ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Р.Е. Алексеева

И.В. Кольчик

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета в качестве учебно-методического пособия для студентов заочной и дистанционной форм обучения всех технических специальностей.

Нижний Новгород, 2007

Кольчик И. В. Высшая математика : комплекс учебно-методических материалов: Ч.2 / Кольчик И. В.; Нижегород. гос. техн. ун-т. Нижний Новгород, 2007.-134с.

Изложен опорный конспект лекций, соответствующий рабочей учебной программе. Даются методические указания к выполнению контрольных работ, а также тесты для контроля заданий и список рекомендуемой литературы.

Предназначен для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Рецензент

Научный руководитель факультета информатики и прикладной математики НФ ГУ ВШЭ, заслуженный деятель науки РФ, профессор Н. С. Петрухин

Редактор Н. Н. Максимова

Подписано в печать 08.10.2007. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 7,0.
Тираж 500 экз. Заказ 759.

Нижегородский государственный технический университет
им. Р. Е. Алексеева
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

Содержание

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по заочной форме, и соответствует рабочей программе, сформированной на основе Государственных образовательных стандартов высшего профессионального обучения по курсу «Математика» для соответствующих направлений подготовки дипломированных специалистов.

Основные цели и задачи курса – овладение студентами основных понятий математики и математических методов исследования; выработка у студентов навыков решения типовых задач.

Изучение математики на заочной форме обучения проводится в течение четырех семестров. Данное пособие содержит необходимые материалы для изучения второй части курса (второй семестр).

В этой части курса изучаются следующие темы: дифференциальное исчисление функции одной переменной; интегральное исчисление функции одной переменной; дифференциальные уравнения.

В течение семестра студенты оформляют в тетрадях контрольные работы 3, 4. Контрольные работы проводятся по вариантам, изложенным в методическом пособии «Высшая математика. Контрольные работы 3, 4 для студентов-заочников (второй семестр)» (Н.Новгород, 2003 г.).

В данном пособии также приведены задания к контрольным работам 3, 4.

Особенностью заочной формы обучения является небольшое количество аудиторной нагрузки, что компенсируется аудиторными консультациями. По окончании семестра проводится экзамен в письменной форме.

2. ОПИСАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНЫХ ТЕМ

1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Производная сложной функции, функции, заданной неявно, заданной параметрически, обратной функции. Производные основных элементарных функций. Дифференциал, его геометрический смысл. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Исследование функций и построение графиков. Кривизна кривой.

2. Интегральное исчисление функции одной переменной.

Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных функций. Определение определенного интеграла. Теоремы существования определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям. Приложения определенного интеграла.

3. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема Коши. Уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижения порядка. Линейные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Системы дифференциальных уравнений.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Задачи, приводящие к определению производной

1. Задача о скорости движения.

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $S = S(t)$, где S - пройденный путь, t - время. Необходимо найти скорость точки в момент t_0, Δt - приращение времени, ΔS - приращение расстояния.

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $S_0 = S(t_0)$, а к моменту $(t_0 + \Delta t)$ - путь $S_0 + \Delta S = S(t_0 + \Delta t)$ (рис. 3.1).

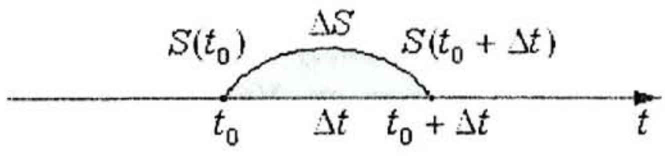


Рис. 3.1

Тогда за промежуток Δt средняя скорость равна $\upsilon_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Она зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее υ_{cp} выражает скорость движения точки в данный момент времени t. Поэтому под скоростью точки в момент t_0 понимают предел средней скорости за промежуток от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

2. Задача о касательной.

Пусть на плоскости xoy дана непрерывная кривая $y = f(x)$. Необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0, f(x_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Проведем секущую $M_0 M_1$ (рис. 3.2).

Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей $M_0 M_1$ при приближении точки M_1 по кривой к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

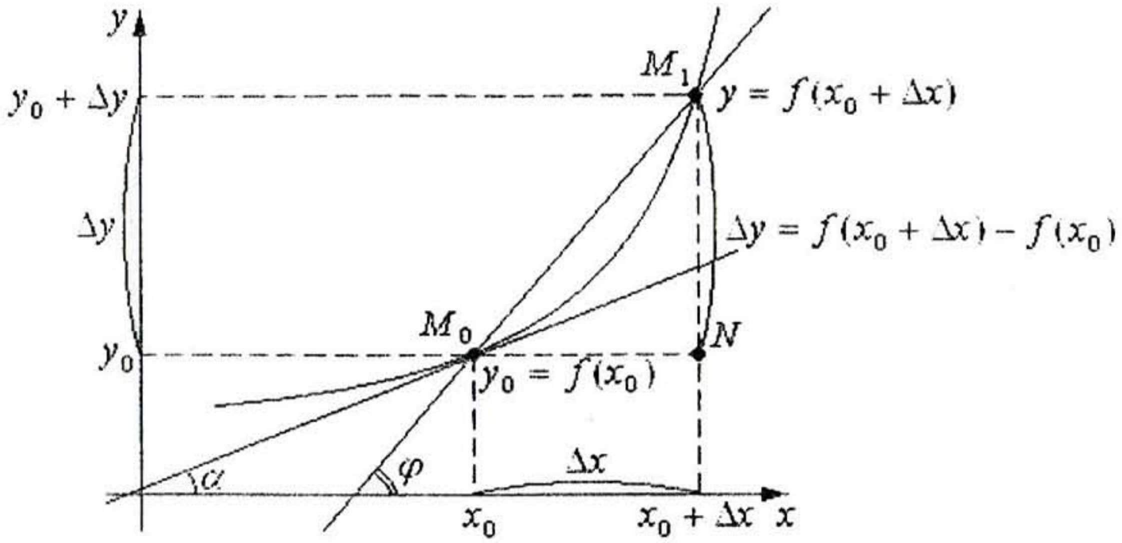


Рис.3.2

Обозначим через φ угол между секущей M_0M_1 и осью ox; α - угол, образованный касательной с осью ox. Угловой коэффициент(или тангенс угла φ наклона) секущей M_0M_1 может быть найден из ΔM_0NM_1: $k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда угловой коэффициент касательной

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3.2. Определение производной. Уравнение касательной и нормали к кривой. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 3.1. *Производной функции* $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y'; $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{df(x)}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Пример. $y = x^2$. Найти y'.

Зафиксируем x. Тогда $y = x^2$. Пусть Δx - приращение аргумента. Тогда

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2.$$

Получаем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Находим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x$, значит, $(x^2)' = 2x$.

Из задачи о касательной вытекает геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0, т.е. $k_{\text{кас}} = f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.2}$$

Нормалью к кривой в точке x_0 называется прямая, перпендикулярная касательной, проходящей через точку x_0, тогда

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

и уравнение нормали примет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (\text{если } f'(x_0) \neq 0). \tag{3.3}$$

Из задачи о скорости движения следует механический смысл производной: производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент t_0: $\upsilon(t_0) = S'(t_0)$.

3.3. Односторонние конечные и бесконечные производные

Пусть $x = a$ является одним из концов промежутка, на котором определена функция $y = f(x)$. Тогда при определении предела отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ приходится ограничиться приближением Δx к нулю только справа, если точка a является левым концом этого промежутка, или только слева, если она является его правым концом. При существовании таких односторонних пределов речь идет об односторонней производной в точке a справа $f'_{+}(a) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ или слева $f'_{-}(a) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. В такой точке график функции имеет одностороннюю касательную (рис. 3.3).

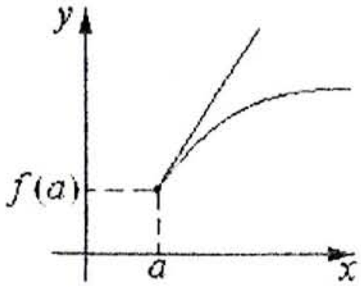


Рис. 3.3

Может оказаться, что в некоторой внутренней точке $x = x_0$ промежутка, в котором определена и непрерывна функция $y = f(x)$, существуют неравные между собой односторонние пределы отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Их также называют односторонними производными функции в точке x_0. В этом случае в соответствующей точке графика функции будут существовать односторонние касательные, образующие некоторый угол α (рис. 3.4).

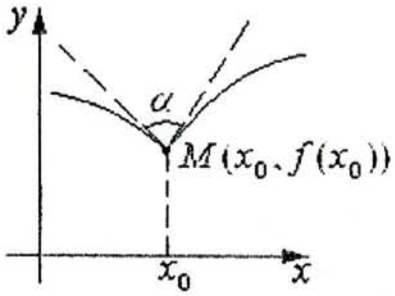


Рис. 3.4

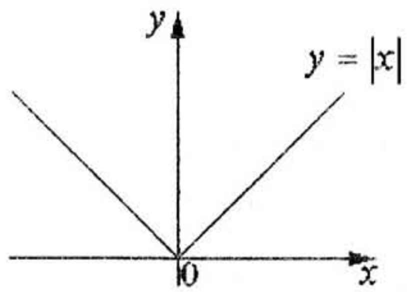


Рис. 3.5

Точка $M(x_0, f(x_0))$ - угловая точка. Для функции $y = |x|$ эта точка – начало координат (рис. 3.5). Один или оба односторонних предела в точке x_0 могут быть бесконечными ($-\infty$ или $+\infty$). Тогда речь идет о бесконечной односторонней производной функции $y = f(x)$ слева или справа (или слева и справа) в точке x_0. Если знаки бесконечных односторонних производных функции и слева, и справа в некоторой точке x_0 совпадают, то в этой точке данная функция имеет бесконечную производную определенного знака.

Рис. 3.6

В этом случае касательная к графику функции в соответствующей точке существует и является вертикальной. Если же знаки бесконечных односторонних производных различны, то соответствующая точка является точкой заострения (рис. 3.6).

Пример. Рассмотрим $f(x)=x^{2/3}$.

При $x=0$ $f(0)=0; f(0+\Delta x)-f(0)=(\Delta x)^{2/3}; \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^{-1/3}$

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{(\Delta x)^{1/3}}=+\infty$$

$$f_{-}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{(\Delta x)^{1/3}}=-\infty.$$

Таким образом, функция в точке $x=0$ имеет бесконечные односторонние производные разных знаков, а ее график точку - заострения (рис. 3.7).

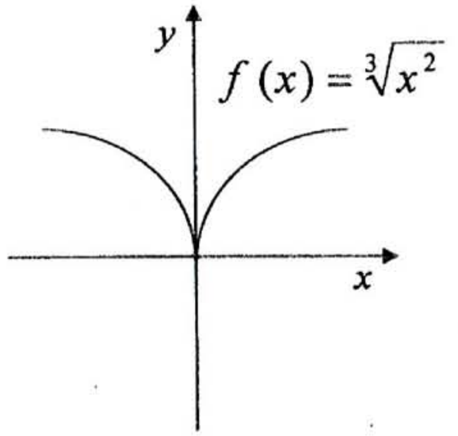


Рис. 3.7

3.4. Дифференцируемость функции в точке

Определение 3.2. Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\,, \tag{3.4}$$

где A - некоторое число, не зависящее от x, а $\alpha(\Delta x)$ - функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x\to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

Равносильность дифференцируемости функции в точке и существования в этой точке конечной производной данной функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.1. Для дифференцируемости функции $y=f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. ее приращение в этой точке можно представить в виде (3.4). Поделим равенство (3.4) на Δx (при $\Delta x \neq 0$), получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$

Отсюда следует, что производная в точке x_0 существует и равна A:

$$f'(x_0) = A.$$

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Пусть $f'(x_0) = A$; тогда функция $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Из последнего равенства имеем $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Получено представление (3.4), тем самым доказано, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Таким образом, для функции одной переменной дифференцируемость и существование производной - понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной часто называют дифференцированием.

Определение 3.3. Функцию, дифференцируемую в каждой точке открытого множества $X \in R$, называют *дифференцируемой на множестве* X.

Например, функция $y = x^2$ дифференцируема в любой точке множества R.

Пример. Доказать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Решение. Производная функции (если она существует) равна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$. Очевидно, что при $x = 0$ производная не существует, так как отношение $\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ равно 1 при $\Delta x > 0$ и -1 при $\Delta x < 0$, т.е. не имеет предела при $\Delta x \to 0$ (ни конечного, ни бесконечного). Геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке $x = 0$ (рис. 3.8).

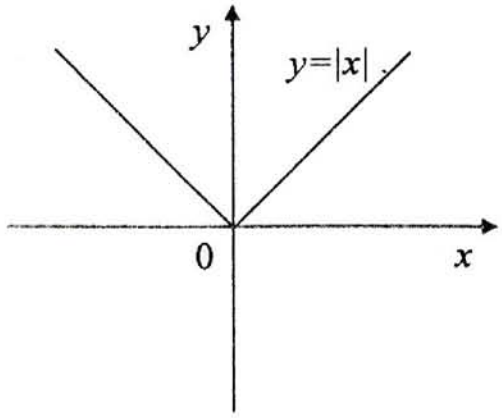


Рис. 3.8

Следущая теорема устанавливает связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.

Теорема 3.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке может быть представлено соотношением (3.4). Тогда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, что и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0, согласно определению непрерывности функции в точке.

Обратная теорема неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ (рис. 3.8), но, как было доказано, не дифференцируема в этой точке.

Таким образом, *непрерывность функции – необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции.*

В математике известны непрерывные функции, но не дифференцируемые ни в одной точке.

Замечание. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке X, то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная функции допускает конечное число точек разрыва (причем, первого рода), то такая функция на данном промежутке называется *кусочно - гладкой.*

3.5. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема 3.3. Если функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $V(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'.$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Докажем, например, первую формулу, используя определение производной (3.1) и теорему о пределе суммы двух функции,

$$(u \pm \upsilon)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [\upsilon(x+\Delta x) - \upsilon(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm$$

$$\pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\upsilon(x+\Delta x) - \upsilon(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} = u' \pm \upsilon'.$$

Замечание. $(cu)' = cu'$ (где $c = \text{const}$); $\left(\dfrac{c}{\upsilon}\right)' = -\dfrac{c\upsilon'}{\upsilon^2}$.

3.6. Производные основных элементарных функций

1. Рассмотрим $y = f(x) = C$, где C - постоянное число. Для любых x и Δx имеем $f(x + \Delta x) = C$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C \equiv 0$, отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Следовательно, $y' = (C)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е. $C' = 0$. (Производная постоянной равна нулю).

2. Рассмотрим $y = x^\alpha$, где α - любое отличное от нуля действительное число. Зафиксируем $x \neq 0$ и дадим ему приращение $x + \Delta x$, тогда $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^\alpha$, т.е. $\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[(1 + \dfrac{\Delta x}{x})^\alpha - 1 \right]$.

Получаем $(x^\alpha)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^\alpha \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left[1+(\frac{\Delta x}{x})\right]^\alpha - 1}{\Delta x}$.

Учитывая, что бесконечно малая функция $\left[1+(\frac{\Delta x}{x})\right]^\alpha - 1$ при $\Delta x \to 0$ $(x \neq 0)$

эквивалентна бесконечно малой функции $\alpha\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$ при $\Delta x \to 0$, получаем

$(x^\alpha)' = \alpha x^\alpha \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x\cdot\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}$, т.е. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (\alpha\in R, \alpha\neq 0)$.

Используя определение производной и теорию пределов, можно получить производные функций

$y = a^x \qquad y' = a^x \ln a \qquad (y = e^x \quad y' = e^x)$,

$y = \sin x \qquad y' = \cos x$,

$y = \cos x \qquad y' = -\sin x$,

$y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x})$.

Примеры. Найти производные указанных функций:

1) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$; 2) $y = \sqrt[7]{x}\ln x$; 3) $y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$.

Решение

1. Перепишем функцию

$$y = x^{1/3} + \frac{1}{x} - 3\cdot x^{-2} + 4.$$

Найдем производную, используя теорему (3.3):

$$y' = \left(x^{1/3}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(3\cdot x^{-2}\right)' + (4)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^2} + 6x^{-3} + 0 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}.$$

2. Данная функция представляет собой произведение двух функций. По теореме (3.3)

$$y' = (\sqrt[7]{x})'\ln x + \sqrt[7]{x}(\ln x)' = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}\ln x + \sqrt[7]{x}\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{7\sqrt[7]{x^6}} + \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} = \frac{\ln x + 7}{7\cdot\sqrt[7]{x^6}}.$$

3. Дифференцируем данную функцию по правилу дифференцирования дроби (теорема (3.3)):

$$y' = \frac{(\cos x)'(1+2\sin x) - \cos x(1+2\sin x)'}{(1+2\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x(1+2\sin x)-\cos x 2\cos x}{(1+2\sin x)^2} = \frac{-\sin x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(1+2\sin x)^2} =$$

$$= -\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}.$$

3.7. Производная сложной функции

Пусть переменная y является функцией от переменной $u(y = f\ (u))$, а переменная u, в свою очередь, функция от независимой переменной x $u = \varphi(x)$, т.е. задана сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$.

Теорема 3.4. Если функция $U = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f\ (U)$ дифференцируема в соответствующей точке $U_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$ имеет производную в точке x_0, при этом

$$y'_x(x_0) = f'_U(U_0)\varphi'_x(x_0),$$

где нижние индексы показывают, по какой переменной проводится дифференцирование.

Примеры. Найти производные указанных функций.

1. $y = (3+\sqrt{x})^4$.

Данная функция является сложной, и ее можно представить в виде $y = u^4$, где $u = 3+\sqrt{x}$.

На основании теоремы (3.4)

$$y' = 4u^3u' = 4(3+\sqrt{x})^3(3+\sqrt{x})' = 4(3+\sqrt{x})^3\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2(3+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}.$$

2. $y = \sin^5 x$.

Данную сложную функцию перепишем в виде $y = u^5$, где $u = \sin x$.

Тогда $y' = y'_u u'_x = (u^5)'(\sin x)' = 5u^4\cos x = 5\sin^4 x\cos x$.

3. $y = \sqrt{\ln x + 1} + 3^{x^2}$.

Первое слагаемое – степенная функция $y_1 = \sqrt{u_1}$, где $u_1 = \ln x + 1$.

Второе слагаемое также является сложной функцией $y_2 = 3^{u_2}$, где $u_2 = x^2$.

$$y' = (y_1)' + (y_2)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}}(\ln x + 1)' + 3^{x^2}\ln 3(x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}} \times$$

$$\times \frac{1}{3} + 3^{x^2}(\ln 3)2x = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} + 2x\cdot 3^{x^2}\cdot \ln 3.$$

Замечание. Если сложная функция получена в результате нескольких суперпозиций, то ее производную следует искать последовательным применением правила дифференцирования сложной функции.

Пример. $y = y(U)$; $U = U(z)$; $z = z(V)$; $V = V(x)$ и все функции дифференцируемы в рассматриваемых точках, тогда

$$y'_x = y'_U u'_z z'_V \upsilon'_x ..$$

3.8. Дифференцирование обратных функций

Перейдем к рассмотрению производной **обратной** функции.

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x = \varphi(y)$ является обратной к данной и, как можно показать, непрерывной на соответствующем промежутке Y.

Теорема 3.5. Пусть функция $y = f(x)$ является непрерывной и строго монотонной в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ производную, причем

$$x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема и

$$y'(x) = f'(x) \neq 0.$$

Пусть $\Delta y \neq 0$ – приращение независимой переменной y, $\Delta x \neq 0$ соответствующее приращение обратной функции $x = f^{-1}(y)$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \tag{3.6}$$

Переходя к пределу в равенстве (3.6) при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta y / \Delta x)}, \text{ т.е. } x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}.$$

Формула (3.5) имеет простой геометрический смысл. Если y'_x выражает тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ к оси $0x$, то x'_y – *тангенс угла* β *наклона той же касательной к оси* $0y$, причем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (если α и β - острые углы) (рис. 3.9) или $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ (если α и β

- тупые углы). Для таких углов $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$ или $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Этому равенству и равносильно условие $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

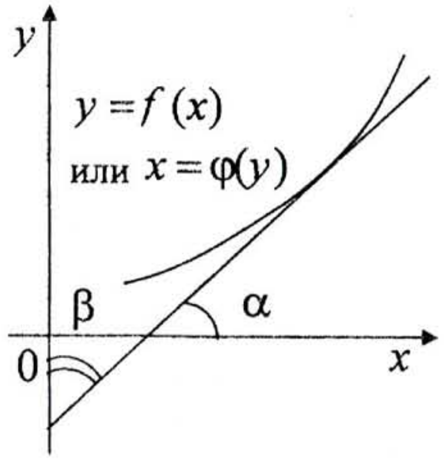


Рис. 3.9

Пример. $y = f(x) = \arcsin x$. Обратная функция $x = f^{-1}(y) = \sin y$.
Тогда $[f(x)]' = [\arcsin x]' = \dfrac{1}{[f^{-1}(y)]'} = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

($y = \arcsin x$ рассматриваем на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, где $\cos y \geq 0$, поэтому перед корнем выбран знак «+»).

3.9. Таблица производных

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций, поэтому аргумент x заменим на промежуточный аргумент «U».

1. $(C)' = 0$.
2. $(U^{\alpha})' = aU^{\alpha-1}U'; (\sqrt{U})' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}}U'$.
3. $(a^U)' = a^U \ln aU'; (e^U)' = e^U U'$.
4. $(\log_a U)' = \dfrac{1}{U \ln a}U'; (\ln U)' = \dfrac{1}{U}U'$.
5. $(\sin U)' = \cos UU'$.
6. $(\cos U)' = -\sin UU'$.
7. $(\operatorname{tg} U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U}U'$.

8. $(\operatorname{ctg} U)' = -\frac{1}{\sin^2 U} U'$.

9. $(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$.

10. $(\arccos U)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$.

11. $(\operatorname{arctg} U)' = \frac{1}{1+U^2} U'$.

12. $(\operatorname{arcctg} U)' = -\frac{1}{1+U^2} U'$.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt[5]{\arcsin \log_3 \operatorname{tg} 2^{-x}}$.

Решение. Данную функцию перепишем в виде

$y = \sqrt[5]{u}, u = \arcsin z, z = \log_3 \upsilon, \upsilon = \operatorname{tg} w, w = 2^t, t = -x.$

Тогда $y' = \frac{1}{5} u^{-\frac{4}{5}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{1}{\upsilon \ln 3} \frac{1}{\cos^2 w} \cdot 2^t \ln 2(-x)'$,

$$y' = \frac{1}{5}(\arcsin \log_3 \operatorname{tg} 2^{-x})^{\frac{4}{5}} \frac{1}{\sqrt{1-(\log_3 \operatorname{tg} 2^{-x})^2}} \frac{1}{\operatorname{tg} 2^{-x} \ln 3} \frac{1}{\cos^2 2^{-x}} \times$$
$$\times 2^{-x} \ln 2(-1).$$

3.10. Производная от функции, заданной параметрически

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные по переменной t в рассматриваемой области изменения этой переменной и $x'(t) \neq 0$. Кроме того, предположим, что функция $x = x(t)$ в окрестности рассматриваемой точки имеет обратную функцию $t = g(x)$. Найдем производную y'_x. По правилу дифференцирования обратной функции $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = g(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции: $y'_x = y'_t t'_x$. Тогда $y'_x = y'_t \frac{1}{x'_t}$, т.е.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (3.7)$$

Эта формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример

Пусть $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение

$x'_t = a(1 - \cos t)$; $y'_t = a \sin t$, тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} =$

$$= \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Пример

Пусть $\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение

$$x'_t = \ln t + t \frac{1}{t} = \ln t + 1$$

$$y'_t = \frac{\frac{1}{t} t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1 - \ln t)}{t^2 (1 + \ln t)}.$$

3.11. Логарифмическая производная

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать результат. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

Пусть функция $y = f(x)$ положительна и дифференцируема в данной точке x. Тогда в этой точке существует $\ln y = \ln f(x)$. Рассматривая $\ln f(x)$ как сложную функцию аргумента x, мы можем вычислить производную этой функции в данной точке x, принимая $y = f(x)$ за промежуточный аргумент. Получаем

$$(\ln(f(x)))' = \frac{y'}{y}.$$

Эта величина называется логарифмической производной функции $y = f(x)$ в данной точке x.

Вычислим логарифмическую производную степенно-показательной функции $y = (f(x))^{\varphi(x)}$. Допустим, что $f(x)$, $\varphi(x)$ - непрерывные и дифференцируемые функции; $f(x) > 0$. Тогда $\ln y = \varphi(x)\ln f(x)$, $\frac{y'}{y} = (\varphi(x) \times$ $\times \ln f(x)) = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$. Учитывая, что

$$y = (f(x))^{\varphi(x)}, \text{получаем } y' = (f(x))^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Примеры

1. Пусть $y = (1+x)^{\sin x}$. Найти y'_x.

Решение. Прологарифмируем данное выражение

$$\ln y = \ln(1+x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ln(1+x).$$

Найдем производную от левой и правой части, считая y, зависящей от x.

$$\frac{1}{y}y'_x = \cos x \ln(1+x) + \sin x \frac{1}{1+x}.$$

Выразим y':

$$y'_x = (1+x)^{\sin x}(\cos x \ln(1+x) + \frac{\sin x}{1+x}).$$

2. Пусть $y = \dfrac{(x^2-3)\cdot\sqrt[7]{1-x^3}\cos x}{(x+9)^4}$. Найти y'_x.

При нахождении производной от дроби получим громоздкое выражение, поэтому сначала прологарифмируем функцию.

$$\ln y = \ln(x^2-3) + \frac{1}{7}\ln(1-x^3) + \ln\cos x - 4\ln(x+9).$$

Найдем производную от левой и правой части этого уравнения, считая y, зависящей от x.

Выразим y'.

$$\frac{1}{y}y'_x = \frac{1\cdot 2x}{x^2-3} + \frac{1(-3x^2)}{7(1-x^3)} + \frac{1(-\sin x)}{\cos x} - \frac{4}{x+9};$$

$$y'_x = \frac{(x^2-3)\sqrt[7]{1-x^3}\cos x}{(x+9)^4}\left(\frac{2x}{x^2-3} - \frac{3x^2}{7\cdot(1-x^3)} - \operatorname{tg}x - \frac{4}{x+9}\right).$$

3.12. Производная неявной функции

Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением $F(x,y)=0$.

Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного соотношения найти производную y'.

Пример. Найти производную функции y, заданную уравнением

$$x^3 - xy + \ln y = 7.$$

Решение. Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим

$$3x^2 - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0, \text{ откуда } y' = \frac{3x^2y - y^2}{xy-1}.$$

Замечание. В дальнейших разделах данного пособия нам потребуется понятие производной функции многих переменных. Частная производная функции $u = f(x_1, x_2, ..x_m)$ по аргументу x_k является обыкновенной производной функции одной переменной x_k при фиксированных значениях других переменных (то есть x_k считаем аргументом, все остальные x_i - константами). Обозначается такая производная $f'_{x_k}, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$.

Теория функции нескольких переменных выходит за рамки данного пособия (см. часть 3 данного пособия).

3.13. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда по определению (3.2) дифференцируемости функции ее приращение Δy в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad (3.4)$$

где A – некоторое число, не зависящее от приращения Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Если $A \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ величина $A\,\Delta x$ является бесконечно малой одного порядка с Δx, а $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с Δx.
Тогда $A\Delta x$ будет главной частью приращения Δy, обусловленного приращением аргумента Δx.

Определение 3.4. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx аргумента x, называют главную линейную относительность Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = A\Delta x.$$

Но по теореме (3.1) имеем $A = f'(x_0)$ и можно записать $dy = f'(x_0)\Delta x$.
Найдем дифференциал независимой переменной. Пусть $y = x$.
Тогда

$$dy = y'\Delta x = x'\Delta x = \Delta x.$$

Учитывая, что $y = x$, получаем

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен её приращению и справедлива запись

$$dy = y'(x)dx. \tag{3.8}$$

Из равенства (3.8) производную $f'(x)$ в любой точке x можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной dx:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Тогда имеем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + 0(\Delta x) = dy + 0(\Delta x). \tag{3.9}$$

Поскольку дифференциал dy функции $y = f(x)$ отличается от производной y' лишь не зависящим от x сомножителем dx, то для вычисления дифференциалов можно использовать правила дифференцирования и формулы производных элементарных функций. Например,

1) $y = c$ $\qquad dy = 0$
2) $y = cu$ $\qquad y = cdu$
3) $y = u \pm \upsilon$ $\qquad dy = du \pm d\upsilon$
4) $y = u\upsilon$ $\qquad dy = \upsilon du + ud\upsilon$
5) $y = \frac{u}{\upsilon} (\upsilon \neq 0)$ $\qquad dy = \frac{\upsilon du - ud\upsilon}{\upsilon^2}.$

Так, для дифференциала произведения дифференцируемых функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$

$$d(u\upsilon) = (u\upsilon)'dx = (u'\upsilon + \upsilon'u)dx = \upsilon(u'dx) + u(\upsilon'dx) = \upsilon du + ud\upsilon.$$

3.14. Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции имеет четкий геометрический смысл (рис. 3.10). Пусть точка M на графике функции $y = f(x)$ соответствует значению аргумента x_0, точка N – значению аргумента $x_0 + \Delta x$, MS – касательная к кривой $f(x)$ в точке M, φ – угол между касательной и осью $0x$. Тогда MA – приращение аргумента, AN – соответствующее приращение функции. Рассматривая треугольник ABM, получаем $AB = \Delta x \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)\Delta x = dy$, т.е. это главная по порядку величины Δx и линейная относительно нее часть приращения функции Δy. Второе слагаемое в уравнении (3.4) более высокого порядка малости соответствует отрезку BN.

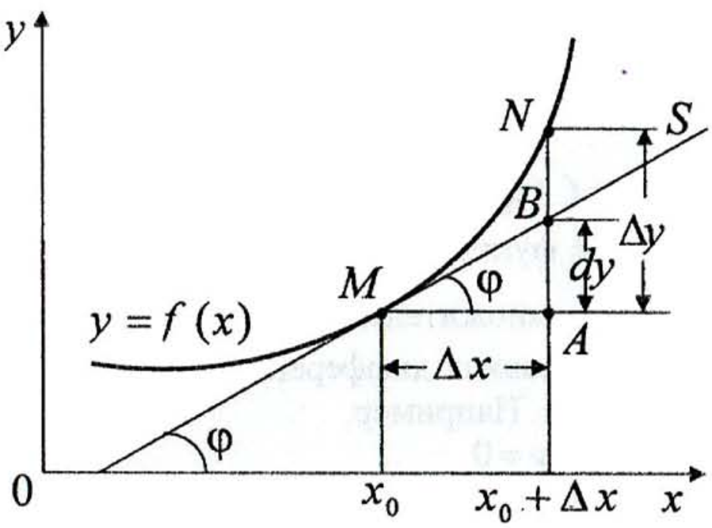


Рис. 3.10

3.15. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Приближенные вычисления с применением дифференциала функции основаны на приближенной замене приращения функции в точке на ее дифференциал: при малых приращениях Δx имеем

$$\Delta y \approx dy.$$

Абсолютная погрешность от такой замены является, как следует из формулы (3.9), при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx. Используя формулу (3.9) и выражение для Δy, получаем

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3.10)$$

Формула (3.10) является основной в приближенных вычислениях. Она удобна, когда значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ находятся относительно просто.

Пример. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Пусть значение функции требуется вычислить в точке x_1. Тогда

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx. \tag{3.11}$$

Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$.

Пусть $x_0 = 16$.

Тогда

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2, f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Bigg|_{x=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}, dx = x_1 - x_0 = 1.$$

Подставляя в формулу (3.11), получим

$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$

3.16. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Правило дифференцирования сложной функции позволяет получить одно важное свойство дифференциала. Пусть $y = y(x)$ – дифференцируемая функция независимого аргумента x. Тогда дифференциал этой функции в точке x равен

$$dy = y'(x)dx. \tag{3.12}$$

Пусть теперь $y = f(x)$ – дифференцируемая функция аргумента x который, в свою очередь, является дифференцируемой функцией независимого аргумента t, т.е. $x = x(t)$. Тогда сложная функция $y = f[x(t)]$ будет дифференцируемой функцией аргумента t. Из определения дифференциала следует, что

$$dy = y'_t dt = y'_x y'_t dt = y' dx. \tag{3.13}$$

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того является аргумент независимой переменной как в случае (3.12) или, в свою очередь, зависит от другой переменной, как в случае (3.13). В этом и состоит свойство инвариантности (неизменности) формы записи дифференциала. В дальнейшем мы увидим, что это свойство играет важную роль при вычислении интегралов.

3.17. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором множестве X, то есть для всех $x \in X$ существует $f'(x)$. Тогда производная $f'(x)$ является также функцией аргумента x с областью определения X. Если эта новая функция $f'(x)$ дифференцируема, то можно найти ее производную, называемую *второй производной* исходной функции $f(x)$, или *производной второго порядка*, и обозначаемую $f''(x)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, т.е.

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = (f'(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

В связи с этим , $f'(x)$ для определенности называют *первой производной* или *производной первого порядка.* Если $f''(x)$, в свою очередь, является дифференцируемой функцией аргумента x, то последующее дифференцирование $f''(x)$ дает *третью производную*

$$f'''(x) = (f''(x))' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

и т.д. *Производной n - го* порядка функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$ - го порядка этой функции, то есть

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right] \text{ или } \frac{d^ny}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

В первой форме записи порядок производной берут в скобки, чтобы отличить от показателя степени.

Ранее было показано, что если функция имеет в точке x_0 конечную производную, то она непрерывна в этой точке. Отсюда следует, что если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную n - го порядка, то эта функция и все ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно определены в некоторой окрестности данной точки и непрерывны в указанной точке.

Функцию $f(x)$ называют $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемой на множестве X, если во всех точках этого множества она имеет непрерывные производные до порядка $(n-1)$ включительно.

Введем дифференциалы высших порядков. В связи с этим дифференциал dy функции $y = f(x)$ в некоторой точке x будем называть первым дифференциалом, или дифференциалом первого порядка в данной точке.
Вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка) функции $y = f(x)$ в некоторой точке x называется дифференциал от дифференциала

первого порядка в данной точке (если он существует) и обозначается d^2y. Итак,

$$d^2y = d(dy).$$

Очевидно, дифференциалом третьего порядка называется дифференциал от дифференциала второго порядка, то есть

$$d^3y = d(d^2y) \text{ и так далее}.$$

Следует отметить, что n - м дифференциалом функции $y = f(x)$ в некоторой точке x называют дифференциал в этой точке (если он существует) от дифференциала $(n-1)$-го порядка в указанной точке и обозначается d^ny, то есть

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Если x – независимая переменная, то $dx = \Delta x$ является произвольным, не зависящим от x числом, которое при дифференцировании по x следует считать постоянным множителем. В этом случае для производной точки x имеем

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Выражение $(dx)^2$ принято обозначать dx^2, то есть опускать скобки, но помнить, что это не квадрат x, а квадрат dx.

Аналогично $d^ny = f^{(n-1)}(x)dx^n$.

Отсюда следует выражение для n-й производной

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Символ в правой части можно рассматривать как отношение дифференциала n-го порядка функции к n-й степени дифференциала независимой переменной. Итак, для существования дифференциала n-го порядка функции $y = f(x)$ в точке x необходимо, чтобы эта функция была n раз дифференцируема в данной точке.

Для параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ имеем

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}; \ldots$$

$$y_x^{(n)} = \frac{(y_x^{(n-1)})'_t}{x'_t}.$$

Примеры

1. Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим

$$y' = 2\cos 2x; y'' = -4\sin 2x; y''' = -8\cos 2x; y^{(4)} = 16\sin 2x.$$

2. Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим

$$y'_x = \frac{(b\cos t)'_t}{(a\sin t)'_t} = -\frac{b\sin t}{a\cos t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$$

$$y''_x = \frac{(-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t)'_t}{(a\sin t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 t}}{a\cos t} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\cos^3 t}.$$

3. Найти третий дифференциал функции $y = x^7 - x^5 + \ln x$.

Решение. Дифференцируя данную функцию последовательно, получим

$$y' = 7x^6 - 5x^4 + \frac{1}{x}; y'' = 42x^5 - 20x - \frac{1}{x^2}; y''' = 210x^4 - 20 + \frac{2}{x^3}.$$

Следовательно,

$$d^3y = (210x^4 - 20 + \frac{2}{x^3})dx^3.$$

3.18. Векторные функции скалярного аргумента

Если каждому значению скалярного аргумента t поставить в соответствие вектор $r(t)$, то $r(t)$ называется ***векторной функцией*** (*векторфункцией*) скалярного аргумента t.

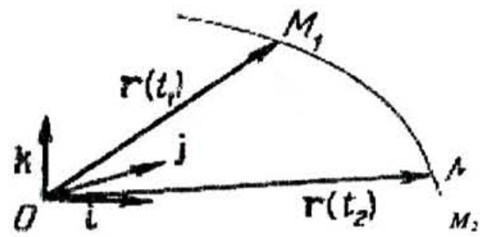


Рис. 3.11

Если начало вектора $r\ (t)$ (радиус-вектора) поместить в постоянную точку O, то конец радиус-вектора $r\ (t)$ опишет пространственную кривую, которую называют ***годографом векторной функции*** (см. рис. 3.11).

Если t означает время, то $r\ (t)$ описывает *траекторию* движения материальной точки. Если $r\ (t)$ разложить по базисным векторам i, j, k прямоугольной декартовой системы координат, то

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,$$

причем компоненты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются функциями от t. Параметрическое представление пространственной кривой (годографа) или траектории движения имеет вид

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

3.19. Предел и непрерывность

Если $a^{(n)} = a_1^{(n)} e_1 + a_2^{(n)} e_2 + a_3^{(n)} e_3$ (e_1, e_2, e_3-базис) - последовательность векторов, то вектор $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ называется предельным вектором этой последовательности (обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = a$), если $\lim\limits_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i \quad i = 1,2,3$.

Вектор $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ называется *пределом векторной функции* $r(t) = r_1(t)e_1 + r_2(t)e_2 + r_3(t)e_3$ при $t \to t_0$ (обозначается $\lim\limits_{t\to t_0} r(t)$), если $\lim\limits_{t\to t_0} |r(t) - a| = 0$. Это равнозначно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0} r_i(t) = a_i \quad i = 1,2,3$. В частности, $r(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$, что эквивалентно непрерывности компонент $r_i(t)$ в точке t_0.

3.20. Дифференцирование векторной функции

Если существует предел

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

то $\dfrac{dr}{dt}$ называется *производной* от $r(t)$ в точке t.(см. рис. 3. 12)

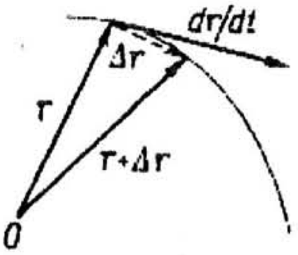


Рис. 3.12

В другой записи: $r'(t)$ или $\dot{r}(t)$. В декартовой системе кординат:

$$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k.$$

Вектор $r'(t)$ имеет направление касательной к годографу в точке t и направлен в сторону, отвечающую возрастанию параметра t. Длина $r'(t)$ зависит от выбора параметра t. Если t есть длина дуги, то $\left|\frac{dr}{dt}\right| = 1$.

Если t означает время, а $r(t)$ - траекторию движения материальной точки, то $r'(t)$ - *вектор скорости*, $|r'(t)|$ - величина скорости.

3.21. Правила дифференцирования

$$\frac{d}{dt}(r_1 + r_2) = \frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi r) = \frac{d\varphi}{dt} r + \varphi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(r_1 r_2) = \frac{dr_1}{dt} r_2 + \frac{dr_2}{dt} r_1$$

$$\frac{d}{dt}(r_1 \times r_2) = \frac{dr_1}{dt} \times r_2 + r_1 \times \frac{dr_2}{dt}$$ (множители нельзя менять местами)

$$\frac{d}{dt} r(\varphi(t)) = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если $r(t)$ - единичный вектор, то годограф лежит на единичной сфере и касательная всегда перпендикулярна радиус-вектору, то есть $r\frac{dr}{dt} = 0$.

3.22. Производные высших порядков

Рассматривая $r'(t)$ при переменном t как векторную функцию, производную от $r'(t)$ обозначают через $\frac{d^2 r}{dt^2}$, или $r''(t)$, или $\ddot{r}(t)$. В декартовых координатах

$$r''(t) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k.$$

Если $r(t)$ описывает движение материальной точки, то $r''(t)$ - *вектор ускорения*, $|r''(t)|$ - величина ускорения. Аналогично определяются третья, четвертая, *n-я* производные.

Разложение по формуле Тейлора имеет вид

$$r(t+h)=r(t)+\frac{h}{1!}r'(t)+\frac{h}{2!}r''(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}r^{(n)}(t)+R_{n+1}.$$

Это ни что иное, как векторная сумма разложений по формуле Тейлора для функций $x(t+h), y(t+h), z(t+h)$, R_{n+1} – остаточный член.

Дифференциал функции $r(t)$ определяется формулой

$$dr=\frac{dr}{dt}dt.$$

3.23. Кривизна кривой

Кривизной K кривой в ее точке M называется предел отношения угла между положительными направлениями касательных в точка M и N кривой (угол смежности) к длине дуги $\breve{MN}=\Delta s$, когда $N\to M$, т.е.

$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}$, где α - угол между положительными направлениями касательной в точке M и оси Ox. (рис. 3.13).

Радиусом кривизны R называется величина, обратная абсолютной величине кривизны, т.е. $R=\frac{1}{|K|}$.

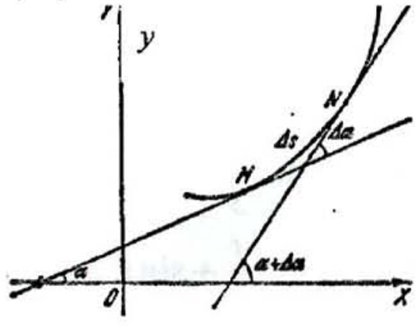


Рис. 3.13.

Формула для вычисления кривизны в прямоугольных координатах (с точностью до знака) имеет вид

$$K=\frac{|[r''(t),r'(t)]|}{|r'(t)|^3}.$$

В случае $r(t)=x(t)i+y(t)j$

$$K=\frac{|x''y'-x'y''|}{\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^3}}.$$

Задача

Векторная функция $r(t) = x(t)i + y(t)j$ задает траекторию движения точки.

1. Построить годограф векторной функции.
2. Вычислить координаты вектора скорости и ускорения в точке $t=t_1$.
3. Найти кривизну траектории в произвольной точке и вычислить радиус кривизны в точке $t=t_1$.

Решение

$$\begin{cases} x = 3\cos\frac{t}{3} - \cos t \\ y = 3\sin\frac{t}{3} - \sin t \end{cases} \quad t = \pi$$

$$r(t) = 3(\cos\frac{t}{3} - \cos t)i + (3\sin\frac{t}{3} - \sin t)j$$

$$r(\pi) = \left\{\frac{5}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$x'(t) = -\sin\frac{t}{3} + \sin t$$

$$y'(t) = \cos\frac{t}{3} - \cos t$$

$$v = r'(t) = (-\sin\frac{t}{3} + \sin t)i + (\cos\frac{t}{3} - \cos t)j \text{ - вектор скорости}$$

$$v(\pi) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

$$x''(t) = -\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3} + \cos t$$

$$y''(t) = -\frac{1}{3}\sin\frac{t}{3} + \sin t$$

$$w = r''(t) = (-\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3} + \cos t)i + (-\frac{1}{3}\sin\frac{t}{3} + \sin t)j$$

$$w(\pi) = \left\{-\frac{7}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$$

$$K = \frac{|x''y' - x'y''|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

$$x''y'-x'y''=(-\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}+\cos t)\cdot(\cos\frac{t}{3}-\cos t)-(-\sin\frac{t}{3}+\sin t)\cdot(-\frac{1}{3}\sin\frac{t}{3}+\sin t)$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^2\frac{t}{3}+\frac{4}{3}\cos\frac{t}{3}\cos t-\cos^2 t-\frac{1}{3}\sin^2\frac{t}{3}+\frac{4}{3}\sin\frac{t}{3}\sin t-\sin^2 t=$$

$$-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}(\cos\frac{t}{3}\cos t+\sin\frac{t}{3}\sin t)=$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\cos(t-\frac{t}{3})=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\cos\frac{2t}{3}=-\frac{4}{3}(1-\cos\frac{2t}{3})=-\frac{8}{3}\sin^2\frac{t}{3}$$

$$|x''y'-x'y''|=\frac{8}{3}\sin^2\frac{t}{3}=\dot{x}^2+\dot{y}^2=(-\sin\frac{t}{3}+\sin t)^2+$$

$$+(\cos\frac{t}{3}-\cos t)^2=\sin^2\frac{t}{3}-2\sin\frac{t}{3}\sin t+\sin^2 t+\cos^2\frac{t}{3}-2\cos\frac{t}{3}\cos t+\cos^2 t=$$

$$2-2(\sin\frac{t}{3}\sin t+\cos\frac{t}{3}\cos t)=2(1-\cos\frac{2t}{3})=4\sin^2\frac{t}{3}$$

$$\sqrt{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3}=8\left|\sin\frac{t}{3}\right|^3$$

$$K=\frac{8\sin^2\frac{t}{3}}{3\cdot 8\left|\sin\frac{t}{3}\right|^3}=\frac{1}{3\left|\sin\frac{t}{3}\right|}$$

$$R(\pi)=3\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3.24. Приложения производной. Основные теоремы дифференциального исчисления

Прежде, чем перейти к наиболее важным приложениям производной при исследовании функций и построении их графиков, рассмотрим несколько основных теорем.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$, дифференцируемая на промежутке X и в точке $x_0\in X$, принимает наименьшее значение (рис. 3.14).

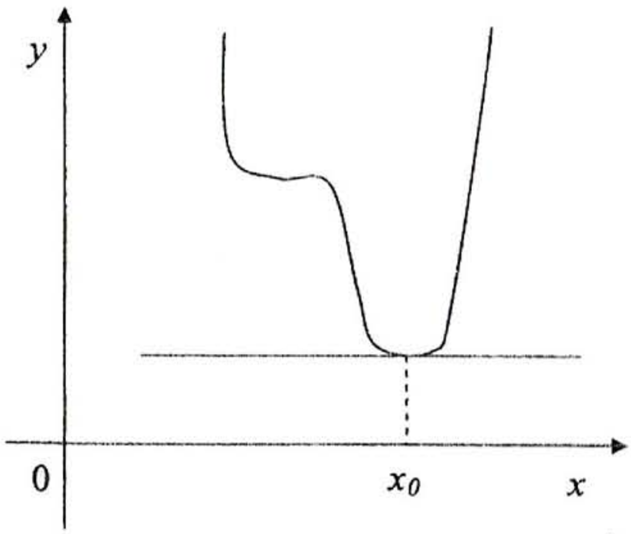


Рис. 3.14.

Тогда $f(x_0+\Delta x) \geq f(x_0)$, если $x_0+\Delta x \in X$ и, следовательно, величина $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \geq 0$ при достаточно малых Δx независимо от знака Δx. Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x < 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0+$ (справа) и при $\Delta x \to 0-$ (слева),

получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, ее предел при $\Delta x \to 0$ не должен зависеть от способа стремления $\Delta x \to 0$ (справа и слева), т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, откуда следует, что

$$f'(x_0) = 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ принимает в точке x_0 набольшее значение.

Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден: *в точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.*

Теорема Ферма может быть использована для доказательства так называемых *теорем о среднем,* к рассмотрению которые будут рассмотрены далее.

Теорема Ролля. *Пусть функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируема на интервале* (a, b);

3) *на концах отрезка принимает равные значения, т.е.* $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой производная функции равна нулю:* $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Было установлено, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего M и наименьшего m значений. Если оба эти значения достигаются на концах отрезка, то по условию они равны (т.е. $m=M$), а это значит, что функция тождественно постоянна на отрезке $[a, b]$. Тогда производная равна нулю во всех точках этого отрезка. Если же хотя бы одно из этих значений – максимальное или минимальное – достигается внутри отрезка (т.е. $m<M$), то производная в соответствующей точке равна нулю в силу теоремы Ферма.

Отметим геометрический смысл теоремы Ролля (см. рис. 3.15) *найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс; в этой точке производная и будет равна нулю* (заметим, что на рис. 3.15 таких точек две: ξ_1 и ξ_2).

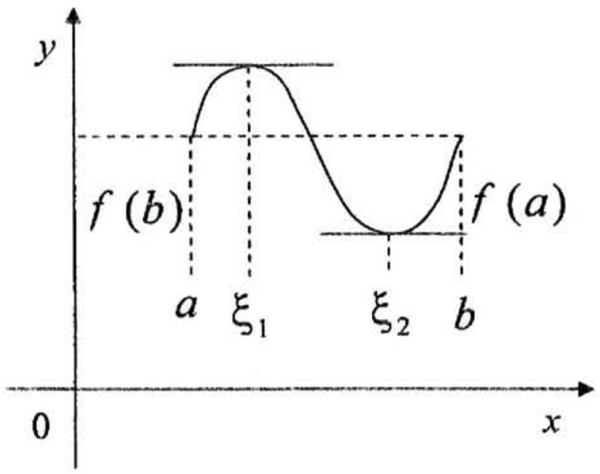
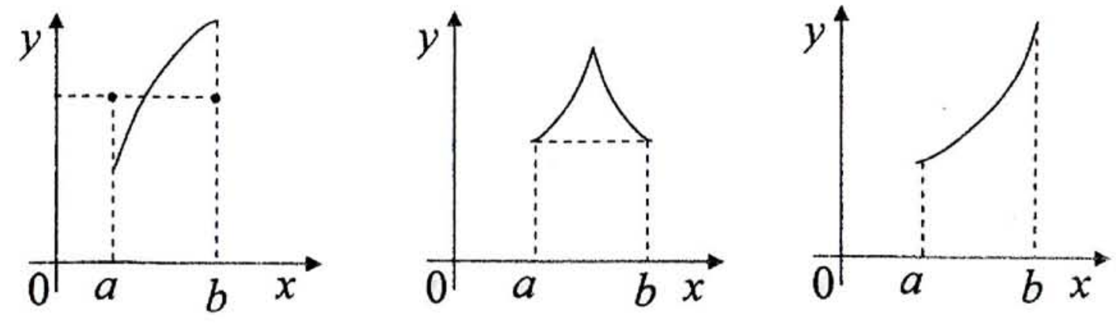


Рис. 3.15.

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так: *между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.*

Следует отметить, что все условия теоремы Ролля существенны и при невыполнении хотя бы одного из них, заключение теоремы может оказаться неверным. Так, для функции, приведенных на рис. 3.16 нарушено только одно условие: на рис. 3.16, *а* – непрерывность на отрезке $[a, b]$, на рис. 3.16, *б* - дифференцируемость на интервале (a, b), на рис. 3.16, *в* – равенство значений $f(a) = f(b)$.

В результате не существует такой точки $\xi \in (a, b)$, в которой $f'(\xi) = 0$.



а) б) в)

Рис. 3.16

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа. *Пусть функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируема на интервале* (a, b);

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, *в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке,* т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (3.14)$$

Доказательство. Введем новую функцию $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает на его концах равные значения:

$$g(a) = f(a),$$
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Следовательно, существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $g'(\xi) = 0$ или $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, откуда $f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Заключение (3. 14) теоремы Лагранжа может быть записано и в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \qquad (3.15)$$

Выясним механический и геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Приращение $f(b)-f(a)$ - это изменение функции на отрезке $[a,\ b]$; $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – средняя скорость изменения функции на этом отрезке; значение производной в точке – это "мгновенная" скорость изменения функции. Таким образом, теорема утверждает: *существует хотя бы одна точка внутри отрезка такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.*

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа приведена на рис. 3.17

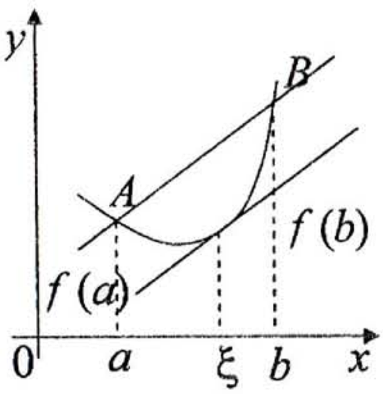


Рис. 3.17

Если перемещать прямую *AB* параллельно начальному положению, *найдется хотя бы одна точка* $\xi \in (a,b)$, *в которой касательная к графику функции* $y=f(x)$ *и хорда AB, проведенная через концы дуги AB, параллельны так как угловой коэффициент секущей* $k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, а касательной - $k=f'(\xi)$).

Следствие. *Если производная функции* $f(x)$ *равна нулю на некотором промежутке X, то функция тождественно постоянна на этом промежутке.*

Возьмем на рассматриваемом промежутке X отрезок $[a,\ x]$.Согласно теореме Лагранжа $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$, где $a<\xi<x$. По условию $f'(\xi)=0$, следовательно, $f(x)-f(a)=0$, т.е. $f(x)=f(a)=\text{const}$.

3.25. Раскрытие неопределенности. Правило Лопиталя

Теорема 3.6. (теорема Лопиталя, раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (3.14)$$

Эту теорему обычно называют правилом Лопиталя.

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Замечание 2. Теорема остается верной и в случае, когда $x\to\infty, x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Примеры. Вычислить пределы. Разделим производную числителя на производную знаменателя:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg}x-x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+5x}{x-\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+5}{1-\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Замечание 3. Если в формулировке теоремы заменить требование $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ на условие $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то теорема остается справедливой, то есть можем раскрывать неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x\ln a}}{kx^{k-1}}=\frac{1}{k\ln a}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0.$$

Вывод: степенная функция x^k - бесконечно большая более высокого порядка, чем логарифмическая функция $\log_a x$.

3.26. Раскрытие других видов неопределенностей

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ можно свести к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Покажем это на примерах. Вычислим следующие пределы, преобразовав на первом шаге исходную функцию:

1. $$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{a}{x} = \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{a}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{a}{x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = a\cos 0 = a.$$

2. $$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg}x\right) = \{\infty-\infty\} = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\sin x - x\cos x)'}{(x\sin x)'} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0.

Примеры. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x} = \{0^0\}$.

Но $\sin x^{\operatorname{tg}x} = e^{\operatorname{tg}x \ln\sin x}$ и в показателе степени получена неопределенность вида $0\cdot\infty$, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\operatorname{tg}x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\operatorname{tg}x\ln\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\ln\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}}$.

Рассмотрим $$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\operatorname{ctg}x)'} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\sin x = 0,$$

окончательно получаем $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\operatorname{tg}x} = e^0 = 1$.

2. $$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to 1} e^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)}.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) = \{\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln(2-x))'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)'} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2\cdot\sin^2\frac{\pi x}{2}}} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\pi(x-2)} = \frac{2}{\pi},$$

окончательно получаем

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

3.27. Формула Тейлора

Формула Тейлора – одна из главных формул математического анализа, позволяющая функцию, заданную сложным для вычисления аналитическим выражением, заменить удобным для анализа многочленом.

Теорема Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$. Пусть x – любое значение аргумента из указанной окрестности, $x \neq a$.

Тогда между точками a и x найдется точка c такая, что справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \qquad (3.15)$$

Эта формула называется формулой Тейлора,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - \left(c = x_0 + \theta(x-x_0), 0 < \theta < 1\right)$$

остаточный член, записанный в форме Лагранжа.

Эту формулу можно записать в виде $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$.

Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_{n+1}(x)$.

3.28. Формула Маклорена

При $a = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора – формулу Маклорена.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \qquad (3.16)$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1.$$

3.29. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

1. $f(x) = e^x$.

Так как

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n+1)}(x) = e^k,$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n+1)}(0) = 1,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1$$

2. $f(x) = \sin x$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{четно}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ если } n - \text{нечетно}, \end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin c.$$

3. $f(x) = \cos x$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{нечетно}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \text{ если } n - \text{четно}, \end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c.$$

4. Аналогично можно получить

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^4}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Пример

Сколько членов в формуле Маклорена требуется взять для того, чтобы вычислить значение e с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ (найти n).

$e^{1}=e$, тогда по формуле Маклорена имеем (x=1)

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1)$$

$$R_{n+1}(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\ \text{где } \theta\in(0;1)$$

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$$

(так как $2 < e < 3$).

$\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001;\ (n+1)!>3000$

для $n=2 \quad (n+1)!=6$,

для $n=3 \quad (n+1)!=24$,

для $n=4 \quad (n+1)!=120$,

для $n=5 \quad (n+1)!=720$,

для $n=6 \quad (n+1)!=5020>3000$.

Следовательно, если взять $n = 6$, то требуемое неравенство удовлетворяется.

3.30. Исследование поведения функций и построение графиков

Определение 3.5. Функция $y=f(x)$ на интервале (a; b) монотонно

- не убывает, если $f(x_1)\le f(x_2)$;
- не возрастает, если $f(x_1)\ge f(x_2)$;
- строго возрастает, если $f(x_1)<f(x_2)$;
- строго убывает, если $f(x_1)>f(x_2)$,

где $x_1\in(a;b); x_2\in(a;b), x_1<x_2$.

Теорема 3.8. (Необходимое и достаточное условие монотонности функции на интервале).

Для того, чтобы функция $f(x)$, непрерывная на [a; b] и дифференцируемая на (a; b), не убывала (не возрастала) на (a; b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) для всех $x\in(a;b)$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает на $(a;\ b)$, то есть $f(x_1) \le f(x_2)$. Пусть $x_1 = x, x_2 = x + \Delta x, \Delta x > 0$.

Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \text{ и } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0.$$

Следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$ (по теореме о знаке предела), то есть $f'(x) \ge 0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$. Тогда по теореме Лагранжа для всех $x_1, x_2 \in (a; b)$ $(x_1 < x_2)$ выполняется $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ge 0$, где $\xi \in (x_1, x_2), f'(\xi) > 0$ по условию теоремы.

Следовательно, $f(x_2) \ge f(x_1)$ и $f(x)$ не убывает по определению, что и требовалось доказать.

Замечание (геометрический смысл теоремы).

Если на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox острый угол φ или – в отдельных точках – горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \ge 0$ (рис. 3.18). Если функция $f(x)$ убывает на интервале (a, b), то угол наклона касательной – тупой (или в отдельных точках – касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 3.19). Теорема позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

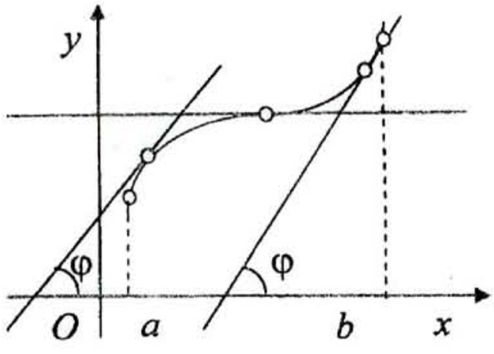


Рис. 3.18

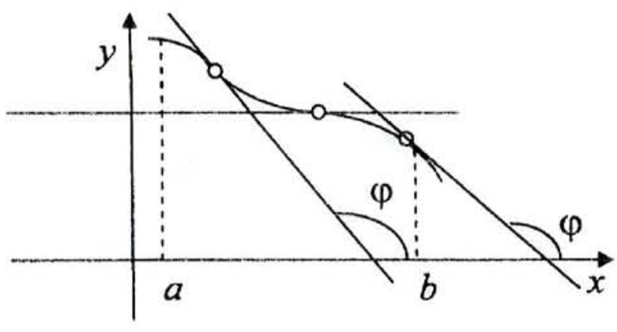


Рис. 3.19

Следствие. Для того, чтобы $f(x) = c$ $(c = \text{const})$ на (a, b) необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.

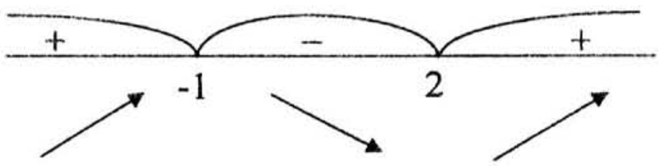
Пример. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^3 - 9\frac{x^2}{2} + 6x$.

Решение. Функция определена для всех $x \in R$.

$y' = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$.

Знак y'

поведение y



Следовательно, при $x \in (-\infty; -1)$ $f(x)$ возрастает; при $x \in (-1; 2)$ $f(x)$ убывает; при $x \in (2; +\infty)$ $f(x)$ возрастает.

3.31. Экстремум функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, включающем точку x_0.

Определение 3.6. Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ - окрестностей точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ при $x \neq x_0$ (рис. 3.20).

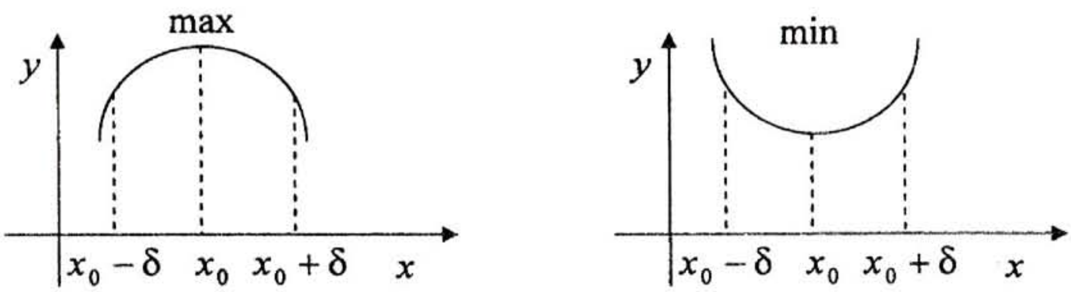


Рис. 3.20

Локальный максимум (max) или локальный минимум (min) объединяются общим названием локальный экстремум.

Из определения следует, что понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ может и не выполняться для всех значений x в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой окрестности точки x_0.

Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов и несколько локальных минимумов, причем может так случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума (рис. 3.20).

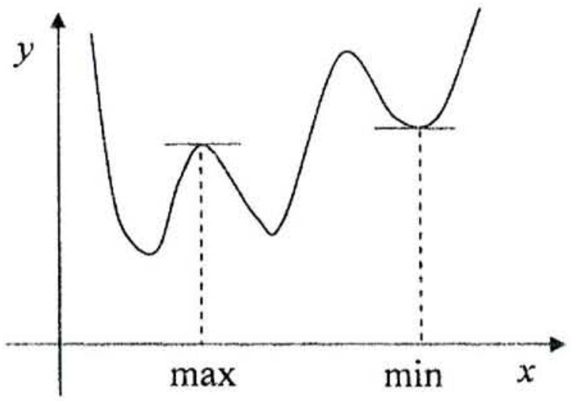


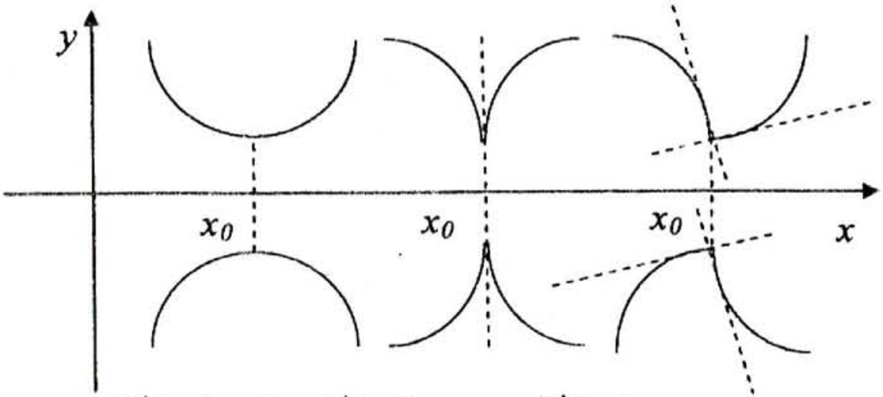
Рис. 3.21.

Теорема 3.9. (Необходимое условие локального экстремума).

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.

Определение 3.7. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называют стационарными точками этой функции.

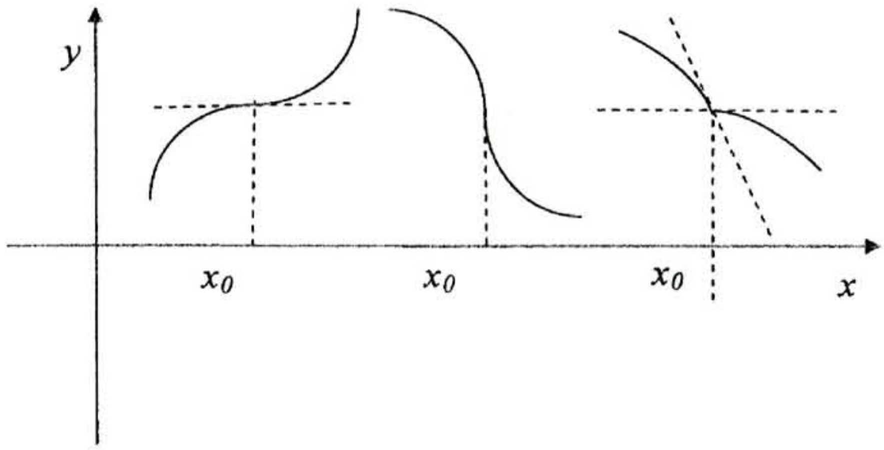
Из теоремы (3.9) следует, что дифференцируемая функция может достигать экстремума только в своих стационарных точках. Из рис. 3.22 видно, что в точках, где производные бесконечны или не существуют, функции также могут иметь экстремум.



$f'(x_0)=0$; $f'(x_0)=\infty$; $f'(x_0)$ не существует.

Рис. 3.22

Но могут возникнуть случаи, когда эти условия относительно производной выполняются, а экстремума функции не существует (рис. 3.22).



$f'(x_0) = 0$ $f'(x_0) = \infty$ $f'(x_0)$ не существует

Рис. 3.23

Итак, необходимое условие экстремума в точке x_0:

1) $f'(x_0) = 0$ 2) $f'(x_0) = \infty$ 3) $f'(x_0)$ не существует.

Определение 3.8. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, бесконечна или не существует, называются критическими точками функции или точками, подозрительными на экстремум.

Теорема 3.10. (Достаточные условия существования экстремума).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_0$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Пример

Найти экстремумы функции

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Решение

Найдем производную $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Точки, подозрительные на экстремум, $x_1 = 1$; $x_2 = -1$. Отметим, что в точке $x = 0$ функция терпит разрыв и потому не может иметь экстремум.
Найдем знак производной в окрестностях критических точек.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	-	$-\infty$	-	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	разрыв	$\searrow$	min	$\nearrow$

Итак, максимум $y(-1) = -2$, минимум $y(1) = 2$.

Теорема 3.11. (Достаточный признак экстремума через вторую производную).
Пусть $f'(x_0) = 0$; тогда при $x = x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Пример

Найти экстремумы функции $y = x + \frac{1}{x}$ через вторую производную.

Решение

Найдем $y'' = y' = (1 - \frac{1}{x^2})' = \frac{2}{x^3}$. Значения в критических точках $y''(-1) =$
$= -2 < 0$, $y''(1) = 2 > 0$.
Значит, максимум $y(-1) = -2$, минимум $y(1) = 2$.

3.32. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда, по второй теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке принимает свое наименьшее значение m и наибольшее M. Если этот отрезок не содержит критических точек функции $f(x)$ и она дифференцируема в интервале (a, b), то ее производная знакопостоянна на этом интервале.

Следовательно, функция строго монотонна на $[a, b]$ и M равно большему, а m меньшему из значений $f(a)$ и $f(b)$. Если же функция $f(x)$ на $[a, b]$ имеет конечное число критических точек, то как наибольшего M, так и наименьшего значения m она может достигать либо на концах этого отрезка, либо внутри него. В последнем случае эти значения будут одним из максимумов или минимумов функции $f(x)$.

Таким образом, для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, необходимо:

1) найти все критические точки функции, попадающие в интервал (a, b) и вычислить значения функции в этих точках;

2) вычислить значение функции на концах отрезка, то есть $f(a)$ и $f(b)$.

3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке [0; 2].

Решение

1. Находим критические точки в интервале (0, 2).

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); 3(x^2 - 1) = 0; x_1 = 1; x_2 = -1$, точка $x_2 = -1$ не принадлежит интервалу (0, 2), ее не рассматриваем.

$$f(1) = -2.$$

2. На границах интервала

$$f(0) = 0; f(2) = 2.$$

2. Выбираем наибольшее и наименьшее из полученных значений.

Это $f(1) = -2; f(2) = 2$.

Итак, $m = -2$; $M = 2$.

3.33. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $M(x; f(x))$ этого графика $(a < x < b)$, причем касательная не параллельна оси Oy, поскольку ее угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

Определение 3.9. Будем считать, что график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функций на (a, b) (рис. 3.24).

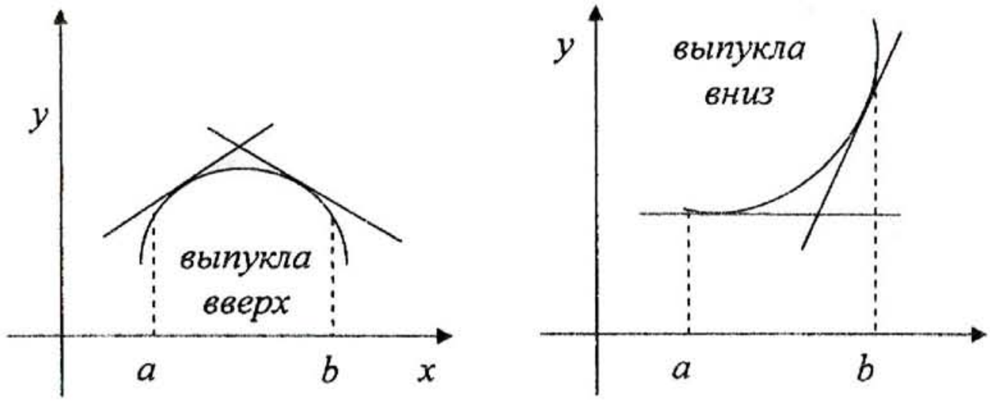


Рис. 3.24

Теорема 3.12 Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) во всех точках (a, b), то график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Геометрический смысл признака:

$f''(x) = (f'(x))' = (\operatorname{tg}\alpha)' > 0$, то есть $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает, график вогнут;

$f''(x) = (f'(x))' = (\operatorname{tg}\alpha)' < 0$, то есть $\operatorname{tg}\alpha$ убывает, график выпуклый.

Пример

$y = ax^2 + bx + c$.

$y' = 2ax + b; y'' = 2a; y'' > 0$ при $a > 0$, график функции вогнут для всех x; $y'' < 0$ при $a < 0$, график выпуклый для всех x.

Замечание. Признак не является необходимым, то есть в точке выпуклости или вогнутости может быть $y'' = 0$.

Пример. $y = x^4; y' = 4x^3; y'' = 12x^2$ при $x = 0$ $y''(0) = 0$. (рис. 3.25).

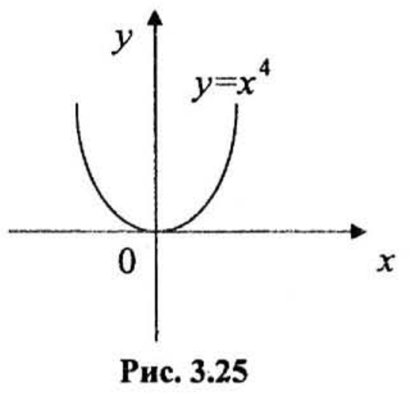


Рис. 3.25

Определение 3.10. Точка $M(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в точке M график имеет касательную и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y=f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

Теорема 3.13. (Необходимое условие точки перегиба). Пусть график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0;f(x_0))$, и пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, то есть $f''(x_0)=0$.

Теорема 3.14. (Достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$.

Замечание. Теорема остается верной, если $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0, и существует касательная к графику функции в точке *M*. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$.

Пример. $y=\sqrt[3]{x};y'=\frac{1}{3}x^{-2/3};y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3};y''=-\frac{2}{9x^{5/3}}$. В точке $x=0$ вторая производная не существует, но слева и справа от нее имеет разные знаки, и график функции имеет перегиб в точке $x=0$ (рис. 3.26).

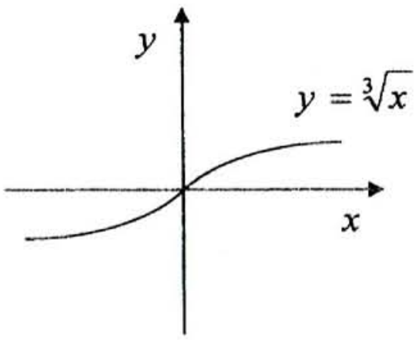


Рис. 3.26

3.34. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, то есть при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$ или вблизи точек разрыва 2-го рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются асимптотами.

Существуют три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Определение 3.10. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 3.11. Прямая $y = A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$.

Определение 3.12. Прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), $k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx)$.

Пример

Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

Решение

1. $x = 0$ - вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

2. Горизонтальных асимптот нет.

3. $k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{x^2+1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$,

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (1 + \frac{1}{x^2} - 1) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Итак, наклонная асимптота $y = x$.

Пример

Найти асимптоты графика функции $y = (x - 4)e^{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Нет вертикальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx)\ \ k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-4)e^{arctg(x-1)}}{x} = e^{\frac{\pi}{2}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x} = e^{\frac{\pi}{2}}$$ (так как $\mathrm{arctg}(x-1) \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$));

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-4)e^{arctg(x-1)}}{x} = e^{-\pi/2} \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x} = e^{-\pi/2}$$ (так как $\mathrm{arctg}(x-1) \to -\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$),

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}((x-4)e^{arctg(x-1)} - e^{\frac{\pi}{2}}x) = -4e^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{x\to+\infty}(xe^{arctg(x-1)} - e^{\frac{\pi}{2}}x) = -4e^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{arctg(x-1)} - e^{\frac{\pi}{2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = -4e^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{arctg(x-1)} \cdot \frac{1}{1+(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -4e^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+e^{\frac{\pi}{2}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{1+(x-1)^2} = -4e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} = -5e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}((x-4)e^{arctg(x-1)} - e^{-\frac{\pi}{2}}x) = -4e^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{x\to-\infty}(xe^{arctg(x-1)} - e^{\frac{\pi}{2}}x) = -4e^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(e^{arctg(x-1)} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = -4e^{-\frac{\pi}{2}} + \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{arctg(x-1)} \cdot \frac{1}{1+(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -4e^{-\frac{\pi}{2}} +$$

$$+e^{-\frac{\pi}{2}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{1+(x-1)^2} = -4e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} = -5e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Замечание. При вычислении пределов использовалось правило Лопиталя. Итак, получены две наклонных асимптоты:

$$y = e^{\frac{\pi}{2}}x - 5e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{\pi}{2}}x - 5e^{-\frac{\pi}{2}},\ \text{где}\ \ e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}23.$$

3.35. Схема исследования графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

3. Найти асимптоты.
4. Найти точки возможного экстремума.
5. Найти критические точки.
6. Исследовать знак первой производной и определить участки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Исследовать знак второй производной и найти направление выпуклости графика функции и точки перегиба.
8. Учитывая исследование, построить график.

Пример. Построить график функции $y = (x+7)e^{\frac{1}{x-5}}$:

1) область определения: $x \neq 5$;
2) функция непрерывна при $x \neq 5$

$x = 5$ - точка разрыва

$$\lim_{x \to 5+0}(x+7)e^{\frac{1}{x-5}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 5-0}(x+7)e^{\frac{1}{x-5}} = 0;$$

3) $x = 5$ - вертикальная асимптота;
4) функция общего вида;
5) не периодическая;
6) пересечение с OX:

$y = 0 \qquad x = -7$,

пересечение с OY:

$y(0) = 7e^{-1/5} \approx 5{,}7$;

7) при $x < -7$ график функции ниже оси OX; ($y<0$),

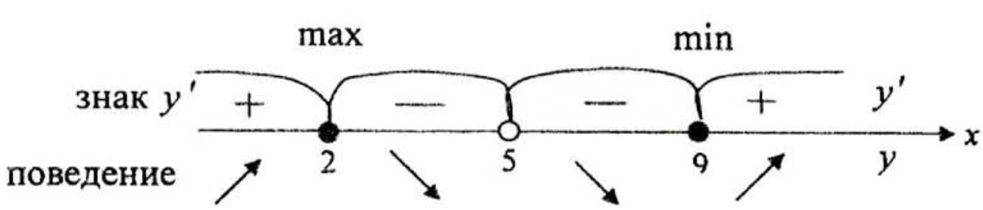
при $x > -7$ график функции выше оси OX. ($y>0$);

8) $$y' = e^{\frac{1}{x-5}} + (x+7)e^{\frac{1}{x-5}}\left(\frac{-1}{(x-5)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-5}}\left(1 - \frac{x+7}{(x-5)^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{(x-5)^2} \times$$

$$\times\left(x^2 - 10x + 25 - x - 7\right) = \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{(x-5)^2}\left(x^2 - 11x + 18\right) = \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{(x-5)^2}(x-2)(x-9)$$

$y' = 0 \quad x = 2 \quad x = 9$

y' – не существует $\quad x = 5$.



$y(2) = 9e^{-\frac{1}{3}} \approx 6{,}5$ – max значение y

$y(9) = 16e^{1/4} \approx 20{,}6$ – min значение y;

9) $y' = e^{\frac{1}{x-5}} \dfrac{x^2 - 11x + 18}{(x-5)^2}$

$$y'' = e^{\frac{1}{x-5}}\left(-\frac{1}{(x-5)^2}\right)\frac{x^2-11x+18}{(x-5)^2} + e^{\frac{1}{x-5}}\frac{(2x-11)(x-5)^2 - 2(x-5)(x^2-11x+18)}{(x-5)^4} =$$

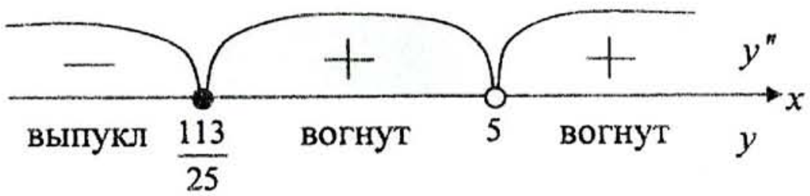
$$= \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{(x-5)^4}\left(-x^2+11x-18+(2x-11)(x^2-10x+25)-2(x-5)(x^2-11x+18)\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{(x-5)^4}\left(-x^2+11x-18+2x^2-31x^2+160x-275-2x^2+32x^2-146x+180\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{(x-5)^4}(25x-113)$$

$y'' = 0 \quad x = \dfrac{113}{25} = 4{,}52$

y'' – не существует $x = 5$.



Поведение графика функции. В точке $x = 4{,}52$ – перегиб.

$$y(4{,}52) = 11{,}52e^{\frac{1}{-0{,}48}} \approx 1{,}44;$$

10) найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+7)e^{\frac{1}{x-5}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x}\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x-5}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left((x+7)e^{\frac{1}{x-5}} - x\right) = \{\infty-\infty\} = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x-5}} - x + 7e^{\frac{1}{x-5}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x-5}}-1\right) + 7\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x-5}} = \lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x-5} + 7 = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} + 7 = 8$$

$y = x + 8$.

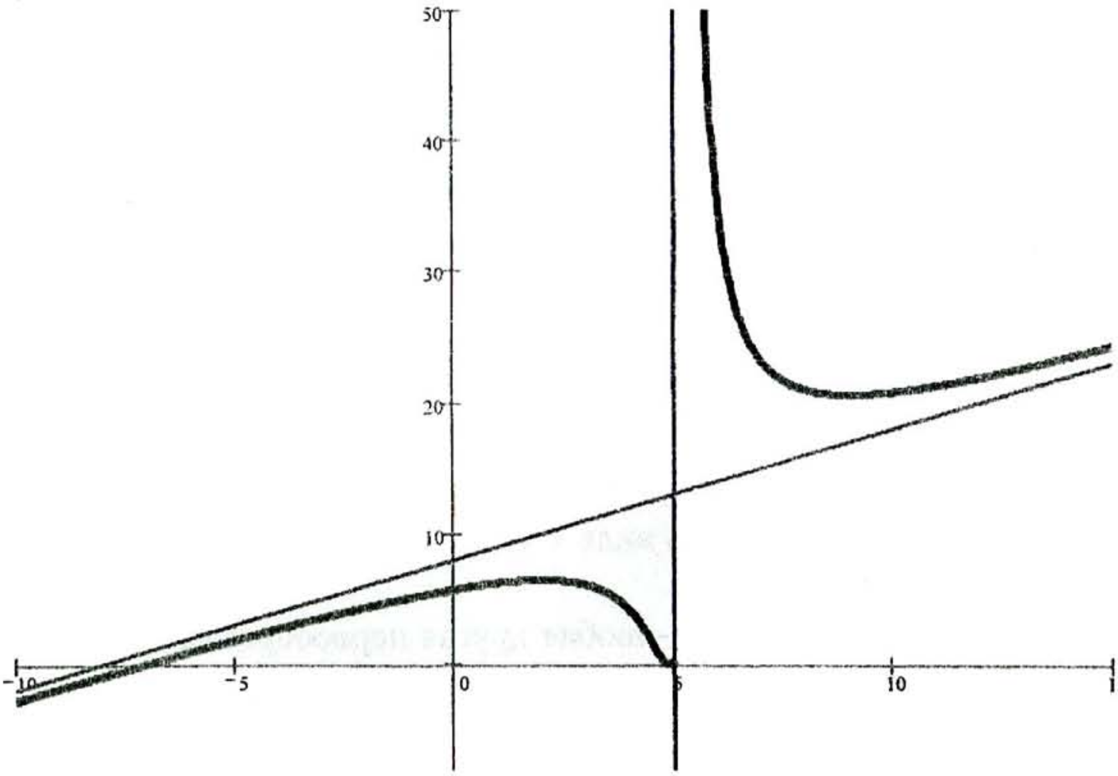


Рис. 3. 27

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления – отыскание производной заданной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по данной функции $f(x)$ найти такую $F(x)$, производная от которой равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Определение 4.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Примеры

1. Функция $F(x) = x^4$ является первообразной для функции $f(x) = 4x^3$ на всей числовой прямой, так как при любом значении x $(x^4)' = 4x^3$.
2. Функция $F(x) = \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = -\sin x$, так как при любом значении x $(\cos x)' = -\sin x$.

3. Функция $F(x)=\cos x+c$ (где c – произвольная постоянная) является первообразной для функции $f(x)=-\sin x$, так как при любом значении x $(\cos x+c)'=-\sin x$.

Таким образом, задача отыскания по данной функции $f(x)$ её первообразной решается неоднозначно.

Покажем, что множество функций $F(x)+c$, где $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$, а c – произвольная постоянная, исчерпывает все первообразные для функции $f(x)$.

Ранее было доказано, что функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.

Теорема 4.1. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x)+c$, где c - произвольная постоянная.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ - любая другая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то есть $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда для любого $x\in X$ выполняется:

$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, а по лемме это означает, что функция $\Phi(x)-F(x)$ постоянна, то есть $\Phi(x)-F(x)=c$, где c – некоторое число. Получаем $\Phi(x)=F(x)+c$.

Из теоремы следует, что достаточно найти какую - либо одну первообразную и тогда можно назвать все семейство первообразных $F(x)+c$.

Определение 4.2. Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x)+c$, где c - произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c,$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x – переменная интегрирования.

Восстановление функции по её производной называется интегрированием этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того, чтобы проверить правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию: $F'(x)=f(x)$.

Будем считать, что функция интегрируема, если для неё существует неопределенный интеграл.

4.2. Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \text{ и } d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Действительно,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x) \text{ и } d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

В самом деле, так как $dF(x) = F'(x)dx$, то $\int F'(x)dx = F(x) + c$.

3. Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла, то есть если $k = \text{const} \neq 0$, то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $kF(x)$ - первообразная для функции

$$kf(x): (kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Следовательно,

$$k\int f(x)dx = k[F(x)+c] = kF(x) + c_1 = \int kf(x)dx,$$

где $c_1 = kc$.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ - первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$F'(x) = f(x), G'(x) = g(x).$$

Тогда функции $F(x) \pm G(x)$ являются первообразными для функций

$$f(x) \pm g(x).$$

Следовательно,

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x)+c_1] \pm [G(x)+c_2] = [F(x) \pm G(x)] + [c_1 \pm c_2] =$$

$$= [F(x) \pm G(x)] + c = \int [f(x) \pm g(x)]dx.$$

Свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых.

5. Инвариантность формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то и $\int f(u)du = F(u) + c$, где $u = \varphi(x)$ - произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Рассмотрим $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Положим $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + c$, то есть формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от неё, имеющей непрерывную производную.

Пусть в $\int f(x)dx$ удается выделить некоторую функцию $g(\varphi(x))$, тогда имеем

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int g(u)du = G(u) + c = G(\varphi(x)) + c.$$

4.3. Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; (\alpha \neq -1)$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$
3. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + c$
4. $\int e^{u} du = e^{u} + c$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$ $\quad\left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + c\right)$
6. $\int \cos u\,du = \sin u + c$ $\quad\left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + c\right)$
7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + c$
8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + c$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$ $\quad\left(\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + c\right)$
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c$ $\quad\left(\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + c\right)$
11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + c$
12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c \qquad \left(\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c \right)$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

15. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c \qquad \left(\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c \right)$

16. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$

4.4. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование данный интеграл с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры. Найти интегралы

1. $\int \frac{x^5+4\sqrt[3]{x}-7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{7}{2}}dx + 4\int x^{-7/6}dx - 7\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{9/2}}{9/2} + 4\cdot\frac{x^{-1/6}}{(-1/6)} -$

$-7\ln|x| + c = \frac{2\cdot x^{9/2}}{9} - \frac{24}{\sqrt[6]{x}} - 7\ln|x| + c.$

2. $\int (7x+3)^2 dx = \int \left(49x^2+42x+9\right)dx = 49\frac{x^3}{3} + 42\frac{x^2}{2} + 9x + c = \frac{49}{3}x^3 +$

$+21x^2+9x+c\,.$

3. $\int (5x-8)^{19}dx = \frac{1}{5}\int (5x-8)^{19}d(5x-8) = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-8)^{20}}{20} + c = 0{,}01(5x-8)^{20} + c.$

4. $\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(1-\cos 6x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c.$

5. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$

6. $\int \sqrt{x+4}dx = \int (x+4)^{1/2}d(x+4) = \frac{(x+4)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} + c.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin 3x + c.$

8. $\int e^{3\cos x}\cdot\sin x dx = \frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\,3\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}d(3\cos x) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + c.$

2. Метод подстановки.

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, то есть перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной. Он основан на теореме.

Теорема 4.2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X - множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt\,.$$

Эта формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Частные случаи замены переменной:

1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$;

2) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(ax)d(ax) = \frac{1}{a}F(ax)+c$;

3) $\int f(x+b)dx = \int f(x+b)d(x+b) = F(x+b)+c.$

Примеры. Найти интегралы

1) $\int x\sqrt{x-5}dx = \int (t^2+5)t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+5t^2)dt =$

$\sqrt{x-5}=t;\ x-5=t^2;\ x=t^2+5;\ dx=2tdt$

$= \frac{2t^5}{5}+\frac{10t^3}{3}+c = \frac{2(x-5)^{5/2}}{5}+\frac{10(x-5)^{3/2}}{3}+c.$

2) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+c = \ln(1+\sin^2 x)+c$

$1+\sin^2 x = t; 2\sin x\cos x dx = dt; \sin 2x dx = dt.$

3) $\int \sin(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \sin t dt = -\frac{1}{a}\cos t + c =$

$ax+b=t; adx=dt; dx=\frac{1}{a}dt$

$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c.$

4.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx.$$

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{4}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q.$$

Введем замену $x+\frac{p}{2}=t; dx=dt.$

Пример. Найти интегралы

$$\int \frac{4x-7}{x^2+4x+8}dx=\int \frac{4(t-2)-7}{t^2+4}dt=\int \frac{4t-15}{t^2+4}dt=$$

$$x^2+4x+8=x^2+4x+4+4=(x+2)^2+4=t^2+4$$

$$x+2=t; dx=dt; x=t-2$$

$$=4\int \frac{tdt}{t^2+4}-15\int \frac{dt}{t^2+4}=4\int \frac{\frac{1}{2}d(t^2+4)}{t^2+4}-15\int \frac{dt}{t^2+4}=2\ln(t^2+4)-\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c=$$

$$=2\ln((x+2)^2+4)-\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+c=2\ln(x^2+4x+8)-7{,}5\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+c.$$

Метод интегрирования по частям.

Этот метод основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 4.3. Пусть функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)\,\upsilon(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x)\,\upsilon'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x)\upsilon'(x)dx=u(x)\upsilon(x)-\int \upsilon(x)u'(x)dx. \qquad (4.1)$$

Доказательство

Из равенства $\left(u(x)\upsilon(x)\right)'=u'(x)\upsilon(x)+u(x)\upsilon'(x)$ следует, что

$$u(x)\upsilon'(x)=\left(u(x)\cdot\upsilon(x)\right)'-u'(x)\upsilon(x). \qquad (4.2)$$

Первообразной функции $\left(u(x)\,\upsilon(x)\right)'$ на промежутке X является функция $u(x)\upsilon(x)$. Функция $u'(x)\upsilon(x)$ имеет первообразную на X по условию теоремы.

Следовательно, и функция $u(x)\upsilon'(x)$ имеет первообразную на промежутке X. Интегрируя равенство (4.2), получаем формулу (4.1) – формулу интегрирования по частям.

Так как $\upsilon'(x)dx = d\upsilon; u'(x)dx = du$, то формулу (4.1) можно записать в виде

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du. \tag{4.3}$$

Замечания

1. Если подынтегральная функция содержит трансцендентные функции (например; $\operatorname{arctg} x, \arcsin x, \ln x$), то их берут в качестве u, а все остальное подынтегральное выражение – в качестве $d\upsilon$.

2. Если подынтегральное выражение имеет вид

$$P_n \cdot \begin{Bmatrix} \sin\alpha x \\ \cos\alpha x \\ e^{\alpha x} \end{Bmatrix} dx,$$

где P_n – многочлен *n*-й степени, то в качестве u берут P_n, а все остальное выражение – в качестве $d\upsilon$.

3. Вспомогательные записи можно отделить вертикальными чертами.

Примеры. Найти интегралы

1. $$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ d\upsilon = dx \\ \upsilon = x \end{array} \right| = x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x +$$

$$+\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

2. $$\int x e^{-\frac{x}{5}} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ d\upsilon = e^{-\frac{x}{5}} dx \\ \upsilon = -5 \cdot e^{-\frac{x}{5}} \end{array} \right| = -5xe^{-\frac{x}{5}} + 5\int e^{-\frac{x}{5}} dx = -5xe^{-\frac{x}{5}} - 25e^{-\frac{x}{5}} + c.$$

3. $$\int (x^2-2x+7)\cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2-2x+7 \\ du = (2x-2)dx \\ d\upsilon = \cos 3x dx \\ \upsilon = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}(x^2-2x+7)\sin 3x - \frac{2}{3}\int (x-1)\sin 3x dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x-1 \\ du=dx \\ d\upsilon=\sin\ 3xdx \\ \upsilon=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=\frac{1}{3}(x^2-2x+7)\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-2x+7)\sin 3x+\frac{2}{9}(x-1)\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+c.$$

4.6. Интегрирование рациональных функций

Важный класс представляют функции, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, то есть функции, которые можно представить в виде дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $W(x)$ – некоторый многочлен, а $R(x)$ – многочлен степени ниже, чем $Q(x)$.

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения

$$Q(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)...(x-\gamma),$$

где A – коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, а α,β,γ – корни уравнения $Q(x)=0$.

Множители $(x-\alpha)(x-\beta)...(x-\gamma)$ называются элементарными множителями. Если среди них имеются совпадающие, то, группируя, получаем представление

$$Q(x)=A(x-\alpha)^m(x-\beta)^n...(x-\gamma)^p,$$

где $m,n...p$ – целые числа, которые называются соответственно кратностями корней $\alpha,\beta,...\gamma$, причем $m+n+...+p=n, n$ – степень многочлена $Q(x)$.

Среди этих корней могут быть и комплексные. В алгебре доказывается, что если $\alpha=a+bi$ – m – кратный комплексный корень многочлена с вещественными коэффициентами, то этот многочлен имеет также сопряженный с α m - кратный корень $\alpha=a+bi$.

В случае наличия комплексных корней многочлен может быть записан в виде

$$Q(x) = A(x-\alpha)^m (x-\beta)^n \dots (x^2+2px+q)^t (x^2+2ux+\upsilon)^s \dots, \tag{4.4}$$
где $\alpha, \beta, \dots p, q, u, \upsilon \dots$ – вещественные числа.

Теорема 4.4. Если рациональная функция $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен $Q(x)$ представлен в виде (4.4), то эту функцию можно единственным образом представить в виде

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \dots$$
$$\dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2} + \dots + \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \dots, \tag{4.5}$$
где $A_1, A_2, \dots A_m, M_1, N_1 \dots M_t, N_t \dots$ – некоторые вещественные числа.

Выражение (4.5) называется разложением рациональной функции на элементарные дроби.

Равенство (4.5) имеет место для всех x, не являющихся вещественными корнями многочлена $Q(x)$. Чтобы определить числа $A_1, A_2, \dots A_m$, $M_1, N_1 \dots M_t, N_t \dots$, умножим обе части разложения (4.5) с неизвестными пока $A_1, A_2 \dots$ на $Q(x)$. Поскольку равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при равных степенях x, должны быть равны между собой. Приравнивая их, получаем систему уравнений первой степени, из которой найдем неизвестные числа $A_1, A_2, \dots A_m, M_1, N_1 \dots M_t, N_t \dots$. Такой метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется методом неопределенных коэффициентов.

Пример. Найти $\displaystyle\int \frac{(x+5)dx}{x(x-2)(x-1)}$.

Решение

Разложим подынтегральную правильную дробь на простейшие дроби

$$\frac{(x+5)dx}{x(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-1}.$$

Найдем коэффициенты методом подстановки корней.

$$x+5 \equiv A(x-2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x-2).$$

При $x=0, A=2\frac{1}{2}$

$x=2, B=3\frac{1}{2}$

$x=1, C=-6$

Тогда

$$\int \frac{(x+5)}{x(x-2)(x-1)}dx = \frac{5}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2} - 6\int\frac{dx}{x-1} = \frac{5}{2}\ln|x| + \frac{7}{2}\ln|x-2| -$$
$$-6\ln|x-1| + C.$$

Пример. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Решение

Разложим подынтегральную правильную дробь на простейшие.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Для вычисления неопределенных коэффициентов A, B, C обе части предыдущего тождества приведем к целому виду:

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

или

$$x \equiv x^2(A+B) + x(2A+C) + (A-B-C).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ A-B-C=0. \end{cases}$$

Отсюда $A=\frac{1}{4}; B=-\frac{1}{4}; C=\frac{1}{2}$.

Получаем

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}\ln|x-1| -$$
$$-\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + c.$$

Пример. Найти $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

Разложим подынтегральную правильную дробь на простейшие и найдем коэффициенты разложения методом неопределенных коэффициентов (учитывая, что $x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$):

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+c)(x+1).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0, \text{откуда } A=\dfrac{1}{3}; B=-\dfrac{1}{3}; C=\dfrac{2}{3}. \\ A+C=1 \end{cases}$$

Итак, при $x \neq -1$.

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{(x-\frac{1}{2})dx}{x^2-x+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

4.7. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций

Основной подход при интегрировании иррациональных функций состоит в сведении искомого интеграла к интегралу от рациональной функции с помощью подходящей замены переменной (так называемая рационализация интеграла). Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

1. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx,$$

где R – рациональная функция, находятся с помощью подстановок

$x = a\ \sin t, x = a\ \operatorname{tg} t, x = \dfrac{a}{\cos t}$ соответственно.

Пример. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Полагая $x = a\ \sin t$, $dx = a\cos t dt; \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\ |\cos t|$, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t) + c =$$

$= \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x^2}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$, где $|x| \le a$.

Пример. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

Решение. Положив $x = a\ \operatorname{tg} t$, получаем при $a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + c = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + c.$$

2.Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}})\,dx$, где R – рациональная функция, рационализируются подстановкой $x = t^p$, где p – наименьшее общее кратное чисел $n_1, \dots, n_k$.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$, где $ad \neq bc$ рационализируются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, где p имеет то же значение.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}$.

Решение. Наименьшее общее кратное степеней 4 и 6 радикалов в подынтегральной функции равно 12.

Поэтому введем замену $t = x^{\frac{1}{12}}$, тогда $x = t^{12}; dx = 12t^{11}dt$.

Получаем $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{12t^{11}dt}{t^{10} - t^9} = 12\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 12\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$

$$= 12\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 12\left(\frac{t^2}{2} + t + \int \frac{d(t-1)}{t-1}\right) = 6t^2 + 12t + 12\ln|t-1| + c.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 12\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + c.$$

3. Интегрирование биномиального дифференциала (выражения вида $x^m(a + bx^n)^p$).

Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, выражается через элементарные функции только в следующих трех случаях.

Случай 1. P – целое. Тогда, если $p > 0$, подынтегральное выражение развертывается по формуле бинома Ньютона; если $p < 0$, то полагаем $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

Случай 2. $\frac{m+1}{n}$ – целое. Полагаем $a + bx^n = t^\alpha$, где α – знаменатель дроби p.

Случай 3. $\frac{m+1}{n}+p$ – целое. Полагаем $ax^{-n}+b=t^{\alpha}$, где α – знаменатель дроби p.

В других случаях интеграл не может быть выражен в элементарных функциях.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx$.

Решение. $\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx=\int x^{-7/5}(1+x^{1/3})^{1/5}dx,$

получаем

$$m=-7/5;n=1/3;\ p=1/5$$

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-7/5+1}{1/3}+\frac{1}{5}=-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}=-1\in Z.$$

Получаем случай 3.

Замена $x^{-1/3}+1=t^5;-1/3x^{-\frac{4}{3}}dx=5t^4dt$

$$\int x^{-7/5}(x^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{1}{3}}+1))^{1/5}dx=\int x^{-7/5}\cdot x^{\frac{1}{15}}(x^{-1/3}+1)^{\frac{1}{5}}dx=\int x^{-4/3}(x^{-1/3}+1)^{\frac{1}{5}}dx=-15\int t^4\cdot tdt=$$

$$=-15\int t^5dt=-\frac{15}{6}t^6+c=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{\frac{(1+\sqrt[3]{x})^6}{x^2}}+c.$$

4. Интегралы вида $J=\int\sin^m x\cos^n xdx$, где m,n – рациональные числа, приводятся к интегралу от биномиального дифференциала

$$J=\int t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt, t=\sin x$$

и потому интегрируются в элементарных функциях только в трех случаях:

1) n – нечетное ($\frac{n-1}{2}$ – целое),

2) m – нечетное ($\frac{m+1}{2}$ – целое),

3) $m+n$ – четное ($\frac{m+1}{2}+\frac{n-1}{2}$ – целое).

Если число n нечетное, применяется подстановка $\sin x=t$. Если число m нечетное, применяется подстановка $\cos x=t$. Если сумма чисел $m+n$ – четная, применяется подстановка $\operatorname{tg}x=t$ (или $\operatorname{ctg}x=t$).

В частности, такая подстановка удобна для интегралов $\int\operatorname{tg}^n dx$ (или $\int\operatorname{ctg}^n xdx$), где n – целое положительное число. Но если m и n – неотрицательные четные числа, то удобнее метод понижения степени с помощью тригонометрических преобразований:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ или } \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

5. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, преобразуются в интегралы от рациональной функции подстановкой $tg(x/2) = t$ $(-\pi < x < \pi)$.

Эта подстановка называется универсальной. В этом случае

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; x = 2\operatorname{arctg} t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В случае, когда подстановка ведет к слишком громоздким выкладкам, возможно использование более простых подстановок.

Если выполняется равенство

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяем подстановки $\cos x = t$ или $\sin x = t$ соответственно.

Если выполняется равенство $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяем подстановки $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^4(3x)\cos^4(3x)dx$.

Решение.

$$\int \sin^4(3x)\cos^4(3x)dx = \frac{1}{2^4}\int (2\sin 3x\cos 3x)^4 dx = \frac{1}{2^4}\int \sin^4(6x)dx =$$

$$= \frac{1}{2^4}\int \left(\frac{(1-\cos 12x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2^6}\int (1-\cos 12x)^2 dx = \frac{1}{2^6}\int (1-2\cos 12x+\cos^2 12x)dx =$$

$$= \frac{1}{2^6}\int \left(1-2\cos 12x+\frac{1+\cos 24x}{2}\right)dx = \frac{1}{2^6}\int \left(\frac{3}{2}-2\cos 12x+\frac{1}{2}\cos 24x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}\sin 12x+\frac{1}{48}\sin 24x\right)+c.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Решение. Введем замену $t = \sin x;\ dt = \cos x dt$.

Получаем $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

$$\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(t-1)}{t-1}+\frac{1}{4}\int(t-1)^{-2}d(t-1)+\frac{1}{4}\int\frac{d(t+1)}{t+1}+\frac{1}{4}\int(t+1)^{-2}d(t+1)=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4(t+1)}+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|-\frac{\sin x}{2(\sin^2 x-1)}+c=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+\frac{1}{2}\frac{tgx}{\cos x}+c.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Решение. $m=2$, $n=-6$, m, n - четные, $n<0$. Введем замену $\operatorname{tg} x=t, \frac{1}{\cos^2 x}=1+t^2, \frac{dx}{\cos^2 x}=dt$.

Получаем $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int t^2(1+t^2)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=\frac{tg^3x}{3}+\frac{tg^5x}{5}+c$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Ведем замену $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Получаем

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{8-2t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2}{tg\frac{x}{2}-2}\right|+c.$$

4.8. Определенный интеграл

Пусть функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и положим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, где i=1, 2, ... , n. Тогда сумма вида

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (4.6)$$

называется интегральной суммой функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл величины σ показан на рис. 4.1: это сумма площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, i=1, 2, ... , n.

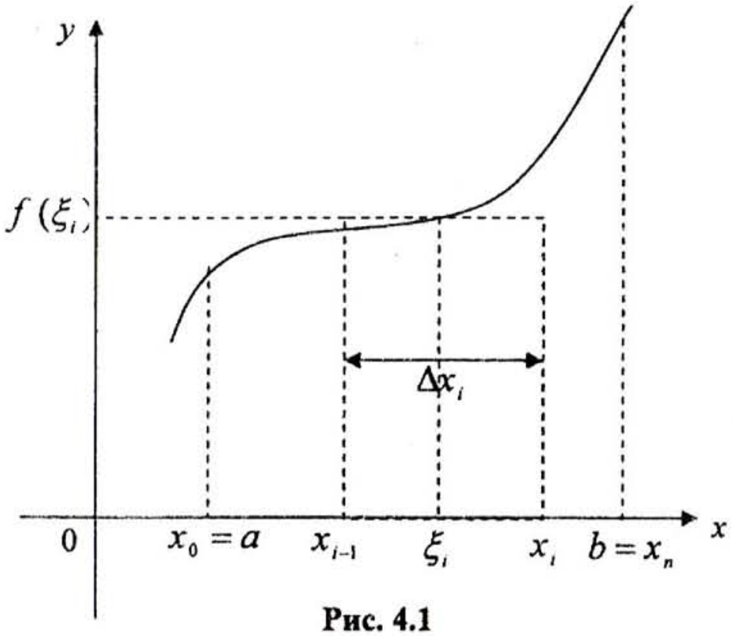


Рис. 4.1

Обозначим через λ длину максимального элементарного отрезка данного разбиения, то есть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

Определение 4.3. Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если он существует, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

Определенный интеграл обозначается символом $I = \int_a^b f(x)dx$.

Если определенный интеграл существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, числа a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Теорема 4.5. (Необходимое условие интегрируемости функции). Интегрируемая на $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке.

Теорема 4.6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.

Теорема 4.7. Если определенная и ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет конечно число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

4.9. Основные свойства определенного интеграла

Будем полагать, что интегралы, входящие в формулы, существуют.

1. По определению определенного интеграла полагаем

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

как определенный интеграл от функции на отрезке нулевой длины, а также

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

так как при движении от b к a все величины $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ имеют отрицательный знак в интегральной сумме (4.6).

2. Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Если функция $y=f(x)$ – четная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Если функция $y=f(x)$ – нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

4.10. Формулы оценки определенных интегралов

Полагаем $a < b$

1. Если функция $f(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Если M и m – соответственно максимум и минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

4.11. Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, x]$, где $x \in [a,b]$.

Рассмотрим функцию аргумента x

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Назовем функцию $F(x)$ интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 4.8. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

4.12. Формула Ньютона-Лейбница (основная формула интегрального исчисления)

Согласно теореме (4.8), непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную, которая определяется формулой

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c, \tag{4.7}$$

где c – некоторая постоянная.

Подставляя $x=a$ в формулу (4.5), получаем с учетом свойства 1 определенного интеграла

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + c,\ 0 = F(a) + c, \text{ откуда } c = -F(a).$$

Тогда из (4.7) имеем

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4.8}$$

Равенство (4.8) называется основной формулой интегрального исчисления, или формулой Ньютона-Лейбница.

Разность $F(b) - F(a)$ условно записывают $F(x)\Big|_a^b$, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4.9}$$

Эта формула позволяет вычислить определенный интеграл. Нужно вычислить неопределенный интеграл и затем найти разность значений согласно формуле (4.9).

Пример. $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$.

Пример. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-1}^1 = arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Пример. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$

4.13. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 4.9. Пусть:

1) $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$;

2) функция $\varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и множеством значений функции $\varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt. \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$. Рассмотрим сложную функцию $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$, так как $F(x)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы на соответствующих отрезках, то по правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Из этого равенства следует, что функция $\Phi(t)$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$.

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Это равенство подтверждает справедливость формулы (4.10), которая называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Замечания

1. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной не требуется возвращаться к старой переменной, как при вычислении неопределенного интеграла. При подстановке требуется сначала найти новые пределы интегрирования и выполнить необходимые преобразования в подынтегральной функции.

2. Необходимо следить за соблюдением условий теоремы (4.9).

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 \ln x \dfrac{dx}{x}$.

Решение. Введем замену $x = e^t$; $dx = e^t dt$.
При $x = 1, t = 0$.
При $x = 2, t = \ln 2$.

$$\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x} = \int_0^{\ln 2} t dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\ln^2 2.$$

Этот интеграл можно вычислить, не вводя замену

$$\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x} = \int_1^2 \ln x d(\ln x) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^2 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\ln 5} \dfrac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$.

Решение. Введём замену $t = \sqrt{e^x - 1}$; $e^x - 1 = t^2$; $e^x = t^2 + 1$; $e^x dx = 2t dt$.
При $x = 0$ $t = \sqrt{e^0 - 1} = 0$.

При $x = \ln 5$ $t = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \int_0^2 \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 + 4} = 2\int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right)dt = 2\left.\left(t - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\right|_0^2 =$$
$$= 2(2 - 2\operatorname{arctg}1) = 4 - \pi.$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$.

Решение. Введем замену $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$.

Если $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$ (нижний предел).

Если $x = 1$, то $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (верхний предел).

Получаем

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt =$$

$$= \left[-\operatorname{ctg} t - t\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3\sin x}$.

Решение. Введем замену (универсальная тригонометрическая подстановка).

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \text{где } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(t); x = 2\operatorname{arctg}(t)$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

При $x = 0$ $\quad t = \operatorname{tg} 0 = 0.$

При $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

$$I = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} \frac{1}{5+\frac{6t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 4\int_0^1 \frac{tdt}{(5t^2+6t+5} \cdot \frac{1}{(1+t^2)}$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{4t}{(5t^2+6t+5)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{5t^2+6t+5}$$

$$4t = (5A+C)t^3 + (6A+5B+D)t^2 + (5A+6B+C)t + 5B + D.$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$\begin{cases} 5A + C = 0 \\ 6A + 5B + D = 0 \\ 5A + 6B + C = 4 \\ 5B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{2}{3} \\ C = 0 \\ D = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$$I=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\frac{10}{3}\int_0^1\frac{dt}{5t^2+6t+5}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(t)\Big|_0^1-\frac{10}{15}\int_0^1\frac{dt}{t^2+\frac{6}{5}t+1}=$$

$$=\frac{2}{3}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)-\frac{10}{15}\int_0^1\frac{d\left(t+\frac{3}{5}\right)}{\left(t+\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{5t+3}{4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{6}\left[\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right].$$

4.14. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 4.10. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\upsilon(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b-\int_a^b \upsilon du. \tag{4.11}$$

Доказательство. Поскольку функция $u(x)\,\upsilon(x)$ является первообразной для функции $[u(x)\,\upsilon(x)]'=u'(x)\upsilon(x)+u(x)\,\upsilon'(x)$, то по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b[u'(x)\upsilon(x)+u(x)\upsilon'(x)]dx=[u(x)\upsilon(x)]\Big|_a^b,$$

по свойству 4 определенных интегралов и вида дифференциала функции

$$du=u'(x)dx, d\upsilon=\upsilon'(x)dx$$

получаем, после переноса первого слагаемого в правую часть указанного равенства, формулу (4.11) (формулу интегрирования по частям в определенном интеграле). Теорема доказана.

Приведем примеры вычисления определенного интеграла по частям.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 \ln x dx$.

Решение

$$\int_1^2\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\\ du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\\ \upsilon=x\end{array}\right|=x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=[x\ln x-x]\Big|_1^2=2\ln 2-2+1=$$

$=2\ln 2-1.$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx.$

Решение

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = \left| \begin{aligned} &u = x \\ &du = dx \\ &d\upsilon = \cos x dx \\ &\upsilon = \sin x \end{aligned} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{0} (x^2+2)e^{\frac{x}{2}} dx.$

Решение

$$\int\limits_{-2}^{0} (x^2+2)e^{\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{aligned} &u = x^2+2 \\ &du = 2xdx \\ &d\upsilon = e^{\frac{x}{2}} dx = \\ &= 2\int e^{\frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}} \end{aligned} \right| = 2(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} - 4\int\limits_{-2}^{0} xe^{\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \left| \begin{aligned} &u = x \\ &du = dx \\ &d\upsilon = e^{x/2} dx \\ &\upsilon = 2e^{\frac{x}{2}} \end{aligned} \right| = 2(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} - 4\left[2xe^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} - 2\int\limits_{-2}^{0} e^{\frac{x}{2}} dx \right] = 2(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} -$$

$$-8xe^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} + 16e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} = (2x^2 - 8x + 20)e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} = 20e^0 - (2\cdot 4 + 16 + 20)e^{-1} =$$

$$20 - 44e^{-1} = 20 - \frac{44}{e}.$$

4.15. Приложение определенного интеграла. Площади плоских фигур

1. Пусть на плоскости xOy дана фигура, ограниченная отрезком $[a,b]$ оси Ox, прямыми $x = a, x = b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на $[a,b]$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией (рис 4.2), площадь которой может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.12)$$

Геометрический смысл определенного интеграла представлен на рис. 4.2.

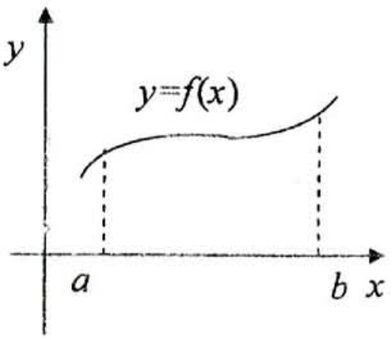


Рис. 4.2

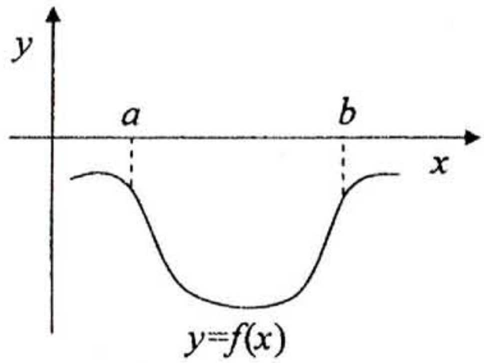


Рис. 4.3.

2. Если функция $y = f(x)$ - неположительная на отрезке $[a,b]$, то площадь S над кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ (рис. 4.3) равна определенному интегралу:

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (4.10)$$

Замечание. Формулы (4.9) и (4.10) можно объединить в одну:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

3. Если $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a,b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на этом отрезке (рис. 4.4), определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (4.11)$$

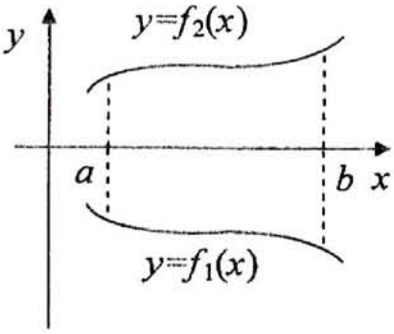


Рис. 4.4.

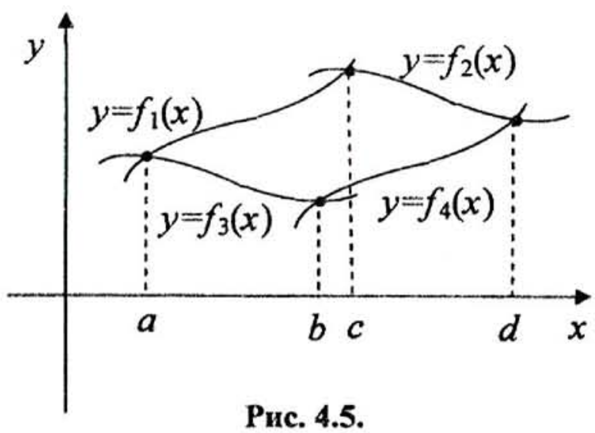


Рис. 4.5.

4. Если плоская фигура имеет более сложную форму (рис. 4.5), то прямыми, параллельными оси Oy, её следует разбить на части, чтобы можно было применить формулы (4.9) – (4.11). Тогда площадь фигуры

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_3(x))dx + \int_b^c (f_1(x) - f_4(x))dx + \int_c^d (f_2(x) - f_4(x))dx$$

5. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то площадь её находится по формуле

$$S = \left| \int_a^b y(t) \cdot x'(t) dt \right|,$$

где α и β определяется из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

6. Пусть кривая MN задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ неотрицательна на $[\alpha, \beta]$. Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная кривой $\rho(\varphi)$ и лучами, направленными от полярной оси OA под углами α и β (рис. 4.6).

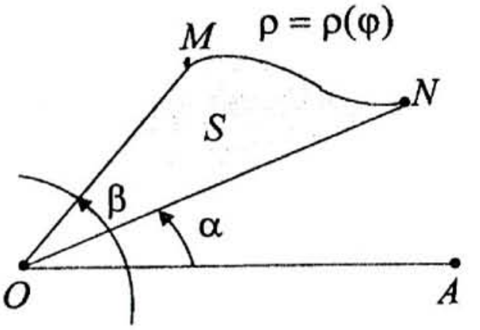


Рис. 4.6

Площадь S криволинейного сектора OMN находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

Решение

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4, \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = x + 4,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -4.$$

Сделаем чертеж (рис. 4.7).

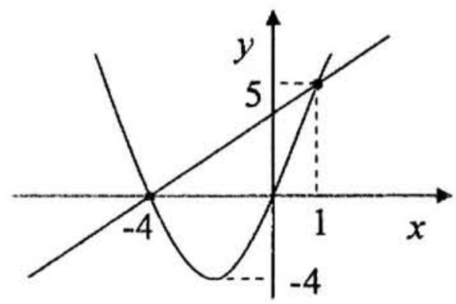


Рис . 4.7

Площадь равна

$$S = \int_{-4}^{1}\left[(x+4) - (x^2+4x)\right]dx = \int_{-4}^{1}(-x^2 - 3x + 4)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-4}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 + \frac{(-4)^3}{3} + 3\frac{(-4)^2}{2} - 4\cdot(-4) = 20\frac{5}{6}(\text{eg}^2).$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически (рис. 4.8) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \\ x = 12\sqrt{3}(x \geq 12\sqrt{3}) \end{cases}$.

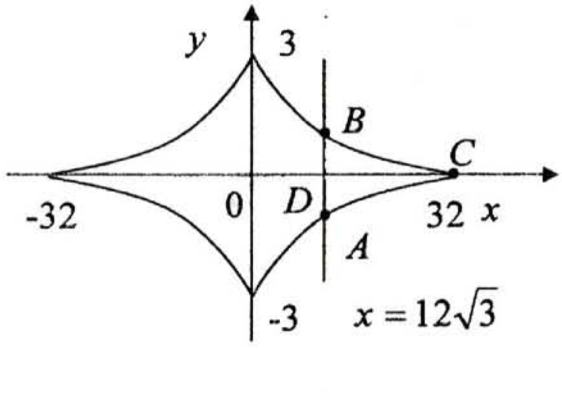


Рис. 4.8

Решение. Найдем площадь, учитывая симметрию относительно оси Ox:

$$S_{ABC}=2S_{CBD}=\int\limits_{x_D}^{x_C}y(x)dx=\int\limits_{\pi/6}^{0}y(t)d(x(t))=\int\limits_{\pi/6}^{0}3\sin^3 td(32\cos^3 t)=$$

$$=\int\limits_{\pi/6}^{0}96\sin^3 t\,3\cos^2 t(-\sin t)dt=-288\int\limits_{\pi/6}^{0}\sin^4 t\cos^2 tdt=-72\int\limits_{\pi/6}^{0}(2\sin t\cos t)^2\sin^2 tdt=$$

$$=-72\int\limits_{\pi/6}^{0}\sin^2 2t\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-36\int\limits_{\pi/6}^{0}\left[\sin^2 2t-\sin^2(2t)\cos(2t)\right]dt=$$

$$=-36\int\limits_{\pi/6}^{0}\left[\frac{1-\cos 4t}{2}-\sin^2 2t\cos 2t\right]dt=-36\int\limits_{\pi/6}^{0}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4t-\sin^2 2t\cos 2t\right]dt=$$

$$=-36\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{\sin^3 2t}{6}\right]\Bigg|_{\pi/6}^{0}=-36\left[0-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{8}\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{3}\right]=$$

$$=-36\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{9\sqrt{3}}{4}=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(\text{eg}^2\right)$$

Итак, искомая площадь $S=6\pi-9\sqrt{3}(\text{eg}^2)$.

Замечание. Пределы интегрирования определяли из условия задачи

$$x_D=12\sqrt{3}=32\cos^3 t;\cos^3 t=\frac{12\sqrt{3}}{32}=\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.$$

$x_c=32=32\cos^3 t;\cos^3 t=1;\cos t=1\Rightarrow t=0.$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$$r=6\sin\varphi, r=4\sin\varphi.$$

Решение. Запишем данные уравнения в прямоугольной системе координат, учитывая уравнения связи:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

где $r=6\sin\varphi;x^2+y^2=6y;x^2+(y-3)^2=3^2$ – окружность с центром $O_1(0;3)$ и радиусом $r_1=3$.

Аналогично, $r=4\sin\varphi;x^2+y^2=4y;x^2+(y-2)^2=2^2$ –окружность с центром $O_2(0;2)$ и радиусом $r_2=2$. (рис. 4.9).

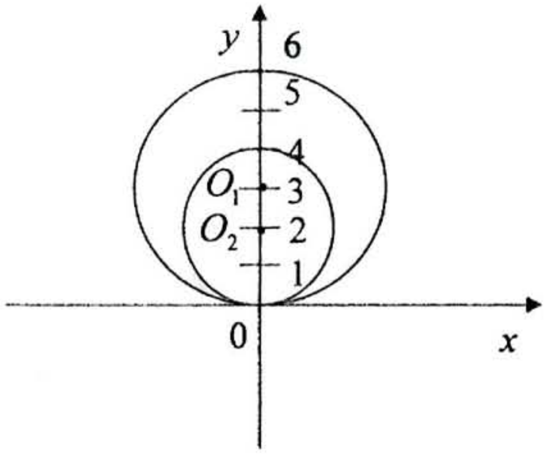


Рис. 4.9.

Решение. Фигура симметрична относительно оси Oy.
Вычислим

$$\frac{1}{2}S = S_1.$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)\right]d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(36\sin^2\varphi - 16\sin^2\varphi)d\varphi = 10\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 5\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = 5\,(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = 5\left[\pi/2 - \frac{1}{2}\sin\pi - 0\right] = 5\,\frac{\pi}{2}(\text{eg}^2).$$

Итак, искомая площадь $S = 2S_1 = 5\pi(\text{eg}^2)$.

4.16. Вычисление длинны дуги кривой

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y = f\,(x), a \le x \le b$, где $f\,(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ...M_n = B$ в направлении от A к B. Соединив соседние точки хордами, получим некоторую вписанную в кривую AB ломаную, длину которой обозначим через P (рис. 4.10). Через l_i обозначим длину одного звена $M_{i-1}M_i$ ломанной, а через α – длину наибольшего из её звеньев: $\alpha = \max\{l_i\}, 1 \le i \le n$.

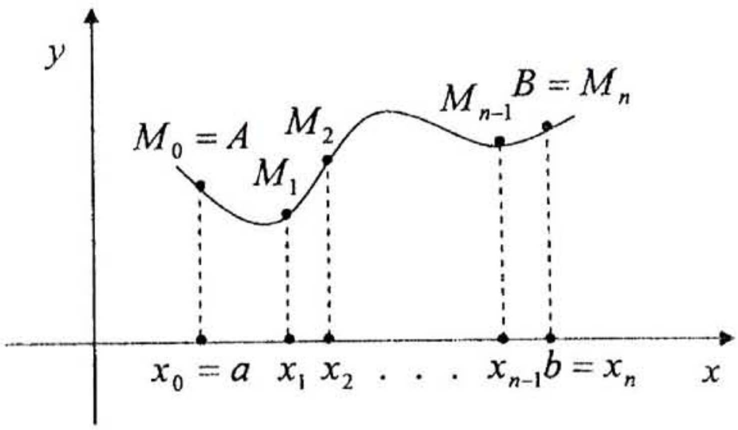


Рис. 4.10

Определение. Число L называется пределом длин ломанных P при $\alpha \to 0\,(L = \lim\limits_{\alpha \to 0} P)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой ломанной, у которой $\alpha < \delta$, выполняется неравенство

$$|L - P| < \varepsilon.$$

Если существует предел L длин P, вписанных в кривую ломаных при $\alpha \to 0$, то этот предел называется длинной дуги AB. Если функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то длинна L дуги AB выражается формулой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{4.12}$$

При вычислении длины дуги в случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$, где α и β - значения параметра t, соответствующие значениям $x = a$ è $x = b$, то есть $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, формула (4.12) принимает вид

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

При вычислении длины дуги в случае, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, где $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и точкам A и B соответствует значения φ, равные α и β, формула (4.12) примет вид

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат:

$$y=\frac{1-e^{x}-e^{-x}}{2},\ 0\le x\le 3.$$

Решение. Найдем производную

$$y'=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}.$$

Производная непрерывна, следовательно, можем найти длину дуги кривой по формуле

$$L=\int_0^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\frac{(e^{-x}-e^{x})^2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{(e^{-x}+e^{x})^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\int[e^{x}+e^{-x}]dx=$$

$$=\frac{1}{2}[e^{x}-e^{-x}]\Big|_0^3=\frac{1}{2}[e^{3}-e^{-3}-e^{0}+e^{0}]=\frac{1}{2}\left[e^{3}-\frac{1}{e^{3}}\right]=\frac{1}{2}\frac{e^{6}-1}{e^{3}}=$$

$$=\frac{e^{6}-1}{2e^{3}}\ (\text{ед. длины}).$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x(t)=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, & 0\le t\le\pi\\ y(t)=(2-t^2)\cos t+2t\sin t.\end{cases}$$

Решение. Функции $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемы. Найдем $x'(t), y'(t)$ и вычислим длину дуги по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

$$x'(t)=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t.$$

$$y'(t)=-2t\cos t-(2-t^2)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t.$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{t^4(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}\ (\text{ед. длины}).$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах

$$r=6\sin\varphi;\ 0\le\varphi\le\pi/3.$$

Решение. Кривая $r=6\sin\varphi$ представляет собой окружность $x^2+(y-3)^2=3^2$. Данная кривая непрерывна (рис. 4.11). Длину дуги OAB вычисляем по формуле

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

$r' = 6\cos\varphi$; $L = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{6^2 \sin^2 \varphi + 6^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 6 \int\limits_0^{\pi/3} d\varphi = 6\varphi\Big|_0^{\pi/3} = 2\pi$ (ед. длины).

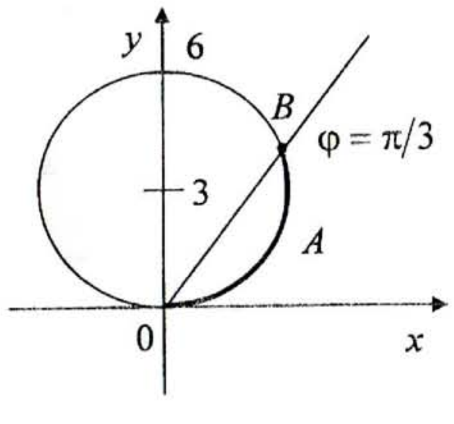


Рис. 4.11

Объем тела вращения

Если функция $y = y(x)$ знакопостоянна на отрезке $[a, b]$, то объем υ_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = y(x)$, $x = a, x = b, y = 0$ (рис. 4.12), вычисляется по формуле

$$\upsilon_x = \pi \int\limits_a^b y^2(x) dx.$$

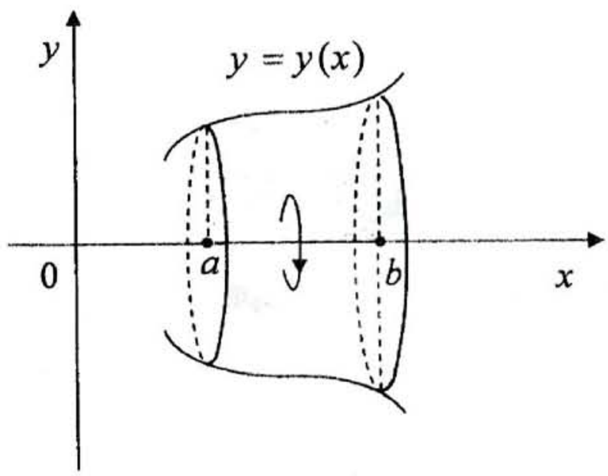


Рис. 4.12

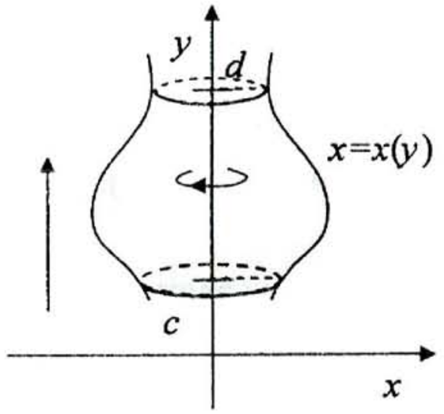


Рис. 4.13

Аналогично, объем υ_y тела, образованного при вращении вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = c, y = a, x = x(y), x = 0$ (рис. 4.13), вычисляется по формуле

$$\upsilon_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy.$$

Пример. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается вокруг оси Ox, при этом образуется поверхность, называемая эллипсоидом вращения. Найти объем тела вращения.

Решение. Построим эллипс в системе координат xOy по данному уравнению (рис. 4.14).

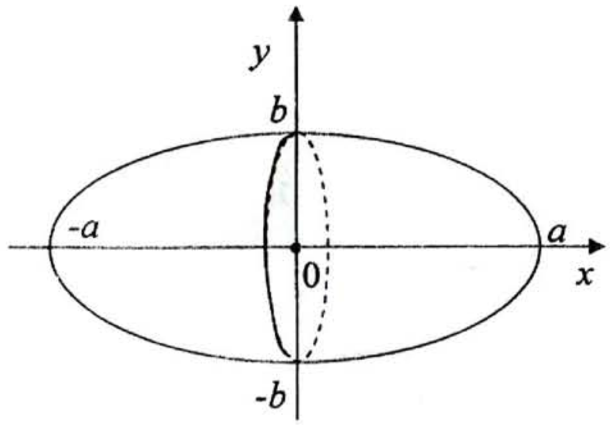


Рис. 4.14

Объем тела вращения будем находить по формуле $\upsilon = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$

$$\upsilon = 2\pi\int_0^a y^2dx = 2\pi\int_0^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx = 2\pi b^2\left[\int_0^a dx - \int_0^a \frac{x^2}{a^2}dx\right] = 2\pi b^2\cdot\left[x\Big|_0^a - \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi b^2 a \text{ (куб. ед.).}$$

$y^2 = b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$ – найдено из уравнения эллипса.

В частности, при $a = b$ вращается окружность, получим объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2, x = 0, x = 2, y = 0$ вокруг оси Ox.

Решение. Фигура, ограниченная кривыми $x_1 = f_1(y), x_2 = f_2(y)$, где $f_1(y) \le f_2(y)$, и прямыми $y = a, y = b$, вращается вокруг оси Oy (рис. 4.15).

Объем тела вращения $\upsilon_y = \pi\int_a^b [x_2^2 - x_1^2]dy.$

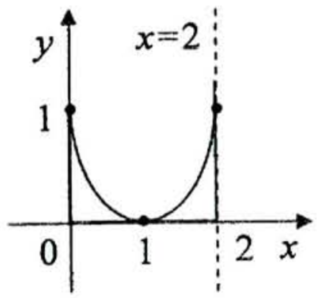


Рис. 4.15

$$x = 1 \pm \sqrt{y};\; x_2 = 1+\sqrt{y}; x_1 = 1-\sqrt{y}.$$

$$\upsilon = \pi\cdot 2^2 - \pi\int_0^1\left(\left[1+\sqrt{y}\right]^2 - \left[1-\sqrt{y}\right]^2\right)dy = 4\pi - \pi\int_0^1(1+2\sqrt{y}+y-1+2\sqrt{y}-$$

$$-y)dx = 4\pi - \pi\int_0^1 4\sqrt{y}dy = 4\pi\left[1-\int_0^1\sqrt{y}dy\right] = 4\pi\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\Big|_0^1\right] = 4\pi\left[1-\frac{2}{3}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Дифференциальные уравнения

Определение 5.1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и её производные $y', y'', ..., y^{(n)}$, то есть уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Если искомая функция $y = y(x)$ есть функция одной независимой переменной x, дифференциальное уравнение называется обыкновенным, например,

$$y' + xy = 0$$

$$y'' - y' = \cos x$$

$$(y^2 - x^2)dy + (x - y)dx = 0.$$

Если искомая функция y есть функция двух и более независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных, например,

$$Z''_{xy} + Z'_y - xyZ'_x = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Определение 5.2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение, например, дифференциальное уравнение

$y' + x^2 y = \operatorname{tg} x$ – уравнение первого порядка.

Определение 5.3. Решением дифференциального уравнения n-го порядка на некотором множестве D называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на множестве D вместе со своими производными до n-го порядка включительно и такая, что подстановка функции $y = \varphi(x)$ в дифференциальное уравнение превращает его в тождество по x на D.

5.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 5.4. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.1}$$

где x – независимая переменная, y и y' – соответственно независимая функция и ее производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

В случае, когда из этого уравнения можно выразить y', оно имеет вид

$$y' = f(x, y) \tag{5.2}$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной, например, $y' = x^3 + y^3$.

5.3. Существование решения дифференциального уравнения

В теории дифференциальных уравнений основной задачей является вопрос о существовании и единственности решения. Ответ на него дает теорема Коши.

Теорема 5.1. Теорема Коши.

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$. Если функция $y = f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то в некоторой окрестности любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Определение 5.5. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

В области D содержится бесконечно много интегральных кривых. Теорема Коши гарантирует, что при соблюдении определенных условий через каждую внутреннюю точку области D проходит только одна интегральная кривая. Условия, которые задают значение функции y_0 в фиксированной точке x_0, называют начальными условиями (условиями Коши) и записываются в виде

$$y\big|_{x_0} = y_0. \tag{5.3}$$

Задача нахождения решения уравнения (5.2), удовлетворяющего условиям (5.3), называется задачей Коши: из множества интегральных кривых выделяется та, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) области D.

В случае, если условия теоремы Коши не выполнены, через некоторые точки плоскости Oxy либо не проходит ни одна интегральная кривая, либо проходит более одной интегральной кривой. Такие точки называются *особыми точками* данного дифференциального уравнения.

Определение 5.6. Общим решением уравнения (5.2) называется функция $y = \varphi(x, c)$, удовлетворяющая этому уравнению при произвольном значении постоянной c.

Определение 5.7. Частным решением уравнения (5.2) в области D называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, полученная при определенном значении постоянной $c = c_0$.

Определение 5.8. Соотношение вида $\Phi(x, y, c) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 5.9. Соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной c, называется частным интегралом дифференциального уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение $y' = x$. Правая часть уравнения удовлетворяет условиям теоремы Коши во всех точках плоскости Oxy. Общим решением уравнения является функция $y = \frac{x^2}{2} + c$, где c – производная постоянная, описывающая семейство парабол (рис. 5.1).

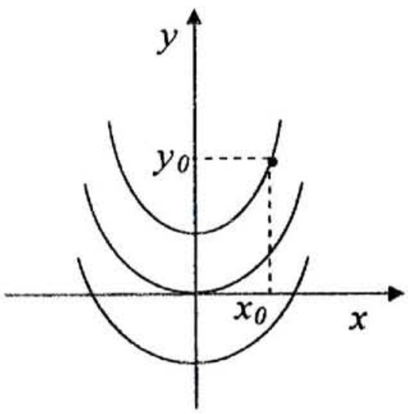


Рис. 5.1

Для частного решения зададим произвольные начальные условия $y(x_0) = y_0$ и подставим их в формулу общего решения:

$$y_0 = \frac{x_0^2}{2} + c.$$

Получаем, что $c = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$.

Найдем частное решение:

$$y = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2},$$

которое выделяет из семейства парабол одну, проходящую через точку (x_0, y_0).

5.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 5.10. Дифференциальное уравнение вида

$$g(y)dy = f(x)dx$$

называется уравнением с разделенными переменными.

Уравнение вида

$$f_1(x)\, g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy,$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Путем деления на произведение $f_2(x)\,g_1(y)$ оно приводится к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx - \int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c.$$

Замечание. Деление на $f_2(x)\cdot g_1(y)$ может привести к потере частных решений, обращающих в ноль произведение $f_2(x)\,g_1(y)$.

Пример. Найти частное решение уравнения $xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 3$.

Решение. Разделим переменные, перенеся y в правую часть и поделив обе части полученного уравнения на xy (учитываем, что $y' \equiv \frac{dy}{dx}$),

$$xy' = -y; x\frac{dy}{dx} = -y; xdy = -ydx; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|,$$

где c – произвольная постоянная.
Потенцируя, получим

$$\ln|y|\,|x| = \ln|c|;\ |y|\,|x| = |c|; y = \pm\frac{c}{x}.$$

Обозначив $c_1 = \pm c$, получаем $y = c_1\cdot\frac{1}{x}$. Подставив в это решение начальные условия, получим значение c_1 :

$$3 = c_1\cdot\frac{1}{1}; c_1 = 3.$$

Итак, частное решение имеет вид $y = \frac{3}{x}$.

5.5. Однородные уравнения и приводящиеся к ним

Определение 5.11. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией своих аргументов измерения n, если справедливо тождество

$$f(tx,ty) \equiv t^n f(x,y).$$

Пример. Покажем, что $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ есть однородная функция второго измерения:

$$f(tx,ty)=a(tx^2)+b(tx)(ty)+c(ty)^2=t^2(ax^2+bxy+cy^2)=t^2f(x,y).$$

Определение 5.12. Функция $f(x,y)$ называется однородной нулевого измерения, если $f(tx,ty)=f(x,y)$ (для любых x,y,t).

Примеры функций нулевого измерения:

$$f(x,y)=\frac{y^2+x^2}{x^2-y^2} \qquad f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$$

$$f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy}.$$

Определение 5.13. Дифференциальные уравнения вида $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ называются однородными относительно x и y, если $f(x,y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения.

Однородное уравнение всегда можно представить в виде

$$y'=f(1,\frac{y}{x}),$$

приняв $\frac{1}{x}=t$ и выполнив преобразования,

$$f(x,y)=f(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y)=f(1;\frac{y}{x}).$$

Введем замену $u=\frac{y}{x}; y=u\,x;$

$$y'=u'x+u:$$

$$u+x\,u'=f(1,u)$$

$$x\,u'=f(1,u)-u.$$

Обозначим $f(1,u)-u=g(u)$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\,u'=g(u);\ xdu=g(u)dx$$

$$\int\frac{du}{g(u)}=\int\frac{dx}{x};G(u)=F(x)+c;G(\frac{y}{x})=F(x)+c$$

- общий интеграл уравнения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x^2+y^2)dx-xydy=0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным первого порядка. Решим его относительно $\frac{dy}{dx}$ и применим подстановку $y=u\,x$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy};\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u;\frac{dy}{dx}x+u=\frac{x^2+y^2x^2}{x^2u};\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^2}{u}-u$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u};udu=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем $\frac{u^2}{2}=\ln|x|+c;\frac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+c$

общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Данное уравнение является однородным. Введем замену

$$\frac{y}{x}=u\text{ ; } y=u\ x;\text{тогда } dy=xdu+udx.$$

Подставим в исходное уравнение: $xdu+udx=(u+\sin u)dx$

$$xdu=\sin udx;\ \frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем:

$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right|=\ln|x|+\ln c;\frac{u}{2}=\operatorname{arctg}cx;y=2x\operatorname{arctg}cx.$

Используя начальные условия, получаем $\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arctg}c;\operatorname{arctg}c=\frac{\pi}{\varphi};c=1.$

Итак, частное решение исходного уравнения

$$y=2x\operatorname{arctg}x.$$

5.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 5.14. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно имеет вид

$$y'+p(x)y=q(x), \qquad (5.4)$$

где $p(x),q(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение (5.4) называется линейным однородным, в противном случае – неоднородным.

Пусть линейное однородное уравнение

$$y'+p(x)y=0 \qquad (5.5)$$

соответствует неоднородному уравнению (5.4). Уравнение (5.4) может быть решено методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа), при котором сначала находят решение однородного уравнения (5.5) методом разделения переменных:

$$y' + p(x)y = 0; \frac{dy}{dx} = -p(x)y; \frac{dy}{y} = -p(x)dx; \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c_1|;$$

потенцируя, получим общее решение уравнения (5.5):

$$y = c\,e^{-\int p(x)dx}, \tag{5.6}$$

где $c = \pm c_1$.

Общее решение уравнения (5.4) ищем в виде (5.6), полагая с новой неизвестной функции от аргумента x:

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Для отыскания функции $c(x)$ подставим это решение в исходное уравнение (5.4):

$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)\,c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, после приведения подобных получим

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + c_1.$$

Подставим найденную функцию $c(x)$ в формулу общего решения (5.6) и получим решение неоднородного уравнения (5.4):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right],$$

где c_1 – произвольная постоянная.

5.7. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли – уравнение, имеющее вид

$$y' + p(x)y = q(x)\,y^n, \tag{5.7}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции, а n – некоторое постоянное число. При $n = 0$ имеем линейное однородное уравнение, а при $n = 1$ – линейное однородное уравнение вида

$$y' + (p - q)y = 0.$$

Пусть $n \neq 0, n \neq 1$. Введем новую функцию

$$z = y^{1-n},$$

тогда $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Поделим обе части уравнения (5.7) на y^n:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q. \tag{5.8}$$

Умножим обе части уравнения (5.8) на (1-n)

$$(1-n)y^{-n}\, y' + (1-n)p\; y^{1-n} = (1-n)q.$$

С учетом замены получаем

$$z' + (1-n)p\; z = (1-n)q.$$

Получено линейное относительно z и z' уравнение, способ решения которого рассмотрен ранее.

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x.$

Решение. Это линейное неоднородное уравнение первого порядка. Сначала решим соответствующее ему однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$y' = -\frac{y}{x}; \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \frac{dx}{y} = -\frac{dx}{x}; \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}; \ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|$$

$y = \frac{c}{x}$ – решение однородного уравнение. Решение неоднородного уравнения будем искать, полагая c функцией от x и подставляя найденное решение в исходное уравнение:

$$y = \frac{c(x)}{x}; y' = c'(x)\cdot\frac{1}{x} - c(x)\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$c'(x)\frac{1}{x} - \cancel{c(x)\cdot\frac{1}{x^2}} + \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} = x$$

$$c' = x^2; c(x) = \int x^2 dx; c(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$$

Тогда

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right)\frac{1}{x}.$$

Итак,

$y = \frac{x^3}{3} + \frac{c_1}{x}$ – искомое решение исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4.$

Решение. Данное линейное уравнение представляет собой уравнение Бернулли, где $n = 4$. Введем замену

$$z = y^{-3}; z' = -3y^{-4}\, y'.$$

Поделим обе части уравнения на y^4 и умножим на $(1-n) = -3.$

$$-3y^{4}y^{'}-\frac{3}{x}y^{-3}=-3x^{2}.$$

Получаем $z^{'}-\frac{3}{x}z=-3x^{2}$ – линейное неоднородное уравнение относительно $z(x), z^{'}(x)$.

Решим соответствующее ему однородное уравнение: $z^{'}-\frac{3}{x}z=0$.

$$z^{'}=\frac{3}{x}z;\ \frac{dz}{dx}=\frac{3}{x}z;\ \frac{dz}{z}=3\frac{dx}{x};\ \int\frac{dz}{z}=3\int\frac{dx}{x};\ln|z|=3\ln|x|+\ln|c|;z=cx^{3}$$

- решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$z=c(x)x^{3};z^{'}=c^{'}(x)x^{3}+c(x)3x^{2};c^{'}(x)x^{3}+\cancel{c(x)3x^{2}}-\cancel{\frac{3}{x}c(x)x^{3}}=-3x^{2}$$

$$c^{'}(x)=-\frac{3}{x}\quad c(x)=-3\int\frac{dx}{x};c(x)=-3\ln|x|+c_{1}.$$

Тогда

$$z=(-3\ln|x|+c_{1})x^{3}.$$

Вернемся к старой переменной:

$$y^{-3}=(-3\ln|x|+c_{1})x^{3}$$

$$y=(-3\ln|x|+c_{1})^{-\frac{1}{3}}x^{-1}.$$

Итак, решение исходного уравнения

$$y=\frac{1}{x\sqrt[3]{-3\ln|x|+c_{1}}}.$$

5.8. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Непосредственное интегрирование.

Уравнение, имеющее вид $y''=f(x)$, решается последовательным интегрированием

$$y'=\int f(x)dx=F(x)+C_{1}$$

$$y'=\int(F(x)+C_{1})dx=G(x)+C_{1}x+C_{2}.$$

2. Уравнение

$$F(y,y',y'')=0$$

не содержит явным образом независимую переменную x. Для его решения вводим замену

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y)$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy} = p \cdot p'$$

В результате имеем уравнение первого порядка:

$$F\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

решив полученное уравнение, имеем

$$p = p(y, C_1),$$

то есть $y' = p(y, C_1)$ – уравнение с разделяющимися переменными, решением которого является функция

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

3. Уравнение

$$F(x, y', y'') = 0$$

не содержит явным образом функцию y. Для его решения вводим замену

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p'.$$

В результате имеем уравнение первого порядка:

$$F(x, p, p') = 0,$$

решением, которого является

$$p = p(x, C_1)$$

или

$$y' = p(x, C_1).$$

Решив последнее уравнение, найдем $y = y(x, C_1, C_2)$.

Замечание. Уравнения более высоких порядков решаются аналогично.

Пример. Решить уравнение

$$(1 + x^2)y'' = 2xy'.$$

Уравнение явно не содержит y. Введем замену $y' = p(x)$; $y'' = p'(x)$, получаем

$$(1 + x^2)p' = 2xp$$

– уравнение с разделяющимися переменными

$$(1 + x^2)dp = 2xpdx.$$

Разделив левую и правую часть полученного уравнения на $p(1 + x^2) \neq 0$, имеем

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$\ln|p| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln|C_1|$$

$$p = C_1\left(1+x^2\right)$$

$$y' = C_1\left(1+x^2\right)$$

$$dy = C_1\left(1+x^2\right)dx$$

$$y = C_1\int\left(1+x^2\right)dx.$$

Итак, решение данного уравнения

$$y = C_1 x + C_1\frac{x^3}{3} + C_2.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'''\operatorname{tg}5x = 5y''$.

Решение. Данное уравнение не содержит в явном виде y. Введя замену $y'' = p$, $y''' = p'$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$p'\operatorname{tg}5x = 5p \;|:(\operatorname{tg}5xp \neq 0)$$

$$\frac{dp}{p} = 5\operatorname{ctg}5xdx$$

$$\int\frac{dp}{p} = 5\int\frac{\cos 5x}{\sin 5x}dx;$$

$$\ln|p| = \ln|\sin 5x| + \ln|C_1|$$

$$p = C_1\sin 5x,$$

$y'' = C_1\sin 5x$ – уравнение, решаемое непосредственным интегрированием.

$$y' = C_1\int\sin 5xdx = -\frac{1}{5}C_1\cos 5x + C_2$$

$$y = -\frac{C_1}{5}\int\cos 5xdx + C_2\int dx = -\frac{C_1}{25}\sin 5x + C_2 x + C_3$$

$$y = -\frac{C_1}{25}\sin 5x + C_2 x + C_3.$$

Пример. Найти решение задачи Коши.

$$y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0;\; y(0) = 0;\; y'(0) = 4.$$

Решение. В уравнении отсутствует x. Введя замену

$$y' = p(y)$$

$$y'' = p'(y)y'(x) = p'p,$$

получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$p'p + 32\sin y\cos 3y = 0$$

$$\frac{dp\,p}{dy} = -32\sin y\cos^3 y \,|\, dy$$

$$\int p dp = -32\int \sin y \cos^3 y dy$$

$$\int p dp = 32\int \cos^3 y\, d(\cos y);\ \frac{p^2}{2} = \frac{32\cos^4 y}{4} + C.$$

$p = \pm\sqrt{16\cos^4 y + 2C}$, но по условию $y' > 0$, поэтому перед корнем берем знак "+".

$$p = \sqrt{16\cos^4 y + 2C};\ y' = \sqrt{16\cos^4 y + 2C},$$

используя начальные условия, найдем константу C:

$$4 = \sqrt{16\cos^4 y + 2C};\ 16 = 16 + 2C;\ C = 0.$$

Итак, $y' = \sqrt{16\cos^4 y}$; $y' = 4\cos^2 y$.

$\frac{dy}{dx} = 4\cos^2 y$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{\cos^2 y} = 4dx$.

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = 4\int dx;\ \operatorname{tg} y = 4x + C.$$

Используя начальные условия, найдем константу C:

$$\operatorname{tg} 0 = 4\cdot 0 + C;\ C = 0.$$

Итак, $\operatorname{tg} y = 4x$, откуда решение уравнения

$$y = \operatorname{arctg} 4x.$$

5.9. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение 5. 15. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{5.9}$$

где y – искомая функция, а $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – функции, непрерывные на некотором интервале (a,b).

Если $f(x) \equiv 0$, уравнение (5.9) называется *линейным однородным уравнением*, в противном случае оно называется *линейным неоднородным уравнением*. Если разрешить уравнение (5.9) относительно второй производной, легко увидеть, что оно является частным случаем уравнения $y'' = f(x, y, y')$ и удовлетворяет условиям теоремы Коши. Поэтому для любых начальных условий $x = x_0; y = y_0; y' = y_0'$ при $x_0 \in (a,b)$ это уравнение имеет единственное решение задачи Коши.

5.10. Линейные однородные уравнения второго порядка

Рассмотрим свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{5.10}$$

Теорема 5.2. Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения (5.10). Тогда функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ также является решением этого уравнения при любых постоянных C_1 и C_2.

Доказательство. Подставив указанную в условии теоремы функцию в уравнение (5.10) и собрав члены при C_1 и C_2, получим тождества, равные нулю, поскольку по условию теоремы $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения этого уравнения. Теорема доказана.

Напомним, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на (a, b), если для любого $x \in (a,b)$ выполняется равенство

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \tag{5.11}$$

и хотя бы один из коэффициентов λ_1 и λ_2 не равен 0.

В этом случае функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ очевидным образом пропорциональны, например $y_1/y_2 = -\lambda_2/\lambda_1 = k$ при $\lambda_1 \neq 0$ и $y_2(x) \neq 0$. Обратное также верно: если две функции пропорциональны на (a, b), то они линейно зависимы на этом интервале.

Если нельзя найти двух одновременно ненулевых чисел λ_1 и λ_2, чтобы выполнялось равенство (5.11), то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми на* (a,b). В таком случае эти функции уже не будут пропорциональными.

Введем *определитель Вронского*, который для случая двух функций имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'. \tag{5.12}$$

Теорема 5.3. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале (a,b), то определитель Вронского, составленный из них, равен нулю на этом интервале; если же функции линейно независимы на (a,b), то определитель Вронского отличен от нуля на (a,b).

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 линейно зависимы на интервале (a, b). Тогда, как уже отмечалось, эти функции пропорциональны на (a, b), то есть $y_1 = ky_2$, а значит, и $y_1' = ky_2'$. Отсюда в определителе $W(x)$ будут пропорциональные столбцы, что и означает его равенство нулю на интервале (a,b).

Доказательство второй части теоремы проводится от противного. Пусть y_1 и y_2 линейно независимы на (a, b); предположим, что определитель $W(x)$

равен нулю на этом интервале. Тогда его столбцы необходимо пропорциональны, то есть пропорциональны и эти функции, из чего следует их линейная зависимость на (a,b), что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Замечание. При решении уравнения второго порядка важно найти два линейно независимых решения.

Теорема 5.4. Пусть решения уравнения (5.10) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на (a,b). Тогда функция

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{5.13}$$

где C_1 и C_2 – производные постоянные, является общим решением однородного уравнения (5.10).

5.11. Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Рассмотрим основные свойства решения неоднородного дифференциального уравнения:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{5.14}$$

Теорема 5.5. Общее решение линейного неоднородного уравнения (5.14) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (5.10) и частного решения исходного неоднородного уравнения:

$$y_{\text{о.н.}}=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н.}} \tag{5.15}$$

Замечание. Эта теорема указывает способ нахождения общего решения неоднородного уравнения (5.14): нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения (5.10) и какое - либо частное решение уравнения (5.14). Задача нахождения частного решения неоднородного уравнения в общем случае довольно сложна, однако существует метод *вариации постоянных*, основанный на использовании известного решения однородного уравнения.

Пусть $\tilde{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ - общее решение однородного уравнения (5.10). Будем полагать, что частное решение неоднородного уравнения имеет аналогичный вид, но произвольные постоянные C_1 и C_2 являются функциями переменной x:

$$Y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x). \tag{5.16}$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$Y'=C_1(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Положим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ такими, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0\,, \tag{5.17}$$

тогда

$$Y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Дифференцируя это равенство, найдем выражение для Y'' :

$$Y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставляя выражения для Y, Y' и Y'' в уравнение (5.14) и группируя слагаемые при $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получаем

$$C_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] + \\ + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения однородного уравнения, то выражения в квадратных скобках равны нулю. Равенство упрощается:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Объединяя его с равенством (5.17), получаем систему линейных уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \qquad (5.18)$$

Определитель этой системы представляет собой определитель Вронского (5.12); в силу теоремы (5.3), он не равен нулю, поскольку составлен из линейно независимых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Значит, система (5.18) имеет единственное решение. Пусть

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \; C_2'(x) = \varphi_2(x)$$

- решение системы уравнений (5.18). Интегрируя эти выражения, получим $C_1(x)$ и $C_2(x)$; подставив их в (5.16), найдем частное решение неоднородного уравнения $Y(x)$.

5.12. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим случай, когда в уравнении вида (5.14) функции $p(x)$ и $q(x)$ – постоянные величины. Уравнения такого вида называются *линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.* Как и в общем случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка, основой в построении решения являются однородные уравнения.

1. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (5.19)$$

где p и q – вещественные числа. Будем искать решение этого уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k – некоторое число. Подставляем эту функцию в уравнение (5.19)

$$k^2 e^{kx} + pk e^{kx} + q e^{kx} = 0.$$

Сокращая обе части этого равенства на e^{kx}, получаем квадратное уравнение

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.20}$$

Если число k является корнем уравнения (5.20), то функция $y = e^{kx}$ есть решение однородного уравнения (5.19). Уравнение (5.20) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (5.19).

Вид решения уравнения (5.19) существенно зависит от того, какие корни имеет характеристическое уравнение (5.20). Обозначим эти корни через k_1 и k_2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.6. Если корни характеристического уравнения вещественные и $k_1 \neq k_2$, общее решение однородного уравнения (5.19) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{5.21}$$

Если корни уравнения (5.20) вещественные и равные ($k_1 = k_2 = k$), общее решение уравнения (5.19) имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \tag{5.22}$$

Если корни характеристического уравнения комплексные

($k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$, где $i = \sqrt{-1}$, a и b – вещественные числа),

общее решение уравнения (5.19) имеет вид

$$y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right), \tag{5.23}$$

где $a = -p/2, \quad b = \sqrt{q - p^2/4}$.

Во всех трех случаях C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим примеры нахождения общих решений однородных уравнений.

Пример. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Его корни вещественные и различны: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Пример. $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \text{ или } (k-3)^2 = 0.$$

Оно имеет кратный корень $k = 3$; следовательно, общее решение данного однородного уравнения имеет вид

$$y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Пример. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни: $k_1 = 1 + i,\ k_2 = 1 - i$, где $i = \sqrt{-1}$ - *мнимая единица.*

Следовательно, общее решение данного уравнения $y = e^x\left(C_1 \sin x + \right.$ $\left. + C_2 \cos x\right)$.

Замечание. Решение неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами основывается на приведенном методе вариации произвольных постоянных.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i;\ k_2 = -i$.
Общее решение

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y_{\text{ч.н.}} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

Значения $C_1(x)$ и $C_1(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \text{ где } f(x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Вместо y_1 и y_2 подставляем $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$.

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда $C_1'(x) = -\operatorname{tg} x;\ C_2'(x) = 1$.
Интегрируя эти уравнения, получаем

$$C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln\left|\cos x\right| + C_1$$

$$C_2(x) = x + C_2.$$

Тогда общее решение заданного уравнения

$$y_{\text{о.н}} = \left(\ln\left|\cos x\right| + C_1\right)\cos x + \left(x + C_2\right)\sin x.$$

Замечание. В ряде случаев бывает проще подобрать частное решение неоднородного уравнения по виду его правой части.

5.13. Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод можно применять только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

где α, β – постоянные, в подбор $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

В этом случае в зависимости от конкретного вида правой части $f(x)$ и корней характеристического уравнения частное решение $y_{\text{ч.н.}}$ следует искать в одной из следующих форм.

Таблица 5.1

Сводная таблица видов частных решений для различных видов правых частей

№	Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Виды частного решения
I	$P_m(x)$	1. Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)$
		2. Число 0 – корень характеристического уравнения кратности s	$x^s\widetilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)e^{\alpha x}$	1. Число α не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2. Число α является корнем характеристического уравнения кратности s	$x^s\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	1. Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$, $k=\max(m,n)$
		2. Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$, $k=\max(m,n)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$	1. Числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, $k=\max(m,n)$
		2. Числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, $k=\max(m,n)$

Первые три вида правых частей являются частными случаями IV вида.

В связи с ограниченным объемом рассмотрение уравнений более высоких порядков осталось за рамками данного пособия. Самостоятельно ознакомиться с данными видами уравнений можно, например, в пособии [5], указанного в списке литературы.

Примеры

1. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 1 = x$.

Решение. Заданное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Перепишем уравнение в виде $y'' + 2y' = x + 1$.
Запишем соответствующее однородное уравнение: $y'' + 2y' = 0$.
Характеристическое уравнение $k^2 + 2k = 0$, имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 = -2$.
Общее решение

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Правая часть имеет вид $e^{\alpha x} P_n(x)$, где $\alpha = 0$ (совпадает с корнем характеристического уравнения), $P_n(x) = x + 1$ - многочлен первой степени, поэтому частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = x(\mathrm{A}x + \mathrm{B}),$$

тогда

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2\mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

$$y''_{\text{ч.н}} = 2\mathrm{A}.$$

Подставив $y_{\text{ч.н.}}, y'_{\text{ч.н.}}, y''_{\text{ч.н.}}$ в заданное уравнение, находим значение A, B методом неопределённых коэффициентов (приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части уравнения):

$$\begin{matrix} \text{при } x^1 \\ \text{при } x^0 \end{matrix} \begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{4};\ \mathrm{B} = \frac{1}{4},$$

Тогда

$$y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{4} x(x+1).$$

Итак, по теореме

$$y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н.}}$$

для данного уравнения

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4} x(x+1).$$

2. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = x \sin x$.

Решение. Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Тогда характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни

$$k_1 = 3,\ k_2 = 1.$$

Общее решение

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

Правая часть имеет вид

$$f(x) = x\sin x,\ \text{т.е.}\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_n(x) = 0,$$

$Q_m(x) = x$ - многочлен первой степени. Числа $\alpha \pm \beta i = 0 \pm i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = (Cx + A + D)\cos x - (Ax + B - C)\sin x$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = C\cos x - (Cx + A + D)\sin x - A\sin x - (Ax + B - C)\cos x.$$

Подставив $y_{\text{ч.н}}$, $y'_{\text{ч.н}}$, $y''_{\text{ч.н}}$ в исходное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях (т.е. использовав метод неопределённых коэффициентов), получаем

$$C\cos x - (Cx + A + D)\sin x - A\sin x - (Ax + B - C)\cos x - 4(Cx + A + D)\cos x +$$
$$+ 4(Ax + B - C)\sin x + 3(Ax + B)\cos x + 3(Cx + D)\sin x = x\sin x$$

$$\begin{array}{l} \text{при}\sin x \\ \text{при}\cos x \\ \text{при}\,x\sin x \\ \text{при}\,x\cos x \end{array} \begin{cases} -A - D - A + 4B - 4C + 3D = 0 \\ C - B + C - 4A - 4D + 3B = 0 \\ -C + 4A + 3C = 1 \\ -A - 4C + 3A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2A + 4B - 4C + 2D = 0 \\ -4A + 2B + 2C - 4D = 0 \\ 4A + 2C = 1 \\ 2A - 4C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4A + 2C = 1 \\ 2A - 4C = 0\ |\cdot 2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 4A + 2C = 1 \\ 4A - 8C = 0 \end{cases}$$

$$10C = 1;\ C = \frac{1}{10}$$

$$4A+\frac{1}{5}=1;\quad A=\frac{1}{5};\ \mathrm{B}=\frac{11}{50};\ \ D=-\frac{1}{25}.$$

Частное решение

$$y_{\text{ч.н}}=\frac{1}{50}\left[(10x+11)\cos x+(5x-2)\sin x\right].$$

Общее решение исходного уравнения

$$y_{\text{о.н.}}=C_1\,\mathrm{e}^{3x}+C_2\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{50}\left[(10x+11)\cos x+(5x-2)\sin x\right].$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''-6y'+9y=4\,\mathrm{e}^{x}-16\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+9=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=3$, а поэтому общим решением $y_{\text{о.о}}$ соответствующего однородного уравнения будет

$$y_{\text{о.о.}}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

Для нахождения частного решения данного уравнения найдем частные решения двух уравнений:

$$y''-6y'+9y=4e^{x}, \tag{1}$$

$$y''-6y'+9y=-16e^{x}. \tag{2}$$

Первое уравнение имеет частное решение y_1 вида $y_1=Ae^{x}$ (см. табл. 5.1, случай II (1)). Подставляя выражение для y_1 в уравнение (1), найдем A=1, так что $y_1=e^{x}$. Частное решение второго уравнения ищем в виде $y_2=Bx^2e^{3x}$ (см. табл. 5.1, случай II (2)). Находим $y_2=-8x^2e^{3x}$.

В силу принципа суперпозиции решений частное решение $y_{\text{ч.н.}}$ исходного уравнения будет равно сумме частных решений y_1 и y_2 этих уравнений:

$$y_{\text{ч.н.}}=y_1+y_2=e^{x}-8x^2e^{3x}.$$

Общее решение уравнения

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+e^{x}-8x^2e^{3x}.$$

5.14. Системы дифференциальных уравнений первого порядка

Для удобства вместо одного дифференциального уравнения n-го порядка вводят в рассмотрение систему, состоящую из n дифференциальных уравнений первого порядка. Наряду с искомой функцией y вводят еще $n-1$ вспомогательных искомых функций $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_1,\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=y_2,\ \ldots,\ \frac{\mathrm{d}y_{n-2}}{\mathrm{d}x}=y_{n-1}. \tag{5.24}$$

Из этих соотношений следует, что

$$y_k=\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}=y^{(k)},\quad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Поэтому $y^{(n)} = \mathrm{d}y_{n-1}/\mathrm{d}x$, и тогда уравнение принимает вид

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right). \tag{5.25}$$

Уравнения (5.24) и (5.25) представляют систему n дифференциальных уравнений с n искомыми функциями $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Система такого вида, где в левых частях стоят производные от искомых функций, а правые части суть функции от независимой переменной и искомых функций, называется *системой n дифференциальных уравнений первого порядка нормальной формы.*

В целях обобщения вводят в рассмотрение вместо системы специального вида, представленной ранее, систему n дифференциальных уравнений первого порядка общего вида относительно n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{cases} \tag{5.26}$$

Для этой системы справедлива следующая теорема, которая приведена без доказательства.

Теорема 5.7 (Теорема Коши). Пусть для системы дифференциальных уравнений первого порядка (5.26) выполняются следующие условия:

1) функции $f_i\left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$ непрерывны по всем аргументам в замкнутой области D:

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_i^{(0)} - b_i \le y_i \le y_i^{(0)} + b_i \quad \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right);$$

2) частные производные $\partial f_i / \partial y_k$ непрерывны в области D. Тогда существует одна и только одна система решений уравнений (5.26):

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x),$$

определенная в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющая при $x = x_0$ заданным начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

Теорема Коши утверждает существование *частного решения* системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.26), удовлетворяющего данным начальным условиям. Геометрически это означает, что существует одна интегральная кривая, проходящая через точку $\left(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)$.

Введем вектор искомых функций $\bar{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ и вектор правых частей уравнений (5.26) $\bar{f} = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)$. Тогда векторная форма записи системы уравнений первого порядка имеет вид

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\bar{f}(x,\bar{y}).$$

Возвращаясь к случаю одного дифференциального уравнения n-го порядка на основе теоремы Коши сформулируем соответствующую теорему существования и единственности решения.

Теорема 5.8. Уравнение $y^{(n)}=f\left(x,y,y',...y^{(n-1)}\right)$, правая часть которого непрерывна по всем аргументам и дифференцируема по ним в некоторой замкнутой области

$$D=\left\{x_0-a\le x\le x_0+a,\ \ y_0^{(i)}-b_i\le y^{(i)}\le y_0^{(i)}+b_i;\quad i=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1\right\},$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям при $x=x_0$

$$x=x_0;\ \ y=y_0;\ \ y'=y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}, \tag{5.30}$$

где $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ - заданные числа.

Таким образом, теорема Коши определяет *частное решение* уравнения n-го порядка; *общее решение* этого уравнения содержит n произвольных постоянных:

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n).$$

Пример. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+5y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}+x+3y=0.\end{cases}$$

Решение. Дифференцируя одно из уравнений системы по t (например, первое уравнение) и исключая функцию y, сведем решение системы к решению уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решив это уравнение, найдем функцию $x(t)$, а затем из первого уравнения найдем и функцию $y(t)$.

Итак,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+5\frac{dy}{dt}. \tag{5.31}$$

Из второго уравнения находим

$$\frac{dy}{dt}=-x-3y$$

и подставим в уравнение (5.31):

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+5(-x-3y);\ \ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-5x-15y.$$

Наконец, найдем y из первого уравнения системы

$$y=\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{dt}-x\right), \qquad (5.32)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-5x-15\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{dt}-x\right).$$

После преобразований получаем однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=0.$$

Решая характеристическое уравнение $k^2+2k+2=0$, получим $k_{1,2}=-1\pm i$,

$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right).$$

Функцию $y(t)$ находим, подставляя $x(t)$ и $\frac{dx}{dt}$ в формулу (5.32):

$$y(t)=\frac{1}{5}\left[-\mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)+\mathrm{e}^{-t}\left(-C_1\sin t+C_2\cos t\right)-\mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)\right].$$

Окончательно получим

$$y(t)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t}\left[\cos t\left(C_2-2C_1\right)-\sin t\left(2C_2+C_1\right)\right].$$

6. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

Производная и ее приложения

1. Определение производной, ее физический смысл. Необходимое условие дифференцируемости. Производные основных элементарных функций $x^{\alpha}, a^{x}, \sin x, \cos x$.
2. Производная суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций. Производные функций $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.
3. Производная обратной функции. Производные функции $\log_a x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.
4. Дифференцирование сложной функции, неявной функции, сложно – показательной функции и функции, заданной параметрически.
5. Дифференциал функции. Определение, вычисление, геометрический смысл, применение к приближенным вычислениям.
6. Теорема Роля, теорема Лагранжа, теорема Коши. Правило Лопиталя.
7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора для основных элементарных функций $e^{x}, \sin x, \cos x, (1-x)^{\alpha}$.
8. Признаки монотонности функции.
9. Экстремумы функции. Необходимые и достаточные условия экстремумов (исследование функции на экстремум с помощью производных первого, второго, высших порядков).
10. Признаки выпуклости кривой. Точки перегиба кривой. Необходимые и достаточные условия наличия точек перегиба.
11. Производная от векторной функции скалярного аргумента, ее геометрический смысл.

Неопределенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.
2. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Использование таблиц интегралов.

Определенный интеграл

1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла.
2. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.

3. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и подстановкой.
4. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения.
5. Кривизна плоскостей кривой. Кривизна пространственной кривой.

Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема Коши. Понятие особого решения. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение, метод вариации. Уравнения с правой частью специального вида.
4. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема Коши. Метод исключения.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ 3, 4

Производная и ее приложения

Задача 1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

1.1.

а) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$,

б) $y = \frac{4\sin x}{\cos^2 x}$,

в) $y = \ln^2(x+\cos x)$,

г) $y = x^x$,

д) $tg\frac{y}{x} = 5xy^2$.

1.2.

а) $y = (\cos 2x + 2\sin 2x)e^x$,

б) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$,

в) $y = x^{1/x} - y^2\text{arctg}y = 0$,

г) $y = x^{1/x}$,

д) $y = \ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$.

1.3.

а) $y = \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$,

б) $y = \frac{x\ln x}{x-1}$,

в) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^2$,

г) $y = (\text{arctg}x)^{2\ln\text{arctg}x}$,

д) $y\sin x = \cos(x-y)$.

1.4.

а) $y = \cos x \ln tgx - \ln tg\frac{x}{2}$,

б) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

в) $y = \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$,

г) $y = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin\sqrt{x}}$

д) $y^2x = e^{\frac{y}{x}}$.

1.5.

а) $y = \sqrt{x} - (1+x)\text{arctg}\sqrt{x}$,

б) $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$,

в) $y = \ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$,

г) $y = (x+x^2)^x$,

д) $(e^x - 1)(e^y - 1) - y^2 = 0$.

1.6.

а) $y = x\text{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$,

б) $y = \frac{\text{tg}x}{\sqrt[3]{x^2}}$,

в) $y = \ln\sin(2x+5)$,

г) $y = (\sin x)^{5e^x}$,

д) $\frac{y^2}{x} = \text{arctg}\frac{x}{y}$.

1.7.

а) $y = x\arcsin\frac{1}{x} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$,

1.8.

а) $y = x^2\text{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}$, б) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$,

в) $y=\operatorname{arctg}e^{2x}$,

г) $y=(\ln x)^{3^x}$,

д) $x^3+y^3-3xy=0$.

б) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$,

г) $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$,

д) $x-y+\sin y=0$.

1.9.

а) $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$,

б) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$,

в) $y=3^{\operatorname{arctg}x^3}$,

г) $y=x^{-\operatorname{tg}x}$,

д) $\ln y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1.10.

а) $y=\sqrt{3+x^2}-x\ln\left(x+\sqrt{3+x^2}\right)$,

б) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$,

в) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$,

г) $y=(\arcsin x)^{e^x}$,

д) $x-y+e^y\operatorname{arctg}y=0$.

1.11.

а) $y=x\sqrt{x^2-1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$,

б) $y=\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$,

в) $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2x$,

г) $y=x^{\arcsin x}$,

д) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{5}\ln y$.

1.12.

а) $y=e^{\sin x}(x-1/\cos x)$

б) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,

в) $y=\lg\ln\operatorname{ctg}x$,

г) $y=(\operatorname{arctg}x)^x$,

д) $2y\ln y=x$.

1.13.

а) $y=(x^2-1)\cos x+(x+1)^2\sin x$,

б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\dfrac{1}{x}$,

в) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{2x}}$,

г) $y=(\cos 5x)^{e^x}$,

д) $e^x\sin y-e^y\cos x=0$.

1.14.

а) $y=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)$,

б) $y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$,

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$,

г) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\ln x}$,

д) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

1.15.

а) $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x)$,

б) $y=\dfrac{x-2}{e^{1/x}}$,

в) $y=\ln(e^x\sqrt{1+e^{2x}})$,

1.16.

а) $y=x^{-1/3}\operatorname{tg}x$,

б) $y=\dfrac{x^3}{\ln x}$,

в) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\ln x}$,

г) $y=(\sin x)^{\ln x}$,

д) $2^x+2^y=2^{x+y}$.

г) $y=x^{-\operatorname{ctg} x}$,

д) $\dfrac{y^2}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1.17.

а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

б) $y=\dfrac{\ln 3\sin x+\cos x}{3^x}$,

в) $y=\arcsin e^{3x}$,

г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$,

д) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

1.18.

а) $y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$,

б) $y=\dfrac{\sin x^2}{\ln x}$,

в) $y=\ln\ln\sin\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,

г) $y=(\cos x)^{3\ln x}$,

д) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1.19.

а) $y=\ln\ln x-\ln 2\log_2 x$,

б) $y=2\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$,

в) $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$,

г) $y=x^{\sqrt{x}}$,

д) $xy-\ln y=1$.

1.20.

а) $y=x^3\operatorname{ctg}\sqrt{x}$,

б) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$,

в) $y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$,

г) $y=(\cos x)^x$,

д) $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

1.21.

а) $y=x\sqrt[3]{x^2}(2\ln x-3^x)$,

б) $y=\dfrac{x}{\ln x}$,

в) $y=\ln\dfrac{\ln x}{\sin(1/x)}$,

г) $y=(\cos x)^{x^2}$,

д) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

1.22.

а) $y=3x^3\log_2\sqrt{x}$,

б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$,

в) $y=\ln(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1})+\arcsin e^{-x}$,

г) $y=(x^2+1)^{\cos x}$

д) $x=y+\operatorname{arctg} y$.

1.23.

а) $y=x^{-\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x$,

б) $y=\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg} e^x$,

в) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

г) $y=x^{\sin x^2}$,

1.24.

а) $y=x^2e^{-2x}$,

б) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$,

в) $y=\arcsin e^{-2x}+\ln e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}$,

г) $y=(\cos x)^{4\ln\cos 2x}$,

д) $e^{xy}-x^2+y^2=0$.

д) $x^2+y^2-xy=0$.

1.25.

а) $y=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln\cos x$,

б) $y=\frac{x}{\ln^2 x}$,

в) $y=\frac{1}{3}(x-1)\sqrt{x+2}+\ln(\sqrt{x+1}+1)$,

г) $y=(x^4+5)^{\mathrm{ctg}x}$,

д) $e^y-e^{-x}+xy=0$.

1.26.

а) $y=\frac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)$,

б) $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{\arccos x}{2^{x^2}}$,

в) $y=4\ln(\sqrt{4-x}+\sqrt{x})+\sqrt{x^2-4x}$,

г) $y=(x^3+2)^{tgx}$,

д) $y\ln y-x\ln y=1$.

1.27.

а) $y=(x+1)\mathrm{arctg}e^{-2x}$,

б) $y=\ln\frac{2+\mathrm{tg}x}{2-\mathrm{tg}x}$,

в) $y=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}$,

г) $y=(\cos x)^{3^x}$,

д) $xe^{-\frac{y}{2}}+ye^{-\frac{x}{2}}=2$.

1.28.

а) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$,

б) $y=\frac{\cos 2x-3\sin 2x}{e^x}$,

в) $y=\ln\frac{2+\mathrm{tg}x}{2-\mathrm{tg}x}$,

г) $y=(\ln x)^x$,

д) $xy=1+\ln y$.

1.29.

а) $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$,

б) $y=\frac{\sin^2(2+3x)}{e^{2x}-1}$,

в) $y=\mathrm{arctg}e^{2x}+\ln\sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}}$,

г) $y=(\sin\sqrt{x})^x$,

д) $y=x-\mathrm{arctg}2y$.

1.30.

а) $y=x\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-\ln(x^2+4)$,

б) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\frac{1}{x}$,

в) $y=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$,

г) $y=(\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$,

д) $y=x\ln(x+y)$.

Задача 2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2.1. $x=\cos\frac{t}{2},\ y=t-\sin t$.

2.2. $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$.

2.3. $x = e^{2t}, y = \cos t$.

2.4. $x = 3\cos^2 t, y = 2\sin^3 t$.

2.5. $x = 3\cos t, y = 4\sin^2 t$.

2.6. $x = t + \ln\cos t, y = t - \ln\sin t$.

2.7. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$.

2.8. $x = t + \sin t, y = 2 - \cos t$.

2.9. $x = \frac{1}{t}, y = \frac{1}{1+t^2}$.

2.10. $x = \sin t, y = \ln\cos t$.

2.11. $x = \cos t, y = \sin^4 \frac{t}{2}$.

2.12. $x = \operatorname{arctg} t, y = \frac{1}{2}t^2$.

2.13. $x = e^t, y = \arcsin t$.

2.14. $x = \sqrt{t-3}, y = \ln(t-2)$.

2.15. $x = \cos t + \sin t, y = \sin 2t$.

2.16. $x = \ln t, y = \operatorname{arctg} t$.

2.17. $x = \sin t - t\cos t, y = \cos t + t\sin t$

2.18. $x = te^t, y = te^{-t}$.

2.19. $x = t + e^{-t}, y = te^{-t}$.

2.20. $x = \ln t, y = t^3$.

2.21. $x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t$.

2.22. $x = \arcsin t, y = \ln(1-t^2)$.

2.23. $x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1+t^2)$.

2.24. $x = \sqrt{1-t^2}, y = \frac{1}{t}$.

2.25. $x = \frac{2}{t}, y = \frac{t}{1+t^2}$.

2.26. $x = \sqrt{t-1}, y = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$.

2.27. $x = \operatorname{tg} t, y = \frac{1}{\sin 2t}$.

2.28. $x = \ln t, y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

2.29. $x = 2\cos^2 t, y = 2\sin t$.

2.30. $x = 2(t - \sin t), y = 4(2 + \cos t)$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

3.1. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, [0, \pi/2]$.

3.2. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, [0,4]$.

3.3. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x, [0, \pi/2]$.

3.4. $f(x) = \sin 2x - x, [-\pi/2, \pi/2]$.

3.5. $f(x)x - \sin x, [-\pi, \pi]$.

3.6. $f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x$.

3.7. $f(x) = x + 2\sqrt{x}$.

3.8. $f(x) = 2\sin x + \cos 2x, [0, \pi]$.

3.9. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, [0,1]$.

3.10. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x, [0, \pi]$.

3.11. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}, [0, 1]$.

2.12. $f(x) = x + \cos^2 x$.

3.13. $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$.

3.14. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$.

3.15. $f(x) = x - 2\sin x$, $[0, \pi]$.

3.16. $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$, $[0, \pi/4]$.

3.17. $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1, 6]$.

3.18. $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $[1, e]$.

3.19. $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $[0, 1]$.

3.20. $f(x) = (5 - x)2^{-x}$, $[-1, 0]$.

3.21. $f(x) = -3x^4 + 6x^2$, $[-2, 2]$.

3.22. $f(x) = x + \frac{8}{x^4}$, $[-2, -1]$.

3.23. $f(x) = 3 - 2x^2$, $[-1, 3]$.

3.24. $f(x) = 81x - x^4$, $[-1, 4]$.

3.25. $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$, $[0, \pi]$.

3.26. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}$, $[-3, 3]$.

3.27. $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $[-5, -1]$.

3.28. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $[0, \pi/4]$.

3.29. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$, $[0, \pi/2]$.

3.30. $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x^2}}$, $[-1, 1]$.

Задача 4. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и, используя результаты исследования, построить ее график.

4.1. $y = (x+1)e^{-\frac{4}{x}}$.

4.2. $y = (3x+2)e^{-\frac{3}{x}}$.

4.3. $y = (x+2)e^{-\frac{1}{x}}$.

4.4. $y = (1-x)e^{\frac{4}{x}}$.

4.5. $y = (2-3x)e^{\frac{3}{x}}$.

4.6. $y = (x+4)e^{\frac{2}{x}}$.

4.7. $y = (1-2)e^{-\frac{2}{x}}$.

4.8. $y = (3x+1)e^{-\frac{3}{2x}}$.

4.9. $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

4.10. $y = (2x-1)e^{\frac{3}{x}}$.

4.11. $y = (1-3x)e^{\frac{3}{2x}}$.

4.12. $y = \frac{1}{2}(4-x)e^{-\frac{2}{x}}$.

4.13. $y = (8x+1)e^{-\frac{1}{2x}}$.

4.14. $y = \frac{1}{4}(8x-3)e^{\frac{2}{x}}$.

4.15. $y = (x+1)e^{\frac{1}{2x}}$.

4.16. $y = (1-8x)e^{\frac{1}{2x}}$.

4.17. $y = \frac{1}{4}(2x-3)e^{\frac{8}{x}}$.

4.18. $y = (1-x)e^{-\frac{1}{2x}}$.

4.19. $y = (2x+1)e^{-\frac{2}{x}}$.

4.20. $y = \frac{1}{4}(3+8x)e^{-\frac{2}{x}}$

4.21. $y = (2x+3)e^{\frac{2}{x}}$.

4.22. $y = (1-2x)e^{\frac{2}{x}}$.

4.23. $y = \frac{1}{4}(4x-3)e^{\frac{4}{x}}$.

4.24. $y = (2x-3)e^{-\frac{2}{x}}$.

4.25. $y = (1-4x)e^{-\frac{1}{3x}}$.

4.26. $y = \frac{1}{4}(3+2x)e^{-\frac{8}{x}}$.

4.27. $y = (4x+1)e^{\frac{1}{3x}}$.

4.28. $y=(4x-3)e^{-\frac{1}{x}}$. 4.29. $y=\frac{1}{4}(3+4x)e^{-\frac{4}{x}}$. 4.30. $y=(3-4x)e^{\frac{1}{x}}$.

Задача 5. Найти уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\bar{r}=\bar{r}(t)$ в точке t_0.

5.1. $\bar{r}(t)=(t-\sin)\bar{i}+(1-\cos t)\bar{j}+2\sin t\bar{k},\ t_0=\frac{\pi}{2}.$

5.2. $\bar{r}=2\sin t\bar{i}+3\operatorname{tg} t\bar{j}+2\cos t\bar{k},\ t_0\ \frac{\pi}{4}.$

5.3. $\bar{r}(t)=2\sin^2 t\bar{i}++2\cos^2 t\bar{j}+\sin 2t\bar{k},\ t_0=\frac{\pi}{4}.$

5.4. $\bar{r}(t)=e^{-t}\bar{i}+e^{t}\bar{j}+t\bar{k},\ t_0=0.$

5.5. $\bar{r}(t)=(t^3+8t)\bar{i}+t^2\bar{j}+(t^5+3t)\bar{k},\ t_0=0.$

5.6. $\bar{r}(t)=2t\bar{i}-3t\bar{j}+In\operatorname{tg} t\bar{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4}.$

5.7. $\bar{r}(t)=(t^2-3)\bar{i}+(t^2+2)\bar{j}+Int\bar{k},\quad t_0=1.$

5.8. $\bar{r}(t)=(2t^2-5)\bar{i}+(t^2-2t)\bar{j}-\sqrt{5-t^2}\bar{k},\qquad t_0=2.$

5.9. $\bar{r}(t)=(2-t)\bar{i}+\sqrt{25-t^2}\bar{j}+t^2\bar{k},\quad t_0=4.$

5.10. $\bar{r}(t)=In(t-3)\bar{i}-t\bar{j}+(t^2-16)\bar{k},\quad t_0=4.$

5.11. $\bar{r}(t)=(t+\sin t)\bar{i}+(1+\cos t)\bar{j}+2\cos t\bar{k},\qquad t_0=\frac{\pi}{2}.$

5.12 $\bar{r}(t)=2\cos t\bar{i}+3\operatorname{ctg} t\bar{j}+2\sin t\bar{k}.\quad t_0=\frac{\pi}{4}.$

5.13. $\bar{r}(t)=(1+\cos t)\bar{i}+(1-\cos t)\bar{j}+\sin t\bar{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4}.$

5.14. $\bar{r}(t)=e^{-2t}\bar{i}+e^{2t}\bar{j}+4t\bar{k},\quad t_0=0.$

5.15. $\bar{r}(t)=(2t^3+t)\bar{i}+4t^2\bar{j}+(t^4+3t)\bar{k},\quad t_0=0.$

5.16. $\bar{r}(t)=4t\bar{i}-6t\bar{j}+In\sin t\bar{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4}.$

5.17. $\bar{r}(t)=(4t^2-2)\bar{i}+(2t^2+1)\bar{j}+4Int\bar{k},\quad t_0=1.$

5.18. $\bar{r}(t)=(t^2-3)\bar{i}+(t^2-t)\bar{j}-\sqrt{2-t^2}\bar{k},\quad t_0=1.$

5.19. $\bar{r}(t)=(4-2t)\bar{i}+\sqrt{20-t^2}\bar{j}+t^3\bar{k},\quad t_0=4.$

5.20. $\bar{r}(t)=(t-\cos t)\bar{i}+(t-\sin t)\bar{j}+2\sin t\bar{k},\quad t_0=\frac{\pi}{2}.$

5.21. $\bar{r}(t)=In(t-5)\bar{i}-t\bar{j}+(t^2-25)\bar{k}, \quad t_0=6.$

5.22. $\bar{r}(t)=2\cos 3t\bar{i}+3\,\mathrm{tg}\,3t\bar{j}+2\cos t\bar{k}, \quad t_0=\dfrac{\pi}{4}.$

5.23. $\bar{r}(t)=(1+\cos 4t)\bar{i}+2(1-\cos 4t)\bar{j}+\sin 4t\bar{k}, \quad t_0=\dfrac{\pi}{8}.$

5.24. $\bar{r}(t)=e^{1-t}\bar{i}+e^{t-1}\bar{j}+t^2\bar{k}, \quad t_0=1.$

5.25. $\bar{r}(t)=(2t^3-8t)\bar{i}+t^3\bar{j}+(t-4t^5)\bar{k}, \quad t_0=0.$

5.26. $\bar{r}(t)=-3t\bar{i}+4t\bar{j}+In\cos t\bar{k}, \quad t_0=\dfrac{\pi}{4}.$

5.27. $\bar{r}(t)=(2t^2-4)\bar{i}+(2t^2+5)\bar{j}+In2t\bar{k}, \quad t_0=\dfrac{1}{2}.$

5.28. $\bar{r}(t)=(t^2+1)\bar{i}+(3t-8t^2)\bar{j}-\sqrt{t^2-8}\bar{k}, \quad t_0=3.$

5.29. $\bar{r}(t)=(5t-4)\bar{i}+\sqrt{t^2-9}\bar{j}+(t^2+5)\bar{k}, \quad t_0=5.$

5.30. $\bar{r}(t)=2In(t-1)\bar{i}-2t\bar{j}+(t^2+2t)\bar{k}, \quad t_0=2.$

Интегралы. Дифференциальные уравнения

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

1.1. а) $\int\dfrac{\sqrt{x}+Inx}{x}dx,$ б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx,$ в) $\int\sqrt{\dfrac{4-x}{x-12}}dx.$

1.2. а) $\int\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}dx,$ б) $\int\dfrac{Inx}{x^2}dx,$ в) $\int\sqrt{x^2-4}dx.$

1.3. а) $\int\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx,$ б) $\int x\sin 3x dx,$ в) $\int\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx.$

1.4. а) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx,$ б) $\int x5^{-x}dx,$ в) $\int\dfrac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}.$

1.5. а) $\int\dfrac{dx}{x(4-In^2x)},$ б) $\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx,$ в) $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

1.6. а) $\int\dfrac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ б) $\int\mathrm{arctg}\sqrt{2x+1}dx,$ в) $\int\dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}$

1.7. а) $\int\dfrac{\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}}{4+x^2}dx,$ б) $\int\dfrac{x}{\sin^2(1-x)}dx,$ в) $\int\dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx.$

1.8. а) $\int \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx,$ б) $\int \frac{Inx}{\sqrt{x}}dx,$ в) $\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}.$

1.9. а) $\int \frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$ б) $\int = (x-1)\cos 3xdx,$ в) $\int \sqrt{e^x 1}dx.$

1.10.а) $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}dx,$ б) $\int x\arcsin x dx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}$

1.11.а) $\int \sqrt[9]{\sin 3x}\cos 3xdx,$ б) $\int x^3 In\, x\, dx,$ в) $\int \frac{dx}{e^x+1}$

1.12.а) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}dx,$ б) $\int (2x-1)In\, xdx,$ в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

1.13.а) $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ б) $\int \frac{x}{e^x}dx,$ в) $\int \frac{\cos x}{5+4\cos x}dx.$

1.14.а) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{4-x^2}}dx,$ б) $\int \sqrt[4]{x}\, Inxdx,$ в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$

1.15.а) $\int \frac{dx}{x(4+In^2 x)},$ б) $\int e^{\sqrt{x}}dx,$ в) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$

1.16.а) $\int \frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx,$ б) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x},$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}.$

1.17.а) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx,$ б) $\int (4x+3)e^{-2x}dx,$ в) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx.$

1.18.а) $\int \frac{e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ б) $\int \arcsin xdx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$

1.19.а) $\int \cos(1-x)\sin^3(1-x)dx$ б) $\int x4^x dx,$ в) $\int \sqrt{1-x^2}dx.$

1.20.а) $\int \frac{\sin(\lg x)}{x}dx,$ б) $\int \arcsin^2 xdx,$ в) $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

1.21.а) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x},$ б) $\int x^3 e^{-x^2}dx,$ в) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx.$

1.22.а) $\int \frac{x}{\sin^2(5x^2)}dx,$ б) $\int \frac{In(Inx)}{x}dx,$ в) $\int \frac{dx}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}.$

1.23.а) $\int x^2 e^{2-x^3}dx,$ б) $\int (3x-2)\cos 5xdx,$ в) $\int \frac{\mathrm{tg}\, xdx}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}.$

1.24.а) $\int x5^{x^2}dx,$ б) $\int (x-1)^2\cos xdx,$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}.$

1.25.а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$, б) $\int In(x+\sqrt{1+x^2})dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

1.26.а) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-e^x}}dx$, б) $\int x In^2 x dx$, в) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$.

1.27.а) $\int \sin x \lg(\cos x)dx$, б) $\int \ln(x^2+1)dx$, в) $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\frac{dx}{(2-x)^2}$.

1.28.а) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x dx$, б) $arctg\sqrt{3x-1}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

1.29.а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$, б) $\int x Ln\frac{1-x}{1+x}dx$, в) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

1.30.а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$, б) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$, в) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$.

Задача 2. В данном задании необходимо решить 2 задачи. Номер варианта определяется цифрами, стоящими в скобках.

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах.

(01) $\begin{cases} y = x\sqrt{4-x}, \\ y = 0. \end{cases}$ (04) $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, \; y = 0, \\ x = 0, \quad y = 1. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} y = x\sqrt{4-x}, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$ (15) $\begin{cases} y = x^2\cos x, \\ y = 0, \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

(20) $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$ (25) $\begin{cases} y = e^x, \; x = 1, \\ y = e^{-x}. \end{cases}$

(29) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3 - 2x. \end{cases}$

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

(02) $r = \sin 3\varphi$. (06) $r = 5(1+\cos\varphi), 0 \le \varphi \le \pi$.

(12) $r = \cos 3\varphi$. (16) $r = 2\sin\varphi$.

(19) $r = 5\cos\varphi$. (23) $r = 2\sin 2\varphi$.

(27) $r = 2\cos 2\varphi$. (30) $r = 2(1-\cos\varphi)$.

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

(03) $\begin{cases} x = \sqrt{2\cos t}, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t. \end{cases}$ (эллипс)

(08) $\begin{cases} ч = 9\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x = 2(t-\sin t), \\ y = 2(1-\cos t), 0 \le t \le \pi. \end{cases}$ (циклоида

(13) $\begin{cases} ч = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$ (астроида)

(18) $\begin{cases} x = 3(\cos t + \sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos tt), 0 \le t \le \pi \end{cases}$

(21) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1-\cos t), 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

(24) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат.

(02) $y = e^x$, между точками $(0;1)$ и $(1;e)$.

(06) $y = Lnx$, от $x = \sqrt{3}$ $до$ $x = \sqrt{8}$.

(10) $y = e^x + 6, \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$.

(13) $y^2 = x^3$, от точки $(0;0)$ до $(4;8)$.

(18) $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, между точками пересечения с осью Ox

(23) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \le x \le \frac{7}{9}$.

Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

(04) $r = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

(07) $r = 5e^{\frac{5}{12}\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

(09) $r = 3(1+\sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$.

(14) $r = 2\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

(17) $r = 2(1-\cos\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi$.

(22) $r = 1 - \sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$.

(26) $r = 6\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

(29) $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически.

(01) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1-\cos t), \ 0 \le t \le 2\pi \ , \end{cases}$

(05) $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le$

(11) $\begin{cases} x = 3(\cos t + \sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x = 5\cos t^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

(20) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$

(25) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$

(28) $\begin{cases} x = 10 \cos y^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вычислить объемы тел, полученных вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в декартовых координатах.

(02) $y = \sin^2 x, \quad 0 \le x \le \pi$

(07) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0. \end{cases}$

(09) $\begin{cases} y = \arcsin x, \ \ x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

(14) $\begin{cases} y = x^2, \ \ x = 3, \\ y = 0. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} y = e^x, \ \ x = 1, \\ y = e^{-x}. \end{cases}$

(21) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

(24) $\begin{cases} y = y = \sin x, \\ y = 2 \sin x, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

(27) $\begin{cases} y = 5 \cos x, \\ y = \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

(30) $\begin{cases} y = x e^x, \\ y = 0, \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

Вокруг оси OY.

(05) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4, \\ y = 0, \ x = 4. \end{cases}$

(08) $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x, \ x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

(12) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \ x = 0, \\ y = x, \ \ x = 1. \end{cases}$

(19) $\begin{cases} y = \ln x, \ x = e, \\ y = 0. \end{cases}$

(22) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

(26) $\begin{cases} y = 4x^3, \ \ x = 0, \\ y = 4. \end{cases}$

(28) $\begin{cases} x = y^2, \quad x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

3.1. $y' \sin x - y \cos x = 1, \ y_0 = 0, \ x_0 = \pi/2$.

3.2. $y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin 2x, \ y_0 = 3, \ x_0 = \pi/2$.

3.3. $y' + \dfrac{2y}{x} = -x^2, \ y_0 = 2, \ x_0 = 0$.

3.4. $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2}, \ y_0 = 2, \ x_0 = 0$.

3.5. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$, $y_0 = 5$, $x_0 = -2$.

3.6. $xy' - 2y = x^3 \cos x$, $y_0 = 1$, $x_0 = \pi$.

3.7. $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$, $y_0 = 0$, $x_0 = e$.

3.8. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y_0 = 4$, $x_0 = 0$.

3.9. $y' \cos x - 2y \sin x = 2$, $y_0 = 3, x_0 = 0$.

3.10. $y' - 3y/x = x^3 e^x$, $y_0 = e$, $x_0 = 1$.

3.11. $xy' - 3y = x^4 e^x$, $y_0 = e$, $x_0 = 1$.

3.12. $y' \cos x + y \sin x = 1$, $y_0 = 2$, $x_0 = 0$.

3.13. $y' + y/x = -2 \ln x$, $y_0 = 1$, $x_0 = \pi/2$.

3.14. $y' - y/x = (\sin x)/x$, $y_0 = 1$, $x_0 = \pi/2$.

3.15. $xy' + 2y = 1/x$, $y_0 = 1$, $x_0 = 3$.

3.16. $y' - y \cos x = -\cos x$, $y_0 = 3$, $x_0 = 0$.

3.17. $y' + 2xy = e^{-x^3} \sin x$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$.

3.18. $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y_0 = 2$, $x_0 = 1$.

3.19. $y' - y tg x = 1/\cos x$, $y_0 = 5$, $x_0 = 0$.

3.20. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 0$.

3.21. $xy' + -3 = 0$, $y_0 = 0$, $x_0 = 1$.

3.22. $y' \cos x = (y+1) \sin x$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$.

3.23. $x^2 y' = 2xy + 3$, $y_0 = 0$, $x_0 = 1$.

3.24. $xy' + y - x - 1 = 0$, $y_0 = 1$, $x_0 = 1$.

3.25. $x^2 y' + 1 - 2xy = 0$, $y_0 = 1/3$, $x_0 = 1$.

3.26. $xy' + 2y = x^3$, $y_0 = -1/2$, $x_0 = 1$.

3.27. $y' - y = e^{3x}$, $y_0 = 1/2, x_0 = 0$.

3.28. $y - y = e^x / x, y_0 = e$, $x_0 = 1$.

3.29. $xy' = x + 1 - y, y_0 = 0$, $x_0 = 1$.

3.30. $y' - \dfrac{1}{x} y = \dfrac{2}{x^3}$, $y_0 = \dfrac{1}{3}$, $x_0 = 1$.

3.31. $y' - \dfrac{2}{x} y = \dfrac{2}{x^3}, y_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 1$.

Задача 4. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

4.1. $x^2 y'' + xy' = 1$.

4.2. $(y-1)y'' - (2y')^2 = 0$.

4.3. $y'' = 2yy'$.

4.4. $(e^x + 1)y'' + y' = 0$.

4.5. $x^2y'' - 2xy' = 1$.

4.6. $yy'' + (y')^2 = 0$.

4.7. $y'' = (y + 1)y'$.

4.8. $y'' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right)$.

4.9. $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$.

4.10. $yy'' = (y')^2$.

4.11. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = x$.

4.12. $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

4.13. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

4.14. $y'' = \dfrac{3x^2y'}{x^3 + 3}$.

4.15. $x^2y'' - 2xy' = x + 2$.

4.16. $2(y + 2)y'' + (y')^2 = 0$.

4.17. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$.

4.18. $y'' = \dfrac{2xy'}{x^2 + 1}$.

4.19. $y''x^2 - 2xy' = x + 2$.

4.20. $(y - 3)y'' + (y')^2 = 0$.

4.21. $y'' + \dfrac{xy'}{x^2 + 1} = 0$.

4.22. $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

4.23. $(y^2 + 1)y'' = 2y(y')^2$.

4.24. $y'' - \dfrac{y'}{x} = xe^x$.

4.25. $y'' + y'\mathrm{tg}x = \cos x$.

4.26. $4yy'' = (y')^2$.

4.27. $(1 + x^2)y'' = (y')^2$.

4.28. $(y + 1)y'' = (y')^2$.

4.29. $y'' = \dfrac{2xy'}{x^2 + 4}$.

4.30. $x^2y'' - 2xy' = x^3 + 4$.

Задача 5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

5.1. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x + x$.

5.2. $y'' - 2y' + 5y = e^x + \sin x$.

5.3. $y'' - 4y' + 4y = 3x + \sin 2x$.

5.4. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x + e^{2x}$.

5.5. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x} + \cos 2x$.

5.6. $y'' + 4y = \sin 2x + e^x$.

5.7. $y'' + y' = e^{-x} + \cos x$.

5.8. $y'' - 6y' + 9y = -12x + 2 + \sin x$.

5.9. $y'' + 9y = 36e^{3x} + \cos 2x$.

5.10. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x + x + 1$.

5.11. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x} + \sin x$.

5.12. $y'' - 4y' + 8y = 8x + 4 + \cos x$.

5.13. $y'' + y' - 5y = 2\cos x + 2x$.

5.14. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{2x} + \sin 2x$.

5.15. $y'' - 4y' + 5y = 10x + \cos 2x$.

5.16. $y'' - 4y' + 4y = 3x - 1 + \sin x$.

5.17. $y'' - 6y' + 9y = 4e^x + \cos 2x$.

5.18. $y'' - 4y' + 4y = -\sin 2x + e^x$.

5.19. $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4 + \cos 2x$.

5.20. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4 + \sin 2x$.

5.21. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \sin x$.

5.22. $y'' - 4y' + 3y = -\cos 2x + 3x - 1$.

5.23. $y'' + 4y = 5x + \sin 2x$.

5.24. $y'' + y' = -x + 1 + \cos 2x$.

5.25. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \sin x$. 5.26. $y'' + 9y = -e^{x} + \sin 2x$.

5.27. $y'' - 4y' + 5y = \sin 2x + 2\cos 2x + x$ 5.28. $y'' + 2y' + 5y = 3\cos x + x + 2$.

5.29. $y'' + 2y' - 8y = 2x - 1 + 4\sin x$. 5.30. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + \cos 3x$.

Список литературы

1. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления Н. С. Пискунов – М.: Наука. Т. 1,2.
2. **Бугров, Я. С., Никольский, С. М.,** Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. **С. М. Бугров, Я. С. Никольский** – М.: Наука.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ под ред. **В. П. Демидовича** – М.: Наука.
4. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х т./ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк.
5. Сборник задач по математике для втузов/ Под ред. **А. В. Ефимова, В. П. Демидовича**– М.: Наука.