4')$$

где k – некоторое число и $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$, то f дифференцируема в этой точке и $f'(x) = k$.

Доказательство получается делением (5.4') на Δx и последующим предельным переходом: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k + \alpha(\Delta x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k \Rightarrow f'(x) = k$.

§2. ОБЩИЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Теорема 2.1. Операция дифференцирования является линейной операцией, т. е. если существуют $u'(x)$ и $v'(x)$, то

$$(\alpha u(x) + \beta v(x))' = \alpha u'(x) + \beta v'(x).$$

Доказательство. Обозначим $y = \alpha u(x) + \beta v(x)$. Тогда
$y(x + \Delta x) = \alpha u(x + \Delta x) + \beta v(x + \Delta x)$,
$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v$. .

По определению производной

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta u + \beta \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \alpha u'(x) + \beta v'(x).$$

Рекомендуем читателю получить из доказанной теоремы следующие следствия.

Следствие 1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной $(\alpha u(x))' = \alpha u'(x)$.

Следствие 2. Производная суммы конечного числа слагаемых равна сумме их производных:

$$(u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x))' = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x).$$

Теорема 2.2. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то существует $(u(x) \cdot v(x))'$ и справедлива формула

$$(uv)' = u'v + v'u. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть $y(x) = u(x)v(x)$. Вычислим приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx. Обозначим через Δu и Δv приращения функций $u(x)$ и $v(x)$ при переходе от точки x к близкой точке $x + \Delta x$. Тогда

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u,\ v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v,\ y(x + \Delta x) =$$
$$= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) = [u(x) + \Delta u] \cdot [v(x) + \Delta v] =$$
$$= u(x)v(x) + \Delta u \cdot v(x) + u(x)\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Вычисляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x .$$

и переходим к пределу при $\Delta x \to 0$.

Тогда получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) v(x) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) u(x) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x .$$

Отсюда $y' = u'v + v'u + u'v' \cdot 0 = u'v + v'u$.

Технически более сложно доказывается теорема о пределе частного.

Теорема 2.3. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ и если $v(x) \neq 0$ то, существует $\left(\frac{u}{v} \right)'$ и справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad (5.6)$$

С доказательством можно ознакомиться, например, в ([1] , с. 134).

Следующее правило относится к дифференцированию сложных функций.

Теорема 2.4. Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u (u = \varphi(x))$. Тогда композиция этих функций $y = f[\varphi(x)]$ также дифференцируема в точке x и справедлива формула

$$y_x = y_u \cdot u_x , \qquad (5.7)$$

где индексы u и x указывают на аргумент, по которому ведется дифференцирование.

Доказательство. Так как $u(x)$ и $f(u)$ – дифференцируемые функции, то имеют место представления:

$$\Delta u = u_x' \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

$$\Delta y = f_u' \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u$$

В этом случае,

$$\Delta y = f_u' \cdot \left(u_x' + \alpha(\Delta x)\right)\Delta x + \beta(\Delta u)\left(u_x' + \alpha(\Delta x)\right)\Delta x$$

или

$$\Delta y = f_u' \cdot u_x' \cdot \Delta x + \left(f_u' \cdot \alpha(\Delta x) + \beta(\Delta u)u_x' + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)\right)\Delta x. \quad (5.8)$$

Когда $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$ (поскольку $u(x)$ дифференцируемая, а значит, непрерывная функция). Поэтому выражение в скобках в (5.8) представляет собой б.м.ф. от Δx. Следовательно, $y_x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_u' \cdot u_x'$

§ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

3.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ tg$x$ И ctg$x$

Для нахождения производной tg$x$ воспользуемся формулой (5.6)

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Докажите самостоятельно, что $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

3.2. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Логарифмируя, имеем

$$\ln y = x \ln a. \tag{5.9}$$

Дифференцируем (5.9), используя (5.7) :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a.$$

Умножая обе части равенства на y и вспоминая, что $y = a^x$, получаем

$$y' = y \ln a = a^x \ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{5.10}$$

Следствие: $(e^x)' = e^x$.

3.3. ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$, $x > 0$

Используя метод п. 3.2, докажите самостоятельно, что

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{5.11}$$

3.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.12}$$

Доказательство. $y = \arcsin x$. Тогда

$$x = \sin y \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \tag{5.13}$$

Дифференцируя обе части по x, имеем:

$$1 = \cos y \quad y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}. \tag{5.14}$$

$\cos y$ можно найти из тождества $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. Ясно, что

$$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} \tag{5.15}$$

Из (5.13) делаем вывод, что в (5.15) надо выбрать знак +. Возвращаясь к (5.14), получаем, что для $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Производную функции $y = \arccos x$ можно получить аналогично, а можно воспользоваться соотношением

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, из которого сразу следует, что

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производная функции $y = \mathrm{arctg}x$. Докажем, что

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство.

$$y = \mathrm{arctg}\,x \Rightarrow x = \mathrm{tg}\,y \Rightarrow 1 = \frac{1}{\cos^2 y}\cdot y' \Rightarrow y' = \cos^2 y =$$

$$= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Производная функции $y = \mathrm{arcctg}x$.

$$(\mathrm{arcctg}x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Упражнение. Докажите самостоятельно, что $\left(e^x\right)' = e^x$, исходя из определения производной.

В заключение приведена таблица производных. Левая колонка таблицы пояснений не требует, правая же представляет собой производные сложных функций.

Смысл формул, стоящих справа, можно выразить таким образом: производная сложной функции равна произведению производной внешней функции по своему аргументу на производную внутренней функции по своему аргументу.

Таблица 1

№ п/п	x-аргумент	u-дифференцируемая функция аргумента
1	$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
2	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$

3	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
4	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u\cdot u'$
5	$(a^x)' = a^x\ln a$	$(a^u)' = a^u\ln a\cdot u'$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
8	$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
9	$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
10	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12	$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
13	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

3.5. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Пример 1. $y = x^5 + \sin x - 2^x + 3$. Найти y'

Решение. Используя теорему о производной суммы и формулы 1, 6, 5, из таблицы получаем

$$y' = 5x^4 + \cos x - 2^x\ln 2.$$

Пример 2. $y = x^3 \quad \sin x$. Найти y'

Решение. Используем формулу производной произведения (5.5), а также формулы 1,6, имеем:

$$y' = 3x^2\sin x + x^3\cos x.$$

Пример 3. $y = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^4} + x^7 \cdot \sqrt[4]{x}$.

Здесь можно было бы применить в каждом слагаемом формулу (5.5).Но это нерационально. Эффективнее сначала переписать данную функцию в виде $y = x^{\frac{19}{5}} + x^{\frac{29}{4}}$ и уже затем дифференцировать; получаем $y' = \frac{19}{5} x^{\frac{14}{5}} + \frac{29}{4} x^{\frac{25}{4}}$

Пример 4. Вычислить $y'(1)$, если $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Решение. Вначале, используя (5.6), найдем

$$y' = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Теперь, подставляя в это выражение $x = 1$, имеем

$$y'(1) = \frac{1+3}{(1+1)^2} = 1.$$

До сих пор мы использовали только левую колонку таблицы производных.

Переходим к примерам дифференцирования сложных функций, т. е. к использованию правой колонки таблицы.

Пример 5. $y = (\mathrm{tg}x)^5$. Найти y'

Решение. Обозначим $\mathrm{tg}x = u$ (внутренняя функция).

Тогда $y = u^5$ (внешняя функция), $y_u' = 5u^4$, $u_x' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Согласно (5.7) имеем теперь

$$y_x' = 5u^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 5(\mathrm{tg}x)^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

В последующих примерах мы уже не будем писать обозначения для внутренней функции, важно ее просто увидеть и решение можно писать сразу.

Пример 6. $y = \ln(x^4 + 2x)$. Найти y'

Решение. Производная внешней функции по своему аргументу равна $\dfrac{1}{x^4 + 2x}$, а производная выражения в скобках, равна $4x^3 + 2$. Поэтому

$$y_x' = \frac{1}{x^4 + 2x} \cdot \left(4x^3 + 2\right) = \frac{4x^3 + 2}{x^4 + 2x}.$$

В примерах 5 и 6 сложная функция состояла из двух звеньев. На практике, конечно же, их может быть больше. В таких случаях дифференцирование следует проводить цепочкой, находя производную самой внешней функции по своему аргументу, умножая ее на производную следующей за ней функции по своему аргументу и т. д.

Пример 7. $y = (\mathrm{arctg}(x^3 + 2x))^9$. Найти y'

Решение.

$$y' = 9\left(\mathrm{arctg}\left(x^3 + 2x\right)\right)^8 \cdot \frac{1}{1 + \left(x^3 + 2x\right)^2} \cdot \left(3x^2 + 2\right).$$

Пример 8. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$. Найти $y'\left(a\sqrt{3}\right)+y'(0)$.

Решение.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Подставляя в полученное выражение $x=a\sqrt{3}$, имеем

$$y'\left(a\sqrt{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{3a^2+a^2}}=\frac{1}{2|a|}.$$

Далее, $y'(0)=\frac{1}{\sqrt{0^2+a^2}}=\frac{1}{|a|}$ и, значит,

$$y'\left(a\sqrt{3}\right)+y'(0)=\frac{1}{2|a|}+\frac{1}{|a|}=\frac{3}{2|a|}.$$

Пример 9. $y=3^{\operatorname{tg}^4\left(x^5+x^2\right)}$. Найти y'

Решение.

$$y'=3^{\operatorname{tg}^4\left(x^5+x^2\right)}\ \ln 3\cdot\left(\operatorname{tg}^4\left(x^5+x^2\right)\right)'=3^{\operatorname{tg}^4\left(x^5+x^2\right)}\cdot\ln 3\cdot$$

$$\cdot 4\operatorname{tg}^3\left(x^5+x^2\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x^5+x^2\right)}\cdot\left(5x^4+2x\right).$$

Пример 10. $y=\sin^3(4x)\cdot e^{-\sqrt{x^4+1}}$. Найти y'

В этом примере необходимо видеть, прежде всего, производную произведения; значит, в основу дифференцирования положим формулу (5.5). Вместе с тем надо обязательно учесть, что каждый множитель представляет собой сложную функцию. Выполнив все действия, получаем:

$$y' = 3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 \cdot e^{-\sqrt{x^4+1}} +$$

$$+\sin^3 4x \cdot e^{\sqrt{x^4+1}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot 4x^3 \right) =$$

$$= 2\sin^2 4x \cdot e^{-\sqrt{x^4+1}} \cdot \left[6\cos 4x - \frac{x^3 \sin 4x}{\sqrt{x^4+1}} \right].$$

Пример 11. $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln\left(4x^2+1\right)}$. Найти y'

Решение.

$$y' = \frac{\frac{1}{1+4x^2} \cdot 2\ln\left(4x^2+1\right) - \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{1}{4x^2+1} \cdot 8x}{\ln^2\left(4x^2+1\right)} =$$

$$= \frac{2\left[\ln\left(4x^2+1\right) - 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x\right]}{\left(4x^2+1\right)\ln^2\left(4x^2+1\right)}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти производные следующих функций.

1-Й УРОВЕНЬ

1) $y = 4x^5 - 2x^3 + 3$; 2) $y = 2x^7 + 4x^{-3} + \dfrac{1}{x}$;

3) $y = x^6 - \dfrac{3}{x^2} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^5}$; 4) $y = \dfrac{x}{\sin x}$;

5) $y = \ln x + xe^x$; 6) $y = (x^3 + 2^x)\operatorname{tg} x$; 7) $y = \dfrac{x^{-3} + x}{3^x + x^4}$;

8) $y = \operatorname{arctg} x \quad \operatorname{tg} x$; 9) $y = \dfrac{\cos x}{x + \ln x}$; 10) $y = \ln(x^4 + x^2)$;

11) $y = \sin^3 x$; 12) $y = \sqrt{x^4 + 1}$; 13) $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$;

14) $y = x \cdot \ln^2 x$; 15) $y = (\mathrm{ctg} 4x) \cdot x^2$; 16) $y = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\ln(\mathrm{tg}x)}$;

17) $y = \ln^3(\sin 7x)$; 18) $y = \cos(2\mathrm{ctg}x) + \ln\dfrac{1}{x}$;

19) $y = \dfrac{2e^{4x} + 5}{\ln(x^3 + 1)}$; 20) $y = x^4 e^{\sin 3x} + \dfrac{x}{\arcsin\sqrt{x}}$;

21) $y = e^{4x}\cos 5x - 7x^4$; 22) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln^3 x - \dfrac{\sin x}{x^4}$;

23) $y = \mathrm{ctg}2x - x + \sqrt{\mathrm{tg}x}$; 24) $y = \dfrac{e^{6x} + x^6}{\arcsin 3x + 2}$;

25) $y = \mathrm{ctg}^2 x + 3^x$; 26) $y = x^2 \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

27) $y = \ln(\sin^2 x + 1)$; 28) $y = e^{x^2} + x\ln x$;

29) $y = \arcsin(\ln x) + 2$; 30) $y = \ln(\cos 2x) + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$;

31) $y = \left(x^3 + 2x\right)\cdot\left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right)$; 32) $y = \ln(\cos 2x)$;

33) $y = x\sqrt{16 - x^2} + e^{-6x^2}$;

34) $y = 3^{\mathrm{tg}x} + \sin(x^3) + \cos^2 x$.

2-Й УРОВЕНЬ

35) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; 36) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x + \sqrt{\ln(x^2 + 1)}}$;

37) $y = \dfrac{1}{\left(x^2 + x\ln x + \mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)^5}$; 38) $y = \sqrt[4]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$;

39) $y=\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{\operatorname{tg}x}}$; 40) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x\cos 2x}}$;

41) $y=\dfrac{1}{\arcsin 3x\cdot\cos^2(5x)}$; 42) $y=2^{x\sin^4 3x}$;

43) $y=7^x\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\ln x+1}\right)$; 44) $y=x\sin^5 x+\dfrac{1}{\lg x}$;

45) $y=\sin^3\left(2^{\frac{x}{\cos^4 x}}\right)$; 46) $y=\dfrac{1}{\ln\left(1+\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)\right)}$;

47) $y=\arccos\sqrt{x\ln^2 x-1}$; 48) $y=\sin\left(2e^x+1\right)\cdot e^{2\sin x+1}$;

49) $y=\sqrt[3]{1+xe^{\sin(\ln x)}}$; 50) $y=x^{\sin x}$;

51) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\cos^2 x}$; 52) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$

Указание: В примерах 50–52 имеет смысл сначала прологарифмировать данные функции.

3.6. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Теорема. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые в точ ке x функции.

Тогда функция

$$y=u^v, \tag{5.16}$$

называемая показательно-степенной, имеет производную

$$y'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u' \tag{5.17}$$

Доказательство. Логарифмируем (5.16) $\ln y=v\ln u$ и полученное равенство дифференцируем

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'$$

Умножаем обе части равенства на y и, имея ввиду (5.16), получаем:

$$y' = u^{v}\ln u\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u'$$

Это и есть равенство (5.17), которое называется формулой Бернулли. Смысл формулы (5.17) заключается в следующем: производная показательно-степенной функции есть сумма результатов дифференцирования (5.16) как функции чисто показательной и чисто степенной.

Пример 12. $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg}2x}$. Найти y'

Решение.

$$y' = (\cos x)^{\operatorname{arctg}2x}\ln(\cos x)\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 +$$

$$+\operatorname{arctg}2x\ (\cos x)^{\operatorname{arctg}2x-1}\cdot(-\sin x).$$

Упражнения. Используя (5.17), найти производные функций

53) $y = (\cos x)^{\ln(x^2+1)}$;

54) $y = (x^3+1)^{\arcsin(4x)}$;

55) $y = (x+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$;

56) $y = (\operatorname{tg}x)^{e^{-x^2}}$

3.7 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 имеет производную, отличную от нуля. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $x'(y_0) = \dfrac{1}{y'(x_0)}$.

Доказательство. Придадим аргументу y_0 достаточно малое, но отличное от нуля, приращение Δy.Тогда функция $x = f^{-1}(y)$ получит приращение Δx, которое тоже отлично от нуля в силу строгой монотонности f^{-1}. В самом деле, если например, $\Delta y > 0$, то $y_0 + \Delta y > y_0$. Тогда $f^{-1}(y_0 + \Delta y) > f^{-1}(y_0) \Rightarrow \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) > 0$. Поэтому имеет место равенство $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$,в котором мы осуществим предельный переход при $\Delta y \to 0$. Заметим, что при этом $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности обратной функции. Тогда имеем:

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x_0)}.$$

Предельный переход оказался возможным благодаря условию $y'(x_0) \neq 0$.

Доказательство завершено.

Теорема позволяет, зная производные некоторых конкретных функций, получать формулы для производных функций обратным к ним.

Например, выведем производную функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), исходя из равенства $(a^x)' = a^x \ln a$. Функция $y = \log_a x$ является обратной к функции $x = a^y$. Тогда $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$. Таким образом,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

3.8. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ*

Предположим, что зависимость между x и y задана уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{5.18}$$

Если для каждого значения x из некоторого множества E существует одно или несколько значений y, удовлетворяющих (5.18), то этим на множестве E определяется функция $y = f(x)$ (или функции), для которой (или для которых) (5.18) обращается в тождество

$$F(x, f(x)) \equiv 0. \tag{5.19}$$

Такие функции называются неявными. Иногда удается получить их явное представление. Например, из уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.20}$$

очень просто выразить y через x, в результате чего на множестве $E = [-a; a]$ получаем две функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ и } y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

каждая из которых обращает (5.20) в тождество. Заметим, что первая является уравнением верхней половины эллипса, а вторая – уравнением его нижней половины.

В рассмотренном примере увидеть явное аналитическое выражение «запрятанных» в (5.20) функций оказалось легко. Однако часто из уравнения (5.18) получить явное представление неявных функций либо трудно, либо невозможно. Например, выразить y через x в явной фор-

* Этот пункт рекомендуется изучать после прочтения § 1 гл. 9.

ме из уравнения

$$xy - e^x \cdot \sin y - \pi = 0 \qquad (5.21)$$

мы не можем. Встает вопрос: определяет ли уравнение (5.21) какую-то неявную функцию $y = f(x)$? Быть может, такая функция есть, но мы не умеем записывать ее в виде явной аналитической зависимости y от x, а может, такой функции нет? В этой связи нас будут интересовать следующие вопросы.

1. Каким условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы для уравнения (5.18) существовала (это не значит, что ее можно увидеть явно) неявная функция $y = f(x)$?

2. Если такая функция $y = f(x)$ существует, то имеет ли она производную и как эту производную найти? Последний вопрос интересен тем, что мы хотим находить y', даже не умея в явном виде находить y. В свете всего сказанного важную роль играет следующая теорема.

Теорема. Предположим, что функция $F(x, y)$

1) непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$,

2) $F(M_0) = 0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} \neq 0$

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в некоторой окрестности точки M_0 одну неявную функцию $y = f(x)$, обладающую свойствами:

а) $y_0 = f(x_0)$

б) и существует y', вычисляемая по формуле

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (5.22)$$

Доказательство этой теории мы не приводим. Ознакомиться с ним можно, например, в ([10], стр. 30).

Пример 1. Найти производную неявной функции, определяемую уравнением

$$x^2y^4 + 5x^3y - 4x^4 + y + 9 = 0$$

в точке $M_0(1;\ -1)$.

Решение. Сначала проверяем выполнение условий теоремы. Очевидно, функция $F(x,\ y)$, определяемая левой частью уравнения, имеет на всей плоскости xOy непрерывные частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^4 + 15x^2y - 16x^3,\ \ \frac{\partial F}{\partial y} = 4x^2y^3 + 5x^3 + 1.$$

Кроме того, $F(M_0) = 1 - 5 - 4 - 1 + 9 = 0$,

а $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} = -4 + 5 + 1 = 2 \neq 0.$

Поскольку условия теоремы выполнены, существует единственная неявная функция $y = f(x)$ (выписать ее мы не может), производную которой находим по формуле (5.22):

$$y'(x) = -\frac{2xy^4 + 15x^2y - 16x^3}{4x^2y^3 + 5x^3 + 1}.$$

В частности, в заданной точке $M_0(1;\ -1)$

$$y'(1) = -\frac{2 - 15 - 16}{-4 + 5 + 1} = \frac{29}{2}.$$

Пример 2. Найти производную в точке $M_0(1;\ \pi)$ неявной функции, определяемой уравнением

$$xy - e^x \cdot \sin y - \pi = 0.$$

Решение. Проверяем условия теоремы существования

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = y - e^x \sin y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x - e^x \cos y;$

2) $F(M_0) = \pi - e \sin \pi - \pi = 0,$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} = 1 - e^1 \cos \pi = 1 + e \neq 0,$$

после чего находим производную

$$y'(x) = -\frac{y - e^x \sin y}{x - e^x \cos y} = \frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y},$$

откуда, в частности, следует, что

$$y'(1) = \frac{e \sin \pi - \pi}{1 - e^1 \cos \pi} = -\frac{\pi}{1 + e}.$$

Примеры для самостоятельной работы

В следующих примерах проверьте выполнение условий теоремы существования неявной функции и найдите производную этой функции в заданной точке.

1) $4x^3y^2 - 7x + 9y^3 + y = 0, \; M_0(0; 0)$
2) $y^4 - x^4 - 6xy - 3 = 0, \; M_0(1; 2)$
3) $x^5 + y^5 - 2xy = 0, \; M_0(1; 1)$
4) $\sqrt{x^2 + y^2} + x - 2y = 0, \; M_0(3; 4)$
5) $\ln(x + y) - x - y^2 + e^2 - 1 = 0, \; M_0(0; e)$
6) $\sin(x + y) - 2\sin 2x + 3\cos y = 0, \quad M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответы: 1) 7; 2) $+\frac{8}{13}$; 3) -1; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{e-1}{1-2e^2}$; 6) $\frac{3}{4}$.

§4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

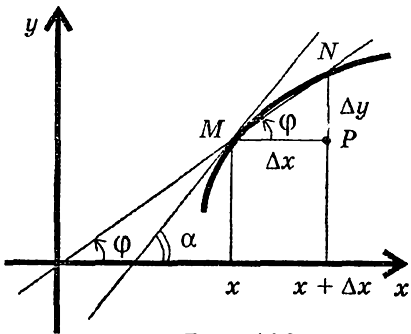


Рис. 103

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция (рис. 27), M – точка графика с абсциссой x, N – точка графика с абсциссой $x + \Delta x$; $NP = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Напомним, что касательной к графику функции $f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей MN, когда точка N, двигаясь вдоль кривой, приближается к точке M. Обозначим через φ угол наклона к оси абсцисс хорды MN, а через α – угол наклона касательной к кривой в точке M. Ясно, что, когда $N \to M$, то $\varphi \to \alpha$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to \alpha} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $\operatorname{tg}\varphi$. Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x представляет собой угловой коэффициент касательной, проведенной к данной кривой в точке $M(x, f(x))$. Составим уравнение касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$ к кривой $y = f(x)$. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид $y - f(x_0) = k \cdot (x - x_0)$. Для того чтобы из этого пучка прямых выделить касательную, надо взять $k = f'(x_0)$. Таким образом, уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Нормалью к данной кривой в точке M_0 называется прямая, проведенная через M_0 перпендикулярно касательной. Исходя из этого определения легко заключить, что уравнение нормали имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Пример. Найти уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ точке с абсциссой $x_0 = 2$ (рис. 104).

Решение. Находим производную функции $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. Вычисляем значение этой производной в точке $x_0 = 2 : f'(2) = 4$. Значит, угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x_0 = 2$, $k_1 = 4$, а угловой коэффициент нормали $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$

Найдем ординату точки M_0, абсцисса которой $x_0 = 2 : f(x_0) = 2^2 = 4$. Уравнение касательной будет иметь вид $y - 4 = 4(x - 2)$, а уравнение нормали $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$.

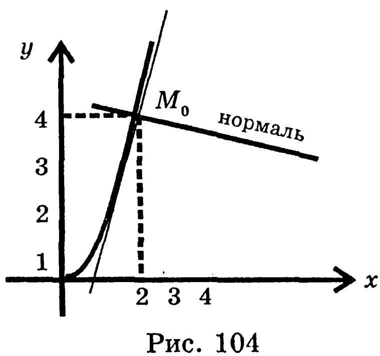


Рис. 104

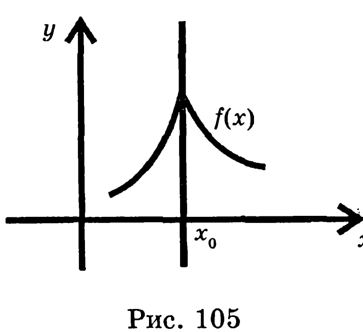


Рис. 105

Замечание. Теперь легко показать, что функция может быть непрерывной в некоторой точке и не быть в этой точке дифференцируемой. В самом деле, функция $f(x)$, изображенная на рис. 105, является, очевидно, непрерывной в точке x_0, но производная в этой точке $f'(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

1) Написать уравнение касательной к кривой $y = \frac{x^3}{3}$ в точке с абсциссой $x = -1$.

2) Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = \frac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$.

3) Написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке $x = \pi$.

4) Написать уравнения касательных к кривой $y = 4x - x^2$ в точках пересечения ее с осью Ox.

5) Написать уравнения касательных к кривой $y^2 = 4 - x$ в точках пересечения кривой с осью Oy.

2-Й УРОВЕНЬ

6) Написать уравнения касательных к гиперболе $y = \frac{4}{x}$ в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Найти угол между этими касательными.

7) В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла? Написать уравнение этой касательной.

8) В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox?

9) Найти угол, под которым пересекаются параболы $y = (x - 2)^2$ и $y = -x^2 + 6x - 4$.

Помощь: углом между двумя кривыми в некоторой точке называется угол между их касательными в этой точке.

Ответы: 1) $y = x + \frac{2}{3}$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; $y = 2x - 3$;

3) $y = -x + \pi$; 4) $y = 4x$, $y = -4x + 16$; 5) $y = -\frac{1}{4}x + 2$;

$y = \frac{1}{4}x - 2$; 6) $y = -4x + 8$, $y = -\frac{1}{4}x - 2$, $\operatorname{arctg}\frac{15}{8}$;

7) $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$, $y = -x + \frac{19}{4}$; 8) $(-2; -4)$; 9) $\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$.

§ 5. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Задача линеаризации непрерывной функции ставится следующим образом. Зафиксируем точку $M_0(x_0, f(x_0))$ на графике функции $f(x)$. Среди всех линейных функций вида $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, т. е. среди всех прямых, проходящих через точку M_0, найти ту, которая наилучшим образом приближает данную функцию. Что значит наилучшим образом? Будем характеризовать близость данной функции к прямой пучка разностью

$$\delta(x) = f(x) - [f(x_0) + k(x - x_0)] = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0). \quad (5.23)$$

Очевидно, для любой прямой нашего пучка $\lim\limits_{x \to x_0} \delta(x) = 0$, т. е. $\delta(x)$ – б.м. функция при $x \to x_0$. Однако для разных прямых пучка $\delta(x) \to 0$ с разной скоростью. Так вот, наилучшей будем считать ту прямую, для которой $\delta(x) = o(x - x_0)$, т. е. для которой $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\delta(x)}{x - x_0} = 0$ (иными словами, $\delta(x) \ll |x - x_0|$).

Оказывается существование такой прямой равносильно дифференцируемости функции $f(x)$.

В самом деле,

$$\delta(x) = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0);$$

$$\frac{\delta(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k; \qquad (5.24)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\delta(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k$$

Теперь ясно, что существование производной в точке x_0 и равенство $f'(x_0) = k$ равносильно тому, что предел слева равен нулю, т. е. касательная в точке M_0, если она существует, является наилучшей из всех прямых, приближающих $f(x)$ в окрестности точки M_0. Обратно, если наилучшее линейное, приближение существует, то предел слева равен нулю. В таком случае, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$,

т. е. для такой прямой угловой коэффициент $k = f'(x_0)$. Следовательно, эта прямая есть касательная к данной кривой в точке M_0. Одновременно мы показали единственность наилучшего приближения.

С понятием линеаризации функции тесно связано понятие дифференциала. Считая функцию $f(x)$ дифференцируемой в точке x_0, т. е. линеаризацию возможной, введем определение.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется приращение соответствующей линеаризованной функции (касательной) при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$: $dy\big|_{x_0} = df(x_0) = PQ$. Ясно (рис. 106), что

$$dy\big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x \qquad (5.25)$$

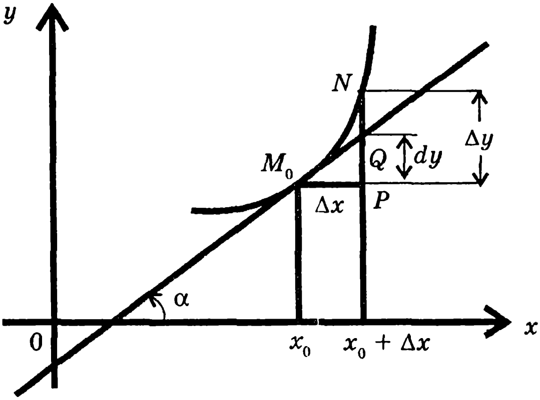


Рис. 106

(из ΔM_0PQ). Записав равенство (5.23) для касательной, получим:

$$\delta(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.26}$$

Значит, $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)$, где $\delta(x) << \Delta x$ при $\Delta x \to 0$, или коротко

$$\Delta y = dy + \delta(x). \tag{5.27}$$

Отсюда можно сделать вывод, что дифференциал функции является главной частью приращения, поскольку dy пропорционален Δx, а второе слагаемое есть б.м. более высокого порядка, чем Δx, а значит, и чем dy. Это дает возможность утверждать, что

$$\Delta y \approx dy. \tag{5.28}$$

На этом основано приближенное вычисление значений функции в точках, близких к фиксированной точке x_0. Именно из (5.26) и (5.28) следует, что

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{5.29}$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{626}$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\sqrt{x}.f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x_0=625,\ x=626,\ \Delta x=1,$$

$$f(x_0)=\sqrt{625}=25,\quad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{625}}=\frac{1}{2\cdot 25}=0{,}02.$$

Теперь имеем, используя (5.29), получаем:

$$\sqrt{626}\approx 25+0{,}02\cdot 1=25{,}02.$$

Отметим, что точность расчетов по формуле (5.29) невысока. Относительно хорошо получается лишь тогда, когда функция $f(x)$ является «очень плавной» и точка x очень близка к точке x_0. Поэтому вычисление по формуле (5.29) большого практического значения не имеет. Однако очень важна и продуктивна сама идея возможности приближения функций, в том числе и очень сложных по своей структуре, функциями простыми, хорошо изученными и легко вычисляемыми. Здесь мы видели аппроксимацию любой дифференцируемой функции функцией линейной. Точность приближения невысока именно по той причине, что аппроксимация ведется с помощью самой простой функции. В дальнейшем мы вернемся к вопросу приближения функций, но уже не только с помощью линейных функций, но и функций квадратичных, а также с помощью многочленов более высоких степеней. Оказывается, с повышением степени аппроксимирующего многочлена существенно повышается точность приближения.

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Мы уже видели, что если $f(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$dy\big|_{x_0}=f'(x_0)\Delta x. \tag{5.25}$$

Дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением, поскольку $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Следовательно, из (5.25) получаем:

$$dy = f'(x)dx, \tag{5.30}$$

т. е. нахождение дифференциала сводится к нахождению производной и приписыванию множителя dx.

Например,

$$d\left(x^3\right) = 3x^2dx, \quad d\left(e^{-x^2}\right) = e^{-x^2}(-2x)dx,$$

$$d\left(\sin^4 x\right) = 4\sin^3 x \cos x dx.$$

Основные свойства дифференциала следующие:

1) $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv$,

2) $d(uv) = udv + vdu$,

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{udv - vdu}{v^2}, (v \neq 0)$

Здесь $u = u(x)$, $v = v(x)$ – любые дифференцируемые функции.

Получим, например, 1):

$$d(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v)' dx = (\alpha u' + \beta v')dx =$$

$$= \alpha(u'dx) + \beta(v'dx) = \alpha du + \beta dv.$$

Формулы 2) и 3) вы легко получите по аналогии.

Рассмотрим дифференциал сложной функции.

Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Тогда

$$dy = y'_x dx = y'_u \cdot u'_x dx = y'_u \cdot (u'_x dx) = y'_u \cdot du.$$

Таким образом, формула

$$dy = y'_u du \tag{5.31}$$

оказывается верной и тогда, когда u — независимая переменная, и когда u — дифференцируемая функция. Этот факт называется теоремой о независимости вида дифференциала.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти дифференциалы следующих функций для допустимых значений аргумента.

1) $y = x\ln x - x$; 2) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$; 3) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$;

4) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$; 5) $y = e^{-x^4}$; 6) $y = \sin x - x\cos x$.

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения:

7) $\sqrt[3]{1{,}02}$; 8) $\sin 29^\circ$; 9) $\cos 151^\circ$; 10) $\lg 11$; 11) $\sqrt[100]{e}$;

12) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}}$.

Ответы: 7) 1,007; 8) 0,4849; 9) −0,8747; 10) 1,043; 11) 1,01; 12) 0,5078.

Глава 6
ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§1. ПОНЯТИЕ ЭКСТРЕМУМА. ТЕОРЕМЫ ФЕРМА И РОЛЛЯ

Пусть на множестве $E \subset R^n$ определена функция f.

Определение. Точка $\tilde{x} \in E$ называется точкой максимума функции f, если существует окрестность этой точки $U_\delta(\tilde{x})$ такая, что $f(\tilde{x}) \geq f(x)$ $\forall x \in U_\delta(\tilde{x})$.

Аналогично дается определение точки минимума (в этом случае $f(\tilde{x}) \leq f(x)$). Точки максимума и минимума имеют общее название точек экстремума.

На рис. 107 и 108 изображены, соответственно, функции одной и двух переменных, имеющие точки экстремума. У первой функции, заданной на множестве $E = (a, b)$ (рис. 107), x_1, x_3 – точки максимума, x_2, x_4 – точки минимума, у второй функции $z = x^2 + y^2$, определенной на всей плоскости (рис. 108), точка (0, 0) является точкой минимума, а точек максимума нет.

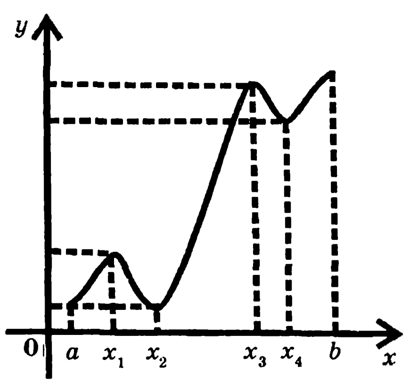


Рис. 107

Рекомендуем читателю при изучении теории экстремума обратить внимание на следующее обстоятельство. Экстремум – понятие локальное. Неравенства $f(\tilde{x}) \geq f(x)$ (для max) и $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ (для min) выполняется не на всем множестве (где задана функция f), а в какой-то, быть может, очень малой окрестности точки $\tilde{x}$. Легко за-

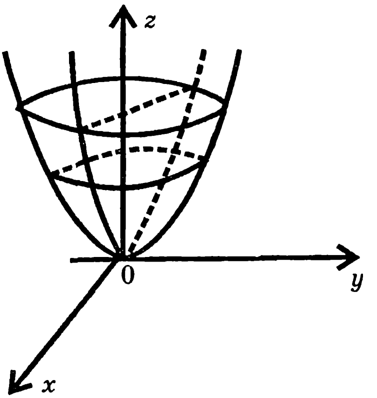


Рис. 108

метить, что у функции f (рис. 107) значение max в точке x_1 меньше, чем значение min в точке x_4. Наряду с понятиями max и min вводятся понятия наибольшего и наименьшего значений функции на множестве E. Это – понятия глобальные. Функция может иметь на множестве E даже несколько экстремумов и не иметь на E ни наименьшего, ни наибольшего значений (рис. 109). Если E – замкнутое множество, а f – непрерывная функция, то f обязательно принимает на E свои наибольшее и наименьшее значения (глава 4, теорема из 6.3). Ясно теперь, что наибольшее значение функции может достигаться либо в точке максимума, либо в граничных точках множества E. В частности, если рассматривается функция одной переменной на отрезке $[a, b] = E$, то ее наибольшее значение может достигаться либо во внутренней точке отрезка $[a, b]$, и тогда это точка максимума, либо в одной из граничных точек (а может быть и в обеих).

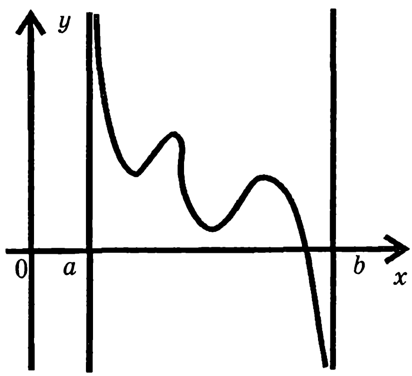


Рис. 109

Аналогичное положение имеет место и с наименьшим значением. У функции f, изображенной на рис. 107, наименьшее значение достигается во внутренней точке x_2 (это точка min) и в граничной точке a, а наибольшее – в граничной точке b.

ТЕОРЕМА ФЕРМА (НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА)

Если $\tilde{x}$ – точка экстремума функции f, и если в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$ – точка max. Тогда существует интервал $(\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta)$ такой, что $f(\tilde{x}) \geq f(x)$ для любой точки x из этого интервала. Таким образом, независимо от того, расположена ли точка x слева или справа от точки $\tilde{x}$, выполняется неравенство $f(x)-f(\tilde{x}) \leq 0$. Далее, из существования производной в точке $\tilde{x}$ имеем:

$$f'(\tilde{x}) = \lim_{\substack{x \to \tilde{x} \\ (x<\tilde{x})}} \frac{f(x)-f(\tilde{x})}{x-\tilde{x}};\quad f'(\tilde{x}) = \lim_{\substack{x \to \tilde{x} \\ (x>\tilde{x})}} \frac{f(x)-f(\tilde{x})}{x-\tilde{x}}$$

Дробь, стоящая под знаком предела в первом равенстве, неотрицательна; поэтому, применив теорему о позитивности предела, получим, что $f'(\tilde{x}) \geq 0$. Из второго равенства следует, что $f'(\tilde{x}) \leq 0$. Значит, $f'(\tilde{x}) = 0$.

Замечание. Условие равенства нулю производной, являясь необходимым условием экстремума, не является

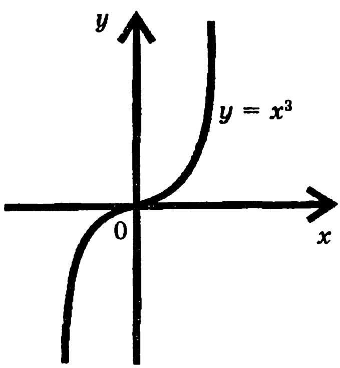


Рис. 110

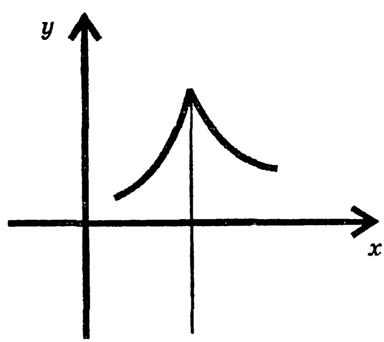


Рис. 111

достаточным. Так, у функции $f(x) = x^3$ (рис. 110) производная в точке $\tilde{x} = 0$ равна нулю. Однако эта точка не является точкой экстремума, ибо $f(0) = 0$, в то время как $f(x) < 0 \quad \forall x < 0$ и $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$. Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными. Кроме стационарных точек, «подозрительными» на экстремум являются такие, где $f'(x)$ не существует (рис. 111). Стационарные точки и точки, где нет производной, называются критическими.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

В точках экстремума дифференцируемой функции касательная к графику параллельна оси абсцисс (рис. 112).

Убедитесь в этом самостоятельно, исходя из геометрического смысла производной.

ТЕОРЕМА РОЛЛЯ. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$
2) дифференцируема на интервале (a, b)
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in [a, b]$, такая, где $f'(c) = 0$.

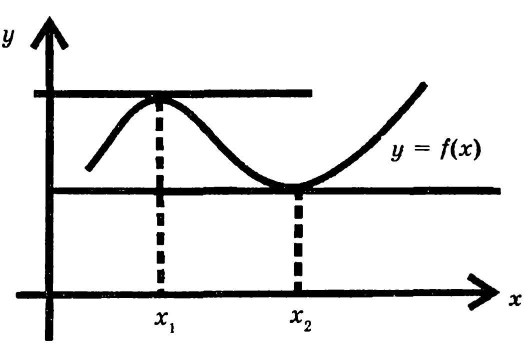


Рис. 112

Доказательство. Так как f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то хотя бы в одной точке этого отрезка она достигает наибольшего значения M и хотя бы в одной точке – наименьшего m (глава 4, теорема 2 из 6.3). Для всех остальных точек отрезка: $m \le f(x) \le M$ (глава 4, теорема 6.3).

Если, $m = M$, то $f(x) = \text{const}$ и, значит, $f'(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. В таком случае в качестве точки c можно взять любую точку из (a, b). Если же $m \ne M$, то из условия $f(a) = f(b)$ вытекает, что хотя бы одно из значений m или M достигается во внутренней точке отрезка $[a, b]$. Именно эту точку мы обозначим через c. Ясно, что c – точка экстремума. По теореме Ферма $f'(c) = 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ

Если функция f удовлетворяет условиям 1) – 3), то в интервале (a, b) существует хотя бы одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс (рис. 113, 114).

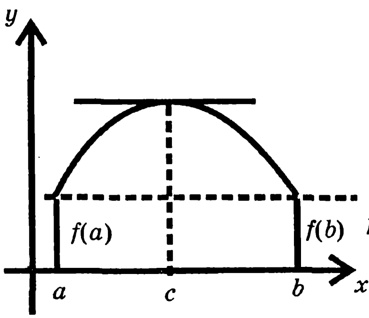


Рис. 113

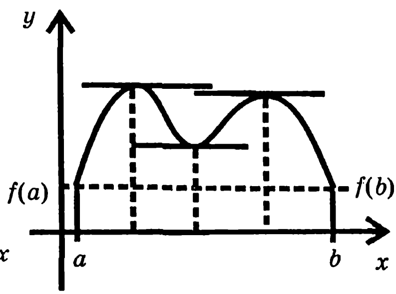


Рис. 114

Теоретическое упражнение. Докажите следующее утверждение: между двумя нулями дифференцируемой функции находится хотя бы один нуль ее производной.

§ 2. ТЕОРЕМЫ КОШИ И ЛАГРАНЖА

ТЕОРЕМА КОШИ. Пусть функции f и g

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$,
2) дифференцируемы в интервале (a, b),
3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках (a, b). Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{6.1}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что формула (6.1) имеет смысл, т. е. что $g(b) \neq g(a)$. В самом деле, если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля нашлась бы точка $\xi \in (a, b)$, где $g'(\xi) = 0$, что противоречило бы условию 3). Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций. Ее производная

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x).$$

Наконец, $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$.

Следовательно, существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Отсюда

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

и значит,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Следующую исключительно важную теорему мы получим как следствие теоремы Коши.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. Если функция f

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2) дифференцируема в его внутренних точках, то существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a,\ b)$, в которой

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (6.2)$$

Доказательство. Полагая $g(x) = x$, имеем из (6.1)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (6.3)$$

где $a<c<b$. Отсюда $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, что и требовалось.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА

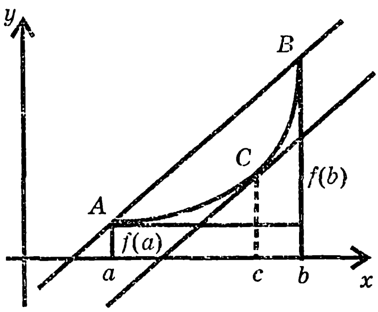


Рис. 115

Пусть $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ представляет собой угловой коэффициент хорды AB (рис. 115), в то время как $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $C(c, f(c))$.

Из (6.3) теперь ясно, что если функция удовлетворяет условиям 1) – 2), то в интервале (a, b) найдется хотя бы одна точка c, касательная в которой параллельна хорде, стягивающей концы графика.

Формула (6.2) выражает разность значений дифференцируемой функции через разность ее аргументов. Умножив (6.2) на -1, получаем: $f(a)-f(b)=f'(c)(a-b)$.

Это говорит о том, что формула (6.2) справедлива и в случае, когда $a < b$, и в случае, когда $b < a$.

Пусть x – произвольная точка, в которой функция f – дифференцируема, и пусть $x + \Delta x$ близкая к ней точка. При этом приращение аргумента Δx может быть и положительным и отрицательным. Применив к отрезку $[x, x + \Delta x]$ теорему Лагранжа, получим:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x \qquad (6.4)$$

где $x < c < x + \Delta x$ (когда $\Delta x > 0$) или $x + \Delta x < c < x$ (когда $\Delta x < 0$). Ясно, что существует число $\Theta, 0<\Theta<1$, такое, что $c = x+\Theta\Delta x$ и тогда имеем из (6.4):

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\Theta\Delta x)\Delta x\,. \qquad (6.5)$$

Формула (6.5) называется формулой конечных приращений в отличие от приближенного равенства $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$, которое называется формулой бесконечно малых приращений.

Следствие. Если функция f – непрерывна на $[a, b]$ и во всех его внутренних точках имеет производную, равную нулю, то она постоянна на данном отрезке.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – две произвольные точки из $[a, b]$, $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[a, b]$ теорему Лагранжа. Будем иметь

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1), \qquad (6.6)$$

где $x_1 < c < x_2$. Но $f'(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, так что, в частности $f'(c) = 0$. Из (6.6) следует тогда, что $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$.

Но x_1 и x_2 – произвольные точки отрезка $[a, b]$. Значит, f принимает одинаковые значения во всех точках отрезка $[a, b]$, т. е. она постоянна.

§3. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

ТЕОРЕМА (ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ). Пусть функции f и g

1) непрерывны в точке a и в некоторой ее окрестности;

2) дифференцируемы в окрестности точки a, причем $g'(x) \neq 0$,

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,

4) существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения данных функций и справедливо равенство:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Так как функция f непрерывна в точке a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ и, это значит с учетом условия 3), что $f(a) = 0$. Аналогично получаем, что $g(a) = 0$. В таком случае имеем:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \qquad (6.7)$$

Применяя теорему Коши на отрезке $[a, x]$, продолжим равенство (6.7):

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad (6.8)$$

где $a < c < x$. Условие $x \to a$ влечет за собой условие $c \to a$. Поэтому мы вправе продолжить (6.7) и (6.8), в результате чего получим:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Самое последнее равенство означает лишь другое обозначение аргумента. Доказательство окончено.

Замечание. Теорема остается справедливой и в следующих случаях:

1) когда $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ или $= -\infty$,

2) когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$,

3) когда $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, т. е. когда рассматриваются неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 1. Вычислить $A = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 7x - 8}{4x^5 + x^2 - 5}$

Решение. Выполнение условий 1) – 3) теоремы очевидны. Условие 4) проверим в ходе вычислений. Применяя правило Лопиталя, имеем:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3+7}{20x^4+2x} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Выполнение условия 4) всегда будет проверяться в ходе вычислений. Поэтому, для того, чтобы иметь возможность применять правило Лопиталя при вычислении предела отношения дифференцируемых в окрестности точки a функций, достаточно убедиться лишь в том, что эти функции либо обе являются в точке a бесконечно малыми (неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$) либо обе — бесконечно большими (неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

Пример 2. Найти $A = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$. Числитель и знаменатель дроби являются бесконечно малыми функциями при $x \to 2$. Поэтому правило Лопиталя применять можно. Значит,

$$A = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^2-3}\cdot 2x}{2x+3} = \frac{4}{7}.$$

Пример 3. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{18-x}-4}{\sqrt{6-x}-2}$. Здесь мы снова имеем дело с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, поскольку в числителе и в знаменателе находятся функции бесконечно малые при $x \to 2$. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{18-x}}\cdot(-1)}{\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}\cdot(-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{18-x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4. Найти $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\mathrm{in}\left(1+2^x\right)}$. В этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+3^x}\cdot 3^x\cdot\ln 3}{\dfrac{1}{1+2^x}\cdot 2^x\cdot\ln 2}=\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(1+2^x\right)}{2^x\left(1+3^x\right)}.$$

Снова имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Но теперь для ее раскрытия достаточно каждое слагаемое и числителя, и знаменателя разделить на произведение $3^x\cdot 2^x$. В результате имеем:

$$A=\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2^x}+1}{\dfrac{1}{3^x}+1}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Пример 5. Найти $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Применяя правило Лопиталя, заменим, как обычно, предел отношения данных функций пределом отношения их производных. Получаем

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

Однако в данном случае отношение производных тоже представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. К результату приводит второе применение правила Лопиталя:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2..$$

Правило Лопиталя является исключительно важным инструментом для вычисления пределов. Очень часто раскрытие неопределенностей оказывается возможным именно благодаря этому правилу.

Пример 6. Найти $A = \lim_{x \to \infty} \left(4^x + 5x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства и, с учетом того, что логарифм является непрерывной функцией, переставим знаки логарифма и предела. Тогда будем иметь

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x \to \infty} \left(4^x + 5x^2\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x \to \infty} \ln\left(4^x + 5x^2\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(4^x + 5x^2\right)}{x}.$$

Получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применив правило Лопиталя, получаем

$$\ln A = \lim_{x \to ℵ} \frac{\frac{1}{4^x + 5x^2} \cdot \left(4^x \ln 4 + 10x\right)}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \ln 4 + 10x}{4^x + 5x^2}.$$

Вновь перед нами неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Применив правило Лопиталя еще трижды, имеем:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \ln^2 4 + 10}{4^x \operatorname{in} 4 + 10x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \ln^3 4}{4^x \ln^2 4 + 10} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \ln^4 4}{4^x \ln^3 4} = \ln 4..$$

Итак, $\ln A = \text{lп}4$.
Отсюда $A = 4$.
Значит,

$$\lim_{x \to \infty} \left(4^x + 5x^2\right)^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Пример 7. Найти $A = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^{16} + 9x^7 + 8}{20x^{16} + 17x^{12} + 4x^2 + 1}$.

В данном случае применять правило Лопиталя нерационально. В самом деле, каждое применение этого правила снижало бы степень числителя и знаменателя лишь на единицу. Значит, для получения результата пришлось бы применить правило 16 раз. В то же время, заменяя числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно большими функциями, сразу получаем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^{16}}{20x^{16}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Во многих случаях оказывается полезным сочетание правила Лопиталя с заменой некоторых бесконечно малых (или бесконечно больших) функций их эквивалентными.

Пример 8. $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{16x^2} - \cos x}{\sin x \cdot \operatorname{arctg} 4x}$.

Непосредственное использование правила Лопиталя (а здесь его пришлось бы применять дважды) привело бы к громоздким выкладкам, так как в знаменателе надо находить производную произведения. Значительно проще заменить бесконечно малые (при $x \to 0$) функции $\sin x$ на x и $\operatorname{arctg} 4x$ на $4x$ и уже затем применить правило Лопиталя, в результате получим:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^{16x^2} - \cos x}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{e^{16x^2} \cdot 32x + \sin x}{2x} =$$

$$= \frac{1}{8} \left[32 \lim_{x \to 0} e^{16x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{33}{8}.$$

Пример 9. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to \infty} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

Решение. Предполагая, что искомый предел существует, будем искать сначала $\ln A$. При этом мы переставим местами знак логарифма со знаком предела, поскольку логарифм-функция непрерывная

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x \to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \to 0} \left[\ln (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \right] =$$

$$\lim_{x \to 0} [\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\cos x = 0\,.$$

Итак, $\ln A = 0 \Rightarrow A = 1$.

В заключение докажем важный факт, который мы неоднократно будем использовать в дальнейшем.

Теорема. Если α – любое положительное число и a – любое число, большее единицы, то при $x \to \infty$ имеет место следующая шкала роста б.б. функций: $\ln x \ll x^{\alpha} \ll a^{x}$.

Для доказательства первой части утверждения рассмотрим предел отношения $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\leftarrow\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = 0.$$

Переходим ко второй части утверждения. Число α запишем в виде $\alpha = k + \alpha_0$, где k – целая часть числа $\alpha, k \ge 0{,}0 < \alpha_0 < 1$. Для нахождения предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}$ применим правило Лопиталя $k+1$ раз в результате получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln a} = \frac{\alpha}{\ln a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{a^{x}} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\ln a)^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-2}}{a^{x}} = \qquad =$$

(после k применений правила Лопиталя)

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(\ln a)^{k}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha_0}}{a^{x}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)\alpha_0}{(\ln a)^{k+1}}\,.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-\alpha_0}\cdot a^x}=0,$$

поскольку $1-\alpha_0>0 \Rightarrow x^{1-\alpha_0}\to\infty$ и $a^x\to\infty$. Теорема доказана.

Сделаем еще одно замечание. Практика показывает, что правило Лопиталя является мощным средством нахождения пределов. Однако его нельзя считать универсальным, в чем легко убедиться на простом примере.

Пример 10. Найти $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Здесь мы не имеем права применять правило Лопиталя, мы не можем писать $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}$, так как правая часть не существует, ибо не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$. Исходный предел нетрудно найти, исходя из других соображений. Разделив числитель и знаменатель дроби на x (что естественно при $x\to\infty$), мы получаем $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}$ Теперь, учитывая что $\sin x$ – функция ограниченная на всей числовой оси, а $\dfrac{1}{x}$ – б.м. функция при $x\to\infty$, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow A=1.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+5}{4x^3+3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$; $(a>0)$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{arctg}4x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{22+x}-5}{\sin(x-3)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+2x^2-24}{x^3+4x-16}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x^2-9}-1}{x^2-4x+3}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sin\dfrac{2}{x}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{tg}2x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2+2x-8}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{4x^2+x+1}$;

19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin\pi x}$;

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+\sin 2x)}$.

2-Й УРОВЕНЬ

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;   22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$;   24) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{ctg}2x}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{e^x-x-1}$; 26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$;

27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}$;   28) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\operatorname{tg}x)}$;

29) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$;   30) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x^3}$

31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;   32) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

3-Й УРОВЕНЬ

33) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$;   34) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$;

35) $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$

(Указание. Воспользуйтесь формулой $u^v=e^{v\ln u}$ и непрерывностью показательной функции)

36) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$; 37) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 38) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$

39) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^x+3x^2\right)^{\frac{1}{x}}$; 40) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

Ответы: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{144}$; 6) 4;

7) $a^b \ln a$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) $\frac{1}{10}$; 10) $\frac{5}{2}$; 11) 12; 12) 3; 13) $\frac{1}{2}$;

14) $\frac{3}{2}$; 15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{1}{2}$; 17) $\frac{1}{6}$; 18) $\frac{1}{2}$; 19) -2; 20) $\frac{5}{2}$;

21) $\frac{1}{3}$; 22) $\frac{1}{9}$; 23) $-\frac{1}{2}$; 24) -1; 25) 1; 26) $\frac{49}{198}$; 27) 0;

28) 2; 29) $-\frac{2}{\pi}$; 30) 0; 31) 0; 32) $-\frac{1}{3}$; 33) 1; 34) $\frac{\alpha-\beta}{2}$;

35) 1; 36) $-\frac{1}{3}$; 37) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 38) 1; 39) 3; 40) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Глава 7.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

§1. МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ

Функция f называется ***возрастающей на интервале*** (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ (рис. 116, 117).

Функция f называется убывающей на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ (рис. 118, 119).

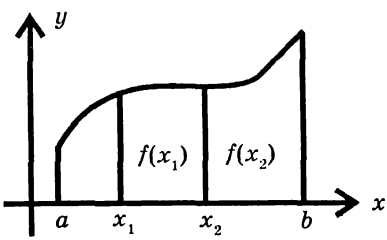


Рис. 116

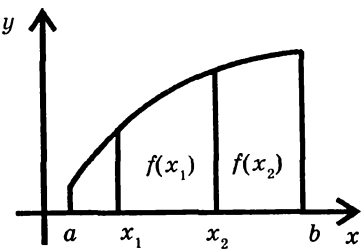


Рис. 117

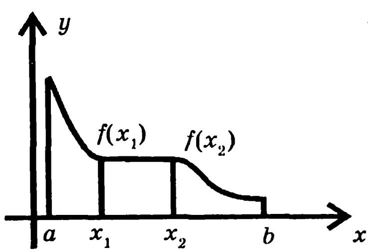


Рис. 118

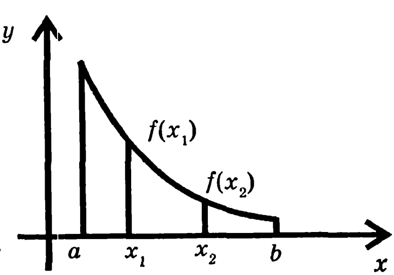


Рис. 119

Функции, изображенные на рисунках 117, 119, называются соответственно строго возрастающей и строго убывающей. Возрастающие и убывающие функции носят общее название монотонных функций. Критерий монотонности дает следующая

Теорема 1.1. Для того чтобы дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастала на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Для того чтобы она убывала на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Доказательство необходимости.

Дано, что f – возрастающая функция на (a, b). Пусть x – произвольная точка из (a, b) и $x + \Delta x \in (a, b)$. Если $\Delta x < 0$, то

$$x + \Delta x < x \Rightarrow f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0$$

и отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Если, $\Delta x > 0$, то

$$x + \Delta x > x \Rightarrow f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$$

и снова отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. По теореме о позитивности предела можно сделать вывод, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

независимо от того, стремится ли $\Delta x \to 0$ слева или справа.

Доказательство достаточности.

Нам дано, что $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. По теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1,\ x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Отсюда, $f(x_2) \geq f(x_1)$ и, поскольку x_1 и x_2 произвольные точки из $(a,\ b)$, то f – возрастающая функция.

Упражнение. Докажите самостоятельно теорему **1.1.** для убывающей функции.

Вернемся к теории экстремума.

В **§ 1** главы **6** было дано необходимое условие экстремума (теорема Ферма), суть которого в следующем:

если x_0 – точка экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Мы уже говорили о том, что необходимое условие экстремума не является достаточным и приводили соответствующий пример на стр. 223.

Полезность необходимого условия состоит в том, что оно позволяет найти все точки, «подозрительные» на экстремум (критические точки). Для исследования каждой такой точки используются достаточные условия экстремума.

Теорема 1.2. Если при переходе через критическую точку x_0 (в которой $f(x)$ непрерывна) производная :

а) меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума,

в) меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка минимума,

с) не меняет знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство пункта а).

Пусть

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где $c \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

В левой полуокрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ имеем:

$$\begin{cases} f'(c) > 0 \\ x - x_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

В правой полуокрестности $(x_0, x_0 + \delta)$:

$$\begin{cases} f'(c) < 0 \\ x - x_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Итак, $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$. Это означает, что x_0 – точка максимума.

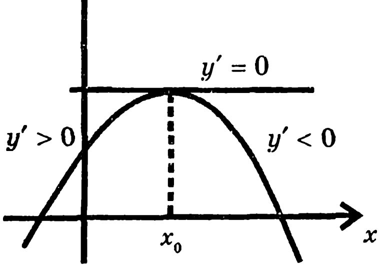


Рис. 120

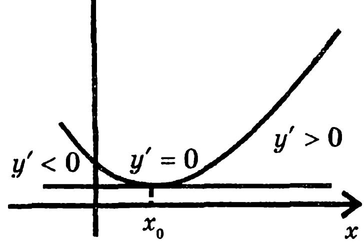


Рис. 121

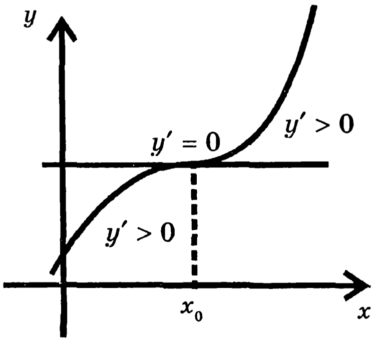


Рис. 122

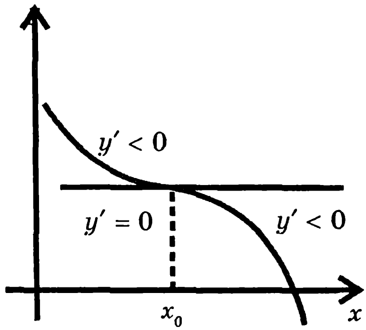


Рис. 123

Пункты в) и с) этой теоремы докажите самостоятельно.

Иллюстрацией необходимого и достаточного условий экстремума могут служить рис. 120–127. На всех восьми рисунках необходимое условие экстремума выполнено – производная либо равна нулю (рис. 120–123), либо не существует (рис. 124–127).

Что касается достаточного признака, то на рис. 120, 121, 124, 125 мы наблюдаем перемену знака производной при переходе через критическую точку x_0 и наличие экстремума, а на рис. 122, 123, 126, 127 производная не меняет знака и экстремумов нет.

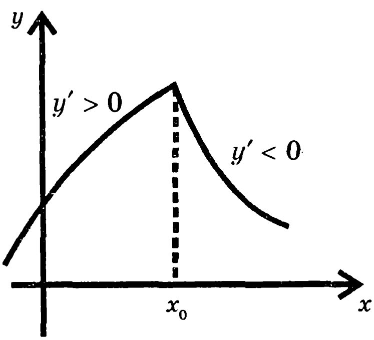


Рис. 124

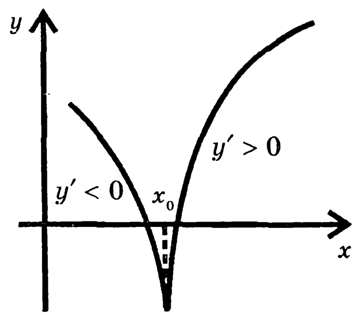


Рис. 125

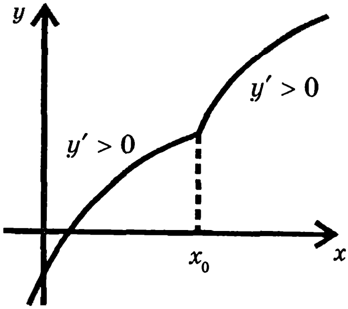


Рис. 126

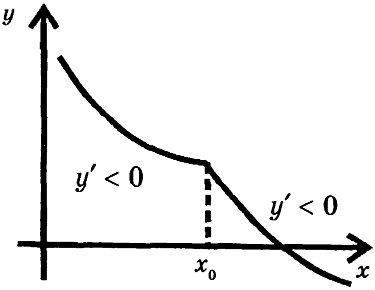


Рис. 127

План решения задач на нахождение экстремумов состоит в следующем:

1-й этап — поиск критических точек, то есть точек «подозрительных» на экстремум. С этой целью находим точки, где $f'(x) = 0$ (стационарные) и точки где $f'(x)$ не существует.

2-й этап – анализ каждой критической точки, где выясняется, меняется знак производной при переходе через эту точку (и тогда экстремум есть) или не меняется (и тогда экстремума нет). Параллельно с этим находятся интервалы возрастания и убывания функции.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

1-й этап. Находим производную $y' = 15x^4 - 15x^2$.

Существует она на всей числовой оси. Поэтому «подозрительными» на экстремум будут только точки, в которых $y' = 0$. Решаем уравнение

$$15x^4 - 15x^2 = 0;$$
$$x^2(x^2 - 1) = 0.$$

Получаем три точки. Выписывая их в порядке возрастания, имеем:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Все дальнейшие рассуждения оформим в виде таблицы.

Таблица 2

x	$-\infty;-1$	-1	$-1;0$	0	$0;1$	1	$1;+\infty$
y'	+	0	–	0	–	0	+
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$
характер критических точек		max		нет экстремума		min	

На каждом из образованных интервалов определяем знак производной, например, вычислив значение производной в одной точке (произвольной) каждого интервала:

$$y'(-2)=180,\ y'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{45}{16},\ y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{45}{16},\ y'(2)=180.$$

Расставляем знаки производной в таблице. Эти знаки дают возможность сделать вывод, где функция возрастает и где убывает (на основании теоремы 1.1.), что мы показываем стрелочками соответственно направленными вверх и вниз. Теперь становится ясным, что $x_1=-1$ – точка максимума, $x_3=1$ – точка минимума, а в точке $x_2=0$ экстремума нет (как убывала функция до этой точки, так и убывает после нее). Максимальное значение функции находим вычислив его в точке $x_1=-1$, $y_{\max}=y(-1)=2$.

Аналогично, $y_{\min}=y(1)=-2$.

Пример 2. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$$

Решение.

$$y'=2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}}.$$

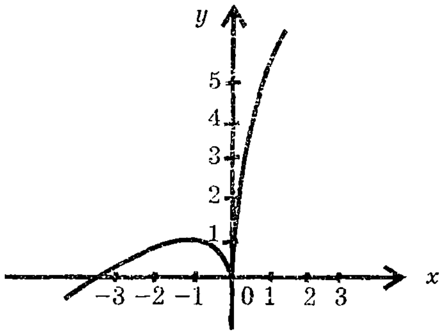


Рис. 128

Из условия $y' = 0$ находим первую критическую точку

$$2\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Другая критическая точка $x_2 = 0$. Эта точка, в которой y' не существует (заметим, что сама данная нам функция в этой точке определена и непрерывна). Переходим ко второму этапу. Разберите самостоятельно содержимое таблицы:

Таблица 3

x	$-\infty; -1$	-1	$-1; 0$	0	$0; +\infty$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$
характер критических точек		max		min	

Оказывается график данной функции имеет вид, показанный на рис. 128.

Найти интервалы монотонности (возрастания и убывания) и точки экстремумов функций

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; 2) $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$;

3) $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$; 4) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; 5) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

6) $y = x\ln x$; 7) $y = x^2e^{-x}$; 8) $y = x - \operatorname{arctg} x$.

Ответы: 1) $y_{\max} = y(-1) = \dfrac{5}{3}$, $y_{\min} = y(3) = -9$.

2) $y_{\max} = y(-2) = y(2) = 5$, $y_{\min} = y(0) = 1$.

3) $y_{min} = y(3) = -\dfrac{27}{4}$. 4) $y_{\max} = y(0) = 1$.

5) $y_{\max} = y(1) = -4$, $y_{\min} = y(5) = 4$.

6) $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$. 7) $y_{\max} = y(2) = \dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

8) экстремумов нет.

§2. ВЫПУКЛОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в каждой точке этого интервала имеет конечную производную $f'(x)$. Пусть x_0 – некоторая точка из (a, b). Если в этой точке существует производная функции $f'(x)$, то она называется второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$. Если $f''(x)$ существует $\forall x \in (a, b)$, то говорят, что функция дважды дифференцируема на этом интервале. Аналогичным образом вводятся производные более высоких порядков.

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)', \ f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$$

и, вообще, $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка, то она называется бесконечно дифференцируемой.

Вернемся к вопросу изучения графиков функций. В §1 мы видели, что первая производная функции $f(x)$ характеризует возрастание и убывание функции. Вторая производная тоже играет существенную роль при исследовании графиков. Чтобы раскрыть эту роль, введем новые понятия.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда в каждой точке графика $M(x, f(x))$ существует невертикальная касательная к данной кривой.

Определение. Будем говорить, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ выпукла вверх, если в пределах указанного интервала график функции расположен ниже касательной (кроме точки касания.) Будем говорить, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ выпукла вниз, если в пределах указанного интервала график функции расположен выше касательной (кроме точки касания).

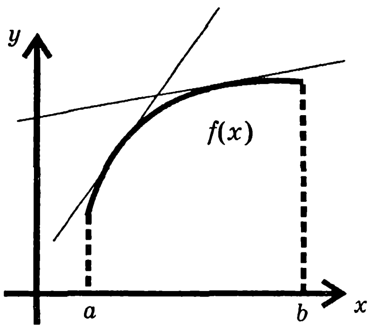


Рис. 129

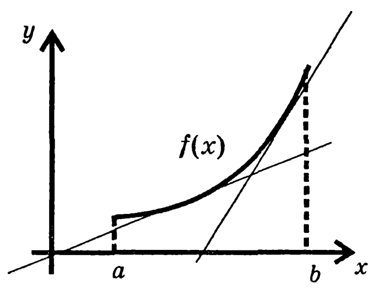


Рис. 130

На рис. 129 изображена функция выпуклая вверх, а на рис. 130 – выпуклая вниз.

Пусть функция $f(x)$ имеет в каждой точке интервала (a, b) конечную вторую производную.

Теорема 2.1 (достаточный признак выпуклости).

Если $\forall x \in (a,\ b)\ f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх на (a, b).

Если $\forall x \in (a,\ b)\ f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз на (a, b).

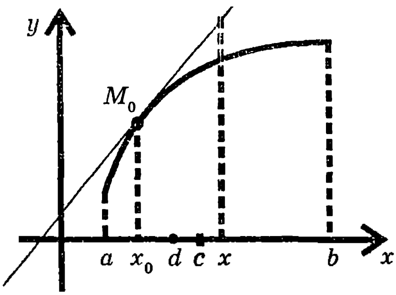


Рис. 131

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка из (a, b). Проведем в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную к данной кривой. Ее уравнение имеет вид

$$y_{kac} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Рассмотрим разность

$$f(x) - y_{kac} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \qquad (7.1)$$

На отрезке $[x_0, x]$ к функции $f(x)$ применим теорему Лагранжа, согласно которой найдется точка $c \in [x_0,\ x]$ такая, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Учитывая это в (7.1), имеем:

$$f(x) - y_{kac} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0). \qquad (7.2)$$

Теперь, применив теорему Лагранжа к функции $f'(x)$ на отрезке $[x_0, c]$, получим:

$$f(x) - y_{kac} = f''(d)(c - x_0)(x - x_0), \qquad (7.3)$$

где $d \in [x_0, c]$. Независимо от того, расположена ли точка x справа от x_0 (как на рис. 131) или слева от нее, произведение $(c - x_0)(x - x_0)$ положительно. Если теперь известно, что $\forall x \in (a, b)\ f''(x) < 0$, то

$$f''(d) < 0 \Rightarrow f(x) - y_{kac} < 0 \Rightarrow f(x) < y_{kac},$$

то есть во всех точках интервала (a, b), за исключением точки касания, график функции $f(x)$ расположен ниже касательной. Значит, $f(x)$ выпукла вверх. Аналогичным образом, из (7.3) следует второе утверждение теоремы.

Теорема 2.2 (необходимое условие выпуклости).

Если $f(x)$ выпукла вверх на интервале и имеет в каждой точке интервала, непрерывную вторую производную, то $f''(x) \le 0\ \ \forall x \in (a, b)$.

Если $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) и имеет в каждой точке интервала непрерывную вторую производную, то $f''(x) \ge 0\ \forall x \in (a, b)$.

Докажем первую часть теоремы.

Предполагая противное, мы допускаем существование точки $x_0 \in (a, b)$, такой, что $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ найдется интервал $(x - \delta, x_0 + \delta)$ где $f''(x) > 0$. На основании второго утверждения теоремы 2.1 делаем вывод, что $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(x - \delta, x_0 + \delta)$, что противоречит условию (ведь по условию $f(x)$ выпукла вверх на всем интервале (a, b) и, тем более, на его части $(x - \delta, x_0 + \delta)$).

Познакомимся еще с одним важным понятием.

Определение. Точка M_0 называется точкой перегиба, если в этой точке существует касательная и при переходе через M_0 график функции меняет выпуклость вверх на выпуклость вниз или наоборот.

Теорема 2.3 (необходимое условие точки перегиба).

Если $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба и если в окрестности точки x_0 существует непрерывная вторая производная, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Допустим, что при переходе через точку M_0 функция меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх. Слева от точки M_0, вблизи нее, кривая выпукла вниз; значит, $f'(x) \geq 0$ (на основании теоремы 2.2). Поэтому в силу непрерывности $f'(x)$,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f''(x) \geq 0 \tag{7.4}$$

Справа от точки M_0, вблизи нее, кривая выпукла вверх; отсюда $f'(x) \leq 0$ и, значит,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f''(x) \leq 0 \tag{7.5}$$

Из (7.4) и (7.5) следует, что $f'(x_0) = 0$.

Необходимое условие точки перегиба не является достаточным. Убедитесь в этом на примере функции $f(x) = x^4$ (в точке $x_0 = 0$). Заметим, что подозрительными на перегиб являются те точки, в которых существует касательная, а $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 2.4 (достаточное условие точки перегиба).

Если при переходе через подозрительную точку x_0 $f'(x)$:

1) меняет знак с «+» на «—», то $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба, в которой кривая меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх;

2) меняет знак с «—» на «+», то $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба, в которой кривая меняет выпуклость вверх на выпуклость вниз;

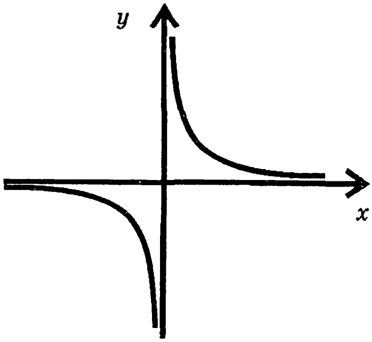


Рис. 132

3) не меняет знака, то $M_0(x_0, f(x_0))$ не является точкой перегиба.

Доказательство. 1) слева от точки x_0 вблизи нее $f''(x) > 0$. Отсюда, на основании теоремы 2.1, следует, что $f(x)$ выпукла вниз. Справа от x_0, вблизи нее, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ выпукла вверх. Итак, при переходе через точку x_0 кривая меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх. Это означает, что $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

Пункты 2) и 3) теоремы разберите самостоятельно.

Обратим внимание читателя на тот факт, что график функции может менять выпуклость вверх на выпуклость вниз (или наоборот) не только при переходе через точку перегиба, но и при переходе через точку разрыва.

В качестве простейшего примера можно взять гиперболу $y = \frac{1}{x}$. Точка $x_0 = 0$ является точкой бесконечного разрыва этой функции. Слева от точки x_0: $y'' = \frac{2}{x^3} < 0$ и кривая выпукла вверх, а справа от x_0: $y'' > 0$ и кривая выпукла вниз (рис. 132).

ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ВЫПУКЛОСТИ И ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1 этап — поиск точек, подозрительных на перегиб. С этой целью находим вторую производную и выясняем точки, где $f''(x) = 0$ и где она не существует (но существует касательная).

2 этап — анализ каждой из полученных точек. Здесь мы выясняем меняется или не меняется знак $f''(x)$ при переходе через подозрительную точку, после чего можно делать выводы и относительно интервалов выпуклости и относительно точек перегиба.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$.

1 этап. Находим производные

$$y' = 4x^3 - 12x - 6, \quad y'' = 12x^2 - 12.$$

Определяем подозрительные на перегиб точки:

$$y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = 1.$$

Так как y'' определена и непрерывна на всей числовой оси, то других подозрительных точек на перегиб нет.

2 этап рассуждений оформим в виде таблицы:

Таблица 4

x	$-\infty; -1$	-1	$-1; 1$	1	$1; +\infty$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	2	$\cap$	-10	$\cup$
характер точек перегиба					

Из таблицы видно, что на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ данная функция выпукла вниз, а на интервале $(-1, 1)$ – выпукла вверх. Точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ являются точками перегиба графика функции. Характер перегибов показан в нижней строке таблицы.

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x+2}$.

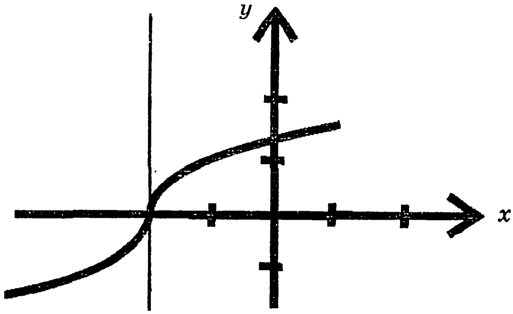


Рис. 133

Решение. Находим производные

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}, \quad y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}$$

y'' в нуль не обращается. Единственной подозрительной на перегиб является точка, где знаменатель y'' обращается в нуль; это точка $x = -2$. При $x < -2$, $y'' > 0$, а при $x > -2$, $y'' < 0$.

Это означает, что точка графика $(-2, 0)$ является точкой перегиба (рис. 133). Заметим, что касательная в этой точке параллельна оси ординат, ибо первая производная при $x = -2$ бесконечна.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функции.

1) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$; 2) $y = (x+1)^4$;

3) $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$; 4) $y = x^2\ln x$; 5) $y = (x^2 + 1)e^x$.

Ответы: 1) (2;12). 2) точек перегиба нет.

3) $\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$; $(0, 0)$; $\left(6, \frac{9}{2}\right)$. 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \frac{-3}{2e^3}\right)$.

5) $\left(-3, \frac{10}{e^3}\right)$; $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.

§3. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Теперь изложим схему, по которой целесообразно проводить исследование функции с целью построения ее графика и приведем примеры, иллюстрирующие эту схему. Вот основные пункты исследования:

1) находим область определения функции, выясняем, где она непрерывна, определяем точки бесконечного разрыва функции и вертикальные асимптоты (если $x = a$ — точка бесконечного разрыва функции, то прямая $x = a$ — вертикальная асимптота графика).

2) находим точки пересечения графика функции с координатными осями и определяем интервалы знакопостоянства функции;

3) выясняем, является ли данная функция четной ($y(-x) = y(x)$), нечетной ($y(-x) = -y(x)$) или это функция общего вида;

4) исследуем поведение функции при подходе к точкам разрыва слева и справа, тем самым выясняя, как график функции подходит к вертикальным асимптотам;

5) находим невертикальные асимптоты графика функции, исходя из уравнения $y = kx + b$ и соотношений:

$k = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx]$ для левосторонней асимптоты

и

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$ для правосторонней асимптоты.

Замечание. Часто асимптота является одновременно и левосторонней и правосторонней. Для дробно-рациональной функции это верно всегда.

6) Выясняем расположение графика относительно невертикальной асимптоты, определяя знак разности: $\delta(x) = f(x) - y_{\text{асимптоты}}$. Там, где $\delta(x) < 0$ – график функции лежит под асимптотой, где $\delta(x) > 0$ – график функции над асимптотой, а где $\delta(x) = 0$ – график пересекает асимптоту (при конечных значениях x это возможно).

7) Если невертикальных асимптот нет, то поведение графика на бесконечности выясняем, вычисляя

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

8) С помощью первой производной $f'(x)$ находим интервалы монотонности функции и точки экстремума.

9) С помощью второй производной $f''(x)$ находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика.

10) Завершаем построение графика, используя всю предыдущую информацию. В случае необходимости, вычисляем еще значения функции в одной-двух точках области определения.

Настоятельно рекомендуем изучающему наносить на рисунок элементы графика после каждого пункта исследования.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

1) Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, за исключением точки $x = 1$. В этой точке функция терпит бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика.

2) Находим точку пересечения графика с осью Ox, для чего полагаем в уравнении кривой $y = 0$. Получаем $x = 0$. Таким образом, данный график пересекает ось Ox в нача-

ле координат. Для нахождения точки пересечения с осью Oy полагаем $x = 0$; тогда $y = 0$, т. е. ось Oy график пересекает тоже в начале координат. Других точек пересечения с осями график не имеет. Для установления интервалов знакопостоянства заметим, что знаменатель функции в области определения всюду положителен. Значит, имеем: при $x < 0 \Rightarrow y < 0$, а при $x > 0 \Rightarrow y > 0$.

3) $$y(-x) = \frac{(-x^3)}{(-x-1)^2} = -\frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Так как $y(-x) \neq y(x)$, то функция не является четной; так как $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является нечетной. Значит, она общего вида. На основании рассмотренных пунктов 1) – 3) мы можем нанести на рис. 134 следующее:

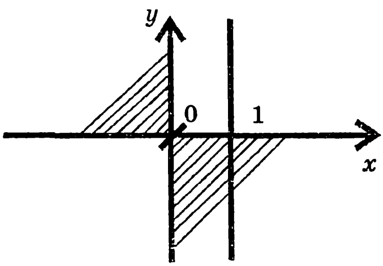


Рис. 134

Заштрихованы части плоскости, где графика не может быть. Элементарной дугой показано пересечение графиком оси абсцисс. Далее,

4) $$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$

так как $y > 0$ при $x \to 1$ и слева, и справа. Теперь график дополнится (рис. 135).

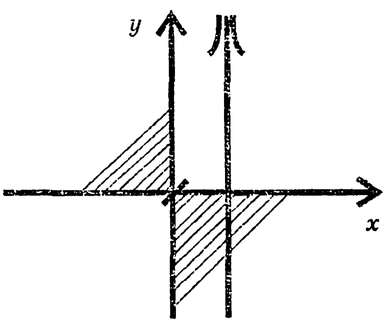


Рис. 135

5) Находим невертикальные асимптоты, используя эквивалентность б.б. функций:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=2$$

Итак, невертикальная асимптота имеет уравнение

$$y = x + 2.$$

Начертим ее (рис. 136) по двум точкам, например,

$$x = 0,\ y = 2;\ x = 2,\ y = 4.$$

б) $\delta(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-(x+2)=\dfrac{x^3-(x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2}=$

$$=\frac{x^3-(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Теперь ясно, что при $x<\dfrac{2}{3}:\delta(x)<0$, при

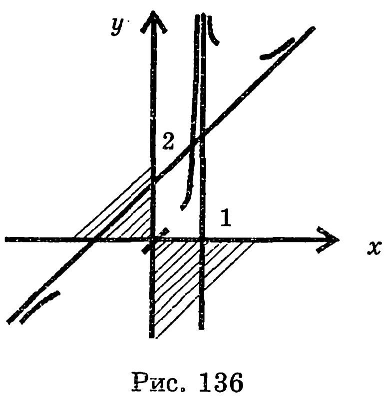


Рис. 136

$x > \frac{2}{3} : \delta(x) > 0$, а при $x = \frac{2}{3} : \delta(x) = 0$.

После пунктов 5) и 6) график можно дополнить. Слева от точки $x = \frac{2}{3}$ он расположен под асимптотой; в частности, при $x \to -\infty$ приближается к ней снизу. Когда $x = \frac{2}{3}$ график пересекает асимптоту и при $x > \frac{2}{3}$ он находится над асимптотой, поэтому при $x \to +\infty$ приближается к ней сверху (рис. 136):

8) $$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(3x-3-2x)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

Обратите внимание на технику преобразований: надо по возможности выносить общие множители за скобки, а не раскрывать все скобки сразу. Приравнивая $y' = 0$, получаем критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Учитывая еще точку разрыва функции $x = 1$, разбиваем числовую ось на интервалы знакопостоянства производной:

$$(-\infty, 0);\ (0, 1);\ (1, 3);\ (3, +\infty).$$

Выбирая по одной точке в каждом интервале, определяем эти знаки:

$$y'(-1) > 0,\ y'\left(\frac{1}{2}\right) > 0,\ y'(2) < 0,\ y'(4) > 0.$$

Составляем таблицу для определения интервалов монотонности функции и ее экстремумов:

Таблица 5

x	$-\infty$; 0	0	0 ; 1	1;3	3	3; $+\infty$
y'	+	0	+	–	0	+
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$
характер критических точек		нет экстр.	разрыв		min	

9) $y'' = \dfrac{\left(3x^2 - 6x\right)(x-1)^3 - 3(x-1)^2\left(x^3 - 3x^2\right)}{(x-1)^6} =$

$= \dfrac{(x-1)^2 3x\left[(x-2)(x-1) - x^2 + 3x\right]}{(x-1)^6} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = 0$ – точка, подозрительная на перегиб. Учитывая снова точку разрыва $x = 1$, составим таблицу для определения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба графика:

Таблица 6

x	$-\infty$; 0	0	0;1	1; $+\infty$
y'	–	0	+	+
y	$\cap$	0	$\cup$	$\cup$
Характер точек перегиба			разрыв	

10) Завершаем построение графика, подсчитав дополнительно еще две точки $y(-1) = -\dfrac{1}{4}$, $y(6) \approx 8{,}6$ (рис. 137).

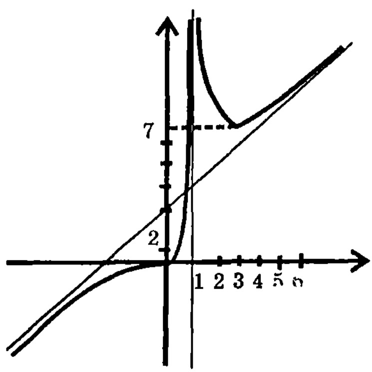


Рис. 137

Пример 2. Исследовать функцию $y = x^2e^{-x}$ и построить ее график.

1) функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2) находя точки пересечения графика с осью Ox, мы полагаем $y = 0$, тогда $x = 0$. Но из определения функции ясно, что $y \geq 0 \forall x \in R^1$, причем $y = 0$ только при $x = 0$, а при остальных x будет $y > 0$. Это говорит о том, что график лишь касается оси Ox сверху.

3) $y(-x) = (-x)^2e^{-(-x)} = x^2e^x$, $\begin{matrix} y(-x) \neq y(x) \\ y(-x) \neq -y(x) \end{matrix} \Rightarrow y(x)$ – функция общего вида.

5) находим параметры уравнения правосторонней асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} x^2e^{-x} = 0.$$

Таким образом, правосторонняя асимптота имеет уравнение $y = 0$, т. е. это ось абсцисс. Для левосторонней асимптоты имеем:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{-x}\right) = -\infty.$$

Значит, левосторонней асимптоты кривая не имеет.

6) $f(x) - y_{асимпт.} = x^2 e^{-x} > 0 \; \forall x.$

Это говорит о том, что кривая расположена над асимптотой (по существу, мы уже это выяснили в 2).

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$.

8) $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$; $y' = xe^{-x}(2 - x)$.

Находим критические точки:

$$y' = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Для анализа критических точек, а также для нахождения интервалов монотонности функции составим таблицу:

Таблица 7

x	$-\infty; 0$	0	$0; 2$	2	$2; +\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$
Характер критических точек		min		max	

9)

$$y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x},\ y'' = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$$

Приравнивая к нулю y'', получаем $x^2 - 4x + 2 = 0$, откуда имеем подозрительными на перегиб две точки $x_1 = 2 - \sqrt{2},\ x_2 = 2 + \sqrt{2}$. Составляем таблицу:

Таблица 8

x	$-\infty; 2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}; +\infty$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$
Характер перегибов					

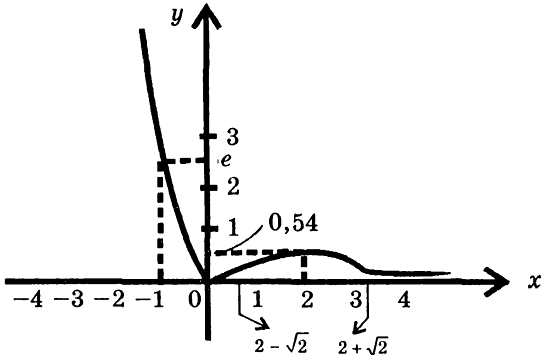


Рис. 138

10) Для выяснения скорости роста функции при $x \to -\infty$ вычислим значения функции дополнительно в двух точках: при $x = -1$, $y = e \approx 2{,}71$ и при $x = -1{,}3$, $y = 1{,}69 \cdot e^{1{,}3} \approx 6{,}2$. .

Теперь по всей имеющейся информации строим график (рис. 138).

Замечание. Здесь мы не выполняли рисунки поэтапно, а привели график целиком.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Исследовать функции и построить их графики.

1-Й УРОВЕНЬ

1) $y = 3x - x^3$; 2) $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$; 3) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + 2$;

4) $y = (x + 1)(x - 2)^2$; 5) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; 6) $y = \dfrac{2x-3}{3x+4}$;

7) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; 8) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; 9) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

10) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$; 11) $y = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$;

12) $y = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$; 13) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; 14) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$;

15) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; 16) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; 17) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$;

18) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$.

2-Й УРОВЕНЬ

19) $y = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$; 20) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$; 21) $y = \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$;

22) $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$; 23) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$; 24) $y = \dfrac{x^3-1}{x^2}$;

25) $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; 26) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$; 27) $y = (x-3)\sqrt{x}$;

28) $y = (4-x)\sqrt{x-1}$; 29) $y = x\ln x$; 30) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

31) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 32) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 33) $y = \ln(x^2+1)$;

34) $y = \ln(x+4)$; 35) $y = \ln(x^2-1)$; 36) $y = \ln(4-x^2)$;

37) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$; 38) $y = \ln(x-1) - \ln(x+1)$;

39) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$; 40) $y = xe^x$; 41) $y = \dfrac{x}{e^x}$; 42) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

43) $y = \frac{e^x}{x+1}$; 44) $y = x + e^{-x}$; 45) $y = \left(x^2+1\right)e^{-x^2}$;

46) $y = \ln(e^x + 1)$; 47) $y = \ln(e^x - 2)$; 48) $y = \ln(e^x + 1)$;

49) $y = \ln(e^x + 2)$; 50) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

3-Й УРОВЕНЬ

51) $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 52) $y = e^{\cos x}$;

53) $y = \sin x - \ln(\sin x)$; 54) $y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$;

55) $y = |x|^{|x|}$; 56) $y = |x|^{\frac{1}{|x|}}$.

§4. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ. ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Мы уже говорили о том, что максимум и минимум функции – понятия локальные. Сейчас перейдем к другой постановке вопроса.

На отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция, дифференцируемая во внутренних точках отрезка. Найти ее наибольшее и наименьшее значения.

Теорема 2, п 6.3, главы 4 утверждает, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ хотя бы в одной точке отрезка достигает своего наибольшего значения и хотя бы в одной точке -наименьшего. Совершенно ясно, что наибольшее значение функции может достигаться либо в точке максимума, либо на конце отрезка. Аналогично, наименьшее значение функция может принимать либо в точке минимума, либо на конце отрезка. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции таков:

1) находим критические точки, принадлежащие данному отрезку;

2) вычисляем значения функции в этих точках и на концах отрезка;

3) из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Замечание. Исследовать критические точки с помощью достаточного признака экстремума здесь не следует. В этом нет необходимости. В самом деле, если окажется, что наибольшее значение функции (соответственно наименьшее значение) достигается в какой-то критической точке, то ясно, что это точка максимума(соответственно точка минимума). Если значение функции в данной критической точке не окажется ни наибольшим, ни наименьшим, то эта точка нас больше не интересует.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 6x^2$ на отрезке $[-3; 1]$.

Решение. Находим критические точки:

$$y' = 3x^2 + 12x,\ 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 0.$$

Точка $x_1 = -4$ не принадлежит отрезку $[-3; 1]$; поэтому мы оставляем ее без внимания. Вычисляем значения данной функции в точке $x_2 = 0$, а также в точках $a = -3$ и $b = 1$. $f(0) = 0$, $f(-3) = 27$, $f(1) = 7$. Теперь можно сделать вывод, что наибольшее значение функция принимает на левом конце данного отрезка $f_{наиб} = f(-3) = 27$, а наименьшее – в критической точке $f_{наим} = f(0) = 0$.

Пример 2. Необходимо изготовить котел, имеющий форму цилиндра, завершенного полусферой. Каковы должны быть размеры котла, чтобы при заданной вместимости V на него пошло наименьшее количество материала?

Решение. Количество материала, необходимое для изготовления котла, пропорционально площади полной поверхности. Обозначим через R – радиус основания цилиндра (он же радиус сферы), а через H – его высоту (рис. 139). В таком случае площадь полной поверхности котла складыва-

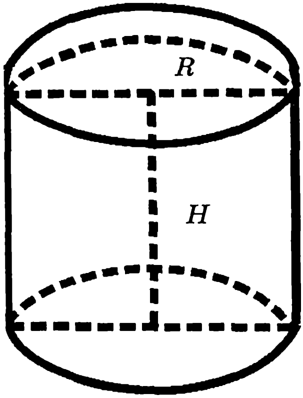


Рис. 139

ется из площади основания цилиндра πR^2, его боковой поверхности $2\pi RH$ и площади поверхности полусферы $2\pi R^2$ и выражается формулой

$$S = 2\pi RH + 3\pi R^2 \qquad (7.6)$$

Здесь S – функция двух переменных R и H. Нам удобнее представить S как функцию одной переменной. С этой целью используем условие задачи, что котел должен иметь заданный объем V. Это условие связывает между собой R и H формулой

$$V = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3 \qquad (7.7)$$

Из (7.7) следует, что $\pi R^2 H = V - \frac{2}{3}\pi R^3$. Так как $R > 0$, отсюда вытекает, что

$$\pi RH = \frac{V}{R} - \frac{2}{3}\pi R^2 \qquad (7.8)$$

Подставляя (7.8) в (7.6), имеем:

$$S(R) = 2\left(\frac{V}{R} - \frac{2}{3}\pi R^2\right) + 3\pi R^2$$

то есть $S(0) = 0$ и $S(R) = \frac{2V}{R} + \frac{5\pi R^2}{3}$ при $R > 0$ (7.9).

Теперь S – функция одной переменной. Каковы пределы изменения R? Левый предел, конечно, тривиален, $R = 0$.

Правый предел найдем из таких соображений: из (7.7) видно, что при заданном объеме V, чем меньше H тем больше R. $H_{min} = 0$, что соответствует $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$ Итак, мы должны найти наименьшее значение функции $S(R)$ на отрезке $\left[0, \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}\right]$. Теперь действуем по обычной схеме. Находим производную функции $S(R)$ при $R > 0$:

$$S'(R) = -\frac{2V}{R^2} + \frac{10\pi R}{3}.$$

Определяем критическую точку:

$$S'(R) = 0 \Rightarrow -\frac{2V}{R^2} + \frac{10\pi R}{3} = 0 \Rightarrow R_1 = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}.$$

Вычисляем значения $S(R)$ в критической точке и на концах отрезка. Расчеты показывают, что

$$S(0) = 0,\ S(R_1) = \sqrt[3]{45\pi V^2},\ S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{18\pi V^2}$$

$R = 0$ с физической точки зрения означает, что котел не изготавливается вовсе. Поэтому минимальный расход материала на изготовление котла заданного объема V будет при $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ Этому значению R соответствует значение $H = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, которое получается теперь из (7.8). Минимальный расход материала при этом находится из (7.6) и равен $\sqrt[3]{45\pi V^2}$

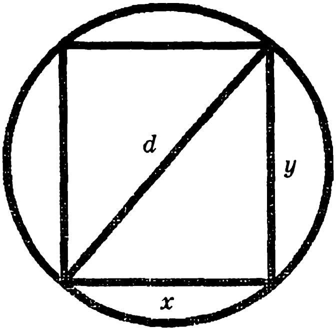


Рис. 140

Пример 3. Из круглого бревна нужной длины и заданного диаметра d (рис. 140) вырезать балку прямоугольного сечения, имеющую наибольшую жесткость.

Решение. Жесткость балки – это способность мало изгибаться под нагрузками. Обозначим через x длину основания прямоугольника в сечении, а через y – его высоту. **Из** теории сопротивления материалов известно, что жесткость балки прямоугольного сечения (обозначим ее через f) пропорциональна величине xy^3, то есть $f = kxy^3$, где k – коэффициент пропорциональности.

Представим f – как функцию одной переменной. По теореме Пифагора $x = \sqrt{d^2 - y^2}$ поэтому имеем $f = ky^3\sqrt{d^2 - y^2}$ Эта функция исследуется на отрезке $[0, d]$. Для того чтобы уменьшить технические трудности заметим, что искомая функция f принимает наибольшее значение в той же точке, что и функция $F(y) = y^6(d^2 - y^2) = d^2y^6 - y^8$.

Находим производную

$$F'(y) = 6d^2y^5 - 8y^7$$

и определяем критические точки из условия $F'(y) = 0$.

$$6d^2y^5 - 8y^7 = 0 \Rightarrow 2y^5(3d^2 - 4y^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-\sqrt{3}d}{2},\ y_2 = 0,\ y_3 = \frac{\sqrt{3}d}{2}.$$

Точка $y_1 \notin [0, d]$ и, потому, отбрасывается. Вычисляем значения интересующей нас функции f в критической точке $y = \dfrac{\sqrt{3}d}{2}$ и на концах отрезка $[0, d]$:

$$f(0) = 0,\ f\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}kd^4}{16},\ f(d) = 0.$$

Таким образом, наибольшее значение жесткости балки соответствует тому, что высота ее прямоугольного сечения $y = \dfrac{\sqrt{3}d}{2}$. Длина основания сечения с этом случае $x = \dfrac{d}{2}$ и сама жесткость $f_{наиб.} = \dfrac{3\sqrt{3}kd^4}{16}$. На практике построение требуемого сечения делается так, как показано на рис. 141: откладываем от каждого из концов произвольного диаметра отрезки величиной $\dfrac{d}{4}$; из полученных точек восстанавливаем перпендикуляры к диаметру. Точки пересечения этих перпендикуляров с окружностью соединяем с концами диаметра. Основанием для такого построения служит теорема о том, что если из вершины прямоугольного треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу, то каждый катет есть среднее пропорциональное между всей гипотенузой и отрезком гипотенузы, прилежащим к этому катету.

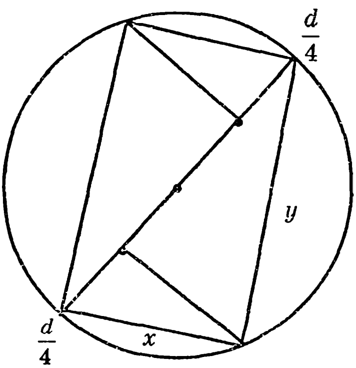


Рис. 141

Пример 4. Завод A нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой располо-

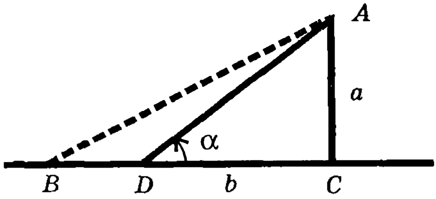


Рис. 142

жен поселок B. Расстояние AC от завода до железной дороги равно a, а расстояние BC по железной дороге равно b. Стоимость перевозок грузов по шоссе в k раз ($k > 1$) выше стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку D отрезка BC нужно провести шоссе от завода, чтобы стоимость перевозок грузов от завода A к поселку B была наименьшей?

Решение. Обозначим через P – стоимость перевозки груза по железной дороге. Тогда стоимость перевозки груза по шоссейной дороге равна kP.

Общая стоимость S перевозок складывается из стоимости перевозок по шоссе $kP \cdot AD$ и стоимости перевозок по железной дороге $P \cdot BD$:

$$S = kP \cdot AD + P \cdot BD.$$

Из рис. 142 видно, что $AD = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $DC = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $BD = b - a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, и поэтому:

$$S = kP\frac{a}{\sin\alpha} + P(b - a \cdot \operatorname{ctg}\alpha). \tag{7.10}$$

Формула (7.10) устанавливает зависимость общей стоимости перевозки груза от завода к поселку от угла наклона шоссейной дороги к направлению железной дороги. Изучается эта функция на отрезке $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Левый конец этого отрезка отвечает случаю, когда шоссейная дорога соединяет непосредственно завод и поселок, а правый конец соответствует случаю, когда шоссе перпендикулярно железной дороге. Находим производную и приравниваем ее к нулю.

$$S'(\alpha) = -kPa \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{aP}{\sin^2\alpha} \qquad (7.11)$$

$$S'(\alpha) = \frac{aP}{\sin^2\alpha}(1 - k\cos\alpha).$$

$$1 - k\cos\alpha_0 = 0 \Rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{1}{k} \qquad (7.12)$$

Итак, критическая точка определяется равенством (7.12).

Теперь рассмотрим два случая.

1-й случай. Критическая точка $\alpha_0 \in \left[\operatorname{arctg}\frac{a}{b}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это будет в том случае, когда, $\cos\alpha_0 < \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$, то есть, когда $\frac{1}{k} < \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или, другими словами,

$$b > \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}. \qquad (7.13)$$

Подсчитаем теперь значения функции в критической точке α_0 и на концах отрезка

$$S(\alpha_0) = P\left(b + a\sqrt{k^2-1}\right), S\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right) = kP\sqrt{a^2+b^2},$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = P(ak+b).$$

Очевидно, что $S(\alpha_0) < S\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ибо $\sqrt{k^2-1} < k$.

Покажем, что $S(\alpha_0) < S\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right)$. Это равносильно тому, что

$$b + a\sqrt{k^2 - 1} < k\sqrt{a^2 + b^2} \qquad (7.14)$$

Разделив обе части (7.14) на положительное число a, получим одно за другим эквивалентные (равносильные) неравенства:

$$\frac{b}{a} + \sqrt{k^2 - 1} < k\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a}\sqrt{k^2 - 1} + k^2 - 1 < k^2 + k^2\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

$$\left(\frac{b}{a}\sqrt{k^2 - 1} - 1\right)^2 > 0,$$

что и доказывает (7.14). Итак, при выполнении (7.13) наименьшее значение функции достигается в критической точке α_0. При этом

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{k},\ \sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k},\ \operatorname{ctg}\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}},$$

$$BD = b - \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Вывод: При выполнении условия (7.13) участок шоссе надо провести из точки A в точку D, где $BD = b - \dfrac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$.

Общая стоимость перевозки груза при этом

$$S = Pb + Pa\sqrt{k^2 - 1}\cdot$$

2 случай.

$$\alpha_0 \notin \left[\operatorname{arctg}\frac{a}{b},\ \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (7.16)$$

В этом случае критических точек нет, и мы должны лишь сравнить значения функции на концах отрезка. Если α — произвольная точка отрезка, то ясно, что

$$\alpha > \alpha_0 \Rightarrow \cos\alpha < \cos\alpha_0 \Rightarrow 1 - k\cos\alpha > 1 - k\cos\alpha_0 = 0$$
$$\Rightarrow\ S'(\alpha) > 0.$$

Это означает, что функция $S(\alpha)$ на рассматриваемом отрезке возрастает. Отсюда следует, что наименьшее значение функция имеет на левом конце сегмента при $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Это говорит о том, что при условии (7.16), то есть при $b \le \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$, самым выгодным является соединить напрямую завод с поселком шоссейной дорогой, отказавшись совсем от услуг железной дороги.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Лист металла имеет форму прямоугольника со сторонами a и b. Вырезая по углам квадраты и сгибая выступающие части крестообразной фигуры, получим открытую сверху коробку, высота которой равна стороне квадрата. Какой должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

2. Из трех досок одинаковой ширины нужно сделать желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

3. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, если периметр осевого сечения равен P.

4. Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

5. Из круглого листа жести вырезан сектор; его свертывают в коническую воронку. Каким должен быть угол сектора, чтобы воронка имела наибольший объем?

6. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения P известен.

7. Каким должен быть котел, состоящий из цилиндра, завершенного полусферами со стенками заданной толщины, чтобы при данной вместимости V на него пошло наименьшее количество материала?

8. К реке, ширина которой равна a, под прямым углом построен канал шириной b. Найти наибольшую длину бревна, которое можно провести из реки в канал.

9. Из круглого бревна вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением. Считая, что прочность балки пропорциональна ah^2, где a – основание, h – высота прямоугольника, найти такое отношение $\frac{h}{a}$, при котором балка будет иметь наибольшую прочность.

10. Определить, при каком диаметре y круглого отверстия в плотине секундный расход воды Q будет иметь наибольшее значение, если $Q = cy\sqrt{h-y}$, где h – глубина низшей точки отверстия (h и c – постоянны).

11. При каких линейных размерах закрытый цилиндрический бак данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

12. Имея N одинаковых электрических элементов, мы можем различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой $J = \frac{Nn\varepsilon}{NR + n^2 r}$, где ε – электродвижущая сила одного элемента, r – его внутреннее

сопротивление, R – внешнее сопротивление. Определить, при каком значении n батарея даст наибольший ток.

Ответы: 1) $\frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)$. 2) $\frac{\pi}{3}$.

3) $R=\frac{P}{6}$, $H=\frac{1}{6}P$ 4) $\frac{4R}{3}$. 5) $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 6) $R=\frac{P}{\pi+4}$.

7) $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ 8) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 9) $\sqrt{2}$. 10) $\frac{2}{3}h$.

11) $H=2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 12) $n=\sqrt{\frac{NR}{r}}$

Глава 8
ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

§1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть E – некоторое множество точек числовой оси.

Определение 1.1. Векторной функцией (или вектор-функцией) скалярного аргумента t называется закон, который каждому $t \in E$ ставит в соответствие вполне определенный вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Значение аргумента t будем изображать точками числовой оси, а соответствующие значения функции – векторами пространства R^3 (или R^2), исходящими из начала координат.

Определение 1.2. Геометрическое место концов векторов $\bar{r} = \bar{r}(t)$, когда t пробегает множество E, называется графиком векторной функции или годографом. На рис. 143 годограф вектор-функции представлен кривой L. С точки зрения кинематики аргумент t можно понимать как время движения материальной точки, $\bar{r}(t)$ – как радиус-вектор движущейся точки, а годограф – как траекторию движения. При каждом фиксированном t вектор $\bar{r}(t)$ можно разложить по базису.

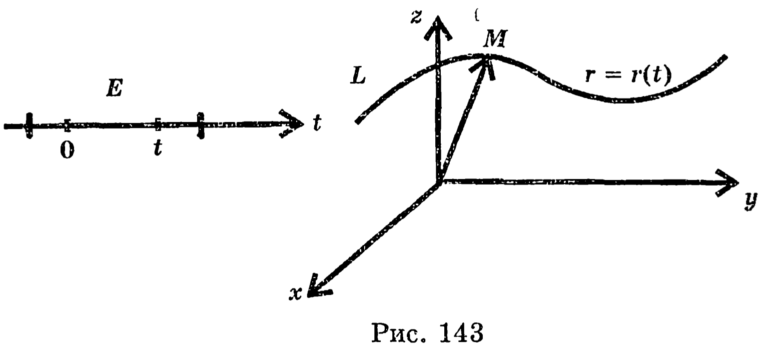


Рис. 143

$$\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}.$$

Функции $x(t), y(t), z(t)$ — координаты текущей точки M годографа L являются проекциями на координатные оси вектор-функции $\bar{r}(t)$. Теперь ясно, что задание векторной функции эквивалентно заданию трех скалярных функций

$$\bar{r}\underset{t\in E}{=}\bar{r}(t)\Leftrightarrow\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases} \tag{8.1}$$

Уравнения (8.1) называются параметрическими уравнениями линии L. Познакомимся с конкретными примерами векторных функций скалярного аргумента.

Пример 1. $\bar{r}(t)=\bar{b}t+\bar{s}$, где

$$\bar{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\quad \bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix};\quad \bar{s}=\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix},$$

Это векторное уравнение прямой, которое читатель хорошо знает из курса аналитической геометрии (рис. 144). Здесь $\bar{r}$ — радиус-вектор текущей точки годографа (в данном случае прямой), $\bar{b}$ — направляющий вектор прямой, $\bar{s}$ — вектор сдвига.

Соответствующие параметрические уравнения прямой получаются проецированием векторного уравнения на координатные оси: $\begin{cases}x=b_1t+s_1\\ y=b_2t+s_2\\ z=b_3t+s_3\end{cases}.$

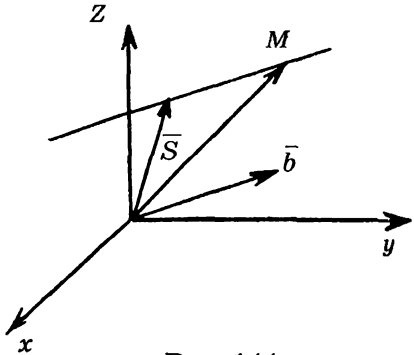


Рис. 144

Пример 2. В R^2

$$\bar{r}(t) = R\cos t\ \bar{i} + R\sin t\ \bar{j}$$

или параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi .$$

Возведя каждое из этих уравнений в квадрат и затем сложив их, получаем в обычных декартовых координатах уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R . На рис. 145 видно, что параметр t – есть угол, под которым радиус-вектор текущей точки M годографа наклонен к оси абсцисс.

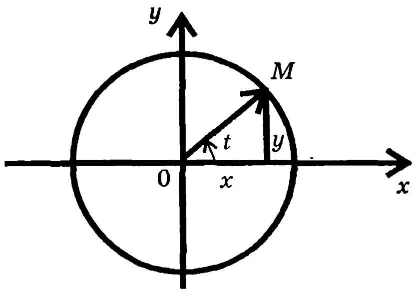


Рис. 145

Пример 3. В R^2. Уравнение

$$\bar{r}(t) = a\cos t \cdot \bar{i} + b\sin t \cdot \bar{j}$$

или в параметрической форме $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ Убедитесь самостоятельно в том, что это – уравнение эллипса с центром симметрии в начале координат и полуосями $a, b; t$ имеет тот же смысл, что и в примере 2.

Пример 4. В R^3. Винтовая линия.

Пусть окружность радиуса a с центром в начале координат лежит в плоскости XOY. Винтовой линией называется траектория точки M, равномерно движущейся по окружности, когда плоскость окружности равномерно перемещается в направлении, перпендикулярном плоскости XOY (рис. 146). Так как проекция точки $M(x, y, z)$ на плоскость XOY равномерно движется по окружности, то,

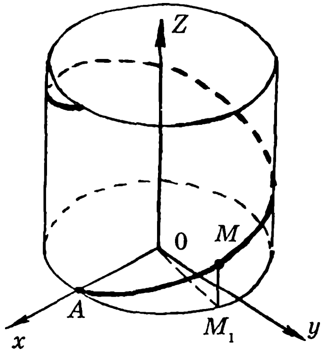


Рис. 146

принимая за параметр t – центральный угол AOM_1, получаем: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$. Так как плоскость окружности равномерно перемещается в вертикальном направлении, то аппликата точки M пропорциональна t и третье параметрическое уравнение винтовой линии будет $z = ct$. Итак, параметрические уравнения винтовой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = ct \end{cases}.$$

Пример 5. В R^2. Циклоида. Рассмотрим окружность радиуса a, которая катится вдоль некоторой прямой без скольжения. Кривая, которую описывает при этом движении фиксированная точка M окружности, называется циклоидой. Для вывода уравнений циклоиды обратимся к рис. 147. Так как окружность катится по прямой без скольжения, то $|OB| = |\overset{\cup}{MB}| = at$ Теперь ясно, что $x = OP = OB - PB = OB - MK$.

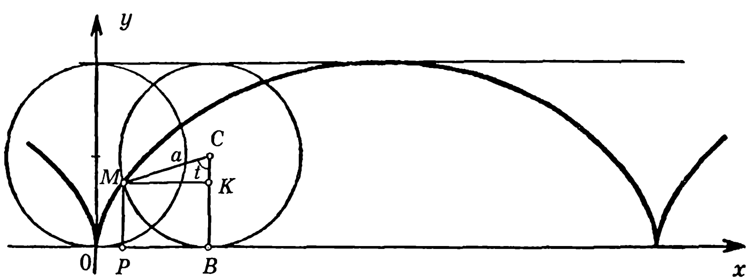


Рис. 147

Значит, $x = at - a\sin t, y = BK = CB - CK = a - a\cos t$.

Таким образом, параметрические уравнения циклоиды имеют вид: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и, значит, ее векторное уравнение выглядит так: $\bar{r}(t) = a(t - \sin t)\cdot \bar{i} + a(1 - \cos t)\cdot \bar{j}$

§2. ПРЕДЕЛ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Определение 2.1. Вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ называется пределом вектор-функции $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\|\bar{r}(t) - \bar{a}\| = 0$ Учитывая, что $\|\bar{r}(t) - \bar{a}\| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}$, легко сделать вывод, что

$$\lim_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a_1; \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a_2; \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t) = a_3. \end{cases}$$

Из этой эквивалентности вытекают все свойства пределов, имеющие место для векторных функций; именно, если $\bar{r}_1(t)$ и $\bar{r}_2(t)$ заданные вектор-функции и $f(t)$ – скалярная функция аргумента t, то:

1) $\lim\limits_{t\to t_0}(\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_1(t) + \lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_2(t)$, если пределы справа существуют,

2) $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)\cdot \bar{r}_1(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t)\cdot \lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_1(t)$, если пределы справа существуют.

3) если $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_1(t) = \bar{a}, \lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}_2(t) = \bar{b}$, то

$$\lim_{t \to t_0}\left(\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)\right) = \bar{a} \cdot \bar{b}, \lim_{t \to t_0}\left(\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)\right) = \bar{a} \times \bar{b}$$

Докажем, например, первое утверждение в 3), касающееся предела скалярного произведения

$$\lim_{t \to t_0}\left(\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)\right) = \lim_{t \to t_0}\left(x_1(t) \cdot x_2(t) + y_1(t) \cdot y_2(t) + z_1(t) \cdot z_2(t)\right) =$$
$$= \lim_{t \to t_0} x_1(t) \cdot \lim_{t \to t_0} x_2(t) + \lim_{t \to t_0} y_1(t) \cdot \lim_{t \to t_0} y_2(t) +$$
$$+ \lim_{t \to t_0} z_1(t) \cdot \lim_{t \to t_0} z_2(t) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Смысл доказательства в том, что мы переходим от векторов к их координатам, используем соответствующие свойства пределов для скалярных функций (координат) и затем возвращаемся к векторным функциям.

Остальные сформулированные выше свойства докажите самостоятельно.

Определение 2.2. Вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(t)$ непрерывна в точке t_0, если она определена в этой точке и $\lim_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0)$. Векторная функция $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны одновременно функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то есть когда

$$\begin{cases} \lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \\ \lim_{t \to t_0} y(t) = y(t_0) \\ \lim_{t \to t_0} z(t) = z(t_0) \end{cases}$$

§3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В области определения функции $\bar{r}(t)$ возьмем фиксированную точку t_0 и близкую к ней точку $t_0 + \Delta t$. Вектор

$\Delta\bar{r} = \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$ называется приращением вектор-функции $\bar{r}(t)$ при переходе от точки t_0 к точке t_0. Так же, как и в случае скалярных функций, будем рассматривать отношение $\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ и предел этого отношения, определяя тем самым скорость изменения вектор-функции в точке t_0.

Определение 3.1. Производной вектор-функции $\bar{r}(t)$ в точке t_0 называется предел (если он существует) отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\bar{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}..$$

Обратим внимание читателя на тот факт, что производная векторной функции $\bar{r}'(t)$ сама является вектор-функцией.

В основу техники дифференцирования вектор-функций положена следующая теорема.

Теорема. Пусть $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$, где $x(t), y(t), z(t)$ — дифференцируемые скалярные функции. Тогда $\bar{r}(t)$ — дифференцируемая функция и справедлива формула $\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$

Доказательство.

$$\bar{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\bar{i} + y(t + \Delta t)\bar{j} + z(t + \Delta t)\bar{k};$$

$$\Delta\bar{r} = (x(t + \Delta t) - x(t)) \cdot \bar{i} + (y(t + \Delta t) - y(t)) \cdot j +$$
$$+ (z(t + \Delta t) - z(t)) \cdot \bar{k};$$

$$\Delta\bar{r} = \Delta x \cdot i + \Delta y \cdot \bar{j} + \Delta z \cdot \bar{k}; \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \bar{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\ \bar{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \bar{k}.$$

Мы уже знаем из §2 настоящей главы, что перейти к пределу у вектор-функции означает перейти к пределу у каждой координаты, поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\bar i+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\bar j+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\cdot\bar k$$

и, значит,

$$\bar r'(t)=x'(t)\bar i+y'(t)\bar j+z'(t)\bar k$$

Основные правила дифференцирования.

1) $\bar C'=\bar 0$;

2) $\left(f(t)\cdot\bar r(t)\right)'=f'(t)\bar r(t)+f(t)\bar r'(t)$;

3) $\left(C\bar r(t)\right)'=C\bar r'(t)$;

4) $\left(f(t)\bar a\right)'=f'(t)\cdot\bar a$;

5) $\left(\bar r_1(t)\cdot\bar r_2(t)\right)'=\bar r_1'(t)\cdot\bar r_2(t)+\bar r_1(t)\cdot\bar r_2'(t)$;

6) $\left[\bar r_1(t)\times\bar r_2(t)\right]'=\bar r_1'(t)\times\bar r_2(t)+\bar r_1(t)\times\bar r_2'(t)$;

7) Если $\bar r=\bar r(u)$ дифференцируемая вектор-функция, $u=u(t)$ – дифференцируемая скалярная функция, то $\bar r_t'=\bar r_u'\ u_t'$.

Советуем читателю убедиться самостоятельно в справедливости формул 1) – 7)

Мы приведем для примера доказательство 5).

Пусть

$$\bar r_1(t)=x_1(t)\bar i+y_1(t)\bar j+z_1(t)\bar k;\bar r_2(t)=x_2(t)\bar i+y_2(t)\bar j+z_2(t)\bar k.$$

Тогда скалярное произведение

$$\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)+y_1(t)\cdot y_2(t)+z_1(t)\cdot z_2(t).$$

Теперь дифференцируем обе части равенства. В правой части применяем формулы производной суммы и произведения для скалярных функций. После перегруппировки слагаемых возвратимся к векторным функциям и их производным. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
&(\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2(t))'=(x_1(t)\cdot x_2(t)+y_1(t)\cdot y_2(t)+z_1(t)\cdot z_2(t))'=\\
&=x_1'(t)\cdot x_2(t)+x_1(t)\cdot x_2'(t)+y_1'(t)\cdot y_2(t)+y_1(t)\cdot y_2'(t)+\\
&+z_1'(t)\cdot z_2(t)+z_1(t)\cdot z_2'(t)=\\
&=(x_1'(t)\cdot x_2(t)+y_1'(t)\cdot y_2(t)+z_1'(t)\cdot z_2(t))+\\
&+(x_1(t)\cdot x_2'(t)+y_1(t)\cdot y_2'(t)+z_1(t)\cdot z_2'(t))=\\
&=\bar{r}_1'(t)\cdot\bar{r}_2(t)+\bar{r}_1(t)\cdot\bar{r}_2'(t)
\end{aligned}$$

§4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть M_0 – точка годографа L, радиус-вектор которой $\bar{r}(t_0)$, и пусть N – близкая к M_0 точка годографа с радиус – вектором $\bar{r}(t_0+\Delta t)$ (рис. 148). Приращение вектор-фун-

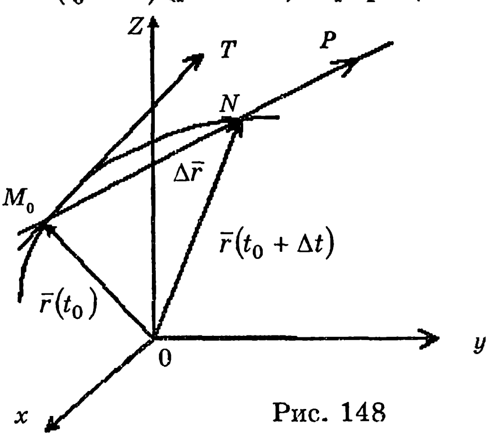


Рис. 148

кции $\Delta\bar{r}$ изображается вектором $\overline{M_0N}$. Отношение $\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ в случае $\Delta t > 0$ представляется вектором $\overline{M_0P}$ того же направления, что и вектор $\Delta\bar{r}$ (и противоположного направления в случае $\Delta t < 0$). При $\Delta t \to 0$ точка N движется вдоль кривой к точке M_0, вектор секущей $\overline{M_0P}$ поворачивается и в пределе превращается в вектор касательной. Следовательно, производная $\bar{r}'(t_0) = \lim\limits_{t \to n_0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ представляет собой вектор $\overline{M_0T}$, направленный по касательной к годографу в сторону возрастания значений аргумента. Этот факт дает возможность получить формулу производной функции, заданной параметрически. В самом деле, если L – плоская кривая, имеющая параметрические уравнения (8.1) или векторное уравнение (8.2)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (8.1) \Leftrightarrow \bar{r}(t) = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j}, \qquad (8.2)$$

то $\bar{r}'(t) = x'(t)\cdot\bar{i} + y'(t)\cdot\bar{j}$ и, значит, угловой коэффициент касательной y'_x равен отношению вертикальной проекции вектора $\bar{r}'(t)$ к его горизонтальной проекции:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \qquad (8.3)$$

конечно же, в предположении, что $x'(t) \neq 0$ (рис. 149).

Пример 1. Кривая L задана параметрически

$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 5t^4 + 4t \end{cases}$. Найти y'_x.

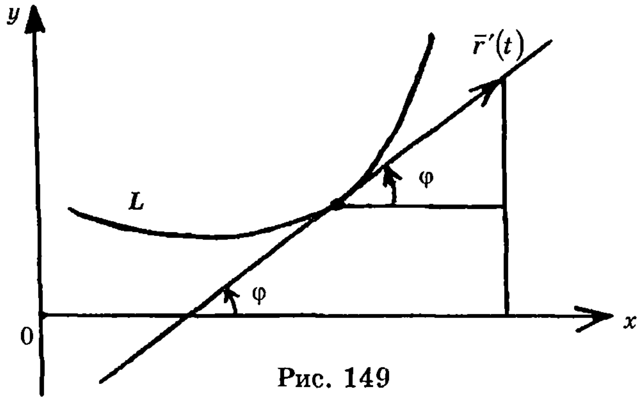


Рис. 149

Решение. Дифференцируем по t каждое из параметрических уравнений, в результате имеем $\begin{cases} x_t' = 6t \\ y_t' = 20t^3 + 4 \end{cases}$. Теперь воспользуемся формулой (8.3); получаем

$$y_x' = \frac{20t^3 + 4}{6t} = \frac{10t^3 + 2}{3t}.$$

Замечание. Найденная производная y_x' является функцией параметра t, при разных t она принимает различные значения. Обратим внимание на то, что при $t = 0$ она вообще не существует.

Пример 2. Под каким углом к оси абсцисс наклонена кривая (то есть ее касательная) $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = -\cos^2 t \end{cases}$ в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$?

Решение. Идея такова: если φ — угол наклона к оси абсцисс касательной к данной кривой, то $\operatorname{tg}\varphi = y_x'\big|_{t=t_0}$. Поэтому мы найдем вначале производную y_x' по формуле

(8.3) в произвольной точке t, затем вычислим значение этой производной в интересующей нас точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$ и потом, зная $\operatorname{tg}\varphi$, найдем φ.

$$\begin{cases} x'_t = 2\cos t \\ y'_t = -2\cos t(-\sin t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = 2\cos t \\ y'_t = 2\cos t \sin t \end{cases}.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\cos t \sin t}{2\cos t} = \sin t; \quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Написать уравнение касательной к линии

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \tag{8.4}$$

в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначим через M_0 точку, соответствующую значению параметра $t_0 = \frac{\pi}{4}$, то есть точку, уравнение касательной в которой мы должны записать. Координаты этой точки

$$x_0 = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \; y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Дифференцируя параметрические уравнения (8.4), получаем:

$$\begin{cases} x'_t = 3a\cos^2 t(-\sin t); \\ y'_t = 3a\sin^2 t\cos t. \end{cases}$$

По формуле (8.3) имеем

$$y'_x = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\mathrm{tg}t\,.$$

Угловой коэффициент касательной в точке M_0 $k = -\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = -1$ и, значит, искомое уравнение касательной выглядит так:

$$y - \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \text{ или } y = -x + \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Переходим к механическому смыслу производной вектор-функции. Мы уже отмечали, что с точки зрения механики годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движения. Пусть в момент времени t_0 частица находится в точке M_0 с радиус – вектором $\bar{r}(t_0)$, а в момент $t_0 + \Delta t$ – в точке N, радиус – вектор которой $\bar{r}(t_0 + \Delta t)$. Тогда $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$ является вектором перемещения материальной частицы за время $(t_0, t_0 + \Delta t)$.

Отношение $\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ представляет собой вектор средней скорости движения. Его направление совпадает с направлением $\overline{M_0N}$, если $\Delta t > 0$ и с направлением $\overline{NM_0}$, если $\Delta t < 0$. Предел этого отношения дает мгновенную скорость движения материальной точки в момент t_0. Таким образом, скорость движения материальной точки вдоль траектории в момент t_0 $\overline{V}(t_0)=\overline{r}'(t_0)$. Производную по времени обозначают часто точкой вместо штриха. Тогда

$$\overline{V}(t_0)=\dot{\overline{r}}(t_0)=\dot{x}(t_0)\overline{i}+\dot{y}(t_0)\overline{j}+\dot{z}(t_0)\overline{k}.$$

Численное значение этой скорости $\overline{V}(t_0)$ есть норма вектора $\overline{V}(t_0)$, то есть

$$V(t_0)=\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2+(\dot{z}(t_0))^2} \qquad (8.5)$$

Рассматривая теперь скорость изменения вектор-функции $\overline{V}(t)$, приходим к определению ускорения. Вектор ускорения $\overline{W}(t)$ является производной от $\overline{V}(t)$, то есть $\overline{W}(t_0)=\dot{\overline{V}}(t_0)$. Его разложение по естественному базису имеет вид: $\overline{W}(t)=\ddot{x}(t_0)\overline{i}+\ddot{y}(t_0)\overline{j}+\ddot{z}(t_0)\overline{k}$, а численное значение ускорения есть норма

$$\left\|\overline{W}(t_0)\right\|=\sqrt{(\ddot{x}(t_0))^2+(\ddot{y}(t_0))^2+(\ddot{z}(t_0))^2} \qquad (8.6)$$

Пример 4. Положение движущейся точки в момент времени t задается уравнением

$$\overline{r}(t)=(t^2+1)\overline{i}+2t^3\overline{j}+(3t+1)\overline{k}$$

Найти значения скорости и ускорения точки в моменты $t_1=2$ и $t_2=5$.

Решение.

$\overline{V}(t)=\dot{\overline{r}}(t)=2t\overline{i}+6t^2\overline{j}+3\overline{k}$;

$$V(t)=\left\|\bar{V}(t)\right\|=\sqrt{4t^2+36t^4+9};$$

$$V(t_1)=V(2)=\sqrt{4\cdot 4+36\cdot 16+9}=\sqrt{601};$$

$$V(t_2)=V(5)=\sqrt{4\cdot 25+36\cdot 625+9}=\sqrt{22809};$$

$$\bar{W}(t)=\ddot{r}(t)=2\bar{i}+12t\bar{j};$$

$$W(t)=\left\|\bar{W}(t)\right\|=\sqrt{4+144t^2};$$

$$W(t_1)=W(2)=\sqrt{4+144\cdot 4}=\sqrt{580};$$

$$W(t_2)=W(5)=\sqrt{4+144\cdot 25}=\sqrt{3604}.$$

Пример 5. Рассмотрим движение, задаваемое векторным уравнением:

$$\bar{r}(t)=R\cos 2\pi\omega t\cdot i+R\sin 2\pi\omega t\cdot\bar{j}. \tag{8.7}$$

Выяснить, что является траекторией движения. Найти скорость и ускорение.

Решение. Траекторией движения является окружность радиуса R с центром в начале координат. В самом деле, возводя в квадрат каждую из координат движущейся точки $x=R\cos 2\pi\omega t$ и $y=R\sin 2\pi\omega t$ и складывая результаты, получаем $x^2+y^2=R^2$. Это означает, что мы имеем дело с вращательным движением. Скорость движения в каждый момент t определяется формулой

$$\bar{V}(t)=\dot{\bar{r}}(t)=-R\sin 2\pi\varpi t\cdot 2\pi\omega\cdot i+R\cos 2\pi\varpi t\quad 2\pi\omega\cdot\bar{j},$$

то есть координаты вектора скорости таковы:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-2\pi\omega R\cdot\sin 2\pi\omega t\\ \dot{y}(t)=2\pi\omega R\cdot\cos 2\pi\omega t\end{cases}$$

Численное значение скорости определяется по формуле (8.5) .

$$V(t)=\left\|\overline{V}(t)\right\|=\sqrt{4\pi^2\omega^2R^2\sin^2 2\pi\omega t+4\pi^2\omega^2R^2\cos^2 2\pi\omega t}=$$
$$=2\pi\omega R\,.$$

Оказалось, что численное значение скорости не зависит от времени, то есть при вращательном движении длина вектора скорости постоянна, меняется лишь его направление. Ускорение рассматриваемого вращательного движения определяется вектор-функцией.

$$\overline{W}(t)=\ddot{\bar{r}}(t)=-4\pi^2\omega^2R\cos 2\pi\omega t\cdot\bar{i}-4\pi^2\omega^2R\sin 2\pi\omega t\cdot\bar{j}\,.$$

Из последнего равенства видно, что вектор $\overline{W}$ имеет направление, противоположное направлению радиус – вектора $\bar{r}$. Численная величина ускорения оказалась постоянной при всех значениях t:

$$\left\|\overline{W}\right\|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=4\pi^2\omega^2R\,.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти y'_x для функций, заданных параметрически

1) $\begin{cases}x=3t+2\\ y=4t^3\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x=a\cos^2 t\\ y=b\sin^2 t\end{cases}$; 3) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=b\sin^3 t\end{cases}$;

4) $\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=e^{2t}\end{cases}$; 5) $\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=\sqrt[3]{t}\end{cases}$; 6) $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$.

Найти уравнения касательных, проведенных к данным кривым в заданных точках (то есть при заданных значениях параметра).

7) $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$; 8) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$; 9) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Для каждого из следующих движений найти вектор и численное значение скорости, вектор и численное значение ускорения (в ответах приведены только численные значения скоростей и ускорений) в указанный момент времени.

10) $\bar{r}(t) = \cos^2 t \cdot i + \sin^2 t \cdot \bar{j}, t_0 = \frac{\pi}{6}$;

11) $\bar{r}(t) = \cos t \cdot \bar{i} + \cos 2t \cdot \bar{j}, t_0 = \frac{\pi}{4}$;

12) $\bar{r}(t) = e^t \cdot \bar{i} + e^{-t} \cdot \bar{j}, t_0 = \ln 2$;

13) $\bar{r}(t) = t \cdot \bar{i} + lnt \cdot \bar{j}, t_0 = 3$.

Ответы: 1) $4t^2$. 2) $-\frac{b}{a}$. 3) $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$. 4) $-2e^{3t}$. 5) $\frac{2}{3t^{\frac{1}{6}}}$.

6) $\operatorname{tg}t$. 7) $(\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} = 0$.

8) $y = x + \frac{(4-\pi)a}{2}$. 9) $y = x - \frac{a\pi}{2\sqrt{2}}$.

10) $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $W = \sqrt{2}$. 11) $V = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $W = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

12) $V = \frac{\sqrt{17}}{2}$; $W = \frac{\sqrt{17}}{2}$. 13) $V = \frac{\sqrt{10}}{3}$; $W = \frac{1}{9}$.

Глава 9.
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Принципиально новые идеи при изучении дифференцирования возникают тогда, когда мы от функций одной переменной переходим к функциям двух переменных. Дальнейший переход к функция м трех (и большего числа) переменных от функций двух переменных уже не содержит существенно новых моментов.

Поэтому мы будем изучать функции двух переменных и время от времени делать обобщающие замечания.

§1. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть $u = f(M) = f(x, y)$ – функция, определенная в области D плоскости xOy. Выберем на плоскости xOy направление e заданное единичным вектором $\mathring{\bar{e}} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j}$ или, что то же, $\mathring{\bar{e}} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}$. Разрешим точке M двигаться только вдоль направления e. Пусть $N(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ – точка, лежащая на направлении e близко к точке M, а $\Delta\rho$ – расстояние между M и N (рис. 150).

$$\Delta\rho = \left\| \overline{MN} \right\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Величины Δx и Δy называют приращениями аргументов, а разность $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – приращением или полным приращением функции f при переходе

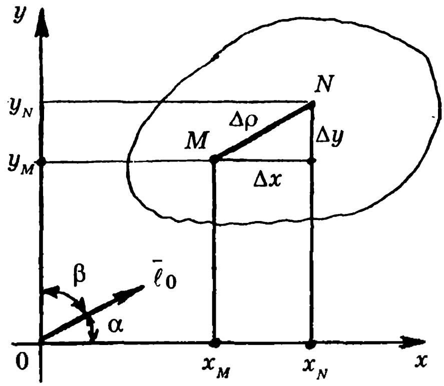


Рис. 150

от точки M к точке N. Составим отношение $\frac{\Delta u}{\Delta \rho}$ и попытаемся вычислить $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta \rho}$

Конечно, этот предел может существовать, а может и не существовать. Если он существует, то называется производной функции f по направлению $\bar{e}$ в точке M и обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial e}$. Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{u(N)-u(M)}{\Delta\rho}.$$

Особое значение имеют производные функции по направлениям координатных осей и связанные с ними частные производные.

Пусть $\bar{e}_0 = i$. Это означает что рассматривается производная в направлении оси абсцисс. Обозначив ее $\frac{\partial u}{\partial i}$ и приняв во внимание, что $\Delta x > 0$, а $\Delta y = 0$, получим:

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x| = \Delta x \text{ и}$$

$$\frac{\partial u}{\partial i} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x>0)}}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x}$$

Теперь возьмем $\bar{e}_0 = -i$. В этом случае речь идет о производной функции u в направлении, противоположном направлению оси абсцисс; тогда $\Delta x < 0, \Delta y = 0, \Delta\rho = -\Delta x$ и значит,

$$\frac{\partial u}{\partial(-i)} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{-\Delta x}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial(-i)} = -\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

Если у функции $u(x, y)$ зафиксировать y, то получится функция одной переменной x. Обычная производная этой функции в точке x называется частной производной функции в точке (x, y) и обозначается она одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x.

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x},$$

где Δx может быть и положительным, и отрицательным.

Оказывается, существование у функции $u(x, y)$ в точке x частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ эквивалентно наличию у этой функции в рассматриваемой точке производных $\frac{\partial u}{\partial i}, \frac{\partial u}{\partial(-i)}$ и равенству $\frac{\partial u}{\partial i} = -\frac{\partial u}{\partial(-i)}$.

В таком случае, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial i} = -\dfrac{\partial u}{\partial(-i)}$.

Аналогично определим производную функции $u(x, y)$ по направлению оси ординат и производную в противоположном направлении. Если j — единичный вектор оси OY, то

$$\frac{\partial u}{\partial j} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta y > 0)}} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial(-j)} = -\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta y < 0)}} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

Частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ определяется как обычная производная функции $u(x, y)$ по переменной y при фиксированном x: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$, где Δy может быть как положительным, так и отрицательным. Существование $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ эквивалентно наличию у функции $u(x, y)$ производных $\dfrac{\partial u}{\partial j}$, $\dfrac{\partial u}{\partial(-j)}$ и равенству $\dfrac{\partial u}{\partial j} = -\dfrac{\partial u}{\partial(-j)}$. При этом

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial j} = -\frac{\partial u}{\partial(-j)}.$$

Принцип нахождения частных производных мгновенно вытекает из самого их определения. Для нахождения частной производной по переменной x достаточно «заморозить на время дифференцирования» y и находить производную функции u по переменной x самым обычным образом, то есть при дифференцировании по x на y надо смотреть как на постоянную, и наоборот, при дифференцировании по y надо считать постоянной x.

Пример 1. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = x^3 + \cos x + x^4y^2 + y^4 + 8$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - \sin x + y^2 \quad 4x^3 + 0 + 0 = 3x^2 - \sin x + 4x^3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 0 + x^4 \quad 2y + 4y^3 = 2x^4y + 4y^3$.

Пример 2. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(2x + 0\right) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(0 + 2y\right) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

Пример 3. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = (x^4 + y^4) \cdot \operatorname{arctg} 5x$.

Решение.

При нахождении частной производной по x мы должны учесть, что от переменной x зависят оба множителя, и поэтому придется пользоваться формулой производной произведения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(4x^3 + 0\right)\operatorname{arctg} 5x + \left(x^4 + y^4\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(5x\right)^2} \cdot 5.$$

Что касается дифференцирования по y, то здесь нет необходимости поступать так же; достаточно «постоянный множитель» вынести за знак производной по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{arctg}5x \ \left(0 + 4y^3\right) = 4y^3 \cdot \text{arctg}5x.$$

Пример 4. $u = (\sin x)^{\ln\left(y^2+1\right)}$.

Решение. Обращаем ваше внимание на то, что при дифференцировании по x на данную функцию следует смотреть как на степенную (ведь y «замораживается»), а при дифференцировании по y – как на показательную (ибо основание не зависит от y и, значит, исполняет роль постоянной).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln\left(y^2+1\right) \cdot (\sin x)^{\ln\left(y^2+1\right)-1} \cdot \cos x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\sin x)^{\ln\left(y^2+1\right)} \cdot \ln(\sin x) \cdot \frac{1}{y^2+1} \cdot 2y. .$$

Обобщения.

1. Если $u(x, y, z)$ – функция трех переменных и $\overset{\circ}{\bar{e}} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$, где α, β, γ – соответственно углы наклона вектора $\bar{\ell}_0$ к координатным осям, то

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta\rho},$$

где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y, z) - u(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, y, z+\Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Пример 5. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, если

$$u = x^5yz + xy^3z^2 + x^2\sin ye^{4z}.$$

Решение. При дифференцировании по каждой из переменных две другие считаем «замороженными»:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4yz + y^3z^2 + 2x\sin y \cdot e^{4z},\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^5z + xz^2 \cdot 3y^2 +$$

$$+ x^2e^{4z}\cos y, \frac{\partial u}{\partial z} = x^5y + xy^3 \cdot 2z + x^2\sin y \cdot e^{4z} \cdot 4$$

2. Если $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ и $\bar{e}$ – направление, заданное единичным вектором

$$\overset{\circ}{e} = \cos\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \cos\alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \ + \cdots + \cos\alpha_n \cdot \bar{e}_n,$$

где $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ – естественный базис пространства R^n, то $\frac{\partial u}{\partial e} = \lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\rho}$, здесь

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$$

Частная производная по i-й координате $\frac{\partial u}{\partial x_i} =$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0}\frac{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{\Delta x_i},$$

$i = \overline{1, n}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

1) $z = x^3y - 3x^4 + 2xy^3$; 2) $z = x\sin(xy) + y\cos x + 5$;

3) $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$; 4) $z=\sin(xy)\cdot\cos\left(x^2+y^3\right)$;

5) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 6) $z=\mathrm{tg}\left(x+y^4\right)\cdot\ln(x+y)$.

Найти частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$:

7) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$; 8) $u=\sin(xy)\cdot e^{-x^2+y^2+z^2}$;

9) $u=\dfrac{xy+yz+zx}{2^{x+y^2+z^3}+x}$; 10) $u=xye^{-xyz}$.

Докажите, что

11) если $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$, то $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$; 12) если $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, то $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}$; 13) если $z=e^{\frac{x}{y}}\ln y$, то $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{\ln y}$; 14) если $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ то $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$.

§ 2. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ К ПОВЕРХНОСТИ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$, график которой представляет собой поверхность, изображенную на рис. 151. Пусть $M_0((x_0, y_0, z_0)$ – произвольная фиксированная точка поверхности, P_0 – ее проекция на горизонтальную плоскость. Справедливы следующие важные теоремы.

Теорема 1. Если в некоторой окрестности точки P_0 функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y, то касательная плоскость к данной поверхности в точке M_0 существует и имеет уравнение

$$z = z_0 + z'_x\big|_{P_0} \cdot (x - x_0) + z'_y\big|_{P_0} \cdot (y - y_0). \tag{9.1}$$

С доказательством этой теоремы можно ознакомиться, например, в ([1], стр. 315) или в ([2], стр. 474).

Теорема 2. Если в окрестности точки P_0 функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y, то справедливо равенство

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + z'_x\big|_{P_0} \cdot (x - x_0) + z'_y\big|_{P_0} \cdot (y - y_0) + o(\Delta\rho) \tag{9.2}$$

Другими словами, полное приращение функции имеет вид:

$$\Delta z = [z'_x\big|_{P_0} \cdot \Delta x + z'_y\big|_{P_0} \Delta y] + o(\Delta\rho) \tag{9.3}$$

Выражение в квадратных скобках называется полным дифференциалом функции f в точке P_0. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке P_0, если она имеет в этой точке полный дифференциал

$$dz\big|_{P_0} = z'_y\big|_{P_0} \cdot \Delta x + z'_y\big|_{P_0} \cdot \Delta y. \tag{9.4}$$

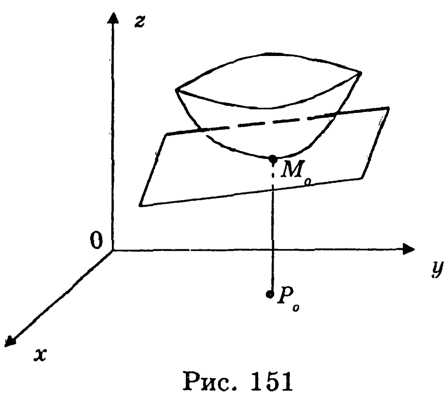


Рис. 151

Дифференциалы независимых переменных определяются как их приращения: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Поэтому

$$dz\,|_{P_0} = z'_y\,|_{P_0} \cdot dx + z'_y\,|_{P_0} \cdot dy \tag{9.5}$$

и полное приращение функции $z = f(x, y)$ имеет вид:

$$\Delta z\big|_{P_0} = dz\,|_{P_0} + o(\Delta\rho). \tag{9.6}$$

Теорема 2 гарантирует дифференцируемость функции, имеющей **непрерывные** частные производные z'_x и z'_y. Оказывается, одного существования частных производных недостаточно для дифференцируемости функции, что отличает функции двух (и вообще, многих) переменных от функций одной переменной. Напомним, что, если функция одной переменной имеет производную, то она дифференцируема.

Равенство (9.3) показывает, что полный дифференциал функции составляет главную часть ее полного приращения, ибо она имеет такой же порядок малости, как $\Delta\rho$, а второе слагаемое – порядок $o(\Delta\rho)$. Поэтому наряду с точным соотношением (9.3), можно при малых Δx и Δy использовать приближенное равенство:

$$\Delta z\,|_{P_0} \approx dz\,|_{P_0} \tag{9.7}$$

Таким образом, если точка (x, y) достаточно близка к точке (x_o, y_o), то значение функции в этой точке можно вычислить так:

$$f(x,y) \approx f(x_o, y_o) + z'_x\,|_{P_0} \cdot (x - x_o) + z'_y\,|_{P_0} \cdot (y - y_o). \tag{9.8}$$

Эта формула эффективна в случаях, когда не требуется высокая точность.

Сформулированные результаты распространяются на функции многих переменных. В частности, если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет в окрестности точки $P_0\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^0\right)$ **непрерывные** частные производные по всем переменным u'_{x_i} , $i = 1, 2, ..., n$, то она дифференцируема в точке P_o и ее полный дифференциал выглядит так:

$$du\big|_{P_0} = \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}\big|_{P_0} \cdot \Delta x_i. \tag{9.9}$$

Пример 1. Найти dz, если $z = x^2 + \sin(xy)$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y\cos(xy)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)$. На основании (9.4) имеем: $dz = (2x + y\cos(xy))dx + x\cos(xy)dy$.

Пример 2. Вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}01)^4 + (2{,}95)^2}$

Решение. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^4 + y^2}$

Возьмем $x_0 = 2, y_0 = 3, x = 2{,}01, y = 2{,}95$. Тогда

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{2^4 + 3^2} = 5, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0} = \frac{2 \cdot 2^3}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^4 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Из (9.8) имеем теперь

$$\sqrt{(2{,}01)^4 + (2{,}95)^2} \approx 5 + 3{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot (-0{,}05) = 5{,}002 \cdot$$

Пример 3. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + 2y^2$ в точке $P_0(1,1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (9.1). С этой целью вначале находим частные производные z'_x, z'_y и вычисляем их в точке P_0:

$$z'_x = 2x;\ z'_x\big|_{P_0} = 2\cdot 1 = 2;\ z'_y = 4y,\ z'_y\big|_{P_0} = 4.$$

Вычислим $z_0 = z\,|_{P_0} = 1^2 + 2\cdot 1^2 = 3$. Теперь запишем уравнение касательной плоскости в общем виде:

$$z - z_0 = z'_x\,|_{P_0}\,(x - x_0) + z'_y\,|_{P_0}\,(y - y_0)$$

и, подставляя сюда рассчитанные выше коэффициенты, получаем:

$$z - 3 = 2(x-1) + 4(y-1).$$

Это и есть уравнение искомой касательной плоскости.

Пример 4. В какой точке касательная плоскость к поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ параллельна плоскости $2x + 2y + z = 0$? Найти уравнение этой плоскости.

Решение. Уравнение касательной плоскости (9.1) перепишем в виде

$$z'_x\,|_{P_0}\cdot(x - x_0) + z'_y\,|_{P_0}\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (9.10)$$

Теперь ясно, что вектор нормали к поверхности выглядит так $\overline{N} = \{z'_x\,|_{P_0}, z'_y\,|_{P_0}, -1\}$.

Поскольку искомая плоскость должна быть параллельна плоскости $2x + 2y + z = 0$, их векторы нормалей коллинеарны, то есть $\overline{N} = \lambda\{2, 2, +1\}$.

Далее

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= -2x \Rightarrow z'_x\big|_{P_0} = -2x_0 \\ z'_y &= -2y \Rightarrow z'_y\big|_{P_0} = -2y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \{-2x_0, -2y_0, -1\}; \{-2x_0, -2y_0, -1\} = \{2\lambda, 2\lambda, +\lambda\};$$

$$\begin{cases} -2x_0 = 2\lambda \\ -2y_0 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1, x_0 = 1, y_0 = 1 \\ -1 = +\lambda \end{cases}$$

Значение функции z в точке $P_0(1;1)$ вычисляется легко $z_0 = 4 - 1 - 1 = 2$. Подставляя все найденные значения в (9.10), получаем:

$$-2(x-1) - 2(y-1) - (z-2) = 0,$$
$$2x + 2y + z - 6 = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти полный дифференциал функции $z = x^4 + 3x^2y - y^5$ в точке $M_0(2;-1)$.

2. Найти полный дифференциал функции $z = (x+y)e^{xy}$ в точке $M_0(0;2)$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ в точке $M_0(3;4)$.

4. Найти полный дифференциал функции $u = (x-y)z^2 + x + 2y + 3z$ в точке $M_0(2;1;1)$.

5. Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}$.

6. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 - 4xy + y^2$ в точке $M_0(-2;1;13)$.

7. В какой точке касательная плоскость к поверхности $z = 6 - x^2 - y^4$ параллельна плоскости $6x + 32y - z + 5 = 0$? Составьте уравнение этой касательной плоскости.

Ответы: 1) $20dx + 7dy$. 2) $5dx + dy$. 3) $\frac{1}{5}dx + \frac{1}{10}dy$.
4) $2dx + dy + 5dz$. 5) $5{,}082$. 6) $8x - 10y + z + 13 = 0$.
7) $(-3, -2, -19)$. $6x + 32y - z + 63 = 0$.

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть $\bar{e}$ – фиксированное направление на плоскости xOy, заданное единичным вектором $\mathring{\bar{e}} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j}$ ·

Допустим, что функция $z = f(x, y)$ имеет в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ По определению $\frac{\partial z}{\partial e} = \lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta \rho}$, где $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ полное приращение функции при переходе от точки $P_0(x_0, y_0)$ к точке $P(x, y)$.

Используя (9.3), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial e}\Big|_{P_0} = \lim_{\Delta\rho \to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \rho} + \frac{o(\Delta\rho)}{\Delta \rho}\right). \quad (9.11)$$

Отношения $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$ и $\frac{\Delta y}{\Delta\rho}$ вообще не зависят от $\Delta\rho$, поскольку представляют собой направляющие косинусы вектора $\overset{o}{e}$: $\frac{\Delta x}{\Delta\rho} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta\rho} = \cos\beta$ (рис. 152).

Продолжая теперь (9.11) имеем:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial e}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{o(\Delta\rho)}{\Delta\rho}$$

и значит,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial e}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta. \tag{9.12}$$

Формула (9.12) очень важна, ибо дает возможность вычисления производной по любому направлению через частные производные.

Пример 1. Найти производную функции $z = 3x^2 - 2xy - 2y^2$ в точке $M_0(-2;3)$ по направлению вектора $\bar{e} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$.

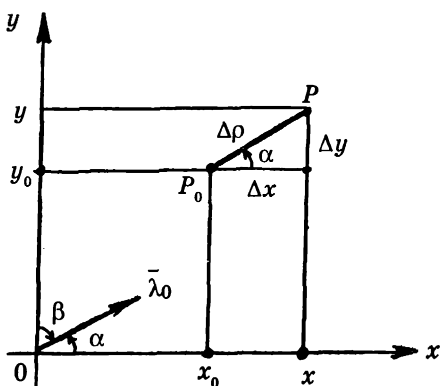


Рис. 152

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{e}$:

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{25+144} = 13, \cos\alpha = \frac{5}{13}, \cos\beta = -\frac{12}{13}.$$

Вычисляем частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = (6x-2y)\big|_{M_0} = -18; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = (-2x-4y)\big|_{M_0} = -8.$$

Наконец, используя (9.12), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial e}\Big|_{M_0} = (-18)\cdot\frac{5}{13} + (-8)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{6}{13}.$$

Обобщения.

1. Пусть $\bar{e}$ – направление в R^3, заданное единичным вектором $\overset{\circ}{\bar{e}} = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$ (рис. 153).

Предположим, что $u = u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Тогда производная по направлению $\bar{e}$ вычисляется по формуле

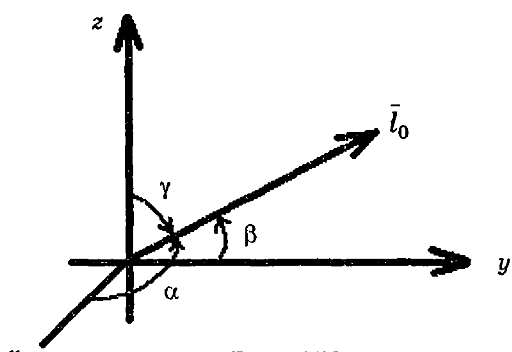


Рис. 153

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma. \qquad (9.13)$$

2. Пусть $\bar{e}$ – направление в R^n, заданное единичным вектором $\overset{\circ}{\bar{e}}=\{\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\dots,\cos\alpha_n\}$.

Допустим, что функция имеет непрерывные частные производные по всем переменным $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i=\overline{1,n}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\cos\alpha_i. \qquad (9.14)$$

§4. ГРАДИЕНТ. СВЯЗЬ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ С ГРАДИЕНТОМ. ЛИНИИ УРОВНЯ

Определение. Градиентом функции $z=f(x,y)$ в точке P_0 называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются частные производные, вычисленные в этой точке

$$\overline{grad z}\,|_{P_0}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,|_{P_0},\frac{\partial z}{\partial y}\,|_{P_0}\right) \qquad (9.15)$$

Если $\bar{e}$ – направление, заданное ортом $\overset{\circ}{\bar{e}}=\cos\alpha\cdot i+\cos\beta\cdot j$, то из (9.12), очевидно, следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial e}\,|_{P_0}=\overline{grad z}\,|_{P_0}\cdot\overset{\circ}{\bar{e}} \qquad (9.16)$$

Формула (9.16) выражает связь производной по направлению с градиентом функции. Эта формула обобщается и на случаи функции n переменных.

Градиентом функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется вектор

$$\overline{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Если $\bar{e}$ — направление, заданное ортом $\mathring{\bar{e}} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$ непрерывны, то из (9.14) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \overline{gradu} \cdot \mathring{\bar{e}} \qquad (9.17)$$

Формула (9.17) позволяет раскрыть очень важное свойство градиента.

Обозначим через ω – угол между векторами $\overline{gradu}$ и $\mathring{\bar{e}}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \left\| \overline{gradu} \right\| \cdot \left\| \mathring{\bar{e}} \right\| \cdot \cos\omega = \left\| \overline{gradu} \right\| \cdot \cos\omega .$$

Из полученного соотношения следует, что величина производной по направлению будет наибольшей, когда $\cos\omega = 1$, т. е. $\omega = 0$. Это означает, что направление градиента совпадает с направлением $\omega = 0$.

Вывод: Градиент указывает направление, в котором скорость изменения функции максимальна, а норма градиента дает величину этой максимальной скорости

$$max\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = \left\|\overline{grad u}\right\|.$$

Познакомимся еще с одним важным понятием и еще с одним способом геометрической иллюстрации функции двух переменных.

Определение. Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C. Линию уровня можно построить, спроектировав на плоскость xOy множество точек пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z \equiv C$. Уравнение линии уровня имеет вид $f(x, y) = C$. Изменяя C, мы получаем различные линии уровня данной функции. Задав целую серию значений константы, например, $C = C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \ldots, C_1 + nh$, мы получим ряд линий уровня, по взаимному расположению которых можно судить о характере изменения функции (рис. 154).

В частности, там, где линии гуще, функция изменяется быстрее (поверхность, изображающая функцию, идет круче), а там, где линии уровня располагаются реже, функция изменяется медленнее (соответствующая поверхность будет более пологой). Кроме того, отметки на линиях уровня дают непосредственно значение функции в точках этих линий. Линии уровня часто используются в географии, геодезии, топографии. Здесь особое значение имеют горизонтали.

Горизонталь – это проекция на плоскость xOy «тропы», образованной точками горно-

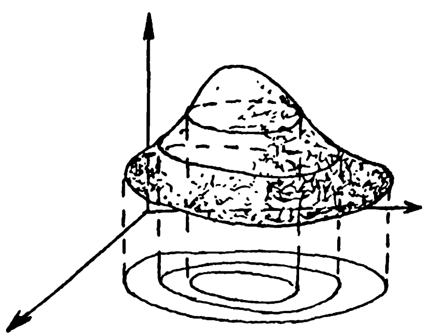


Рис. 154

го ландшафта, имеющими одинаковую высоту над уровнем моря», применяются линии уровня при составлении метеорологических карт. Здесь – это изотермы – линии одинаковых температур, изобары – линии равного давления и т. п. С линиями уровня приходится встречаться практически во всех инженерных дисциплинах. Приведем без доказательства еще один важный факт.

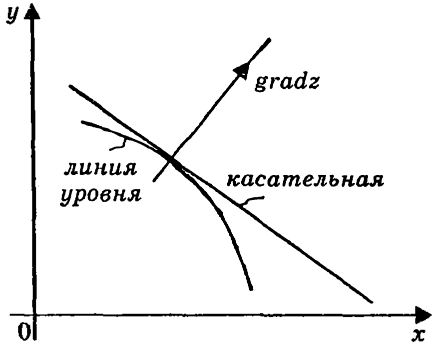


Рис. 155

В каждой точке линии уровня дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ градиент функции перпендикулярен к линии уровня (рис. 155)

Переходим к примерам.

Пример 1. Найти $\overline{gradz}\,|_{P_0}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial e}\,|_{P_0}$, если

$$z = xy^2 + 4x^3y, \quad P_0(2;3), \quad \bar{e} = 3\bar{i} + 4\bar{j}..$$

Решение. Находим частные производные и градиент функции в точке P_0.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 12x^2y, \frac{\partial z}{\partial x}\,|_{P_0} = 3^2 + 12\ \ 2^2 \cdot 3 = 153,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4x^3, \frac{\partial z}{\partial y}\,|_{P_0} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2^3 = 44,$$

$$\overline{gradz}\,|_{P_0} = (153; 44).$$

Теперь найдем единичный вектор направления $\bar{e}$:

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad \overset{\circ}{\bar{e}} = \frac{\bar{e}}{\|\bar{e}\|} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Наконец, используя формулу (9.16), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial e}\Big|_{P_0} = \overline{grad z}\,\Big|_{P_0} \cdot \overset{\circ}{e} = 153 \cdot \frac{3}{5} + 44 \cdot \frac{4}{5} = \frac{635}{5} = 127$$

Пример 2. Найти $\overline{grad u}\,\big|_{M_0}$ и $\frac{\partial u}{\partial e}\big|_{M_0}$, если

$$u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad M_0(2,-3,1), \quad \bar{e} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Решение. Повторяем шаг за шагом методику решения предыдущего примера. Учитывая, что мы имеем дело с функцией трех переменных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot 2}{4 + 9 + 1} = \frac{2}{7},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot (-3)}{14} = -\frac{3}{7},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot 1}{14} = \frac{1}{7}, \quad \overline{grad u}\,\Big|_{M_0} = \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right),$$

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29},$$

$$\overset{\circ}{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{2}{\sqrt{29}}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}\Big|_{M_0} = \overline{grad u}\,\Big|_{M_0} \cdot \overset{\circ}{e} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} + \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{29}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6 + 12 + 2}{7\sqrt{29}} = \frac{20}{7\sqrt{29}}.$$

Пример 3. Дана функция $u = \frac{xyz}{x + y + z}$ и точка $M_0(2; 1; 3)$. Указать направление, в котором скорость изменения функции максимальна. Найти величину этой скорости.

Решение. Направление, в котором скорость изменения функции максимальна — направление градиента. Поэтому находим градиент данной функции в точке M_0.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot \frac{x+y+z-x}{(x+y+z)^2} = \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}; \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz(x+z)}{(x+y+z)^2}; \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{2\cdot 3(2+3)}{(2+1+3)^2} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} = \frac{2\cdot 1\cdot(2+1)}{36} = \frac{1}{6}; \overline{gradu}\,\Big|_{M_0} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{5}{6}\bar{j} + \frac{1}{6}\bar{k}.$$

Величина максимальной скорости изменения функции равна норме градиента:

$$V_{max} = \left\|\overline{gradu}\,\Big|_{M_0}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Пример 4. Построить линии уровня параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, соответствующие значениям $C = 1, 2, 4, 9$.

Решение. Соответствующие линии уровня имеют уравнения

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9,$$

т.е. это окружности с центром в начале координат, имеющие радиусы $R_1 = 1, R_2 = \sqrt{2}, R_3 = 2, R_4 = 3$ (рис. 156).

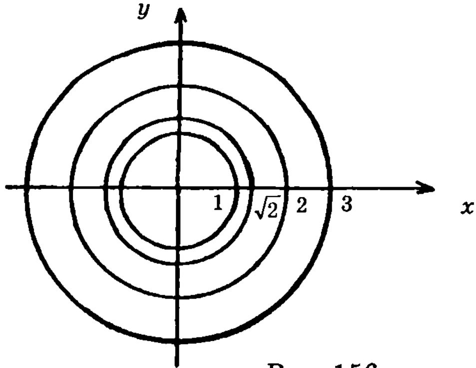


Рис. 156

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

1. Найти $\overline{grad u}$ в точке $M_0(-1;2)$ и производную по направлению $\bar{\ell} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ в этой точке, если $u = x^3 + 2xy + y^2$.

2. Дана функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и направление $\bar{e} = \{2; -3; 6\}$. Найти $\overline{grad u}|_{M_0}$ и $\frac{\partial u}{\partial e}|_{M_0}$, если $M_0(1;2;3)$.

3. Даны функции $z = 4x^2 - 3xy + y^3$ и $u = 5x^4 + x^2y - 2y^4$ Найти угол между векторами $\overline{grad u}|_{M_0}$ и $\overline{grad z}|_{M_0}$ в точке $M_0(1;-1)$.

4. Построить линии уровня функции $z = x + y$, соответствующие значениям $C = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 5$.

5. Построить линии уровня функции $z = x^2 + 4y^2$, соответствующие значениям $C = 1, 4, 36$.

6. Построить линии уровня функции $z = x^2 - 4y^2$, соответствующие значениям $C = 4, 16, 36$.

2-Й УРОВЕНЬ

7. Даны функции $u = (x^2 + 2y + z)^2, v = xyz^2$ и точки $M_1(1; 2; -1), M_2(2; -1; 1)$. Найти вектор $\bar{a}$, ортогональный одновременно векторам $\overline{grad u}|_{M_1}$ и $\overline{grad v}|_{M_2}$.

8. Дана функция $u = \dfrac{xyz}{x + y + z}$ и точка $M_0(2; 1; 3)$. Указать направление $\bar{a}$, в котором скорость изменения функции максимальна. Найти величину этой скорости.

9. Дана функция $u = \dfrac{1}{R}$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти градиент этой функции в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и норму градиента.

Ответы: 1) $7\bar{i} + 2\bar{j}; \dfrac{13}{5}$. 2) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\bar{i} + \dfrac{2}{\sqrt{14}}\bar{j} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\bar{k}; \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

3) $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 7) $\bar{a} = -10\bar{i} + 7\bar{j} + 6\bar{k}$

8) $\bar{a} = \dfrac{1}{3}\bar{i} + \dfrac{5}{6}\bar{j} + \dfrac{1}{6}\bar{k}; \dfrac{\sqrt{30}}{6}$. 9) $-\dfrac{x_0}{R_0^3}i - \dfrac{y_0}{R_0^3}\bar{j} - \dfrac{z_0}{R_0^3}\bar{k}; \dfrac{1}{R_0^2}$.

§5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой области D частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Эти производные тоже являются функциями переменных x и y. Поэтому вполне естественно говорить об их частных производных если они существуют. Определяются эти частные производные следующим образом. Вторая частная производная по x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, вторая частная производная по y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ и две смешанные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Все эти производные называются **частными производными второго порядка.**

Пример 1. Дана функция $z = x^3 + 2x^2y^2 + y^5$. Найти частные производные второго порядка.

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x^2y + 5y^4$ Теперь дифференцируем каждую из них и по x и по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 4xy^2\right) = 6x + 4y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 4xy^2\right) = 8xy, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^2y + 5y^4\right) =$$

$$= 4x^2 + 20y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2y + 5y^4\right) = 8xy$$

Обратите внимание на то, что смешанные производные равны, т.е. оказалось безразличным дифференцировать ли данную функцию сначала по x, затем по y или дифференцировать ее в обратном порядке. Случайно ли это? Конечно же, нет. Имеет место следующая теорема, которую мы приводим здесь без доказательства.

Теорема (о равенстве смешанных производных).

Если функция $z = f(x, y)$, определенная в области D, имеет вторые частные производные, являющиеся непрерывными функциями, то $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Пример 2. Дана функция $s = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{t}\right)$. Доказать, что

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Решение. Будем последовательно готовить все необходимые производные; только вначале несколько преобразуем данную функцию

$$s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right) = \ln\frac{t - x}{xt} = \ln(t - x) - \ln(xt),$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{t - x}(-1) - \frac{1}{xt}\cdot t = \frac{1}{x - t} - \frac{1}{x} = \frac{t}{x(x - t)},$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} = \left(\frac{t}{x(x - t)}\right)'_t = \frac{1}{x}\cdot\frac{x - t - t\ (-1)}{(x - t)^2} = \frac{1}{(x - t)^2},$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \left(\frac{t}{x^2 - xt}\right)'_t = \frac{-t(2x - t)}{(x^2 - xt)^2} = \frac{t^2 - 2xt}{x^2(x - t)^2}.$$

Теперь запишем левую часть равенства, которое следует доказать и выполним тождественные преобразования:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{(x - t)^2} + \frac{t^2 - 2xt}{x^2(x - t)^2} = \frac{x^2 - 2xt + t^2}{x^2(x - t)^2} = \frac{1}{x^2},$$

что и требовалось.

У частных производных второго порядка могут существовать свои частные производные. Их называют частными производными третьего порядка. Аналогичным образом определяются производные любого порядка. Кроме того, все такие построения имеют место и для функций n переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти частные производные 2-го порядка.

1) $z = x^2 + y^2 + 5x^3y^4$, 2) $z = e^{xy}$, 3) $z = \ln(x + y)$,

4) $z = x\ln(x + y)$, 5) $z = \sin^2 x + \sin y$, 6) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$,

7) $u = x^2y + 2xz^2$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$.

8) $u = \sin(x + y)\cos z$. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}$.

Доказать, что

9) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \equiv 0$, если $u = \operatorname{arctg}(2x - t)$;

10) $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = e^{\frac{x}{y}}$.

§6. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть $z = f(x, y)$ – функция, определенная на некотором множестве E. Напомним, что точка $P_0(x_0, y_0) \in E$ называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность этой точки $u_\delta(P_0)$ такая, что $\forall P \in u_\delta(P_0): f(P_0) \geq f(P)$. Определение точки минимума аналогично. Общее название точек максимума и минимума – точки экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если P_0 – точка экстремума и если в этой точке существуют частные производные, то они равны нулю. Иными словами, в точке экстремума равен нулю градиент функции.

Доказательство. Если допустить, что $\overline{grad z}|_{P_0} \neq 0$, то в направлении градиента функция $z = f(P)$ возрастает, а в противоположном направлении – убывает. В таком случае в любой окрестности $u_\delta(P_0)$ существуют точки P_1 и P_2 такие, что $f(P_1) < f(P_0) < f(P_2)$. Это означает, что P_0 не является точкой экстремума, что противоречит условию.

Точки, в которых градиент равен нулю, называются стационарными. Отметим, что если $P_0(x_0, y_0)$ стационарная точка, то касательная плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ параллельна плоскости xOy.

Стационарные точки являются подозрительными на экстремум. Подозрительными являются также и те точки, в которых частные производные не существуют. Примером может служить вершина конуса, ось симметрии которого есть ось Oz.

Условие равенства нулю частных производных: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ является необходимым, но не достаточным условием экстремума. Так, например, у функции $z = x^2 - y^2$ точка (0; 0) является стационарной, что легко проверить, но не является экстремальной, так как в любой окрестности точки (0; 0) есть точки вида (x; 0), в которых $z > 0$, и точки вида (0; y), в которых $z < 0$. Получение достаточных условий для экстремальности точки является более сложной задачей. Приведем без доказательства достаточное условие экстремума.

Теорема. Пусть в окрестности критической точки (стационарной точки) P_0 функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим через $a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{P_0}$, $a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{P_0}$, $a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{P_0}$. Составим определитель $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$. Если:

1) $D > 0$, то P_0 – точка экстремума, причем при $a_{11} > 0$ – точка минимума, а при $a_{11} < 0$ – точка максимума;

2) $D < 0$, то P_0 не является точкой экстремума;

3) $D = 0$, то никакого вывода сделать нельзя и надо проводить более тонкое исследование, привлекая частные производные более высоких порядков. Однако мы оставляем это за пределами настоящего пособия.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Найдем стационарные точки

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$M_1(0; 0)$; $M_2(1; 1)$

Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем точку M_1 (0; 0); для этой точки $a_{11} = 0$,

$a_{12} = -3, \quad a_{22} = 0, \quad D = -9 < 0$.

Значит, точка M_1 не является точкой экстремума. Исследуем точку M_2 (1; 1); для этой точки $a_{11} = 6$,

$a_{12} = -3, \quad a_{22} = 6, \quad D = 6 \quad 6 - (-3)^2 = 27 > 0 \quad D > 0$.

Значит, M_2 – точка экстремума и, поскольку $a_{11} > 0$, можно утверждать, что это точка минимума. Подставляя координаты точки M_2 в исследуемую функцию, получим $z_{min} = -1$.

Ответ: Точка минимума M_2 (1; 1), $z_{min} = -1$.

Теперь поставим задачу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Пусть D – ограниченная область на плоскости xOy и $z = f(x, y)$ – функция непрерывная в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда на основании теоремы 2 (глава 4, стр. 148) она достигает хотя бы в одной точке $\overline{D}$ своего наибольшего значения и хотя бы в одной точке – своего наименьшего значения. Мы в дальнейшем будем считать данную функцию дифференцируемой на $\overline{D}$. Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции таков.

1. Находим стационарные точки, решая систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases}$

2. Выбираем из них те, что лежат в области D, и в каждой вычислим значение функции;

3. Исследуем поведение функции на границе области. С этой целью подставим уравнение границы области (или ее части) в заданную функцию. Получаем функцию одной переменной, находим ее критические точки и подсчитываем в них значения функции, определяем значения функции и на концах рассматриваемого отрезка;

4. Из всех найденных значений выбираем наименьшее и наибольшее.

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy(1 - x - y)$ в замкнутой области: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$ (рис. 157).

Решение. Находим частные производные:

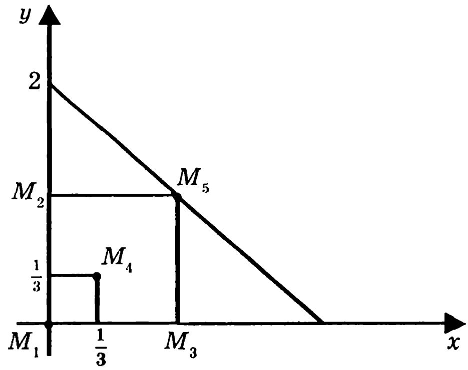


Рис. 157

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2xy - y^2;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 2xy - x^2;$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0; \\ x - 2xy - x^2 - 0. \end{cases}$

Эта симметричная система имеет следующие решения (разберитесь, пожалуйста, самостоятельно):

$$M_1(0;0), \quad M_2(0;1), \quad M_3(1;0), \quad M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Внутри области D лежит лишь одна точка $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; значение функции в этой точке

$$z(M_4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$$

Переходим к исследованию на границе. Граница области состоит из трех различных отрезков. Поэтому нам придется проводить рассуждения для каждого из отрезков отдельно. На участках $y = 0$ и $x = 0$ имеем $z \equiv 0$. На третьем участке границы $y = 2 - x$. Данная функция z будет выглядеть так: $z = x(x-2)$, где $0 \le x \le 2$. На концах исследуемого отрезка функция принимает нулевые значения.

Критическую точку найдем из условия $z'_x = 0$, т.е. $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1$. В этой точке $z = -1$. Сравнивая все найденные значения, делаем вывод, что наименьшее значение функции достигается в граничной точке $M_5(1,1)$, $z_{наим} = -1$, а наибольшее значение – во внутренней точке $M_4\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $z_{наиб} = \frac{1}{27}$.

Пример 3. На плоскости xOy заданы три точки $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ $M_3(x_3, y_3)$. Найти такое положение $(\cdot)M$, чтобы сумма квадратов расстояний от точки M до всех заданных точек была бы наименьшей.

Решение. Пусть x и y – координаты искомой точки. Тогда сумма квадратов расстояний от точки M до всех данных точек определяется так: $S = \sum_{i=1}^{3}\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right]$.

Здесь область изменения x, y – вся плоскость. Однако сразу можно увидеть, что если точка M далеко расположена от данных точек, то, конечно же, она не может быть искомой. Поэтому вне большого круга (да и на его границе) значения функции можно не принимать во внимание при поиске наименьшего значения S. Остается провести анализ только внутри некоторого круга. Находим стационарные точки из условий

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} 2(x - x_i), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3} 2(y - y_i).$$

Имеем систему уравнений $\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}(x - x_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^{3}(y - y_i) = 0 \end{cases}$

Решая, ее получаем: $\begin{cases} 3x - \sum\limits_{i=1}^{3} x_i = 0 \\ 3y - \sum\limits_{i=1}^{3} y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} x_i \\ y = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} y_i. \end{cases}$

Стационарная точка единственна. Совершенно ясно, что в этой точке S имеет наименьшее значение. Ведь в замкнутом круге (большого радиуса) наименьшее значение обязательно достигается. Ни в одной граничной точке оно достигаться не может, ибо там S велико! Значит, найденная нами стационарная точка доставляет функции S наименьшее значение.

Замечание. Эту точку легко построить, ибо она является точкой пересечения медиан $\Delta M_1M_2M_3$ (рис. 158).

Пример 4. Определить размеры прямоугольного открытого бассейна, на облицовку которого уйдет наименьшее количество материала, при условии, что объем бассейна равен V.

Решение. Расход облицовочного материала будет наименьшим, если наименьшей будет поверхность бассейна. Пусть x, y, z – размеры бассейна (рис. 159). В таком случае площадь поверхности $S = xy + 2xz + 2yz$. Учет того, что объем бассейна должен быть равен заданной величине V, приводит к зависимости между параметрами бассейна:

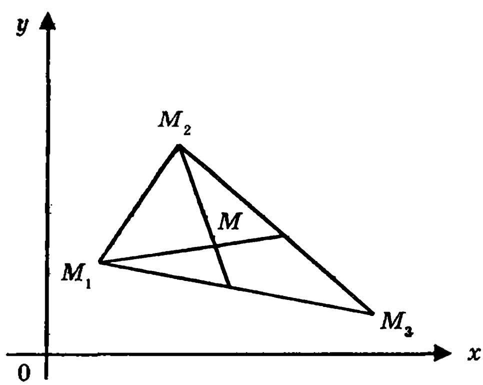


Рис. 158

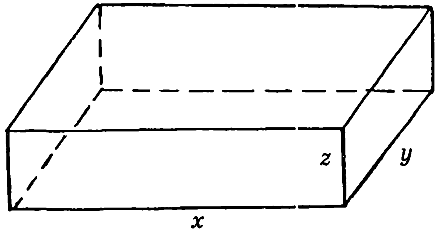


Рис. 159

$xyz = V$, откуда $z = \dfrac{V}{xy}$. Теперь получаем S как функцию двух переменных: $S(x,y) = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$

Частные производные этой функции $S'_x = y - \dfrac{2V}{x^2}$, $S'_y = x - \dfrac{2V}{y^2}$

Находим стационарную точку как решение системы

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 - 2V = 0. \end{cases}$$

Получаем точку с координатами $x = \sqrt[3]{2V}, y = \sqrt[3]{2V}$

В таком случае $z = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Ясно, что эта единственная стационарная точка доставляет функции S наименьшее значение.

Ответ: для того чтобы при заданном объеме V на облицовку бассейна ушло наименьшее количество материала, размеры бассейна должны быть такими: $x = y = \sqrt[3]{2V}, z = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ Облицовочного материала при этом потребуется $S_{\text{наим.}} = 3\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

Найти экстремумы функции

1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 2) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; 3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; 4) $z = (x-1)^2 + 2y^2$;

5) $z = (x-1)^2 - 2y^2$; 6) $z = x^3y^2(6 - x - y)$, если $x > 0, y > 0$.

Найти наименьшее и наибольшее значения

7) функции $z = 1 + x + 2y$ в области, заданной неравенствами $x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 1$;

8) функции $z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$;

9) функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$;

2-Й УРОВЕНЬ

Найти экстремумы функции

10) $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$; 11) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;

12) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

13) $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции

14) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

15) $z = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \le 1$;

16) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в области $x^2 + y^2 \le 25$;

17) Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющий наибольший объем ;

18) Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и емкостью (внутренней) V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

19) В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Ответы: 1) $z_{min} = z(-4;1) = -1$. 2) $z_{max} = z(4;4) = 12$. 3) $z_{min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 0$. 4) $z_{min} = z(1;0) = 0$. 5) экстремумов нет. 6) $z_{max} = z(3;2) = 108$. 7) $z_{наиб.} = z(1;0) = 2$, $z_{наим} = z(0;-1) = -1$. 8) $z_{наиб.} = z(\pm 1;0) = 1$, $z_{наим} = z(0;\pm 1) = -1$. 9) $z_{наиб.} = z(0;3) = z(3;0) = 6$, $z_{наим} = z(1;1) = -1$. 10) $z_{min} = z(2;4) = 0$. 11) $z_{min} = z(-2;0) = -\frac{2}{e}$. 12) $z_{max} = z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 13) $z_{max} = z(-4;-2) = 8e^{-2}$. 14) $z_{наиб.} = z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $z_{наим} = z(0;0) = 0$.

15) $z_{наиб.} = z(\pm 1;0) = z(0;\pm 1) = 1$, $z_{наим} = z(0;0) = 0$.

16) $z_{наиб} = z(-3;4) = 125$, $z_{наим} = z(3;-4) = -75$. 17) куб с длиной ребра $\frac{d}{\sqrt{3}}$. 18) $x = y = z = \sqrt[3]{V} + 2\delta$.

19) $\frac{2R}{\sqrt{3}};\frac{2R}{\sqrt{3}};\frac{R}{\sqrt{3}}$

Глава 10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

При изучении дифференциального исчисления основополагающей была такая постановка вопроса: дана функция $F(x)$, найти ее производную $F'(x)$ (обозначим ее через $f(x)$). Сейчас мы ставим, по сути дела, обратную задачу: для непрерывной функции $f(x)$ найти первообразную, т. е. функцию $F(x)$, удовлетворяющую тождеству $F'(x) \equiv f(x)$.

В простейших случаях первообразную можно найти сразу, зная формулы для производных. Например, очевидно, что

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x &&\Rightarrow F(x) = x^2,\\
f(x) &= \cos x &&\Rightarrow F(x) = \sin x,\\
f(x) &= e^x &&\Rightarrow F(x) = e^x,\\
f(x) &= \frac{1}{1+x^2} &&\Rightarrow F(x) = \operatorname{arctg} x
\end{aligned}$$

В целом же задача отыскания первообразных несравненно сложнее дифференцирования. Ее решение требует знания разнообразных методов, сообразительности и большой тренировки.

Отметим, что, если функция $f(x)$ имеет первообразную (доказано, что для непрерывной функции это всегда так), то она имеет их бесчисленное множество. В самом деле, пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а C – любая константа. Тогда функция $\Phi(x) = F(x) + C$ также является первообразной, поскольку

$$\Phi'(x) \equiv \left(F(x) + C\right)' \equiv F'(x) + O \equiv f(x).$$

Более глубоким является такой вопрос: существуют ли у функции $f(x)$ первообразные другого вида, чем $F(x) + C$? Оказывается, не существуют. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две любые первообразные функции для $f(x)$, то они могут различаться лишь на постоянное слагаемое, т. е.

$$\Phi(x) - F(x) \equiv const.$$

Доказательство. По определению первообразной имеем одновременно два тождества:

$$\Phi'(x) \equiv f(x), \quad F'(x) \equiv f(x).$$

Поэтому

$$\left(\Phi(x) - F(x)\right)' \equiv \Phi'(x) - F'(x) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Обозначив $\Phi(x) - F(x) = G(x)$, получаем $G'(x) \equiv 0$. Пусть x_1 и x_2 – две произвольные точки из общей области определения функций $\Phi(x)$ и $F(x)$, такие, что $x_1 < x_2$. Применяя к функции $G(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, найдем точку $\xi \in (x_1, x_2)$, для которой

$$G(x_2) - G(x_1) = G'(\xi)(x_1, x_2).$$

Но $G'(\xi) = 0$, ибо $G'(x) \equiv 0$. Отсюда $G(x_2) = G(x_1)$. Поскольку x_1 и x_2 – произвольные точки области определения функции $G(x)$, можно сделать вывод, что $G(x)$ принимает одно и то же значение во всех точках, т. е. $G(x) \equiv C = const$. Следовательно, $\Phi(x) - F(x) \equiv C$, что и требовалось. Полученная теорема приводит к естественному понятию.

Определение. Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается так: $\int f(x)dx$. Значит, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (10.1)$$

где C – произвольная постоянная.

Действия дифференцирования и интегрирования взаимно обратны, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (10.2)$$

и

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \qquad (10.3)$$

Непосредственной проверкой обосновываются простые, но очень важные свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1 (линейность). Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции, α и β – любые числа, то

$$\int (\alpha f(x) + \beta\varphi(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int \varphi(x)dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов, и постоянный множитель можно за знак интеграла выносить.

Свойство 2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C.$$

Используя таблицу производных основных элементарных функций, правило дифференцирования сложных функций и два указанных свойства неопределенного интеграла, можно составить следующую таблицу (с. 335–336).

Убедиться в справедливости всех этих формул можно непосредственной проверкой. Формулы 1–10 очевидны; (11) следует из разложения $\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$.

Формулы (12) – (16) получаются при использовании метода подстановки, что будет показано в соответствующем параграфе.

Правую колонку таблицы можно НЕ ЗАПОМИНАТЬ, т. к. она получается из левой колонки применением свойства 2. Приведем примеры, решения которых основываются только на формулах (1) – (16) и свойствах интеграла.

$$1)\ \int\left(2x^2+7x^3\right)dx=2\int x^2dx+7\int x^3dx=2\cdot\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^4}{4}+$$

$$+C=\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{4}x^4+C;$$

$$2)\ \int\left(3x+5e^x+\frac{2}{x}+7\right)dx=\frac{3x^2}{2}+5e^x+2\ln|x|+7x+C;$$

$$3)\ \int\left(5\sin x+4\cos x-\frac{3}{1+x^2}+4^x\right)dx=-5\cos x+$$

$$+4\sin x-3\operatorname{arctg}x+\frac{4^x}{\ln 4}+C;$$

$$4)\ \int\left(\cos 7x-\frac{4}{5x+2}\right)dx=\frac{1}{7}\sin 7x-\frac{4}{5}\ln|5x+2|+C;$$

$$5)\ \int\frac{dx}{\sin 4x}=\frac{1}{4}\ln|\operatorname{tg}2x|+C;$$

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int (\alpha x + \beta)^n dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(\alpha x + \beta)^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\alpha x + \beta} = \frac{1}{\alpha} \ln\lvert \alpha x + \beta\rvert + C$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x + \beta} + C$
5	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x + \beta) + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(\alpha x + \beta) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x + \beta) + C$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(\alpha x + \beta)} = \frac{1}{\alpha} \mathrm{tg}(\alpha x + \beta) + C$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(\alpha x + \beta)} = -\frac{1}{\alpha} \mathrm{ctg}(\alpha x + \beta) + C$

9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (\alpha x + \beta)^2}} = \frac{1}{\alpha}\arcsin\frac{\alpha x + \beta}{a} + C$
10	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2 + a^2} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha x + \beta}{a} + C$
11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x - a}{x + a}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2 - a^2} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{\alpha x + \beta - a}{\alpha x + \beta + a}\right\| + C$
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + A}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + A}} = \frac{1}{\alpha}\ln\left\|\alpha x + \beta + \sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + A}\right\| + C$
13	$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln\|\cos x\| + C$	$\int \mathrm{tg}(\alpha x + \beta)dx = -\frac{1}{\alpha}\ln\|\cos(\alpha x + \beta)\| + C$
14	$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln\|\sin x\| + C$	$\int \mathrm{ctg}(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\ln\|\sin(\alpha x + \beta)\| + C$
15	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sin(\alpha x + \beta)} = \frac{1}{\alpha}\ln\left\|\mathrm{tg}\,\frac{\alpha x + \beta}{2}\right\| + C$
16	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\cos(\alpha x + \beta)} = \frac{1}{\alpha}\ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha x + \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

6) $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}3x + C;$

7) $\int \left(6\sin\frac{x}{3} - \frac{8}{\sqrt{1-16x^2}}\right)dx = 6\cdot\left(-3\cos\frac{x}{3}\right) -$

$$-8\ \ \frac{1}{4}\arcsin(4x) + C = -18\cos\frac{x}{3} - 2\arcsin 4x + C.$$

Рекомендуем читателю при анализе решений обратить внимание на умение пользоваться основными формулами элементарной алгебры и тригонометрии.

1) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^2}dx = \int \frac{x + 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^2}dx =$

и после почленного деления имеем:

$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int x^{-\frac{7}{6}}dx + \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \ln|x| - 12x^{-\frac{1}{6}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

2) $\int 2^x \cdot \left(3^x+1\right)^3 dx = \int 2^x \cdot \left(27^x + 3\cdot 9^x + 3\cdot 3^x + 1\right)dx =$

$$= \int 54^x dx + 3\int 18^x dx + 3\int 6^x dx + \int 2^x dx =$$

$$= \frac{54^x}{\ln 54} + \frac{3\cdot 18^x}{\ln 18} + \frac{3\cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

3) $\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{1+x^2+2x}{x\left(1+x^2\right)}dx =$

$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = \ln|x| + 2\mathrm{arctg}x + C.$$

4) $\int \frac{x^3}{x^3+5x^2}dx = \int \frac{\left(x^3+5x^2\right)-5x^2}{x^3+5x^2}dx =$

$$= \int\left(1 - \frac{5x^2}{x^2(x+5)}\right)dx = x - 5\int\frac{dx}{x+5} = x - 5\ln|x+5| + C.$$

5) $\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x) dx =$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C.$

6) $\int \sin^2 \frac{x}{5} dx = \int \frac{1-\cos\frac{2x}{5}}{2} dx = \frac{1}{2}\int \left(1-\cos\frac{2x}{5}\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\sin\frac{2x}{5}\right) + C.$

7) $\int \mathrm{tg}^2 7x dx = \int \frac{\sin^2 7x}{\cos^2 7x} dx = \int \frac{1-\cos^2 7x}{\cos^2 7x} dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 7x} - 1\right) dx = \frac{1}{7}\mathrm{tg} 7x - x + C.$

8) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} -$

$- \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{ctg} x - \mathrm{tg} x + C.$

9) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx =$

$= 2x - \mathrm{tg} x + C.$

10) $\int \sin 3x \cdot \cos x dx = \int \frac{\sin 4x + \sin 2x}{2} dx =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$

11) $\int \cos 5x \cdot \cos 2x dx = \int \frac{\cos 7x + \cos 3x}{2} dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C.$$

12) $$\int \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}}\,dx = \int \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + C.$$

13) $$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4) + 9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 9} =$$

$$\overset{(10)}{=} \operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C.$$

14) $$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 7} = \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 9) - 2} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 2} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-3)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} \overset{(11)}{=} \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x - 3 - \sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

15) $$\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 9x^2 - 6x}} = J$$

$15 - 9x^2 - 6x = 15 - (9x^2 + 6x) = 15 - (9x^2 + 6x + 1) + 1 = 16 - (3x + 1)^2$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{4} + C.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1-Й УРОВЕНЬ

1) $\int (7x^6 + 5x^4 - 3)dx$; 2) $\int (x + 2\sqrt{x})dx$;

3) $\int\left(\sqrt[5]{x^2}+\frac{7}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$;

4) $\int(3x+1)^2dx$;

5) $\int(7x+4)^9dx$;

6) $\int\frac{x^3+5x+9}{x}dx$;

7) $\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^{4x}}dx$;

8) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2dx$;

9) $\int\sqrt[5]{2x+1}dx$;

10) $\int 2^x\left(e^x+3^x\right)dx$;

11) $\int 2^x\left(4^{2x}+5^x\right)dx$;

12) $\int\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt[5]{x}\right)^2}{x^3}dx$;

13) $\int\cos^2 7xdx$;

14) $\int \mathrm{ctg}^2 4xdx$;

15) $\int\sin x\cdot\cos 3xdx$;

16) $\int\cos 3x\cos 5xdx$;

17) $\int\sin 7x\sin 9xdx$;

18) $\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin 2x}dx$.

ОТВЕТЫ:

1) x^7+x^5-3x+C;

2) $\frac{x^2}{2}+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$;

3) $\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7}+\frac{28x^{\frac{3}{4}}}{3}+C$;

4) $\frac{(3x+1)^3}{9}+C$;

5) $\frac{(7x+4)^{10}}{70}+C$;

6) $\frac{x^3}{3}+5x+9\ln|x|+C$;

7) $-\frac{e^{-3x}}{3}-\frac{e^{-5x}}{5}+C$;

8) $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$;

9) $\frac{5(2x+1)^{6/5}}{12}+C$;

10) $\frac{2^x\cdot e^x}{\ln 2+1}+\frac{6^x}{\ln 6}+C$;

11) $\frac{2^{5x}}{5\ln 2}+\frac{10^x}{\ln 10}+C$; 12) $-\frac{1}{x}+\frac{20x^{-\frac{13}{10}}}{13}-\frac{5x^{-\frac{8}{5}}}{8}+C$;

13) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{14}\sin 14x\right)+C$; 14) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}4x-x+C$;

15) $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 4x}{4}\right)+C$; 16) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$;

17) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 16x}{16}\right)+C$; 18) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+x+C$.

2-Й УРОВЕНЬ

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$; 2) $\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}$;

3) $\int\sin 4x\cdot\sin 3x\cdot\cos x dx$;

4) $\int\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x dx$; 5) $\int\cos x\cdot\sin^2 5x dx$;

6) $\int\cos^3 x dx$; 7) $\int\sin^3 x dx$; 8) $\int\sin^4 2x dx$;

9) $\int\cos^4 5x dx$; 10) $\int\frac{dx}{\cos^4 x-\sin^4 x}$;

11) $\int e^x\cdot(2^x+5^x)^2 dx$; 12) $\int(3^x+5)(7^x-4^x)dx$;

13) $\int\frac{dx}{x^2-8x+15}$; 14) $\int\frac{dx}{x^2-3x+4}$;

15) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; 16) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; 17) $\int\sqrt{4^x+2+4^{-x}}dx$;

18) $\int\frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$; 19) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$;

20) $\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}$; 21) $\int\frac{e^{4x}-1}{e^x-1}$.

ОТВЕТЫ:

1) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$; 2) $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$;

3) $\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 6x}{6}\right)+C$;

4) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 2x}{2}+x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C$;

5) $\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{\sin 11x}{22}-\frac{\sin 9x}{18}\right)+C$;

6) $\frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+C$; 7) $\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 3x}{3}-3\cos x\right)+C$;

8) $\frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$;

9) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\frac{\sin 10x}{5}+\frac{\sin 20x}{40}\right)+C$; 10) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$;

11) $\frac{(4e)^x}{\ln 4+1}+2\frac{(10e)^x}{\ln 10+1}+\frac{(25e)^x}{\ln 25+1}+C$;

12) $\frac{21^x}{\ln 21}+\frac{5\cdot 7^x}{\ln 7}-\frac{12^x}{\ln 12}-\frac{5\cdot 4^x}{\ln 4}+C$;

13) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-5}{x-3}\right|+C$; 14) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$;

15) $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$; 16) $\arcsin(2x-1)+C$;

17) $\frac{2^x-2^{-x}}{\ln 2}+C$; 18) $-2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-x+C$;

19) $\frac{1}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+C$; 20) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$;

21) $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+e^x+x+C$.

Переходим к изучению основных методов интегрирования.

§2. МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ (МЕТОД ПОДСТАНОВКИ)

При нахождении многих интегралов оказывается эффективной следующая идея: вместо исходной переменной x вводят новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$ или $\varphi(x) = t$ (где φ – дифференцируемая функция) таким образом, чтобы относительно новой переменной интеграл был значительно проще, вычисляют этот преобразованный интеграл, а затем возвращаются к старой переменной.

Если $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – ее первообразная, а $\varphi(x)$ – дифференцируемая функция, то изложенная идея выглядит так:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left|\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{matrix}\right| = \int f(t)dt = F(t) + C =$$
$$= F(\varphi(x)) + C.$$

Результат легко проверяется дифференцированием:

$$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

В частном случае:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \left|\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Этот факт может быть сформулирован в виде правила: если в числителе стоит производная знаменателя, то интеграл равен натуральному логарифму модуля знаменателя.

Примеры:

1) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 15} = \ln|\sin x + 15| + C;$

2) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 4} = \ln|e^x + 4| + C;$

3) $\int \frac{2^x dx}{2^x + 7} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2^x \ln 2 dx}{2^x + 7} = \frac{1}{\ln 2} \ln\left|2^x + 7\right| + C;$

4) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} x = \ln\left|\sin x + \cos x\right| + C;$

5) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 9} = \ln\left|\sin^2 x + 9\right| + C;$

6) $\int \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} dx = \ln\left|e^x + x^3\right| + C.$

Приведем ряд других примеров.

Пример 1. Найти интеграл $\int \sin^{19} x \cdot \cos x dx = J$.

Решение. Введем новую переменную по формуле $\sin x = t$. Продифференцируем это равенство $\cos x \cdot dx = dt$. Тогда заданный интеграл J будет иметь вид:

$$J = \int t^{19} dt = \frac{t^{20}}{20} + C = \frac{(\sin x)^{20}}{20} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \left(x^3 + 5\right)^{16} \cdot 3x^2 dx = J$.

Решение. $x^3 + 5 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$. Тогда $J = \int t^{16} dt =$

$$= \frac{t^{17}}{17} + C = \frac{\left(x^3 + 5\right)^{17}}{17} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin(\ln x) \frac{dx}{x} = J$

Решение. $\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$. Значит, $J = \int \sin t dt =$

$= -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C.$

Получим с помощью подстановок некоторые формулы из приведенной выше таблицы.

Формула 13). $J = \int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

Решение. Пусть $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow J = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Формула 15). $J = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Обозначим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Это так называемая универсальная тригонометрическая подстановка.

Имеем: $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx = dt,$

$$J = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Формула 12). $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}}$.

Решение. Обозначим $\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| = t$. Тогда

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}} \cdot \left(1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + A}}\right) dx = dt. \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = dt.$$

$$J = \int dt = t + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C.$$

Последние два примера показывают, что сообразить, какой должна быть подстановка, бывает очень сложно. Умение выбрать подстановку достигается опытом. Основой приобретения навыков могут являться формулы дифференцирования и формулы интегрирования.

Рассмотрим подстановки, основанные на использовании конкретных формул дифференцирования.

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

Образцы решений:

1) $$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{3x^3+5}\,dx = \left|\begin{array}{l} 3x^3+5=t \\ 9x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{9}dt \end{array}\right| = \frac{1}{9}\int t^{\frac{1}{3}}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{1}{12}\left(3x^3+5\right)^{\frac{4}{3}} + C;$$

2) $$\int \frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{dx}{x^2} = dt \end{array}\right| = -\int 2^t dt = -\frac{2^t}{\ln 2} + C =$$

$$= -\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2} + C;$$

3) $$\int \frac{x^2dx}{x^6+5} = \int \frac{x^2dx}{\left(x^3\right)^2+5} = \left|\begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{\sqrt{5}} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы
(результаты проверять дифференцированием)

1) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[4]{(5x^4+7)^3}}$; 2) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}dx}{x^3}$; 3) $\int x^4 \cdot \sin(2x^5+3)dx$;

4) $\int \mathrm{tg}(4x^3+1)\cdot x^2dx$; 5) $\int \frac{xdx}{x^4-4}$; 6) $\int \frac{x^3dx}{x^4-4}$;

7) $\int \frac{xdx}{\cos^2(3x^2+1)}$; 8) $\int \frac{x^3dx}{\cos^2(x^4+5)}$.

2. $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Образцы решений:

1) $\int e^x \cos(2e^x+5)dx = \begin{vmatrix} 2e^x+5=t \\ 2e^xdx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \cos tdt =$

$= \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2e^x+5)+C;$

2) $\int 3^x \mathrm{ctg}(3^{x+1}+4)dx = \int 3^x \mathrm{ctg}(3\cdot 3^x+4)dx =$

$= \begin{vmatrix} 3\cdot 3^x+4=t \\ 3\cdot 3^x \ln 3dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{3\ln 3}\int \mathrm{ctg}tdt = \frac{1}{3\ln 3}\ln|\sin t| +$

$+C = \frac{1}{3\ln 3}\ln\left|\sin(3^{x+1}+4)\right| + C;$

3) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+3}} = \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{(e^{2x})^2+3}} = \begin{vmatrix} e^{2x}=t \\ 2e^{2x}dx=dt \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| + C =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 3}\right) + C$, (т.к. $e^{2x} > 0$, то знак абсолютной величины можно снять);

4) $$\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4 - 4^x}} = \int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4 - \left(2^x\right)^2}} = \left| \begin{matrix} 2^x = t \\ 2^x \ln 2\,dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} = \frac{1}{\ln 2}\arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^{x-1} + C$$

Примеры для самостоятельной работы

(результаты проверять дифференцированием)

1) $\int e^x \sin\left(3e^x - 4\right)dx$;

2) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^{6x} + 5}$;

3) $\int e^x \sqrt[5]{\left(3e^x + 4\right)^2}\,dx$;

4) $\int \frac{4^x\,dx}{\sin\left(4^{x+1} + 3\right)}$;

5) $\int 3^x \operatorname{tg}\left(7 \cdot 3^x + 4\right)dx$;

6) $\int \frac{5^x\,dx}{25^x - 3}$;

7) $\int \frac{e^x\,dx}{\cos^2\left(e^{x+1} + 4\right)}$;

8) $\int \frac{2^x\,dx}{\sin^2\left(2^{x-1} + 3\right)}$.

3. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$, $\left(\ln(\alpha x + \beta)\right)' = \frac{\alpha}{\alpha x - \beta}$.

Образцы решений:

1) $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \left| \begin{array}{l} \ln(x+1) = t \\ \frac{dx}{x+1} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$= \ln|\ln(x+1)| + C.$

Отметим, что можно было сразу воспользоваться формулой

$$\int \frac{\varphi'(x)d\varphi}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C;$$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{3\ln x + 7}} = \left| \begin{array}{l} 3\ln x + 7 = t \\ \frac{3dx}{x} = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C =$

$= \frac{4}{9}(3\ln x + 7)^{\frac{3}{4}} + C;$

3) $\int \frac{dx}{x[\ln^2 x + 7]} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{7}}\right) + C.$

Примеры для самостоятельной работы

(результаты проверять дифференцированием)

1) $\int \frac{\cos(2\ln x + 3)}{x} dx;$ 2) $\int \frac{dx}{x[\ln^2 x + 5]};$

3) $\int \frac{dx}{x[\ln^2 x - 5]};$ 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 3}}$

4. $(\sin(\alpha x+\beta))' = \alpha\cos(\alpha x+\beta)$, $(\cos(\alpha x+\beta))' =$
$= -\alpha\sin(\alpha x+\beta)$.

Образцы решений:

1) $$\int \cos 2x e^{\sin 2x} dx = \begin{vmatrix} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int e^t dt =$$
$$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{\sin 2x} + C;$$

2) $$\int \sin 3x 2^{\cos 3x} dx = \begin{vmatrix} \cos 3x = t \\ -3\sin 3x dx = dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int 2^t dt =$$
$$= -\frac{2^t}{3\ln 2} + C = -\frac{2^{\cos 3x}}{3\ln 2} + C;$$

3) $$\int \sin x \operatorname{tg}(\cos x) dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\int \operatorname{tg} t dt =$$
$$= \ln|\cos t| + C = \ln|\cos(\cos x)| + C;$$

4) $$\int \frac{\cos 4x dx}{2\sin 4x + 5} = \begin{vmatrix} 2\sin 4x + 5 = t \\ 8\cos 4x dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C =$$
$$= \frac{1}{8}\ln|2\sin 4x + 5| + C;$$

5) $$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{3-\cos^2 x}} = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - t^2}} =$$
$$= -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = -\arcsin\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + C;$$

6) $$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 2x - 4} = \begin{vmatrix} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{8} \ln \frac{2 - \sin 2x}{2 + \sin 2x} + C \text{ (т.к. } |\sin 2x| \le 1\text{)}.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{2\sin x + 5}}$; 2) $\int \frac{\sin x dx}{3\cos x + 7}$; 3) $\int \cos x \operatorname{ctg}(\sin x) dx$;

4) $\int \cos 3x 3^{\sin 3x} dx$; 5) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 2x + 4}$; 6) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{\cos^2 3x + 5}}$;

7) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{7 - \sin^2 2x}}$; 8) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 3}$; 9) $\int \cos x \sin(\sin x) dx$.

5. $(\operatorname{tg}(\alpha x + \beta))' = \frac{\alpha}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$;

$(\operatorname{ctg}(\alpha x + \beta))' = -\frac{\alpha}{\sin^2(\alpha x + \beta)}$.

Образцы решений:

1) $$\int \frac{\operatorname{tg}^3(3x+1) dx}{\cos^2(3x+1)} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(3x+1) = t \\ \frac{3dx}{\cos^2(3x+1)} = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int t^3 dt =$$

$$= \frac{t^4}{12} + C = \frac{\operatorname{tg}^4(3x+1)}{12} + C;$$

2) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 3)} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right) + C;$$

3) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x(3\operatorname{ctg}x+5)} = \left| \begin{matrix} 3\operatorname{ctg}x + 5 = t \\ -\dfrac{3dx}{\sin^2 x} = dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{ctg}x + 5| + C;$$

4) $$\int \frac{dx}{\sin^2 4x 2^{\operatorname{ctg}4x}} = \int \frac{2^{-\operatorname{ctg}4x}dx}{\sin^2 4x} = \left| \begin{matrix} -\operatorname{ctg}4x = t \\ \dfrac{4dx}{\sin^2 4x} = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int 2^t dt = \frac{2^t}{4\ln 2} + C = \frac{2^{-\operatorname{ctg}4x}}{4\ln 2} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{4\operatorname{tg}x + 7}}$;   2) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x}$;

3) $\int \dfrac{\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg}x)dx}{\sin^2 x}$;   4) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\sqrt{5 - \operatorname{ctg}^2 x}}$.

6. $$(\arcsin(\alpha x + \beta))' = \frac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x+\beta)^2}};$$

$$(\operatorname{arctg}(\alpha x + \beta))' = \frac{\alpha}{1+(\alpha x+\beta)^2}.$$

Образцы решений:

1) $$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}2x}dx}{1+4x^2} = \left| \begin{matrix} \operatorname{arctg}2x = t \\ \dfrac{2dx}{1+4x^2} = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}2x} + C;$$

2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{\arcsin x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{array} \right| =$

$= \int t^{\frac{1}{2}}dt = \dfrac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \dfrac{2(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C;$

3) $\int \frac{\cos(2\operatorname{arctg}x + 5)dx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{l} 2\operatorname{arctg}x + 5 = t \\ \dfrac{2dx}{x^2+1} = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt =$

$= \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2\operatorname{arctg}x + 5) + C;$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}} =$

$= \left| \begin{array}{l} \arcsin\dfrac{x}{2} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C.$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{2^{\arcsin 3x}dx}{\sqrt{1-9x^2}}$;

2) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(\operatorname{arctg}x)^2 - 4}}$;

3) $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\int \frac{\operatorname{tg}(2\arcsin x + 5)dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рассмотрим теперь различные подстановки при употреблении одной и той же формулы интегрирования.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ — формула интегрирования.

Образцы решений:

1) $\int e^x\left(2e^x+5\right)^{11}dx = \left|\begin{aligned} 2e^x+5&=t \\ 2e^x dx&=dt \end{aligned}\right| = \frac{1}{2}\int t^{11}dt = \frac{t^{12}}{24} + C =$

$= \frac{\left(2e^x+5\right)^{12}}{24} + C;$

2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{(3\sin x+5)^4}} = \left|\begin{aligned} 3\sin x+5&=t \\ 3\cos x dx&=dt \end{aligned}\right| = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{4}{5}}dt =$

$= \frac{5t^{\frac{1}{5}}}{3} + C = \frac{5}{3}\sqrt[5]{3\sin x+5} + C;$

3) $\int \frac{dx}{x\left(3\ln x+7\right)^4} = \left|\begin{aligned} 3\ln x+7&=t \\ \frac{3dx}{x}&=dt \end{aligned}\right| = \frac{1}{3}\int t^{-4}dt =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{9\left(3\ln x+7\right)^3} - C.$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{2^x dx}{\left(2^{x+1}+7\right)^2}$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{2\operatorname{tg}x+7}dx}{\cos^2 x}$; 3) $\int \sin x\left(3\cos x-4\right)^{15}dx.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

Полезно помнить формулу: $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$

Образцы решений:

$$1)\ \int \frac{\cos x dx}{3\sin x - 5} = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos x dx}{3\sin x - 5} = \frac{1}{3}\ln|3\sin x - 5| + C;$$

$$2)\ \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C;$$

$$3)\ \int \frac{e^x dx}{2e^x - 5} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x dx}{2e^x - 5} = \frac{1}{2}\ln|2e^x - 5| + C;$$

$$4)\ \int \frac{dx}{\cos^2 3x(2\mathrm{tg}3x + 5)} = \left|\begin{matrix} 2\mathrm{tg}3x + 5 = t \\ \dfrac{6dx}{\cos^2 3x} = dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|t| + C = \frac{1}{6}\ln|2\mathrm{tg}3x + 5| + C;$$

$$5)\ \int \frac{dx}{5\cdot 2^x + 1} = \int \frac{dx}{2^x(5 + 2^{-x})} = \int \frac{2^{-x}dx}{5 + 2^{-x}} = \left|\begin{matrix} 5 + 2^{-x} = t \\ -2^{-x}\ln 2 dx = dt \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{\ln|t|}{\ln 2} + C = -\frac{\ln(5 + 2^{-x})}{\ln 2} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

$$1)\ \int \frac{x^4 dx}{2x^5 + 1};\quad 2)\ \int \frac{\sin x dx}{2\cos x + 1};\quad 3)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x(3\mathrm{ctg}x + 4)};$$

$$4)\ \int \frac{2^x dx}{2^{x+1} + 5};\quad 5)\ \int \frac{e^x dx}{e^x + 3}.$$

3. $\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ – формулы интегрирования.

Образцы решений:

1) $$\int xe^{-x^2}dx = \left| \begin{matrix} -x^2 = t \\ -2xdx = dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C;$$

2) $$\int \cos 2x 3^{\sin 2x} dx = \left| \begin{matrix} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int 3^t dt =$$

$$= \frac{3^t}{2\ln 3} + C = \frac{3^{\sin 2x}}{2\ln 3} + C;$$

3) $$\int \frac{e^{\text{ctg}x}dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \text{ctg}x = t \\ -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = dt \end{matrix} \right| = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\text{ctg}x} + C;$$

4) $$\int \frac{2^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{matrix} \right| = 2\int 2^t dt = \frac{2^{t+1}}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \dfrac{e^{2\text{tg}x+5}dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int \sin 5x 3^{\cos 5x} dx$;

3) $\int \dfrac{e^{\text{arctg}5x}dx}{25x^2+1}$; 4) $\int \dfrac{4^{x^{\frac{1}{3}}}dx}{x^4}$.

4. $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C.$

Образцы решений:

1) $$\int \frac{\cos(2\ln x + 1)dx}{x} = \left| \begin{array}{l} 2\ln x + 1 = t \\ \dfrac{2dx}{x} = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2\ln x + 1) + C;$$

2) $$\int e^{2x}\sin(e^{2x+1} + 3)dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x+1} + 3 = t \\ 2e \cdot e^{2x}dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2e}\int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{2e}\cos t + C = -\frac{\cos(e^{2x+1} + 3)}{2e} + C;$$

3) $$\int \frac{\sin(3\operatorname{tg} x - 4)dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} 3\operatorname{tg} x - 4 = t \\ \dfrac{3dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3\operatorname{tg} x - 4) + C;$$

4) $$\int \frac{\cos\dfrac{2}{x+1}dx}{(x+1)^2} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{2}{x+1} = t \\ -\dfrac{2dx}{(x+1)^2} = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \cos t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin t + C = -\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x+1} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int e^{3x}\sin(2e^{3x} - 1)dx;$ 2) $\int \dfrac{\cos(\operatorname{ctg} x)dx}{\sin^2 x};$

3) $\int \frac{\sin \frac{1}{x^2} dx}{x^3}$; 4) $\int \frac{\cos\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{x+1}}$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$.

Образцы решений:

$$1)\ \int \frac{e^{3x}dx}{\cos^2\left(2e^{3x}+4\right)} = \left|\begin{array}{l} 2e^{3x}+4 = t \\ 6e^{3x}dx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{tg}t + C = \frac{1}{6}\mathrm{tg}\left(2e^{3x}+4\right) + C;$$

$$2)\ \int \frac{\sin x dx}{\cos^2(\cos x)} = \left|\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array}\right| = -\int \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= -\mathrm{tg}t + C = -\mathrm{tg}(\cos x) + C;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x^4 \sin^2\left(\frac{5}{x^3}\right)} = \left|\begin{array}{l} \frac{5}{x^3} = 5x^{-3} = t \\ -15x^{-4}dx = -\frac{15}{x^4}dx = dt \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{15}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{15}\mathrm{ctg}t + C = \frac{1}{15}\mathrm{ctg}\left(\frac{5}{x^3}\right) + C;$$

$$4)\ \int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)} = \left|\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array}\right| = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\mathrm{ctg}t + C =$$

$$= -\mathrm{ctg}(\ln x) + C.$$

1) $\int \frac{e^x dx}{\sin^2\left(e^{x+1}+3\right)}$; 2) $\int \frac{(2x+1)dx}{\cos^2\left(x^2+x+1\right)}$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2(\mathrm{tg}x)}$.

6. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C;$

$\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C.$

Образцы решений:

1) $\int e^x \mathrm{tg}\left(2e^x+5\right)dx = \left|\begin{matrix} 2e^x+5=t \\ 2e^x dx = dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \mathrm{tg}t + C =$

$= -\frac{1}{2}\ln|\cos t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(2e^x+5\right)\right| + C;$

2) $\int \frac{\mathrm{tg}(\ln x)dx}{x} = \left|\begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix}\right| = \int \mathrm{tg}tdt = \ln\left|\frac{1}{\cos t}\right| + C =$

$= \ln\left|\frac{1}{\cos(\ln x)}\right| + C;$

3) $\int \frac{\mathrm{ctg}(\mathrm{tg}x)dx}{\cos^2 x} = \left|\begin{matrix} \mathrm{tg}x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix}\right| = \int \mathrm{ctg}tdt = \ln|\sin t| + C =$

$= \ln|\sin(\mathrm{tg}x)| + C;$

4) $\int \frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x+3}dx}{\sqrt{x+3}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x+3} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x+3}} = dt \end{matrix}\right| = 2\int \mathrm{ctg}tdt =$

$= 2\ln|\sin t| + C = 2\ln\left|\sin\sqrt{x+3}\right| + C.$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int x\operatorname{tg}(3x^2+1)dx$; 2) $\int 2^x \operatorname{tg}(2^{x+1}+3)dx$;

3) $\int \dfrac{\operatorname{ctg}(\ln(x+1))}{x+1}dx$; 4) $\int \dfrac{\operatorname{ctg}(\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

Образцы решений:

1) $$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 5} = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{5}}\right) + C;$$

2) $$\int \frac{e^{4x}dx}{e^{8x}+4} = \int \frac{e^{4x}dx}{(e^{4x})^2+4} = \left| \begin{matrix} e^{4x} = t \\ 4e^{4x}dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{4x}}{2}\right) + C;$$

3) $$\int \frac{dx}{x[\ln^2 x + 3]} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 2x + 4}$; 3) $\int \frac{2^x dx}{4^x + 5}$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left[\text{ctg}^2 x + 9\right]}$.

8. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Образцы решений:

1) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 4} = \int \frac{e^x dx}{\left(e^x\right)^2 - 4} = \left|\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2 - 2^2} =$

$= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right| + C;$

2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\text{tg}^2 x - 9\right)} = \left|\begin{matrix} \text{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix}\right| =$

$= \int \frac{dt}{t^2 - 3^2} = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{\text{tg} x - 3}{\text{tg} x + 3}\right| + C.$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{\sin 3x dx}{\cos^2 3x - 5}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-4)}$; 3) $\int \frac{2^x dx}{4^x - 7}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Образцы решений:

1) $$\int\frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}}=\left|\begin{matrix}e^x=t\\ e^x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-t^2}}=\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right)+C;$$

2) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}=\left|\begin{matrix}\ln x=t\\ \frac{dx}{x}=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{2}+C=$$

$$=\arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C;$$

3) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t\\ \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\end{matrix}\right|=2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=2\arcsin t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int\frac{2^x dx}{\sqrt{3-4^x}}$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{5-\mathrm{tg}^2 x}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

10. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C.$$

Образцы решений:

1) $$\int\frac{\cos 3x dx}{\sqrt{\sin^2 3x+10}}=\left|\begin{matrix}\sin 3x=t\\ 3\cos 3x dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+10}}=$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + 10}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x + \sqrt{\sin^2 3x + 10}\right| + C;$$

2) $$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 5}} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 5}\right| + C =$$

$$= \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x} - 5}\right| + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x + 7}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 4}}$; 3) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x + 7}}$.

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Образцы решений:

1) $$\int \frac{dx}{x\sin(\ln x)} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right| + C;$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{dx}{x^2} = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2x}\right| + C = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{1}{2x}\right| + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{e^x dx}{\sin(2e^x+5)}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin(\operatorname{tg} x)}$; 3) $\int \frac{(e^x+1)dx}{\sin(e^x+x)}$.

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$

Образцы решений:

1) $$\int \frac{2^x \cdot dx}{\cos(2^x+3)} = \left|\begin{matrix} 2^x+3=t \\ 2^x \ln 2dx = dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\cos t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right| + C = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2^x+3}{2}\right)\right| + C;$$

2) $$\int \frac{\cos x dx}{\cos(\sin x)} = \left|\begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x}{2}\right)\right| + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{e^x dx}{\cos(2e^x+7)}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cos(\operatorname{tg} x)}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$.

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ В ИНТЕГРАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Здесь мы изучим интегралы видов

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx,\quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

$$\int \frac{dx}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Методику нахождения таких интегралов рассмотрим на примерах.

Пример 4. $J = \int \frac{2x-3}{x^2-4x+9}\,dx.$

Решение. Выписываем квадратный трехчлен, выделяем из него полный квадрат, что подскажет вид замены переменной, и переходим к новой переменной в числителе:

$x^2 - 4x + 9 = (x^2 - 4x + 4) + 5 = (x-2)^2 + 5 = t^2 + 5$

Замена $x - 2 = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow x = t + 2$,

числитель $2x - 3 = 2(t+2) - 3 = 2t + 1$ и

$$J = \int \frac{2t+1}{t^2+5}\,dt = \int \frac{2t\,dt}{t^2+5} + \int \frac{dt}{t^2+5} = \ln\left|t^2+5\right| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \ln\left|x^2-4x+9\right| + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.$$

Пример 5. $J = \int \frac{7x+4}{\sqrt{4x^2-10x+5}}\,dx.$

Решение. $4x^2 - 10x + 5 = 4\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{4}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + \frac{5}{4}\right) =$

$$= 4\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - 5\right) = 4\left(t^2 - 5\right)$$

$x - \frac{5}{4} = t \Rightarrow x = t + \frac{5}{4} \Rightarrow dx = dt,\ 7x + 4 = 7\left(t + \frac{5}{4}\right) +$

$+ 4 = 7t + \frac{51}{4},$

$$J=\int\frac{7t+\frac{51}{4}}{\sqrt{4\left(t^2-5\right)}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{7t+\frac{51}{4}}{\sqrt{t^2-5}}dt=\frac{7}{2}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-5}}+$$

$$+\frac{51}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}=\frac{7}{2}\sqrt{t^2-5}+\frac{51}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right|+C=$$

$$=\frac{7}{2}\sqrt{\frac{4x^2-10x+5}{4}}+\frac{51}{8}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{4x^2-10x+5}{4}}\right|+C=$$

$$=\frac{7}{4}\sqrt{4x^2-10x+5}+\frac{51}{8}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-10x+5}\right|+C.$$

Пример 6. $J=\int\frac{3x-4}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

Решение. $3-2x-x^2=-(x^2+2x-3)=$
$=-(x^2+2x+1-4)=4-(x+1)^2=4-t^2,$
где $x+1=t\Rightarrow x=t-1,\ 3x-4=3(t-1)-4=3t-7,$

$$J=\int\frac{3t-7}{\sqrt{4-t^2}}dt=3\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}-7\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=-3\sqrt{4-t^2}-$$

$$-7\arcsin\frac{t}{2}+C=-3\sqrt{3-2x-x^2}-7\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 7. $J=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{5x^2+4x+1}},\ x>0.$

Решение. Используем подстановку $x=\frac{1}{t}$.

Тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, и мы получаем:

$$J = -\int \frac{tdt}{t^2 \sqrt{\frac{5}{t^2} + \frac{4}{\mathrm{t}} + 1}} = -\int \frac{t \cdot |t| dt}{t^2 \cdot \sqrt{t^2 + 4t + 5}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4t + 5}}.$$

Продолжив решение по стандартной схеме (выполните самостоятельно) и возвратившись к старой переменной, приходим к результату:

$$J = \ln\left|\frac{x}{1 + 2x + \sqrt{5x^2 + 4x + 1}}\right| + C.$$

Подумайте, где использовано условие $x > 0$.

Пример 8. $J = \int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 6x + 3}}, \; x > -\frac{1}{2}.$

Решение. $2x + 1 = \frac{1}{t}, \; x = \frac{1 - t}{2t}, \; dx = -\frac{dt}{2t^2},$

$$J = -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2 \cdot \sqrt{\frac{(1 - t)^2}{t^2} + \frac{3 - 3t}{t} + 3}} = -\frac{1}{2}\int \frac{t \cdot |t| dt}{t^2 \cdot \sqrt{t^2 + t + 1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}}.$$

Рекомендуем читателю закончить решение самостоятельно.

Ответ: $J = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x + 3 + 2\sqrt{4x^2 + 6x + 3}}{2(2x + 1)}\right| + C.$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$; 2) $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+3}dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+13}}$;

4) $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-2x^2}}$; 6) $\int \frac{2x+5}{9x^2-6x+2}dx$;

7) $\int \frac{dx}{x^2-6x+7}$; 8) $\int \frac{(9x+1)dx}{x^2+x-2}$; 9) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+4x+9}}dx$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}\ (x>0)$; 11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+2x+1}}\ (x<0)$;

12) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{4x^2+17x+19}}\ (x>-2)$.

Ответы:

2) $\frac{3}{8}\ln(4x^2-4x+3)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}+C$;

4) $-\sqrt{3-2x-x^2}+4\arcsin\frac{x+1}{2}+C$;

6) $\frac{1}{9}\ln(9x^2-6x+2)+\frac{17}{9}\operatorname{arctg}(3x-1)+C$;

9) $\sqrt{2x^2+4x+9}-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{2}}\right|+C$;

10) $\ln|x|-\ln\left|2-x+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$;

11) $\ln\left|\frac{x}{x+1+\sqrt{5x^2+2x+1}}\right|+C$;

12) $\ln|x+2|-\ln\left|x+4+2\sqrt{4x^2+17x+19}\right|+C$.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Суть метода заключается в использовании формулы

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \tag{10.4}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции u на дифференциал другой функции dv. При переходе от левой части формулы (10.4) к ее правой части мы должны функцию u дифференцировать, а выражение dv – интегрировать.

Пример 9. $J = \int x \cdot \cos x dx$.

Решение.

Принимаем $\left.\begin{matrix} x = u \\ \cos x dx = dv \end{matrix}\right|$ Тогда $\left.\begin{matrix} dx = du \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix}\right|$

Использование формулы (10.4) дает нам:

$$J = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Интегрирование по частям предполагает правильный выбор множителей u и dv под интегралом.

Общий принцип здесь такой: за u надо принимать множитель, который от дифференцирования упрощается, а за dv – множитель, который легко интегрируется.

Приведем два набора интегралов, для которых выбор u и dv вполне определен.

Интегралы типа	Интегралы типа
$\int P_n(x) \cdot \sin x dx$	$\int P_n(x) \cdot \arcsin x dx$
$\int P_n(x) \cdot \cos x dx$	$\int P_n(x) \cdot \arccos x dx$

$\int P_n(x)\cdot a^x dx$

$\int P_n(x)\cdot e^x dx$

Во всех таких интегралах следует принимать $P_n(x)=u$, а произведение «прямой» функции на dx – за dv.

Интегрировать придется n раз.

$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} x dx$

$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arcctg} x dx$

$\int P_n(x)\cdot \ln^k x dx$, k – натуральное число

$\int \frac{\ln^k x}{x^\alpha} dx$, k – натуральное

$\alpha \neq -1$.

В таких интегралах произведение $P_n(x)dx$ принимаем за dv, а «обратную» функцию берем в качестве u.

Пример 10. $J=\int\left(x^2+5x+7\right)\cdot \ln x dx.$

Решение.

$$\left.\begin{array}{c}\ln x = u\\ \left(x^2+5x+7\right)dx = dv\end{array}\right| \begin{array}{c}\frac{1}{x}dx = du\\ v=\int\left(x^2+5x+7\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x\end{array}$$

$$J=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x\right)-\int\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x\right)\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{2}+7\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x\right)\cdot\ln x-\left(\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{4}+7x\right)+C.$$

Пример 11. $J=\int\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x dx.$

Решение. $$\begin{array}{cc}x^2+4x+3=u & (2x+4)dx=du\\ e^x dx=dv & v=\int e^x dx=e^x\end{array}\Bigg|$$

$$J=\left(x^2+4x+3\right)e^x-\int e^x\cdot(2x+4)dx.$$

После использования однократного интегрирования по частям в правой части появился интеграл такого же типа, как исходный, но степень стоящего в нем многочлена понизилась на единицу. Значит, следует повторить метод:

$$\left.\begin{array}{l|l} 2x+4=u & 2dx=du \\ e^x dx=dv & v=\int e^x dx=e^x \end{array}\right|$$

$$J=\left(x^2+4x+3\right)e^x-\left(\left(2x+4\right)e^x-2\int e^x dx\right)=$$

$$=\left(x^2+4x+3\right)e^x-\left(2x+4\right)e^x+2e^x+C.$$

Пример 12. $J=\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx.$

Решение. $\left.\begin{array}{l|l} \ln x=u & \frac{1}{x}dx=du \\ \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=dv & v=\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} \end{array}\right.$

$$J=\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\ln x-\frac{3}{2}\int x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\ln x-\frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\ln x-\frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

Пример 13. $J=\int x\cdot\operatorname{arctg}x dx.$

Решение. $\left.\begin{array}{l|l} \operatorname{arctg}x=u & \frac{1}{1+x^2}dx=du \\ xdx=dv & v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{array}\right.$

$$J=\frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x\right)+C.$$

Пример 14. $J = \int \frac{\ln^2 x}{x^4}\, dx.$

Решение.

$$\ln^2 x = u \quad 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = du$$

$$\frac{dx}{x^4} = dv \quad v = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$J = -\frac{x^{-3}}{3}\ln^2 x + \frac{1}{3}\int x^{-3} \quad 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln^2 x}{3x^3} +$$

$$+\frac{2}{3}\int x^{-4}\ln x dx.$$

$$\left.\begin{aligned} \ln x &= u \\ x^{-4}dx &= dv \end{aligned}\right| \begin{aligned} \frac{dx}{x} &= du \\ v = \int x^{-4}dx &= -\frac{x^{-3}}{3} \end{aligned}$$

$$J = -\frac{\ln^2 x}{3x^3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\int x^{-3} \cdot \frac{dx}{x}\right) = -\frac{\ln^2 x}{3x^3} +$$

$$+\frac{2}{3}\left(-\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{x^{-3}}{9}\right) + C = -\frac{1}{27} \cdot \frac{9\ln^2 x + 6\ln x + 2}{x^3} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int xe^{4x}dx$; 2) $\int (7x+2) \cdot \sin x dx$; 3) $\int (x^2+1)\cos 5x dx$;

4) $\int x \cdot 3^x dx$; 5) $\int x^3 \cdot \cos 4x dx$; 6) $\int \arcsin x dx$;

7) $\int \ln x dx$; 8) $\int x \cdot \mathrm{arctg} x dx$; 9) $\int (x^3 + 4x)\ln x dx$.

В следующих примерах применить предварительно формулы понижения степени или перехода от произведения тригонометрических функций к сумме.

10) $\int x \cdot \cos^2 x dx$; 11) $\int x \cdot \sin^2 3x dx$; 12) $\int x \cos 3x \cos x dx$;

13) $\int x \cdot \sin 5x \cdot \cos x dx$; 14) $\int (x+1)\sin 7x \cdot \sin 3x dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + C$;

3) $\frac{(25x^2 + 23)\sin 5x + 10x\cos 5x}{125} + C$;

5) $\frac{(8x^3 - 3x)\sin 4x}{32} + \frac{(24x^2 - 3)\cos 4x}{128} + C$;

6) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; 8) $\frac{(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - x}{2} + C$;

9) $\frac{(x^4 + 8x^2)\ln x}{4} - \frac{x^4}{16} - x^2 + C$;

11) $\frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 6x}{12} - \frac{\cos 6x}{72} + C$;

12) $\frac{x \cdot (\sin 4x + 2\sin 2x)}{8} + \frac{\cos 4x}{32} + \frac{\cos 2x}{8} + C$;

14) $(x+1)\left(\frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 10x}{20}\right) + \frac{\cos 4x}{32} - \frac{\cos 10x}{200} + C$.

Рассмотрим теперь некоторые классические примеры, в которых интегрирование по частям приводит к решению линейного уравнения.

Пример 15. $J = \int e^x \cdot \sin x dx$.

Решение. $\left.\begin{array}{l} e^x = u \\ \sin x dx = dv \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} e^x dx = du \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right|$

$$J = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx \qquad (*)$$

К интегралу, стоящему в правой части равенства (*), снова применим интегрирование по частям:

$$\left.\begin{array}{l|l} e^x = u & e^x dx = du \\ \cos x dx = dv & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array}\right|.$$

Тогда из (*) получаем:

$$J = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx,$$

т. е. $J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J.$

Это линейное уравнение относительно J. Решая его, получаем: $2J = e^x \sin x - e^x \cos x,$

откуда $J = \dfrac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$

Пример 16. $J = \int \sqrt{x^2 + A}\, dx.$

Решение. $\left.\begin{array}{l|l} \sqrt{x^2 + A} = u & \dfrac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + A}} dx = du \\ dx = dv & v = \int dx = x \end{array}\right|$

$$J = x\sqrt{x^2 + A} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}} dx = x \cdot \sqrt{x^2 + A} -$$

$$-\int \frac{\left(x^2 + A\right) - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx,$$

или после почленного деления:

$$J = x \cdot \sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A}\, dx + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}}.$$

Отсюда $2J = x \cdot \sqrt{x^2 + A} + A \ln\left|x + x \cdot \sqrt{x^2 + A}\right| + C,$

т. е. $J = \dfrac{1}{2} x \cdot \sqrt{x^2 + A} + \dfrac{A}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + \dfrac{1}{2} C.$

Пример 17. $J = \int \cos(\ln x) dx.$

Решение. $\left.\begin{array}{l}\cos(\ln x) = u \\ dx = dv\end{array}\right| \left.\begin{array}{c}-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx = du \\ v = \int dx = x\end{array}\right|$

$$J = x\cdot\cos(\ln x) + \int x\cdot\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\cdot\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)dx.$$

Повторим метод:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\ln x) = u \\ dx = dv\end{array}\right| \left.\begin{array}{c}\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx = du \\ v = x\end{array}\right|$$

$$J = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$2J = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + 2C$$

$$J = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C.$$

Расскажем здесь еще об одном способе вычисления интегралов вида

$$\int a^x\cdot\sin\omega x dx \text{ и } \int a^x\cdot\cos\omega x dx.$$

Пример 18. Пусть $J = \int a^x\sin\omega x dx.$

Поскольку производная показательной функции есть снова показательная функция, а синус и косинус при дифференцировании переходят друг в друга, есть основание полагать, что ответ представляет собой линейную комбинацию:

$$J = \int a^x\sin\omega x dx = Aa^x\sin\omega x + Ba^x\cos\omega x + C$$

с неопределенными коэффициентами A и B.

Дифференцируем обе части равенства:

$$a^x\cdot\sin\omega x = Aa^x\ln a\sin\omega x + Aa^x\omega\cos\omega x +$$

$$+ Ba^x\ln a\cos\omega x - Ba^x\omega\sin\omega x.$$

После сокращения на a^x и перегруппировки слагаемых в правой части имеем:

$$\sin \omega x = (A \ln a - B\omega)\sin \omega x + (A\omega + B \ln a)\cos \omega x.$$

После приравнивания коэффициентов при $\sin \omega x$ в обеих частях равенства и при $\cos \omega x$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A \ln a - B\omega = 1 \\ A\omega + B \ln a = 0 \end{cases},$$

откуда $A = \dfrac{\ln a}{\ln^2 a + \omega^2}$, $B = -\dfrac{\omega}{\ln^2 a + \omega^2}$.

Теперь ясно, что

$$\int a^x \cdot \sin \omega x dx = \frac{\ln a}{\ln^2 a + \omega^2} \cdot a^x \sin \omega x -$$

$$- \frac{\omega}{\ln^2 a + \omega^2} a^x \cos \omega x + C.$$

В частном случае, когда $a = e$ и $\omega = 1$, мы получаем отсюда результат примера 15:

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C.$$

Докажите самостоятельно, что

$$\int a^x \cos \omega x dx = \frac{\omega}{\ln^2 a + \omega^2} a^x \sin \omega x +$$

$$+ \frac{\ln a}{\ln^2 a + \omega^2} a^x \cos \omega x + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1) $\int e^x \cdot \sin 7x dx$; 2) $\int 2^x \cdot \cos x dx$; 3) $\int e^{2x} \cdot \cos 3x dx$;

4) $\int 5^x \cdot \sin 4x dx$; 5) $\int e^x \sin^2 x dx$; 6) $\int 4^x \cdot \cos^2 x dx$;

7) $\int e^x \cdot \sin 5x \cdot \sin x dx$; 8) $\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot \cos x dx$;
9) $\int \sin(\ln x) dx$; 10) $\int \cos(\ln(2x+3)) dx$;

11) $\int \sin^2(\ln x) dx$; 12) $\int \cos^2(\ln x) dx$; 13) $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx$;

14) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$; 15) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 5}\, dx$; 16) $\int \sqrt{x - x^2} dx$;

17) $\int \sqrt{\sin^2 x + 5} \cdot \cos x dx$.

Ответы: 1) $\frac{e^x}{50}(\sin 7x - 7\cos 7x) + C$;

2) $\frac{2^x(\sin x + \ln 2 \cos x)}{\ln^2 2 + 1} + C$; 3) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C$;

4) $\frac{5^x}{\ln^2 5 + 16}(\ln 5 \cdot \sin 4x - 4\cos 4x) + C$;

5) $\frac{e^x}{10}(5 - 2\sin 2x - \cos 2x) + C$;

6) $\frac{4^x}{2}\left(\frac{1}{\ln 4} + \frac{2\sin 2x + \ln 4 \cdot \cos 2x}{\ln^2 4 + 4}\right) + C$;

7) $\frac{e^x}{2} \cdot \left(\frac{4\sin 4x + \cos 4x}{17} - \frac{6\sin 6x + \cos 6x}{37}\right) + C$;

8) $\frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(\frac{2\sin 4x + \cos 4x}{10} + \frac{\sin 2x + \cos 2x}{4}\right) + C$;

9) $\frac{x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]}{2} + C$;

10) $\frac{2x+3}{4}\left[\cos(\ln(2x+3))+\sin(\ln(2x+3))\right]+C$;

11) $\frac{x}{10}\ \left[5-\cos(2\ln x)-2\sin(2\ln x)\right]+C$;

15) $\dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|}{2}+C$;

16) $\dfrac{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}{4}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C$;

17) $\dfrac{\sin x\cdot\sqrt{\sin^2 x+5}+5\ln\left|\sin x+\sqrt{\sin^2 x+5}\right|}{2}+C$.

В некоторых случаях интегрирование по частям комбинируется с методом подстановки.

Пример 19. $J=\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Вначале выполним подстановку $x=t^2$. Тогда $dx=2tdt$, $J=2\int e^t\cdot tdt$.

Теперь применяем интегрирование по частям:

$$\left.\begin{array}{l} t=u \\ e^t dt=dv \end{array}\right|\begin{array}{l} dt=du \\ v=\int e^t dt=e^t \end{array}\Bigg|$$

$$J=2\left(te^t-\int e^t dt\right)=2\left(te^t-e^t\right)+C=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$$

Пример 20. $J=\int x\dfrac{\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение. Здесь, наоборот, сначала выполним интегрирование по частям:

$$\left.\begin{array}{l} x=u \\ \dfrac{\cos xdx}{\sin^3 x}=dv \end{array}\right|\begin{array}{l} dx=du \\ v=\int\dfrac{\cos xdx}{\sin^3 x} \end{array}$$

Для нахождения функции v следует применить подстановку $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$,

$$v = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\sin^2 x}$$

и можно продолжить интегрирование по частям:

$$J = x \cdot \left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) \cdot dx =$$

$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C.$$

Пример 21. $J = \int x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

Решение. $\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \operatorname{tg}^2 x \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right|$

$$v = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$$

$$J = \frac{1}{3} x\operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{3} x\operatorname{tg}^3 x -$$

$$-\frac{1}{3}\int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{1}{3} x\operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{3}\int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} +$$

$$+\frac{1}{3}\int \operatorname{tg} x dx.$$

Закончите решение самостоятельно, применив в первом из интегралов правой части подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 22. $J = \int x^5 \sin(x^3) dx.$

Решение. Сначала выполним подстановку $x^3 = t$.

Тогда $3x^2dx = dt \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dt$ и

$$J = \int x^3 \sin\left(x^3\right) \cdot x^2dx = \frac{1}{3}\int t \sin t\, dt,$$

после чего Вы легко закончите этот пример интегрированием по частям.

Примеры для самостоятельной работы

Сначала с подсказками:

1) $\int e^{\sqrt{x-1}}dx$ $\left(x-1=t^2\right)$ 2) $\int \sin\sqrt[3]{2x-3}\,dx$ $\left(2x-3=t^3\right)$

3) $\int \cos\sqrt{3x-1}\,dx$ $\left(3x-1=t^2\right)$ 4) $\int x^3e^{4x^2}dx$ $\left(4x^2=t\right)$

5) $\int x^3\cos\left(x^2\right)dx$ $\left(x^2=t\right)$; 6) $\int 2^{\cos x}\cdot \sin 2x dx$ $\left(\cos x = t\right)$;

7) $\int \frac{\sin x e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^3 x}dx$ $\left(\operatorname{tg}x=t\right)$; 8) $\int e^{2x}\cos\left(5e^x+1\right)\cdot dx$, $\left(5e^x+1=t\right)$

Теперь без подсказок

1) $\int 3^{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \sin 2xe^{\sin x}dx$; 3) $\int x^7\cos\left(x^4\right)dx$;

4) $\int e^{\sqrt[3]{2x+1}}dx$; 5) $\int x^3\sin\left(x^2\right)dx$; 6) $\int 5^{\operatorname{ctg}x}\cdot\frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$;

7) $\int x^5e^{x^2}dx$; 8) $\int \sin 2x\cdot\cos x\cdot e^{\cos x}dx$; 9) $\int \frac{\ln x\cdot\sin(\ln x)}{x}dx$;

10) $\int e^{2x}\cos\left(3e^x+1\right)dx$; 11) $\int \operatorname{arctg}2x dx$; 12) $\int \arcsin 3x dx$;

13) $\int x^2\arcsin x dx$; 14) $\int\frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x}dx$;

15) $\int \sin 2x\ln(3\cos 2x+5)dx$; 16) $\int x^3\ln\left(2x^4+1\right)dx$;

17) $\int 4^x\ln\left(3\cdot 2^x+1\right)dx$; 18) $\int \sin 2x\ln\left(\sin^2 x+3\right)dx$;

19) $\int \sin 2x \cdot \sin x \ \ln(\sin x + 3)dx$; 20) $\int \ln\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)dx$;

21) $\int x \ln\left(x^4 + 7\right)dx$; 22) $\int \cos x \ \ln(2\sin x + 5)dx$;

23) $\int x \ln\left(x^2 + 1\right)dx$; 24) $\int \ln\left(\sqrt{x} + 1\right)dx$.

Ответы для примеров с подсказками:

1) $2e^{\sqrt{x-1}}\left(\sqrt{x-1} - 1\right) + C$;

2) $\frac{3}{2}\left[-\sqrt[3]{(2x-3)^2}\cos\sqrt[3]{2x-3} + 2\left(\sqrt[3]{2x-3}\sin\sqrt[3]{2x-3} + \cos\sqrt[3]{2x-3}\right)\right] + C$;

3) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x-1}\sin\sqrt{3x-1} + \cos\sqrt{3x-1}\right) + C$;

4) $\frac{e^{4x^2}}{8}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) + C$; 5) $\frac{1}{2}\left(x^2\sin\left(x^2\right) + \cos\left(x^2\right)\right) + C$;

6) $\frac{2 \cdot 2^{\cos x}}{\ln^2 2} \cdot (1 - \ln 2 \cos x) + C$; 7) $e^{\mathrm{tg}x}(\mathrm{tg}x - 1) + C$;

8) $\frac{1}{25}\left(5e^x \cdot \sin\left(5e^x + 1\right) + \cos\left(5e^x + 1\right)\right) + C$.

Ответы для примеров без подсказок:

1) $\frac{2 \cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln^2 3}\left(\sqrt{x}\ln 3 - 1\right) + C$; 2) $2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$;

3) $\frac{1}{4}\left(x^4\sin\left(x^4\right) + \cos\left(x^4\right)\right) + C$;

4) $\frac{3}{2}e^{\sqrt[3]{2x+1}}\left(\sqrt[3]{(2x+1)^2} - 2\sqrt[3]{2x+1} + 2\right) + C$;

5) $\frac{1}{2}\left[\sin\left(x^2\right) - x^2\cos\left(x^2\right)\right] + C$; 6) $\frac{5^{\mathrm{ctg}x}(1 - \mathrm{ctg}x \ln 5)}{\ln^2 5} + C$;

7) $\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^4 - 2x^2 + 2\right) + C$;

8) $2e^{\cos x}\left(-\cos^2 x + 2\cos x - 2\right) + C$;

9) $-\ln x \cdot \cos(\ln x) + \sin(\ln x) + C$;

10) $\frac{1}{9}\left[3e^x \sin\left(3e^x + 1\right) + \cos\left(3e^x + 1\right)\right] + C$;

11) $x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln\left(1 + 4x^2\right) + C$;

12) $x \cdot \arcsin 3x + \frac{1}{3}\sqrt{1 - 9x^2} + C$;

13) $\frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3} + C$;

14) $\ln x \cdot \operatorname{arctg}(\ln x) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \ln^2 x\right) + C$;

15) $-\frac{1}{6}\left((3\cos 2x + 5)\ln(3\cos 2x + 5) - (3\cos 2x + 5)\right) + C$;

16) $\frac{1}{8}\left(\left(2x^4 + 1\right)\ln\left(2x^4 + 1\right) - \left(2x^4 + 1\right)\right) + C$;

17) $\frac{1}{9\ln 2}\left[\left(\frac{\left(3 \cdot 2^x + 1\right)^2}{2} - \left(3 \cdot 2^x + 1\right)\right)\ln\left(3 \cdot 2^x + 1\right) - \frac{\left(3 \cdot 2^x + 1\right)^2}{4} + 3 \cdot 2^x + 1\right] + C$;

18) $\left(\sin^2 x + 3\right)\ln\left(\sin^2 x + 3\right) - \left(\sin^2 x + 3\right) + C$;

19) $\frac{2}{3}\sin^3 x \cdot \ln(\sin x + 3) - \frac{2}{9}\left(\sin x + 3\right)^3 + 3\left(\sin x + 3\right)^2 -$

$- 18(\sin x + 3) + 18\ln(\sin x + 3) + C$;

20) $x\ln\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) - \frac{\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)^3}{3} + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) +$

$+ \ln\left|\sqrt[3]{x} + 1\right| + C$;

21) $\frac{1}{2}x^2\ln\left(x^4+7\right)-x^2+\sqrt{7}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{7}}+C;$

22) $\frac{2\sin x+5}{2}\cdot\left(\ln\left(2\sin x+5\right)-1\right)+C;$

23) $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+C;$

24) $(x-1)\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-\frac{x}{2}+\sqrt{x}+C.$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональной дробью называется всякая функция, представляющая собой отношение двух многочленов $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Примерами рациональных дробей могут служить функции

$$f_1(x)=\frac{x^2+2x+5}{2x^3+x^2+7};\quad f_2(x)=\frac{7x^4+1}{x^2+x+3};\quad f_3(x)=\frac{1}{x-2};$$

$$f_4(x)=\frac{2x+3}{x^2-2x+7};\quad f_5(x)=\frac{9x^2+x+8}{2x^2+3x+1}.$$

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, т. е. если $m < n$; в остальных случаях дробь называется неправильной. В приведенных примерах правильными являются дроби $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$. Дроби $f_2(x)$, $f_5(x)$ неправильные.

4.1. ПОДХОД К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ПРАВИЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Идея интегрирования правильных рациональных дробей заключается в том, чтобы представить данную дробь в виде суммы так называемых простейших (интегралы от которых известны) и воспользоваться свойством линейности интеграла.

Простейшими называют рациональные дроби следующих четырех типов:

1-й тип $\dfrac{A}{x-a}$ 2-й тип $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3...$

3-й тип $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, где $D = b^2 - 4ac < 0$

4-й тип $\dfrac{Ax+B}{(ax+bx+c)^k}$, где $D < 0$, $k = 2, 3...$

Дроби 4-го типа мы изучать и использовать не будем.

Интегралы от остальных простейших дробей вычисляются так:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c;$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c;$$

$(k = 2, 3...)$

Интегралы 3-го типа изучены нами в § 2 настоящей главы.

Теперь научимся правильную рациональную дробь представлять в виде суммы простейших. Вид этого представления зависит от знаменателя дроби $Q_n(x)$. Будем считать, что многочлен $Q_n(x)$ **может быть разложен на множители линейные и квадратичные с отрицательными дискриминантами**; при этом некоторые из линейных множителей могут быть одинаковыми. Приведем примеры.

Пример 1. $Q_2(x) = x^2 - 12x + 35$.

Находим $D = b^2 - 4ac = 144 - 140 = 4 > 0$, многочлен имеет вещественные корни $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.

Значит, квадратный трехчлен $Q_2(x) = (x - 5)(x - 7)$.

Пример 2. $Q_3(x) = x^3 - 1$.

Используя формулу разности кубов, получим:

$Q_3(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Это представление окончательное, ибо квадратный трехчлен, стоящий во второй скобке, имеет отрицательный дискриминант

$(D = 1 - 4 = -3 < 0)$.

Пример 3. $Q_4(x) = x^4 - 16$.

Воспользовавшись дважды формулой разности квадратов, получаем:

$Q_4(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

Пример 4. $Q_6(x) = x^6 - 64$.

Имеем последовательно $Q_6(x) = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$.

$Q_6(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Дискриминанты обоих квадратных трехчленов отрицательны ($D_1 = 4 - 16 < 0$, $D_2 = 4 - 16 < 0$); поэтому представление для $Q_6(x)$ окончательное.

Пример 5. $Q_3(x) = (x - 4)(x^2 - 5x + 4)$.

Легко проверить, что второй множитель разлагается на множители $(x - 4)(x - 1)$.

Поэтому $Q_3(x) = (x - 4)^2(x - 1)$.

Пример 6. $Q_4(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x$.

Нужное представление получим с помощью группировок и вынесений общих множителей за скобки:

$Q_4(x) = (x^4 + x^2) + (4x^3 + 4x) = x^2(x^2 + 1) + 4x(x^2 + 1) =$
$= x(x^2 + 1)(x + 4)$.

$Q_4(x) = x(x + 4)(x^2 + 1)$.

4.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Для представления правильной рациональной дроби $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде суммы простейших следует ее знаменатель $Q_n(x)$ разложить на множители (линейные и квадратичные с отрицательными дискриминантами) и воспользоваться следующими правилами:

1) каждому линейному множителю $(x - a)$ ставить в представлении $f(x)$ слагаемое $\dfrac{A}{x-a}$;

2) каждому множителю вида $(x - b)^k$, $k = 2, 3$, ставить в представлении $f(x)$ k слагаемых

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(x-b)^{k-1}}+\frac{A_k}{(x-b)^k};$$

3) каждому множителю вида $ax^2 + bx + c$ (D < 0) ставить в представлении $f(x)$ слагаемое $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

Числа A, B, A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k являются неопределенными коэффициентами. Методы нахождения этих коэффициентов будут изложены в п. 4.3. Сейчас же мы приведем несколько примеров, показывающих вид самого представления заданной правильной рациональной функции (с неопределенными пока коэффициентами)

Пример 1. $f(x)=\dfrac{4x+1}{(x-1)(x+4)}$.

Опираясь на сформулированные правила, делаем вывод, что $f(x)$ представима так:

$$\frac{4x+1}{(x-1)(x+4)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}.$$

Пример 2. $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2+5x+13}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

Пользуясь правилами, можно записать представление

$$\frac{2x^3+2x^2+5x+13}{(x^2+4)(x^2+9)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+9}. \qquad (10.5)$$

Пример 3. $f(x)=\dfrac{x^2-10x+1}{(x-3)(x^2+1)}$.

Представление для $f(x)$ таково:

$$\frac{x^2-10x+1}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Пример 4. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)}$.

Справедливо представление

$$\frac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}. \qquad (10.6)$$

Пример 5. $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+16}{(x-2)^2(x+1)}$.

Представление для $f(x)$ запишем в виде

$$\frac{2x^2-9x+16}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

4.3. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Начнем с *примера 1.* Мы уже знаем, что

$$\frac{4x+1}{(x-1)(x+4)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю мы получим тождество

$$4x+1\equiv A(x+4)+B(x-1).$$

Первый метод нахождения неопределенных коэффициентов заключается в том, что, полагая последовательно в этом тождестве значения x равными вещественным корням знаменателя, сразу находим коэффициенты.

Так, полагая $x=1$, имеем $5A=5\Rightarrow A=1$.

Полагая $x=-4$, имеем: $-15=B(-5)\Rightarrow B=3$.

Таким образом,

$$\frac{4x+1}{(x-1)(x+4)} \equiv \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+4}.$$

Теперь находим интеграл $\int \frac{4x+1}{(x-1)(x+4)}dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+4}\right)dx = \int\frac{dx}{x-1} + 3\int\frac{dx}{x+4} = \ln|x-1| +$$

$$+ 3\ln|x+4| + C.$$

Первый метод имеет достоинством простоту и эффективность нахождения коэффициентов. Однако с его помощью не всегда удается найти все коэффициенты, а иногда их нельзя найти вовсе.

Рассмотрим *пример 2*. Вычислить

$$\int\frac{2x^3 + 2x^2 + 8x + 13}{(x^2+4)(x^2+9)}dx.$$

После приведения к общему знаменателю тождества (10.5) получим

$$(Ax + B)(x^2 + 9) + (Cx + D)(x^2 + 4) = 2x^3 + 2x^2 + 8x + 13 \quad (10.7)$$

Второй метод нахождения коэффциентов основан на том, что коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (10.7) должны совпадать. Поэтому

$$\begin{array}{r|c} x^3 & A + C = 2 \\ x^2 & B + D = 2 \\ x & 9A + 4C = 8 \\ x^0 & 9B + 4D = 13 \end{array}$$

Получили систему 4 уравнений с 4 неизвестными. Выбор метода решения получаемой системы зависит от решающего; например, в данном случае мы предлагаем первое уравнение системы умножить на (−4) и сложить с третьим.

Тогда $5A = 0 \Rightarrow A = 0$.

Аналогично второе уравнение умножим на (-4) и сложим с четвертым; получаем $5B = 5 \Rightarrow B = 1$.

Теперь из первого уравнения находим $C = 2$, а из второго $D = 2 - B \Rightarrow D = 1$.

Таким образом, возвращаясь к (10.5), мы имеем

$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 8x + 13}{\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 9\right)} = \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{2x + 1}{x^2 + 9}.$$

Вычисление интеграла теперь не представляет труда:

$$\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 8x + 13}{\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 9\right)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 + 4} + \frac{2x + 1}{x^2 + 9}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2 + 4} + \int \frac{2x dx}{x^2 + 9} + \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} +$$

$$+ \ln\left(x^2 + 9\right) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

(Во втором интеграле реализована подстановка $x^2 + 9 = t$).

Второй метод универсален, но решение часто оказывается громоздким из-за того, что приходится составлять и решать систему большого числа уравнений.

Наиболее рационально поступить так: вначале, используя первый метод, находим столько коэффициентов, сколько удается; затем берем на вооружение второй метод, но составляем лишь столько уравнений, сколько коэффициентов мы не смогли найти первым методом.

Вычислим еще интеграл

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{(x - 1)\left(x^2 + 2x + 5\right)} dx \text{ (см. пример 4).}$$

Из представления (10.6) имеем тождество

$$A\left(x^2 + 2x + 5\right) + (Bx + C)(x - 1) \equiv 3x^2 + 3x + 2 \qquad (10.8)$$

Полагая $A = 1$ (использование первого метода), получаем равенство $8A = 8$, откуда $A = 1$. Теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (10.8). Получаем

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A + B = 3 \Rightarrow B = 3 - A \Rightarrow B = 2 \\ x & 2A - B + C = 3 \Rightarrow C = 3 - 2A + B \Rightarrow C = 3 \end{array}$$

Подставляя найденные коэффициенты в тождество (10.6), имеем

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} \equiv \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2 + 2x + 5}.$$

Приступаем к вычислению интеграла

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Закончив решение самостоятельно, Вы придете к результату

$$\ln|x-1| + \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить самостоятельно интеграл

$$J = \int \frac{x^2 - 10x + 1}{(x-3)(x^2+1)} dx \text{ (см. пример 3).}$$

Ответ: $J = -2\ln|x-3| + \dfrac{3}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C.$

2. Вычислить самостоятельно интеграл

$$J = \int \frac{2x^2 - 9x + 16}{(x-2)^2(x+1)} dx.$$

Ответ: $J = -\dfrac{2}{x-2} - \ln|x-2| + 3\ln|x+1| + C.$

4.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕПРАВИЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Справедлива следующая теорема:

Всякая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Получить такое представление можно с помощью обычного деления многочлена на многочлен «углом».

Приведем *пример*. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 20x - 33}{x^2 + 9}\,dx.$$

Производим деление

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 20x - 33 & x^2 + 9 \\
\hline
-\;x^4 \qquad\quad + 9x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 + 2x - 4 \\
\hline
2x^3 - 4x^2 + 20x - 33 & \\
-\;2x^3 \qquad\quad + 18x \qquad\; & \\
\hline
-4x^2 + \;2x - 33 & \\
-\;-4x^2 \qquad\quad - 36 & \\
\hline
2x + \;3 &
\end{array}$$

Результат этого деления означает, что

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 20x - 33}{x^2 + 9} = x^2 + 2x - 4 + \frac{2x+3}{x^2+9}.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим окончательно (промежуточные рассуждения проведите самостоятельно):

$$J = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + \ln\left(x^2 + 9\right) + \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

ПЕРВЫЙ УРОВЕНЬ

1) $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$ 2) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$ 3) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+3x+2)}$

4) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ 5) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x^3}dx$ 6) $\int \frac{dx}{x(x-1)^3}$

7) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2-4x+3)}$ 8) $\int \frac{dx}{x^3-1}$ 9) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

10) $\int \frac{dx}{x^4-1}$ 11) $\int \frac{x^3dx}{x^3-1}$ 12) $\int \frac{x^5dx}{x^4-1}$

ВТОРОЙ УРОВЕНЬ

13) $\int \frac{dx}{x^6-1}$ 14) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ 15) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ 16) $\int \frac{dx}{x(\ln^3 x+1)}$

17) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x+1}$ 18) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$ 19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}\ln\frac{|x(x-2)|}{(x-1)^2}+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|-\ln|x|+C$;

3) $\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x+2|+C$;

4) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}+C$; 5) $-x+\ln\frac{|x|}{(x-1)^3}-\frac{1}{x}+C$;

6) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$; 7) $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + \frac{1}{2(x-1)} + C$;

8) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

9) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

10) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$;

11) $x + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

12) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$; 13) $\frac{1}{12}\ln\frac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)} -$

$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

14) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15) $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$;

16) $\frac{1}{6}\ln\frac{(\ln x+1)^2}{\ln^2 x - \ln x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\ln x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

17) $x - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + e^x + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}} + C$;

18) $\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right| + C$;

19) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C$;

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

5.1. РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ПОДСТАНОВКОЙ

Пример 23. $J = \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$.

Решение. Выполним подстановку $1+\sqrt[3]{x-2} = t$. Тогда $x - 2 = (t - 1)^3$, $dx = 3(t - 1)^2 dt$ и, значит,

$$J = 3\int \frac{(t-1)^2}{t}dt = 3\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)+C =$$

$$= 3\left(\frac{\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)^2}{2} - 2 - 2\sqrt[3]{x-2} + \ln\left|1+\sqrt[3]{x-2}\right|\right) + C.$$

Пример 24. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $x = t^6$. Она естественна, ибо позволяет избавиться одновременно от обоих корней:

$$\sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2,\ dx = 6t^5 dt$$

и тогда $J = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}dt =$

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6(t-\operatorname{arctg}t)+C = 6\left(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

Пример 25. $J = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Здесь уйти от иррациональности позволяет тригонометрическая подстановка:

$x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$

и мы имеем:

$$J = \int \frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} = a^2\int \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t - \sin t\cdot\cos t) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} -$$

$$- \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C.$$

В ряде случаев подстановка сочетается с искусственными приемами и другими методами интегрирования.

Пример 26. $J = \int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot dx.$

Решение. Умножаем под интегралом числитель и знаменатель дроби на выражение, стоящее в числителе, в результате чего получим:

$$J = \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

и остается во втором интеграле выполнить подстановку $1 - x^2 = t^2$, $-xdx = tdt$,

$$J = \arcsin x + \int \frac{t\,dt}{t} = \arcsin x + t + C = \arcsin x +$$

$$+ \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Пример 27. $J = \int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx.$

Решение. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$J = \int \frac{\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right)} dx =$$

$$= \int \frac{x - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + x + 1}{x - 1 - (x+1)} dx = \int \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) dx.$$

Теперь к результату приводит интегрирование по частям (так, как это делалось в примере **16** § **3** настоящей главы):

$$J = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| - \frac{x^2}{2} + C.$$

5.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx. \qquad \textbf{(10.9)}$$

Если хотя бы один из показателей степени является положительным нечетным числом, то вопрос решает подстановка $\sin x = t$ (если нечетно n) и $\cos x = t$ (когда m нечетно).

Пример 28. $J = \int \sin^8 x \cdot \cos^3 x\,dx.$

Решение.

$$J = \int \sin^8 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^8 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\,dx.$$

Выполним подстановку $\sin x = t$. Тогда $\cos x\,dx = dt$,

$$J=\int t^8\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^8-t^{10}\right)dt=\frac{t^9}{9}-\frac{t^{11}}{11}+C=$$

$$=\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{\sin^{11} x}{11}+C.$$

В этой технике решения важно лишь то, что один из показателей – нечетное положительное число; другой может быть любым.

Пример 29. $J=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x}dx.$

Решение.

$$J=\int\cos^{-6}x\cdot\sin^5 x dx=\int\cos^{-6}x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\end{array}\right|=-\int t^{-6}\cdot\left(1-t^2\right)^2dt=-\int t^{-6}\left(1-2t^2+t^4\right)dt=$$

$$=-\int\left(t^{-6}-2t^{-4}+t^{-2}\right)dt=-\left(\frac{t^{-5}}{-5}-2\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5\cos^5 x}-\frac{2}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\mathrm{C}.$$

Если в интеграле (10.9) m и n – четные положительные числа, то следует использовать формулы понижения степеней

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

и формулу $\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$.

Пример 30. $J=\int\sin^6 x\cdot\cos^4 x dx.$

Решение.

$$J=\int(\sin x\cos x)^4\cdot\sin^2 xdx=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=$$

(здесь мы использовали понижение степеней)

$$=\frac{1}{32}\int\sin^4 2xdx-\frac{1}{32}\int\sin^4 2x\cdot\cos 2xdx.$$

Во втором интеграле $\cos 2x$ находится в первой (нечетной) степени, и поэтому дело решает подстановка $\sin 2x=t$ (тогда $\cos 2xdx=\frac{1}{2}dt$), а в первом интеграле снова используем понижение степени:

$$J=\frac{1}{32}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2dx-\frac{1}{64}\int t^4dt=$$

$$=\frac{1}{128}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx-\frac{t^5}{320}+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}\int(1+\cos 8x)dx\right)-\frac{\sin^5 2x}{320}+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)-\frac{\sin^5 2x}{320}+C.$$

5.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $J=\int R(\mathrm{tg}x)dx$, $\int R(\mathrm{ctg}x)dx$, $\int R\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx$, где R – рациональная функция.

Интегралы указанных типов успешно решаются с помощью подстановок $\mathrm{tg}x=t$ или $\mathrm{ctg}x=t$.

Пример 31. $J=\int\mathrm{tg}^5xdx$.

Решение. $\mathrm{tg}x=t\Rightarrow x=\mathrm{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$,

$$J=\int\frac{t^5}{1+t^2}\,dt.$$

Представив неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, получаем:

$$J=\int\left(t^3-t+\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C$$

(в уме выполнена подстановка $1+t^2=z$).

Возвращаясь к исходной переменной x, имеем:

$$J=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)+C.$$

Пример 32. $J=\int\dfrac{dx}{4-3\cos^2x+5\sin^2x}.$

Решение. Используя тождество $4\equiv4\sin^2x+4\cos^2x$, получаем:

$$J=\int\frac{dx}{9\sin^2x+\cos^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x\cdot\left(9\operatorname{tg}^2x+1\right)}$$

(В знаменателе $\cos^2x$ вынесен за скобки).

Теперь выполняем подстановку $\operatorname{tg}x=t$. Тогда $\dfrac{dx}{\cos^2x}=dt$ и

$$J=\int\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{9}}=\frac{1}{9}\cdot3\operatorname{arctg}(3t)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C.$$

Пример 33. $J=\int\dfrac{dx}{\sin^4x\cdot\cos^4x}.$

Решение. $J=16\int\dfrac{dx}{\sin^4 2x}=16\int\dfrac{1}{\sin^2 2x}\cdot\dfrac{dx}{\sin^2 2x}=$

$$= 16\int\left(1+\operatorname{ctg}^2 2x\right)\cdot\frac{dx}{\sin^2 2x} = \left|\begin{array}{l}\operatorname{ctg}2x = t \\ -\dfrac{2dx}{\sin^2 2x} = dt\end{array}\right| =$$

$$= -8\int\left(1+t^2\right)dt = -8\left(t+\frac{t^3}{3}\right)+C = -8\left(\operatorname{ctg}2\text{x}+\frac{\operatorname{ctg}^3 2x}{3}\right)+C.$$

5.4. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x, \cos x)dx$. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА

Универсальной называется подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (10.10)$$

В самом деле,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg}t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка превращает интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в интегралы от рациональных функций переменной t.

Пример 34. $J=\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Решение. Применяем универсальную подстановку $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$ с использованием формул (10.10).

Тогда

$$J=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2-8t+8}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}+C=\frac{1}{2-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}+C.$$

Пример 35. $J=\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx.$

Решение. Почленным делением разбиваем интеграл на два, выполняя во втором подстановку $2+\cos x=z\Rightarrow$ $\Rightarrow-\sin x dx=dz$.

$$J=\int\frac{2dx}{2+\cos x}+\int\frac{-\sin x dx}{2+\cos x}=2\int\frac{dx}{2+\cos x}+\int\frac{dz}{z}=$$

$$=2\int\frac{dx}{2+\cos x}+\ln|2+\cos x|+C.$$

Теперь используем универсальную подстановку $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$:

$$J=2\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\ln|2+\cos x|+C=4\int\frac{dt}{t^2+3}+$$

$$+\ln|2+\cos x|+C=\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}}+\ln|2+\cos x|+C=$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \ln|2 + \cos x| + C.$$

Замечание. Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ **не всегда является самым рациональным способом при решении конкретных примеров. Мы рекомендуем читателю сначала поискать более оригинальный метод решения и, если ничего рационального не найдено, то воспользоваться универсальной подстановкой.**

Пример 36. $J = \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx.$

Приведем два способа решения этого примера, более рациональных, чем универсальная подстановка.

Решение I.

$$J = \int \frac{\sin x \cdot (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} + \operatorname{tg} x - x + C = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

Решение II.

$$J = \int \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \int \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} - \int dx = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - x + C =$$

$$= -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} - x + C =$$

$$= -\frac{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} - x + C = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

Решение с помощью универсальной подстановки является более громоздким:

$$J = \int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int\frac{tdt}{(t-1)^2\cdot(t^2+1)}.$$

$$\frac{t}{(t-1)^2\cdot(t^2+1)} \equiv \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

$$A(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) + (Ct+D)(t-1)^2 \equiv t.$$

Составляем систему линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|c} t^3 & B + C = 0 \\ t^2 & A - B - 2C + D = 0 \\ t^1 & B + C - 2D = 1 \\ t^0 & A - B + D = 0 \end{array}$$

откуда следует, что $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$.

Поэтому

$$J = 4\left(\int\frac{\frac{1}{2}dt}{(t-1)^2} + \int\frac{-\frac{1}{2}}{t^2+1}dt\right) = -\frac{2}{t-1} - 2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - x + C = \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} - x + C =$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos x} - x + C =$$

$$= \frac{1 + \cos x + \sin x}{\cos x} - x + C = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

1-Й УРОВЕНЬ

1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+5}}$; 2) $\int \frac{x+1}{x\cdot\sqrt{x-2}}dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

4) $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x-1}}$; 5) $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}}$; 6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-7}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 8) $\int \frac{49^x dx}{\sqrt[3]{7^x+1}}$; 9) $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 x dx$;

10) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^5 x dx$; 11) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$; 12) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$;

13) $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}$; 14) $\int \sin^4 x dx$; 15) $\int \cos^4 x dx$;

16) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x dx$; 17) $\int \sin^6 x dx$; 18) $\int \cos^6 x dx$;

19) $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x dx$; 20) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$; 21) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$;

22) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$; 23) $\int \mathrm{tg}^4 x dx$; 24) $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$;

25) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 7\cos^2 x}$; 26) $\int \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$;

27) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$; 28) $\int \frac{dx}{3 - 4\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;

29) $\int \frac{dx}{5 + 2\sin^2 x + 9\cos^2 x}$; 30) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$;

31) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$; 32) $\int \frac{dx}{1 + 4\sin x}$; 33) $\int \frac{dx}{5 + 6\sin x + 7\cos x}$;

34) $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$; 35) $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x}dx$;

36) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$;

37) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin 2x + 3\cos^2 x + 2}$;

2-Й УРОВЕНЬ

38) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; 39) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}dx$; 40) $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{dx}{x}$;

41) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; 42) $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$; 43) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$;

44) $\int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$; 45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$;

46) $\int \frac{x^2 + 2x + 7}{\sqrt{x^2 + 4x + 11}}dx$; 47) $\int x \cdot \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}dx$.

Ответы:

1) $2\left(\frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^5}{5}-\frac{10\left(\sqrt{x+5}\right)^3}{3}+25\sqrt{x+5}\right)+C;$

2) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C;$ 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C;$

4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2}\right|+C;$ 5) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}}{2}+C;$

6) $3\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x-7}-1\right)^2}{2}+\ln\left|\sqrt[3]{x-7}+1\right|\right)+C;$

7) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C;$

8) $\frac{3}{\ln 7}\left(\frac{\sqrt[3]{\left(7^x+1\right)^5}}{5}-\frac{\sqrt[3]{\left(7^x+1\right)^2}}{2}\right)+C;$

9) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C;$

10) $3\sin^{\frac{5}{3}} x\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{11}\sin^2 x+\frac{1}{17}\sin^4 x\right)+C;$

11) $\frac{5}{13}\cos^{\frac{13}{5}} x-\frac{5}{3}\cos^{\frac{3}{5}} x+C;$ 12) $\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+C;$

13) $\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C;$ 14) $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C;$

15) $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C;$

16) $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}-\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C$;

17) $\dfrac{5x}{16}-\dfrac{1}{12}\sin 2x\left(\sin^4 x+\dfrac{5}{4}\sin^2 x+\dfrac{15}{8}\right)+C$;

18) $\dfrac{5x}{16}+\dfrac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x+\dfrac{5}{4}\cos^2 x+\dfrac{15}{8}\right)+C$;

19) $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}+\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C$; 20) $\operatorname{tg}x-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$;

21) $-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$; 22) $\dfrac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$; 23) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C$;

24) $-x-\dfrac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg}x+C$;

25) $\dfrac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{5}{7}}\operatorname{tg}x\right)+C$; 26) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|+C$;

27) $C-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 28) $-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}x-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}x+\sqrt{5}}\right|+C$;

29) $\dfrac{1}{7\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}x\right)+C$; 30) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C$;

31) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C$; 32) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4-\sqrt{15}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4+\sqrt{15}}\right|+C$;

33) $\dfrac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3+\sqrt{15}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3-\sqrt{15}}\right|+C$; 34) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3}\right|+C$;

35) $x - \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C$; 36) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x + 2) + C$;

37) $\frac{1}{\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3\mathrm{tg}x + 2}{\sqrt{11}} + C$;

38) $-\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$;

39) $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right|\right) + C$;

40) $\ln\left|\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right| - \arcsin x + C$;

41) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right) + C$;

42) $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x\right) + C$;

43) $\ln\left|\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x - 1}}{\sqrt[6]{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x + 1}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{tg}x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$;

44) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right) + C$;

45) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x + \sqrt{2\mathrm{tg}^2 x + 1}\right| + C$;

46) $\frac{1}{2}\left((x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 11} + 7\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 11}\right|\right) -$

$- 2\sqrt{x^2 + 4x + 11} + C$;

47) $\frac{(x - 2)\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|}{2} + C.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984.

2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: Учебник для студентов университетов и вузов. М.: Высшая школа, 1988.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966.

4. *Липман Берс.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1975 (перевод с англ.)

5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1970.

7. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 2. Физматгиз. 1960.

8. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (предел, непрерывность, дифференцируемость). М.: Наука, 1984.

9. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды). М.: Наука, 1986.

10. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Высшая школа, 1981.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Виленкин Игорь Владимирович,
Гробер Владимир Михайлович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ, ТЕХНИЧЕСКИХ, ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗОВ

Ответственный редактор *Оксана Морозова*
Технический редактор *Галина Логвинова*
Корректор *Наталья Шлыкова*
Компьютерная верстка: *Игорь Елисеев*

Подписано в печать 03.07.2007.
Формат 84 x 108 1/32. Бумага типографская.
Печать офсетная. Гарнитура School.
Тираж 3 000 экз. Заказ № 541.

Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Тел.: (863) 261-89-76, тел./факс: 261-89-50.
E-mail: morozovatext@aaanet.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга».
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57
Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.