ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Р.Е. Алексеева

А.В. Лебедева, С.В. Решетняк

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 1

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета в качестве учебно-методического пособия для студентов заочной и дистанционной форм обучения по всем техническим специальностям.

Нижний Новгород, 2006

УДК. 93/99

Лебедева А. В., Решетняк С. В. Высшая математика : комплекс учебно-методических материалов: Ч.1 / А. В. Лебедева, С. В. Решетняк; Нижегород. гос. техн. ун-т. Нижний Новгород, 2006.-122с.

Изложен опорный конспект лекций, соответствующий рабочей учебной программе. Даются методические указания к выполнению контрольных работ, а также тесты для контроля заданий и литература.

Рекомендуется для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Редактор Е. В. Комарова

Подписано в печать 29.12.2006. Формат 60 x 84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,75. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 500 экз. Заказ 968.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41,г. Нижний Новгород, ул.Минина, 24.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс “Высшая математика” является базовым для студентов инженерно-технических специальностей, так как все специальные курсы предполагают хорошую математическую подготовку студентов, необходимую для решения тех или иных инженерных задач. Настоящий учебно-методический комплекс предназначен для студентов заочной формы обучения первого курса.

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа с учебным материалом. Однако не всегда студенту удаётся прослушать курс лекций, читаемых во время установочной сессии. Предлагаемый в пособии курс лекций максимально приближен к рабочей программе по высшей математике для студентов-заочников НГТУ. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, что способствует лучшему усвоению материала, а также позволяет самостоятельно выполнить контрольные работы.

Курс лекций содержит следующие разделы (в объёме первого семестра первого курса):

1) линейная алгебра,
2) аналитическая геометрия,
3) основы математического анализа.

Объём данного издания не позволил рассмотреть раздел “Комплексные числа, действия с комплексными числами”, поэтому его необходимо изучить самостоятельно, например, по учебнику Д. Т. Письменного “Конспект лекций по высшей математике”. Пособие содержит контрольные вопросы для самопроверки, варианты контрольных работ.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студенту-заочнику освоить учебный материал с наименьшей затратой времени. При изучении курса студентам необходимо ориентироваться на рабочую программу и активно использовать указанные учебники. В течение первого семестра обучения студент- заочник должен выполнить расчетно-графические работы, варианты которых приведены.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы. Действия с матрицами

Определение 1.1. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Числа a_{ij}, входящие в матрицу, называются её элементами. Первый индекс i указывает номер строки, в которой располагается элемент a_{ij}, j - номер столбца ($i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$).

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается буквой О. Квадратная матрица ($m = n$) называется диагональной, если все элементы, кроме $a_{ii} (i = \overline{1,n})$, равны нулю. Диагональная матрица, у которой $a_{ii} = 1$ $(i = \overline{1,n})$, называется единичной матрицей $n-$го порядка, обозначается E. Элементы $a_{ii} (i = \overline{1,n})$ квадратной матрицы называются элементами главной диагонали. Квадратная матрица размером $n \times n$ называется матрицей $n-$го порядка.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица 3-го порядка,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -единичная матрица 4-го порядка,

$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ -нулевая матрица 2-го порядка.

От матрицы A перейдём к матрице

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \dots a_{m2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

строками которой являются столбцы, а столбцы- строками матрицы A. Переход от матрицы A к матрице A^T называется операцией транспонирования матрицы A, а матрица A^T называется транспонированной к данной. Ясно, что $a_{ij} = a_{ji}^T$.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.2. Матрицы называются равными, если они одного размера и соответствующие элементы равны, то есть $A=B$, если $a_{ij} = b_{ij}\,(i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,n})$.

Введем операции сложения матриц, умножения матрицы на число.

Определение 1.3. Суммой матриц $A(m \times n)$ и $B(m \times n)$ называется матрица $C(m \times n)$, у которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Операция сложения вводится только для матриц одинакового размера.

Определение 1.4. Произведением матрицы A на число k называется матрица, элементы которой получены умножением элементов матрицы A на число k.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц вводится только для матриц, удовлетворяющих условию: число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

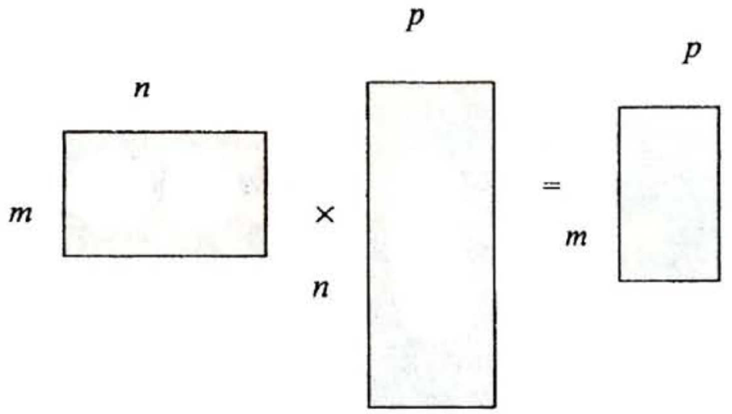
Определение 1.5. Произведением матрицы $A(m \times n)$ на матрицу $B(n \times p)$ называется матрица $C(m \times p)$, у которой элемент $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,p})$, т.е. элемент в i-й строке и j-м столбце равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-4) & 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5 & 3\cdot 3 + (-1)\cdot 6 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot(-4) & 2\cdot 2 + 5\cdot 5 & 2\cdot 3 + 5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -18 & 29 & 36 \end{pmatrix}.$$

Схематично операцию умножения можно изобразить следующим образом:



Определение 1.6. Матрицы A и B называются перестановочными, если $A \cdot B = B \cdot A$.

Введённые операции обладают следующими свойствами:

1. $A+B=B+A$,
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$,
3. $A+0=A$,
4. $A-A=0$,
5. $1\cdot A=A$,
6. $k(A+B)=kA+kB$,
7. $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$,
8. $k_1(k_2A)=(k_1k_2)A$,
9. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$,
10. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$,
11. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$,
12. $k(A\cdot B)=(kA)\cdot B$,
13. $(A+B)^T=A^T+B^T$,
14. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Отметим особую роль единичной матрицы, которая выполняет роль единицы в алгебре чисел. Если матрицу A справа или слева можно умножить на единичную матрицу, то результатом будет матрица A.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ E\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

1.2. Определители. Свойства определителей

Квадратной матрице A можно поставить в соответствие по определенному правилу число, обозначаемое $\det A$, или $|A|$, или Δ.

Рассмотрим матрицу второго порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определение 1.7. Определителем второго порядка матрицы A называется число, равное $a_{11}\ a_{22}\ - a_{12}\ a_{21}$, обозначаемое символом

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Определение 1.8. Определителем третьего порядка матрицы A третьего порядка называется число, обозначаемое

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \tag{1.4}$$

и равное $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$.

Пример

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-3\cdot2=4-6=-2,$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-3\cdot5\cdot7-6\cdot8\cdot1-4\cdot2\cdot9=0\,.$$

Для того чтобы дать определения определителей более высоких порядков, рассмотрим некоторые свойства определителей 2-го и 3-го порядков (без доказательства):

1. Определитель не изменится, если строки и столбцы поменять местами (транспонировать). Это свойство легко доказывается по определениям 1.7 и 1.8.
2. При перестановке двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак.
3. Если в определителе две строки (два столбца) равны, то определитель равен нулю. Это свойство, очевидно, следует из свойства 2.

4. Если в определителе все элементы какой-нибудь строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
5. При умножении какой-нибудь строки (столбца) на произвольное число k определитель умножается на это число.
6. Если элементы какой-нибудь строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.
7. Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) представлены в виде двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у первого из которых в соответствующей строке (столбце) первые слагаемые, у второго – вторые, остальные строки (столбцы) без изменения.

Пример

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{33}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}' \end{vmatrix}.$$

8. Определитель не изменится, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) добавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число.

Следующее свойство связано с понятием минора и алгебраического дополнения.

Определение 1.9. Минором элемента определителя a_{ij} называется определитель, полученный вычеркиванием i- й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент, и обозначается M_{ij}.

Определение 1.10. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число $(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, обозначается A_{ij}.

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-6=-3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -(8-12) = 4.$$

9. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Пример

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&-1&0&0\\-3&0&1&0\\4&1&-1&3\end{vmatrix}=0\cdot A_{21}+(-1)\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}+0\cdot A_{24}=-1\cdot(-1)^4M_{22}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&3&1\\-3&1&0\\4&-1&3\end{vmatrix}=-(1\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+3\cdot A_{33})=-M_{13}-3\cdot M_{33}=-\begin{vmatrix}-3&1\\4&-1\end{vmatrix}-$$

$$-3\cdot\begin{vmatrix}1&3\\-3&1\end{vmatrix}=-(3-4)-3(1+9)=1-30=-29.$$

Ясно, что для вычисления определителя было удобно выбрать вторую строку, так как многие элементы равнялись нулю. Используя свойство 8, можно преобразовать определитель таким образом, чтобы в какой-нибудь строке (столбце) большинство элементов равнялось нулю.

Пример

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

по свойству 4.

1.3. Обратная матрица

Определение 1.11. Квадратная матрица A называется невырожденной, если $\det A\neq 0$.

Определение 1.12. Матрица A^{-1} называется обратной матрице A, если $A\cdot A^{-1}=$ $=A^{-1}\cdot A=E$, где Е – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Можно доказать, что всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Приведем без доказательства алгоритм нахождения матрицы:

1. Находим $\det A$.
2. Составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A.
3. Транспонируем полученную матрицу, обозначаем A^*.
4. Находим обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*$.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}. \qquad \det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=-4.$$

$A_{11}=4, A_{12}=-7,\ A_{13}=-6,\ A_{21}=-8, A_{22}=9, A_{23}=10, A_{31}=4, A_{32}=-5, A_{33}=-6.$

Транспонированная матрица из алгебраических дополнений имеет вид

$$A^*=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^*=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

1.4. Ранг матрицы. Понятие линейной комбинации. Базисный минор

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$. Из элементов, стоящих на пересечении k строк и k столбцов, составим определитель k-го порядка ($k\le\min\{m,n\}$). Все определители k-го порядка называются минорами k-го порядка матрицы A.

Пример. Найдём миноры матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

Минорами второго порядка A являются определители

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}.$$

Минором третьего порядка является единственный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 3\cdot5\cdot7 - 8\cdot6\cdot1 - 4\cdot2\cdot9 = 0.$$

Всего определителей k- го порядка можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний из n элементов по k.

Определение 1.13. Рангом матрицы A называется наибольший из порядков миноров матрицы A, отличный от нуля ($\operatorname{rang} A$).

В примере $\operatorname{rang} A = 3$, так как определитель третьего порядка Δ=0, а, например, определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

Без доказательства отметим, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матрицы, к которым относятся:

1) перестановка местами двух строк (столбцов);
2) умножение всех элементов матрицы на отличное от нуля число;
3) прибавление к элементам какой-нибудь строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Заметим также, что ранг не меняется при транспонировании матрицы.

Элементарные преобразования позволяют сделать более удобной процедуру нахождения ранга матрицы.

Пример. Найдём ранг матрицы A. Умножим первую строку на -4 и добвим ко второй, умножим первую строку на -5 и добавим к третьей, затем уножим первую строку на -2 и добавим к четвёртой. В полученной матрице вторую строку умножим на -1 и добавим ко второй и третьей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -10 & 7 \\ 0 & -8 & -10 & 7 \\ 0 & -8 & -10 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, все миноры третьего порядка ссдержат нулевую строку и, следовательно, равны нулю. Таким образом, $\operatorname{rang} A = 2$.

Выберем в $A(m \times n)$ k столбцов (строк), выберем k произвольных действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$, умножим элементы i - го столбца (строки) на λ_i и рассмотрим столбец (строку), элементы которого равны суммам соответствующих элементов полученных столбцов (строк). Такой столбец (строка) называется линейной комбинацией столбцов (строк).

Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.14. Линейной комбинацией столбцов $A_1, A_2, ..., A_k$ называется выражение $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_k A_k$.

Каждому набору чисел $\lambda_1, ..., \lambda_k$ соответствует своя линейная комбинация.

Если для некоторого столбца B существует такой набор $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$, что $B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_k A_k$, то говорят, что B-линейная комбинация $A_1, A_2, ..., A_k$.

Определение 1.15. Столбцы $A_1, A_2, ..., A_k$ называются линейно-зависимыми, если существует равная нулю линейная комбинация столбцов $A_1, A_2, ..., A_k$:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_k A_k = 0, \qquad (1.5)$$

где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$ отличен от нуля. В противном случае столбцы $A_1, A_2, ..., A_k$ называются линейно-независимыми, то есть равенство (1.5) возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Аналогично определяется линейная зависимость и независимость строк.

Пусть $\text{rang} A = r$, то есть существует отличный от нуля минор r-го порядка, а все миноры порядка большего r равны нулю.

Определение 1.16. Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется базисным минором. Строки и столбцы базисного минора называются базисными строками и столбцами.

Заметим, что матрица может иметь несколько базисных миноров.Приведем без доказательства теорему о базисном миноре и следствие из нее.

Теорема 1.1. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов (строк).

Следствие. Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы.

В примере rang A=**2**. В качестве базисного минора можно взять $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, и, следовательно, первый и второй столбцы (первая и вторая строки) – базисные.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Обозначим матрицу из коэффициентов A, матрицу – столбец из свободных членов B, матрицу – столбец из неизвестных X. Используя понятие произведения матриц, систему (2.1) можно кратко записать в матричной форме:

$$A \times X = B, \tag{2.2}$$

где $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1. Упорядоченный набор n чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется решением системы (2.1), если в результате замены неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ все уравнения системы превратятся в верные числовые равенства.

Определение 2.2. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение 2.3. Система (2.1) называется однородной, если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$.

Очевидно, что однородная система всегда имеет тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

2.2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.3)$$

В матричной форме система имеет вид $A \cdot X = B$. Пусть $\det A \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}. Умножим левую и правую части $A \cdot X = B$ на A^{-1} с левой стороны: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, то решение (2.3) в матричной форме имеет вид

$$X = A^{-1}B. \qquad (2.4)$$

Для вывода формул Крамера ограничимся случаем n=3. Матричное равенство запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{\Delta} \\ \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{\Delta} \\ \dfrac{b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Выражение $b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$ - разложение по первому столбцу определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}=\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}=\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, систему из n уравнений с n неизвестными с определителем из коэффициентов при неизвестных, отличным от нуля, можно решать по формулам, которые называются формулами Крамера:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i=\overline{1,n}), \tag{2.5}$$

где Δ - определитель из коэффициентов при неизвестных, Δ_i - определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца на столбец из свободных членов.

2.3. Теорема Кронекера-Капелли

Первым вопросом, возникающем при изучении системы (2.3) , является вопрос о ее совместности. Ответ на него дает теорема Кронекера-Капелли (без доказательства).

Теорема 2.1. Для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы А из коэффициентов при неизвестных был равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$, под которой понимают матрицу A, дополненную столбцом свободных членов:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ .... & ...... & ...... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Приведем алгоритм решения системы из m уравнений с n неизвестными:

1. Находим rang A и rang $\overline{A}$. Если они равны, то система совместна , если не равны – система не имеет решений.
2. Если система совместна, выписываем равносильную систему, включающую в себя только те уравнения, коэффициенты при неизвестных в которых образуют базисный минор.

3. Если система совместна и rang $A=n$, то систему можно решать по формулам Крамера или матричным способом. В этом случае система имеет единственное решение. Если rang $A=r<n$, то $n-r$ членов, содержащих неизвестные с коэффициентами, не входящими в базисный минор, переносим в правую часть. Эти неизвестные называются свободными переменными и могут принимать любые значения. Неизвестные, оставшиеся в левой части, называются главными (их r штук). Если rang $A<n$, то система имеет бесконечно много решений.
4. Решаем полученную систему r уравнений с r неизвестными по формулам Крамера или с помощью обратной матрицы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases} \tag{2.6}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что rang A=rang $\overline{A}=2$. В качестве базисного минора рассмотрим $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, следовательно, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Оставим слева члены, содержащие коэффициенты базисного минора, получим систему

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_3 + x_4. \end{cases}$$

Решаем по формулам Крамера, принимая $b_1 = 1 - x_1 + 2x_2,\ \ b_2 = -1 - x_3 + x_4.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_3 + x_4 \end{vmatrix} = -2\ .$$

Тогда $x_3 = \dfrac{2x_1 - 4x_2}{-2} = -x_1 + 2x_2,\ \ x_4 = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

Решением (2.6) является упорядоченная четверка чисел. Учитывая, что x_1 и x_2 - свободные переменные, которые могут принимать любые значения, получим :

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = s, \\ x_3 = -t + 2s \\ x_4 = 1, \end{cases}, \quad (t, s \in R).$$

Ясно, что система имеет бесконечно много решений.

2.4. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

В п. 2.2. рассматривали решение систем, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных и с определителем из коэффициентов, отличным от нуля. Метод Гаусса – еще один способ решения, не требующий таких ограничений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Будем считать, что $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то перенумеровывая неизвестные, получим первый коэффициент, отличный от нуля.

Умножим первое уравнение на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым, затем первое умножим на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим. Продолжая этот процесс, получим равносильную систему при условии, что первое уравнение остается неизменным :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a'_{m2} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{2.8}$$

где a'_{ij} - новые коэффициенты, b'_i - новые свободные члены.

Умножая второе уравнение на $-\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}},\dots,-\dfrac{a'_{m2}}{a'_{22}}$ и складывая с соответствующими уравнениями, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 , \\ \qquad\quad a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad a''_{m3}x_3 + \dots + a''_{mn}x_n = b''_m . \end{cases} \tag{2.9}$$

Продолжая этот процесс, можем получить одну из следующих ситуаций:

1. Одно из уравнений системы имеет отличную от нуля правую часть и нулевые коэффициенты в левой. В этом случае система не имеет решений.
2. Система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{mm}^{(m-1)}x_m + \dots + a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)}, \end{cases}$$

где $a_{ii} \neq 0\,(i = \overline{1,m})$.

Если $m=n$, то система совместна, имеет единственное решение. В этом случае из последнего уравнения определяется x_n, из предпоследнего x_{n-1} и так далее (обратный ход Гаусса).

Если $m<n$, то переменные $x_{m+1},\dots,x_n$ - свободные переменные и, следовательно, переносятся в правую часть (см. п. 2.3.). Затем обратным ходом Гаусса переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ выражаются через свободные переменные.

В процессе последовательного исключения неизвестных могут появиться уравнения 0=0. Эти уравнения отбрасываются.

На практике удобнее работать не с системой (2.7), а с ее расширенной матрицей, так как в рассмотренном процессе преобразовываются коэффициенты при неизвестных, в расширенной матрице при этом производятся элементарные преобразования со строками.

Пример. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу и проделаем элементарные преобразования с её строками, приводя матрицу к диагональному или трапецивидному виду. Для этого умножим первую строку на -1 и добавим ко второй, затем первую строку умножим на -3 и добавим к третьей. В полученной матрице вторую строку умножим на -4 и добавим к третьей, затем умножим третью строку на $\frac{1}{8}$. В результате получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получили систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \qquad\quad -x_3 = 1, \end{cases}$$

решение которой $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -1.$

Пример. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 \qquad - 7x_3 + 2x_4 = -5, \\ \quad 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_2 + x_3 - x_4 = -8, \\ -89x_3 + 56x_4 = -88, \\ 0 = 10, \end{cases}$$

то есть система несовместна.

Пример. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

В результате преобразований получим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 6, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

в которой отбрасываем последнее верное равенство и переносим свободную переменную x_4 в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 + 4x_4, \\ x_2 - x_3 = -3 - x_4, \\ x_3 = 6 + 2x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_4 = t\ (t \in R)$, имеем бесконечно много решений

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 + t, \\ x_3 = 6 + 2t, \\ x_4 = t. \end{cases}$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Векторы. Линейные операции с векторами. Базис. Координаты вектора

В этом параграфе рассмотрим понятие вектора так, как оно было введено в школьном курсе геометрии, то есть как направленного отрезка, имеющего определённую длину и направление. Если A- начало вектора, B- его конец, то вектор обозначается $\overline{AB}$. Чаще вектор обозначают одной буквой, например, $\overline{a}$. Модулем вектора называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Определение 3.1. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых, и компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 3.2. Векторы называются равными, если они коллинеарные, одинаково направлены и равны по длине.

Под нулевым вектором понимают вектор, длина которого равна нулю. Противоположным вектором называется вектор, по длине равный $|\overline{a}|$, но противоположно направленный и обозначается $-\overline{a}$.

Определение 3.3. Произведением вектора $\overline{a}$ на вещественное k называется вектор $\overline{b}$ такой, что

1) $|\overline{b}| = |k| \cdot |\overline{a}|$,
2) $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$,
3) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены при $k>0$ и противоположно направлены при $k<0$.

Пример

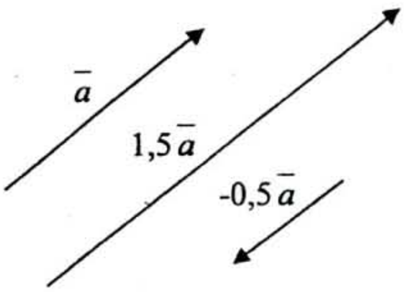


Рис. 3.1

Определение 3.4. Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом $\overline{a}$, конец с концом $\overline{b}$ при условии, что начало $\overline{b}$ совпадает с концом $\overline{a}$ (рис. 3.2).

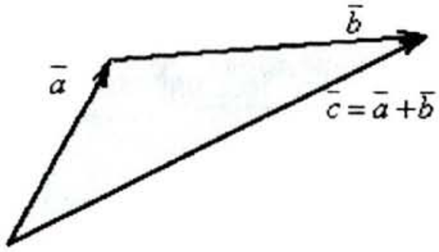


Рис. 3.2

Из этого определения следует правило параллелограмма сложения векторов (рис. 3.3).

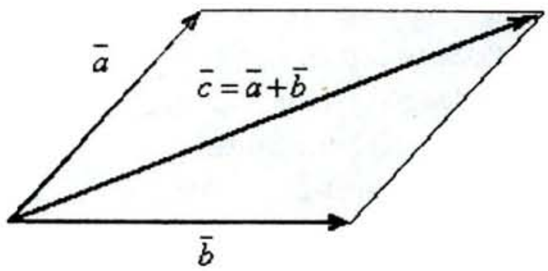


Рис. 3.3

Определение 3.5. Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис. 3.4).

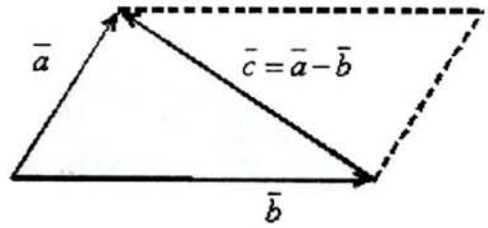


Рис. 3.4

Введенные геометрически операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$,
2) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$,
3) $(k+l)\,\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$,
4) $k(l\bar{a}) = (kl)\,\bar{a}$,
5) $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$,
6) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$,
7) $(-1)\,\bar{a} = -\bar{a}$,
8) $k \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Эти свойства позволяют производить преобразования в линейных операциях с векторами так, как это делается в алгебре, то есть менять местами слагаемые, группировать, выносить за скобки общие множители как скалярные, так и векторные.

Рассмотрим два неколлинеарных вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Покажем геометрически, что любой компланарный с $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ вектор $\bar{d}$ может быть разложен по векторам $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ единственным образом, то есть равенство $\overline{d}=\alpha\,\overline{e_1}+\beta\,\overline{e_2}$ возможно только при единственном наборе чисел α, β .

Для этого векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{d}$ поместим началом в одну точку О.В силу компланарности они лежат в одной плоскости (рис. 3.5). Из конца вектора $\overline{d}$ проведём прямые, параллельные векторам $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ до пересечения с прямыми, на которых лежат эти векторы. Вектор $\overline{d}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах, коллинеарных $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ и, следовательно, равных $\alpha\,\overline{e_1}$ и $\beta\overline{e_2}$. Такое построение единственно, так как через точку можно провести только одну прямую, параллельную другой прямой, то есть в равенстве $\overline{d}=\alpha\,\overline{e_1}+\beta\overline{e_2}$ набор α,β единственно возможный.

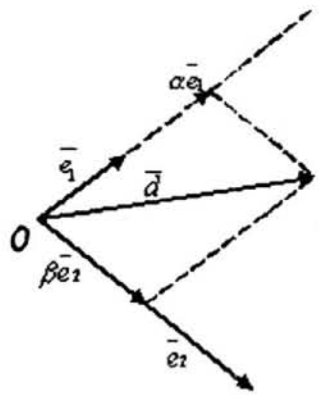


Рис. 3.5

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$. Покажем, что любой вектор $\overline{d}$ раскладывается по ним единственным образом, то есть в равенстве $\overline{d}=\alpha\,\overline{e_1}+\beta\,\overline{e_2}+\gamma\,\overline{e_3}$ набор α, β, γ- единственно возможный.

Приведём все векторы к одному началу О. Из конца вектора $\overline{d}$ проведём прямую, параллельную $\overline{e_3}$ до пересечения с плоскостью, определяемой векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ (рис 3.6). Пусть $\overline{r}$ - вектор, начало которого в точке О, конец в точке пересечения проведённой прямой с плоскостью. Векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{r}$ - компланарные, а так как $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ неколлинеарные, то $\overline{r}=\alpha\,\overline{e_1}+\beta\,\overline{e_2}$, и набор α, β единственный. Из конца $\overline{d}$ проведем прямую в плоскости векторов $\overline{r}$ и $\overline{e_3}$ параллельно $\overline{r}$ до пересечения с прямой, проходящей через $\overline{e_3}$. Тогда по правилу параллелограмма $\overline{d}=\ \overline{r}+\ \gamma\,\overline{e_3}$ и, следовательно, $\overline{d}=\alpha\,\overline{e_1}+\beta\,\overline{e_2}+\gamma\,\overline{e_3}$, набор α, β, γ в силу построения единственный.

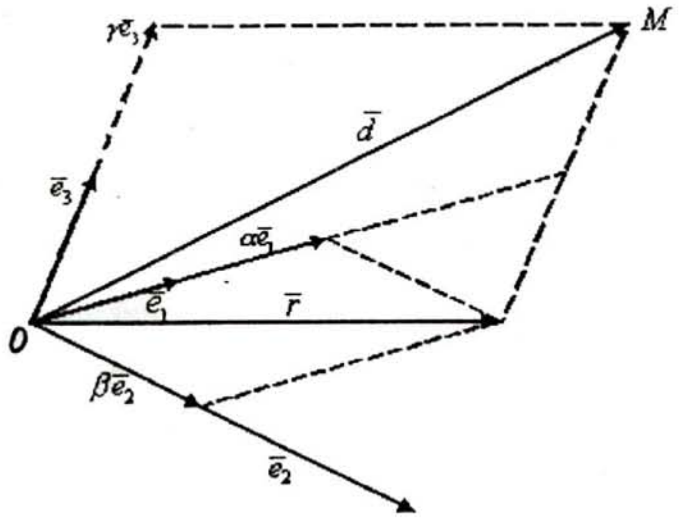


Рис. 3.6

Определение 3.6. Базисом называется система векторов, по которым любой вектор может быть разложен единственным образом.

Следовательно, для компланарных векторов базис- два неколлинеарных вектора, в пространстве базис - три некомпланарных вектора.

Определение 3.7. Координатами вектора в некотором базисе называются коэффициенты в разложении вектора по базисным векторам.

Пример. В параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, найти координаты вектора $\overline{MN}$ в базисе из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на плоскости параллелограмма могут быть взяты в качестве базисных, так как они неколлинеарны. Точки F и M делят отрезок DC на равные части, точка N делит отрезок CB на равные части.

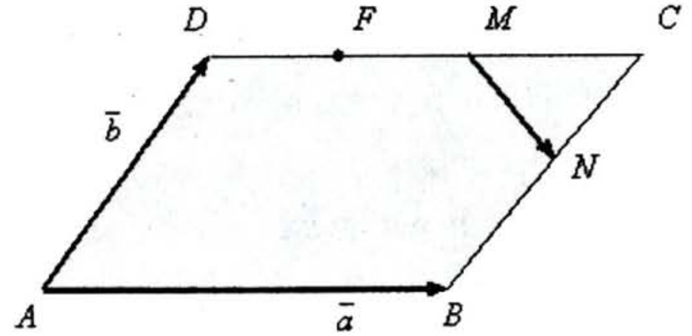


Рис. 3.7

Из рис. 3.7 следует

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{3}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{3}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}.$$

Таким образом, числа $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{2}$- координаты вектора в базисе $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Обозначение: $\overline{MN} = (\frac{1}{3};-\frac{1}{2})$.

Ясно, что говорить о координатах вектора можно только указав базис.

Пример. Вектор $\bar{a} = (1, -2, 3)$ задан в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, следовательно, $\bar{a} = 1 \cdot \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$.

В дальнейшем векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ будем считать попарно перпендикулярными и по длине равными единице. Такой базис называется ортонормированным. Построим вектор $\bar{a}$ из примера 3 (рис 3.8).

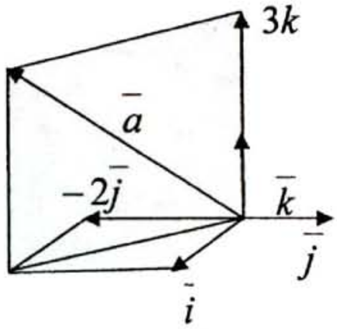


Рис. 3.8

Из определения координат вектора следует, что если $\bar{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, то $k\bar{a} = (k\alpha, k\beta, k\gamma)$.

3.2. Системы координат

Фиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overline{OM}$ называется радиус- вектором точки M по отношению к точке O. Если в пространстве выбран некоторый базис, то точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел - координаты радиус- вектора $\bar{a}$.

Определение 3.8. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка- начало координат; прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат (рис. 3.9).

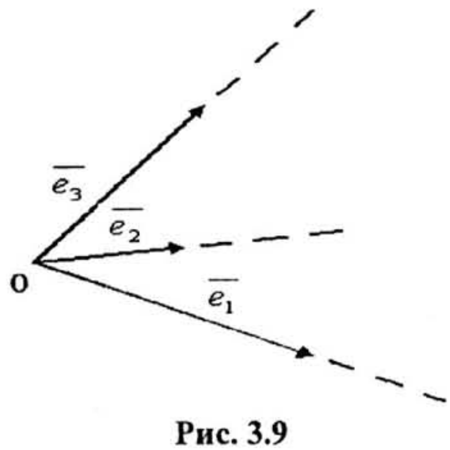


Рис. 3.9

Определение 3.9. Координаты радиус- вектора точки M называются координатами точки M в рассматриваемой системе координат.
Обозначение: $M(\alpha, \beta, \gamma)$ (рис. 3.10).

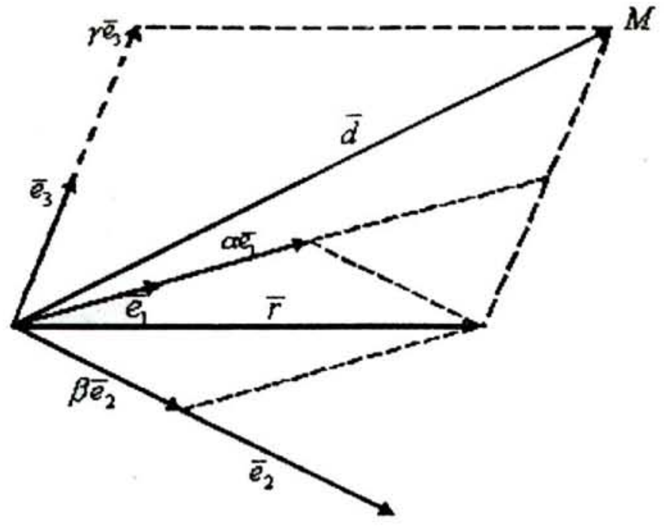


Рис. 3.10

В дальнейшем в качестве базиса чаще всего будем рассматривать ортонормированную систему векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис.3.11). Первая координата называется абсциссой, вторая ординатой, третья аппликатой.

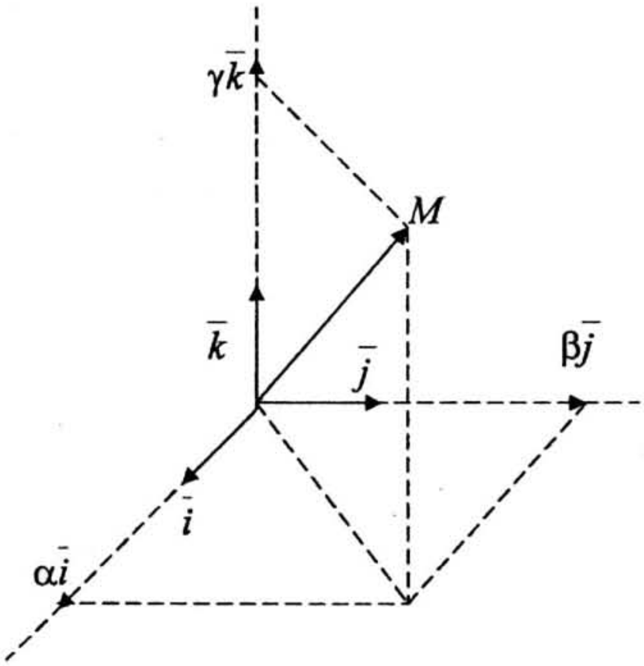


Рис. 3.11

Очевидно, что при заданной системе координат координаты точки определяются однозначно, но и для каждой упорядоченной тройки чисел найдется одна единственная точка, имеющая эти числа в качестве координат.

Рассмотрим точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, заданные в некоторой декартовой системе координат O, $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$.

Тогда $\overline{OA}=x_1\overline{e_1}+y_1\overline{e_2}+z_1\overline{e_3}$, $\overline{OB}=x_2\overline{e_1}+y_2\overline{e_2}+z_2\overline{e_3}$. Используя свойства операций с векторами, имеем: $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(x_2-x_1)\overline{e_1}+(y_2-y_1)\overline{e_2}+(z_2-z_1)\overline{e_3}$, и , следовательно, вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$.

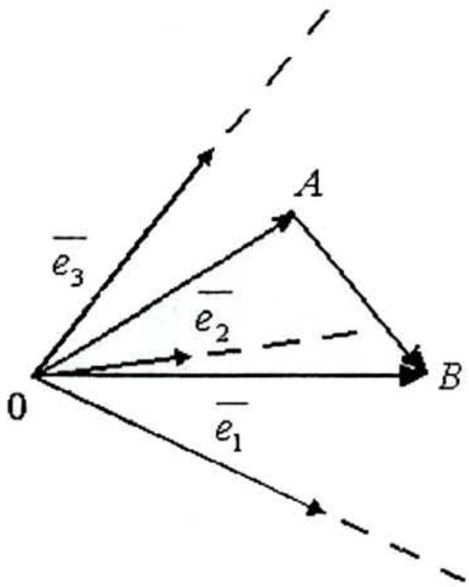


Рис. 3.12

Вывод: Чтобы найти координаты вектора, заданного началом и концом, нужно из координат конца вычесть координаты начала.
Пример. $A(1,2,3)$, $B(-3,8,5)$, тогда $\overline{AB}$=(-4;6;2) .

Декартова система координат –не единственный способ определения положения точки при помощи чисел. На плоскости часто употребляется полярная система координат. Она определена, если задана точка 0(полюс) и исходящий из полюса луч (p), называемый полярной осью. Положение точки определяется длиной радиуса-вектора $|\overline{OM}| = r \geq 0$ и углом φ, на который нужно повернуть полярную ось до совпадения с вектором $\overline{OM}$. Угол, измеряемый в радианах, берется со знаком «+», если поворот совершается против часовой стрелки и со знаком «-», если по часовой стрелке. Для взаимнооднозначного соответствия между точкой M и парой (φ, r) необходимо ограничить φ неравенством $-\pi < \varphi \leq \pi$ или $0 \leq \varphi < 2\pi$, в противном случае точке соответствует бесконечно много пар чисел. Числа φ и r - полярные координаты точки.

Рассмотрим на плоскости ортонормированную декартову систему координат, поместив её начало в полюс O и направив полярную ось по оси абсцисс (рис. 3.13).

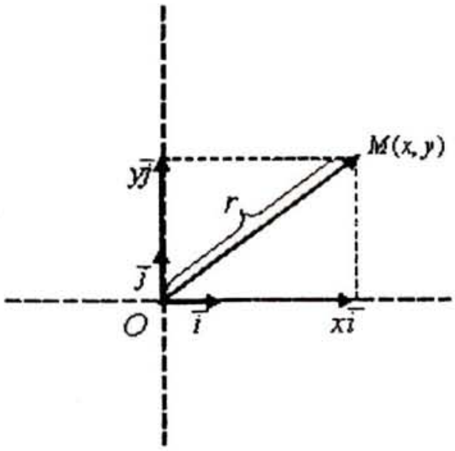


Рис. 3.13

Из рисунка легко видеть, что декартовы координаты точки выразятся через полярные так:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Заметим, что $x^2 + y^2 = r^2$, $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$.

Из школьного курса более привычным является изображение системы координат без указания базисных векторов (рис. 3.14.) с указанием масштаба на координатных осях.

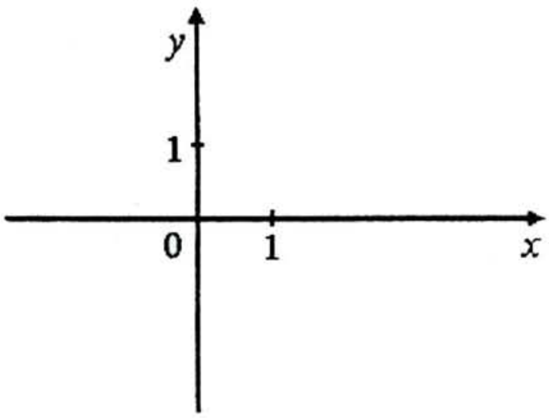


Рис. 3.14

В дальнейшем будем использовать тот или иной способ в зависимости от конкретной задачи.

Пример. Запишем уравнение окружности (рис. 3.15) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ в полярной системе координат. Имеем: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow$ $r^2 = 2r\cos\varphi \Rightarrow r = 2\cos\varphi$. Видно, что в полярной системе координат уравнение окружности имеет более простой вид.

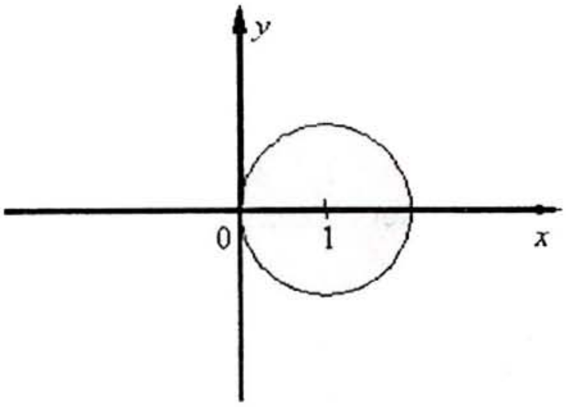


Рис. 3.15

Пример. Найдем координаты точки $M(-1;\sqrt{3})$, заданной в ортонормированной декартовой системе координат, в полярной системе координат (рис. 3.16).

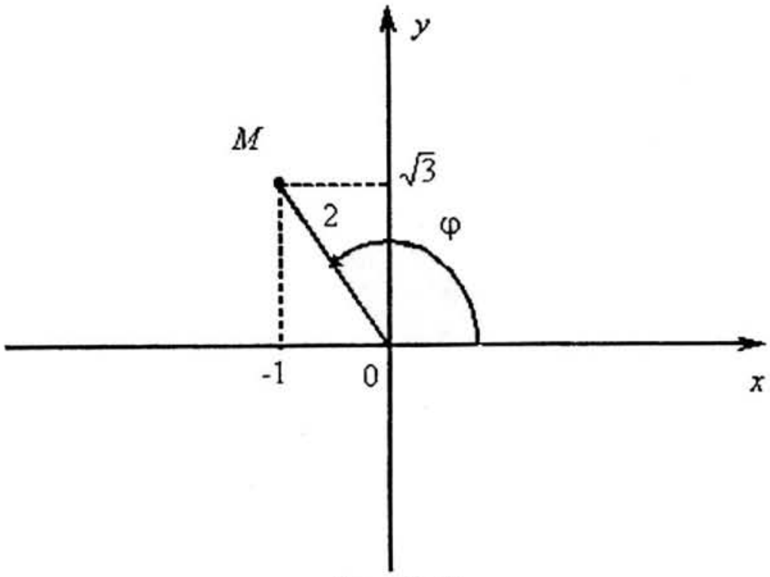


Рис. 3.16

Длина вектора $\overline{OM}$

$r=|\overline{OM}|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2;$

$$\begin{cases}-1=2\cdot\cos\varphi\\ \sqrt{3}=2\cdot\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow M(\frac{2\pi}{3};2)$$ в полярной системе

координат.

Рассмотрим задачу о делении отрезка в заданном отношении. Найдём координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda:\mu$, то есть $AC:CB=\lambda:\mu$ ($\lambda>0$, $\mu>0$) (рис. 3.17). Это условие можно записать в виде $\mu\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$.

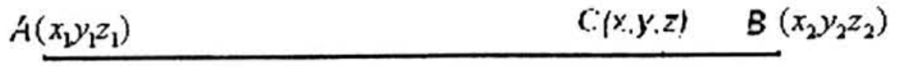


Рис. 3.17

Векторы $\mu\overline{AC}$ и $\lambda\overline{CB}$ имеют координаты $\mu\overline{AC}=(\mu(x-x_1);\ \mu(y-y_1);\ \mu(z-z_1))$, $\lambda\overline{CB}=(\lambda\ (x_2-x);\ \lambda\ (y_2-y);\ \lambda\ (z_2-z))$. Из единственности разложения вектора по базисным векторам и равенства $\mu\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$ следует

$$\begin{cases} \mu(x-x_1)=\lambda(x_2-x)\ , \\ \mu(y-y_1)=\lambda(y_2-y)\ , \\ \mu(z-z_1)=\lambda(z_2-z). \end{cases}$$

Из этих равенств получим

$$\begin{cases} x=\dfrac{\mu x_1+\lambda x_2}{\lambda+\mu}, \\ y=\dfrac{\mu\, y_1+\lambda\, y_2}{\lambda+\mu}, \\ z=\dfrac{\mu\, z_1+\lambda\, z_2}{\lambda+\mu}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Следствие. Формулы середины отрезка следуют из полученных формул при $\lambda=\mu=1$, то есть

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\ , \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\ , \\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2}\ . \end{cases} \tag{3.3}$$

Если решается задача о делении отрезка на плоскости xOy, например, то из формул (3.2) остаются только первые две.

3.3. Скалярное произведение векторов. Геометрическая и алгебраическая проекции вектора на вектор

Определение 3.10. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 3.18), обозначаемое $(\bar{a},\bar{b})$.Под углом между векторами понимаем кратчайший угол между векторами, равными данным, имеющими общее начало.

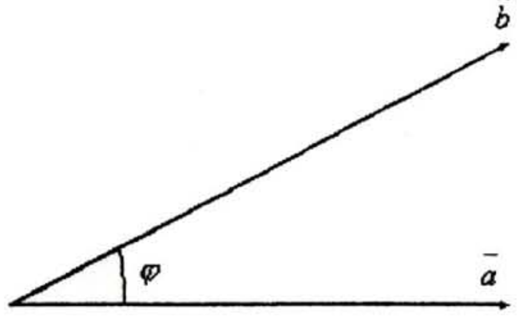


Рис. 3.18

Таким образом, можно записать $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, то есть скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$,
2) $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$,
3) $(\bar{a},\bar{b})=0$ тогда и только тогда, когда один из векторов нулевой или вектора ортогональны (перпендикулярны).

Эти свойства следуют из определения скалярного произведения. Следующие свойства приведём без доказательства:

4) $(\alpha\,\bar{a},\bar{b})=\alpha\,(\bar{a},\bar{b})=(\bar{a},\alpha\,\bar{b})$,
5) $(\bar{a}+\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},\bar{c})+(\bar{b},\bar{c})$,
6) $(\alpha\,\bar{a}+\beta\,\bar{b},\bar{c})=\alpha\,(\bar{a},\bar{c})+\beta\,(\bar{b},\bar{c})$.

Пусть $\bar{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ заданы в базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$. Тогда

$(\bar{a},\bar{b})=(\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3,\ \beta_1\bar{e}_1+\beta_2\bar{e}_2+\beta_3\bar{e}_3)=\alpha_1\beta_1(\bar{e}_1,\bar{e}_1)+$
$\alpha_1\beta_2(\bar{e}_1,\bar{e}_2)+\alpha_1\beta_3(\bar{e}_1,\bar{e}_3)+\alpha_2\beta_1(\bar{e}_2,\bar{e}_1)+\alpha_2\beta_2(\bar{e}_2,\bar{e}_2)+\alpha_2\beta_3(\bar{e}_2,\bar{e}_3)+$
$\alpha_3\beta_1(\bar{e}_3,\bar{e}_1)+\alpha_3\beta_2(\bar{e}_3,\bar{e}_2)+\alpha_3\beta_3(\bar{e}_3,\bar{e}_3)$.

Если $\bar{e}_1=\bar{i}$, $\bar{e}_2=\bar{j}$, $\bar{e}_3=\bar{k}$, то из определения скалярного произведения следует $(\bar{e}_1,\bar{e}_1)=(\bar{i},\bar{i})=|\bar{i}|^2=1, (\bar{e}_2,\bar{e}_2)=(\bar{j},\bar{j})=1, (\bar{e}_3,\bar{e}_3)=(\bar{k},\bar{k})=1$. Остальные скалярные произведения равны нулю, так как $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ попарно ортогональны. Таким образом, в ортогональном базисе $(\bar{a},\bar{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

Пример. $\bar{a}=(1,2,-3)$, $\bar{b}=(-2,3,4)$, тогда $(\bar{a},\bar{b})=-2+6-12=-8$.

Так как $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$, то $|\bar{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$, если $\bar{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ задан в ортонормированном базисе.

Определение 3.11. Ортом вектора $\bar{a}$ называется вектор, коллинеарный $\bar{a}$, одинаково направленный, с длиной, равной единице, обозначаемый $\bar{a}^{o}$.

Из определения следует, что $\bar{a}^{o}=\frac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$, то есть $\bar{a}^{o}=(\frac{\alpha_1}{|\bar{a}|};\frac{\alpha_2}{|\bar{a}|};\frac{\alpha_3}{|\bar{a}|})$.

Обозначим α,β,γ - углы, которые составляет вектор $\bar{a}$ с базисными векторами $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Из определения скалярного произведения следует:

$(\bar{a}^{o},\bar{i})=|\bar{a}^{o}|\cdot|\bar{i}|\cdot\cos\alpha=1\cdot1\cdot\cos\alpha$, с другой стороны, $(\bar{a}^{o},\bar{i})=\frac{\alpha_1}{|\bar{a}|}\cdot1+\frac{\alpha_2}{|\bar{a}|}\cdot0+$

$+\frac{\alpha_3}{|\bar{a}|}\cdot0=\frac{\alpha_1}{|\bar{a}|}$. Таким образом, $\cos\alpha=\frac{\alpha_1}{|\bar{a}|}$. Аналогично получим $\frac{\alpha_2}{|\bar{a}|}=\cos\beta$, $\frac{\alpha_3}{|\bar{a}|}=\cos\gamma$, то есть, координаты орта $\bar{a}^{o}$ равны косинусам углов, которые вектор $\bar{a}$ составляет с осями координат, направленными по базисным векторам (рис. 3.19).

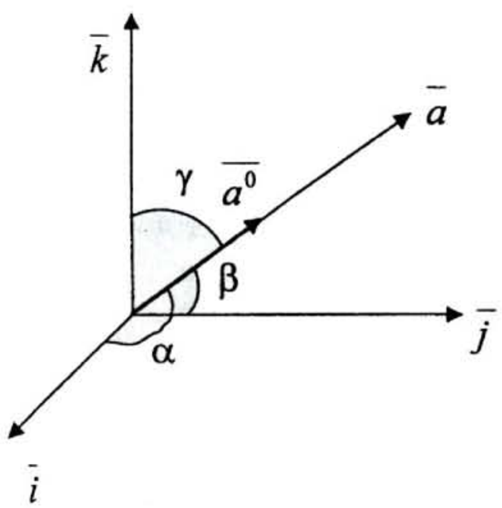


Рис. 3.19

Так как $\bar{a}^{o}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и $|\bar{a}^{o}|=1$, то получим следующее соотношение для углов:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (3.5)$$

Пример. Найдём угол, который вектор $\bar{a}=(1,-2,2)$ составляет с осью Oy, направленной вдоль $\bar{j}$. Для этого найдём $\bar{a}^{o}=\frac{1}{3}\bar{a}=(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$.

Следовательно, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\beta = \arccos(-\frac{2}{3}) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$.

Из определения скалярного произведения следует формула для нахождения косинуса угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}. \tag{3.6}$$

В ортонормированном базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ формула (3.6) примет вид

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}. \tag{3.7}$$

Пусть в пространстве заданы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Поместим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ началом в некоторую точку O, из конца вектора $\bar{b}$ проведём перпендикуляр до пересечения с прямой, на которой расположен вектор $\bar{b}$. Вектор $\bar{p}$, начало которого в точке O, а конец в точке пересечения прямых, называется геометрической проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (рис. 3.20).

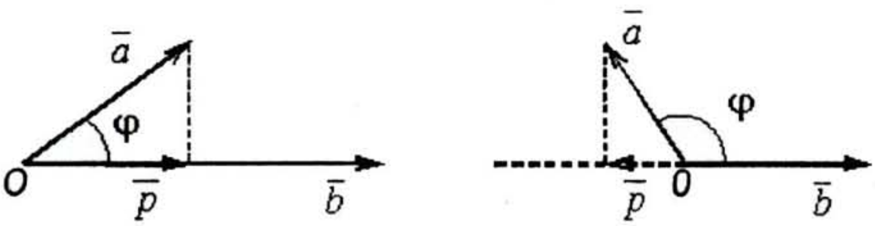


Рис. 3.20

Если φ - острый, то $\bar{p}$ сонаправлен с $\bar{b}$, если φ-тупой, то $\bar{p}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены. Рассмотрим первый случай (φ-острый):

$$\bar{p} = |\bar{p}|\cdot\bar{b}^{\circ} = |\bar{a}|\cdot\cos\varphi\cdot\bar{b}^{\circ} = |\bar{a}|\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\cdot\bar{b}^{\circ} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|}\cdot\bar{b}^{\circ}.$$

Во втором случае (φ - тупой):

$$\bar{p} = -|\bar{p}|\cdot\bar{b}^{\circ} = -|\bar{a}|\cdot\cos(\pi-\varphi)\cdot\bar{b}^{\circ} = |\bar{a}|\cdot\cos\varphi\cdot\bar{b}^{\circ} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|}\cdot\bar{b}^{\circ}. \tag{3.8}$$

Видим, что формула для геометрической проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ не зависит от того, острый или тупой угол между векторами.

Определение 3.12. Алгебраической проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число $\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|}$, обозначаемое $\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

Из рассмотренного ранее следует, что алгебраическая проекция $\bar{a}$ на $\bar{b}$ равна длине геометрической проекции (вектора $\bar{p}$), взятой со знаком "+", если угол между векторами острый и со знаком "-", если тупой.

Пример. Найдём алгебраическую и геометрическую проекции $\bar{a}=(1, -2, 3)$ на $\bar{b}=(-1, 2, -2)$.

$$\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{-1-4-6}{\sqrt{1+4+4}} = -\frac{11}{3}, \quad \bar{p} = \text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}\cdot\bar{b}^{\circ} = -\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{|\bar{b}|}\cdot\bar{b} =$$

$$= -\frac{11}{9}\bar{b} = (\frac{11}{9}; -\frac{22}{9}; \frac{22}{9}).$$

3.4. Векторное произведение векторов

Определение 3.13. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов, помещённых началом в одну точку, называется правой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки, и левой в противоположном случае (по часовой стрелке).

На рис. 3.21 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ -правая тройка, $\bar{q}, \bar{p}, \bar{r}$ -левая.

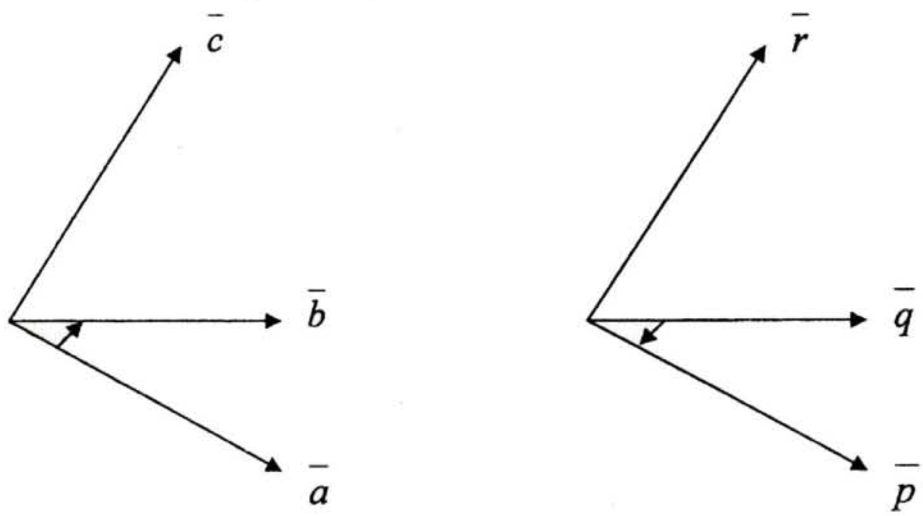


Рис. 3.21

Определение 3.14. Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ - угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ -правая (рис. 3.22).

Из определения следует, что длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах.

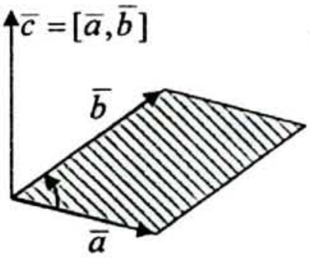


Рис. 3.22

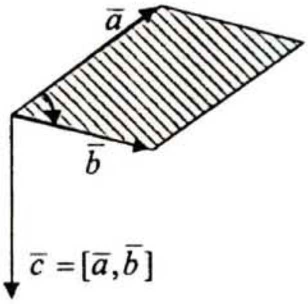


Рис. 3.23

Векторное произведение обозначается символом $[\bar{a},\bar{b}]$.

Пример. $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$, так как $|[\bar{i},\bar{j}]|=|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$,

$\bar{k}\perp\bar{i}$, $\bar{k}\perp\bar{j}$ и тройка $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$-правая.

Заметим, что $[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}$, $[\bar{i},\bar{i}]=0$, $[\bar{j},\bar{j}]=0$, $[\bar{k},\bar{k}]=0$, $[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k}$, $[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}$, $[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i}$.

Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарные (нулевой вектор также считаем коллинеарным любому вектору).

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $[\bar{a},\bar{b}]=-[\bar{b},\bar{a}]$,

2) $k[\bar{a},\bar{b}]=[k\bar{a},\bar{b}]=[\bar{a},k\bar{b}]$,

3) $[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}]=[\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c}]$.

Выведем формулу вычисления векторного произведения, если векторы $\bar{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ заданы в ортонормированном базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, используя приведённые ранее свойства:

$[\bar{a},\bar{b}]=[\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k},\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}]=\alpha_1\beta_1[\bar{i},\bar{i}]+\alpha_1\beta_2[\bar{i},\bar{j}]+$
$+\alpha_1\beta_3[\bar{i},\bar{k}]+\alpha_2\beta_1[\bar{j},\bar{i}]+\alpha_2\beta_2[\bar{j},\bar{j}]+\alpha_2\beta_3[\bar{j},\bar{k}]+\alpha_3\beta_1[\bar{k},\bar{i}]+$
$+\alpha_3\beta_2[\bar{k},\bar{j}]+\alpha_3\beta_3[\bar{k},\bar{k}]=0+\alpha_1\beta_2\bar{k}-\alpha_1\beta_3\bar{j}-\alpha_2\beta_1\bar{k}+0+\alpha_2\beta_3\bar{i}+$
$+\alpha_3\beta_1\bar{j}-\alpha_3\beta_2\bar{i}+0=\bar{i}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+\bar{j}(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+\bar{k}(\alpha_1\beta_2-$
$-\alpha_2\beta_1)$.

Векторное произведение можно записать в виде символического определителя

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}, \tag{3.9}$$

который вычисляется разложением определителя по элементам первой строки.

Пример. $\bar{a}=(1,2,3)$ $\bar{b}=(-1,4,-3)$

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & -3\end{vmatrix}=\bar{i}A_{11}+\bar{j}A_{12}+\bar{k}A_{13}=\bar{i}M_{11}-\bar{j}M_{12}+\bar{k}M_{13}=$$

$$=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}(-6-12)-\bar{j}(-3+3)+\bar{k}(4+2)=$$

$$=-18\bar{i}-0\cdot\bar{j}+6\cdot\bar{k}=(-18,0,6).$$

Пример. Найдём площадь треугольника с вершинами в точках $A(1,0,1)$, $B(3,2,0)$, $C(6,4,1)$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & 4 & 0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}|+4\bar{i}-5\bar{j}-2\bar{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+25+4}=\frac{1}{2}\sqrt{45}=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

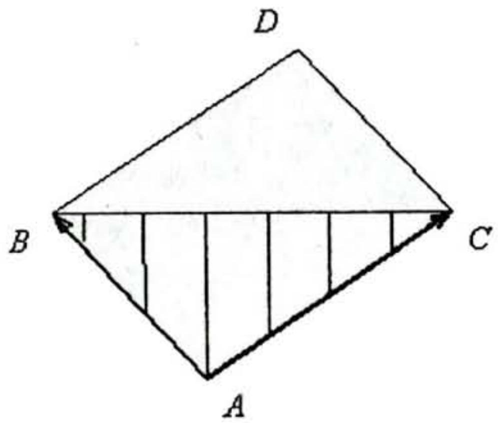


Рис. 3. 24

3.5. Смешанное произведение векторов

Определение 3.15. Число $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})$ называется смешанным произведением векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Покажем, что смешанное произведение по модулю равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах (рис. 3. 25).Оно положительно, если $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$-правая тройка и отрицательно, если $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$-левая тройка.

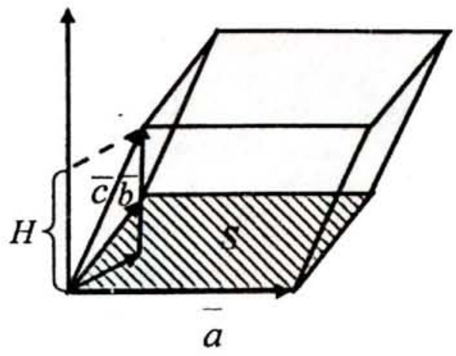


Рис. 3.25

$|[\bar{a},\bar{b}]|=S$ по свойству векторного произведения, $|\text{Пр}_{[\bar{a},\bar{b}]}\bar{c}|=H_{\text{паралл.}}$,

следовательно, $V_{\text{пар.}}=|[\bar{a},\bar{b}]|\cdot|\text{Пр}_{[a,b]}\bar{c}|=|[\bar{a},\bar{b}]|\cdot\left|\frac{([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})}{|[\bar{a},\bar{b}]|}\right|=|([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})|$, что и требовалось доказать. Если $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$-правая тройка, то угол между $[\bar{a},\bar{b}]$ и $\bar{c}$ острый $\Rightarrow([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})>0$, если левая, то угол тупой $\Rightarrow([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})<0$.

Приведём свойства смешанного произведения (без доказательства)

1) $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})=(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

Это свойство позволяет обозначить смешанное произведение символом $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, не указывая порядок операций;

2) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}=\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}$ (циклическая перестановка);

3) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$ тогда и только тогда, когда $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарные.

4) перемена местами двух сомножителей меняет знак смешанного произведения :

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=-\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c},\ \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=-\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b},\ \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=-\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}.$$

5) если $\bar{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{c}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ заданы в ортонормированном базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, то

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}.$$

Пример. $\bar{a}=(1,2,3)$ $\bar{b}=(-1,4,8)$, $\bar{c}=(1,8,14)$

Докажем, что $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны. Найдём смешанное произведение векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 8\\ 1 & 8 & 14\end{vmatrix}=1\cdot M_{11}-2M_{12}+M_{13}=1\cdot(-8)-2(-22)+3(-12)=$$

$= -8+44-36=0.$

Следовательно, по свойству 3 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Пример. Найдём объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$=(-1,3,8), $\bar{b}$=(0,1,-2), $\bar{c}$=(-3,1,2):

$$V=\left\|\begin{matrix}-1 & 3 & 8\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 2\end{matrix}\right\|=|-1\cdot 4-3\cdot(-6)+8\cdot 3|=|38|=38\ .$$

Заметим, что $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}>0$ в этом примере. Это означает, что тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая.

Без доказательства отметим, что объём треугольной пирамиды (тетраэдра), построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, построенного на этих векторах, то есть $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}|\overline{\text{abc}}|$.

4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

4.1. Плоскость

Задать плоскость в пространстве можно разными способами: тремя точками, парой пересекающихся прямых, точкой и прямой, но основным для нас способом определить положение плоскости в пространстве будет задание точки, через которую проходит плоскость, и вектора, перпендикулярного к плоскости (нормального вектора) (рис. 4.1) в системе координат с осями, направленными по $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

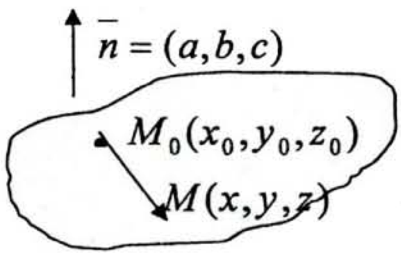


Рис. 4.1

Точка M будет принадлежать плоскости, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\bar{n}=(a,b,c)$ тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$, то есть $(\overline{M_0M}, \bar{n})$=0.

Вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и в ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ $(\overline{M_0M}, \bar{n})= a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$, следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (4.1)$$

или $$ax+by+cz+d=0\text{, где } d=-ax_0-by_0-cz_0. \qquad (4.2)$$

Уравнение вида (4.2) называется линейным уравнением первого порядка с переменными x,y,z.

Заметим, что в общем уравнении плоскости (4.2) координаты нормального вектора являются коэффициентами при x,y,z.

Пример. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1,2,-3), перпендикулярно вектору $\bar{n}=(-2,1,8)$, имеет вид $-2(x-1)+1\cdot(y-2)+8(z+3)=0$ или $-2x+y+8z+24=0$.

Рассмотрим уравнение первого порядка, определяющее плоскость в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (4.3)$$

Положим $x=0$, $y=0$, тогда $z=c$, то есть плоскость проходит через точку $C(0,0,c)$. Положив $x=0$, $z=0$, получим точку $B(0,b,0)$, принадлежащую плоскости, положив $y=0$, $z=0$, получим точку $A(a,0,0)$ (рис. 4.2).

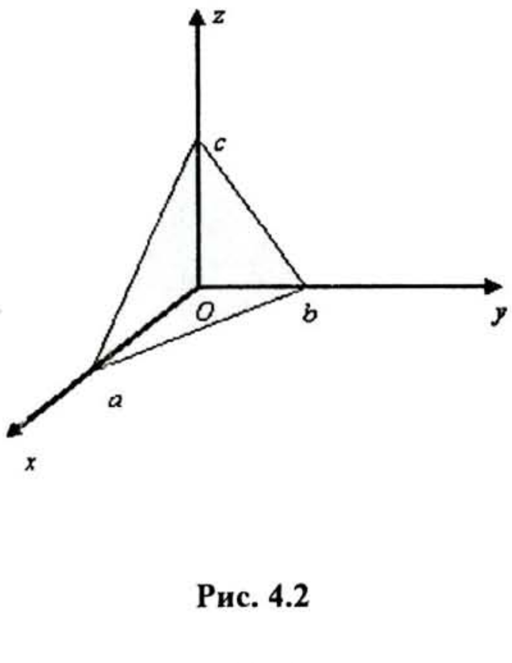


Рис. 4.2

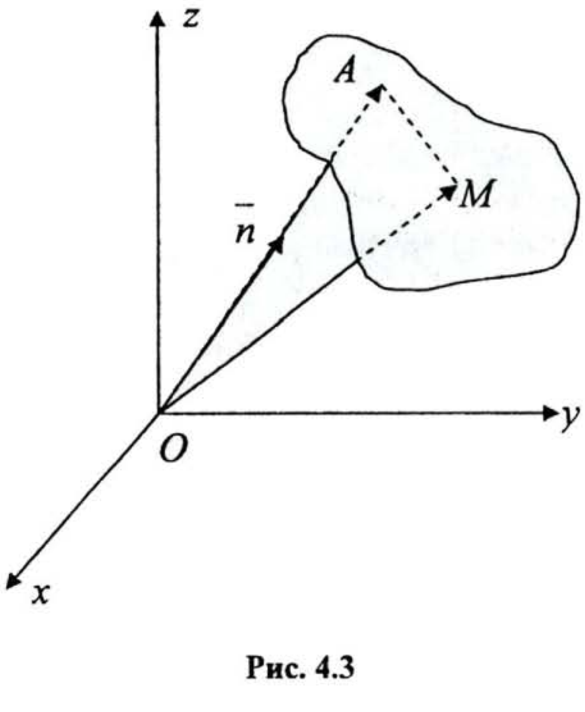


Рис. 4.3

Уравнение (4.3) называется уравнением плоскости в отрезках на осях. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Пример. $2x-3y+4z-12=0$ –уравнение плоскости. Легко видеть, что уравне-ние в отрезках на осях имеет вид. $\frac{x}{6}-\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$.

Получим ещё один специальный вид уравнения плоскости – нормальное уравнение плоскости.

Пусть плоскость задана единичным нормальным вектором $\overline{n}^0$, начало которого в начале координат, и расстоянием от начала координат до плоскости $p = OA$ (рис. 4.3) :

$$OA = \text{Пр}_{\overline{n}^0}\overline{OM} = \frac{(\overline{OM},\overline{n}^0)}{|\overline{n}^0|} = (\overline{OM},\overline{n}^0) = \cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z\ .$$

Таким образом, $\cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z - p = 0$ (4.4)
-нормальное уравнение плоскости.

Если плоскость задана уравнением $ax+by+cz+d=0$ ($d<0$) и, следовательно, a, b, c- координаты нормального к плоскости вектора, то делением на $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ получим уравнение плоскости, в котором коэффициенты при x,y,z будут координатами единичного вектора нормали и, следовательно, получим нормальное уравнение плоскости. Отметим, что модуль свободного члена будет равен расстоянию от начала координат до плоскости.

Пример. Приведём к нормальному виду уравнение плоскости $-x+2y-2z+18=0$.

Умножением на -1 получим $x-2y+2z-18=0$
$\overline{n} = (1,-2,2), |\overline{n}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Поделив на 3, получим нормальное уравнение плоскости $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 6 = 0$.

Расстояние от начала координат до плоскости равно 6.

Приведём некоторые частные случаи общего уравнения плоскости:

1) $ax+by+cz=0$-плоскость проходит через начало координат,
2) $ax+by+d=0$- плоскость параллельна оси Oz, если $d=0$, то плоскость проходит через ось Oz,
3) $ax+bz+d=0$- плоскость параллельна оси Oy, проходит через ось Oy,если $d=0$,
4) $ay+bz+d=0$-плоскость параллельна оси Ox, если $d=0$,то проходит через ось Ox,
5) $ax+d=0$ ($a\neq 0$), тогда $x=-\frac{d}{a}$ - плоскость проходит через точку $(-\frac{d}{a},0,0)$ перпендикулярно оси Ox,
6) $by+d=0$ ($b\neq 0$)-плоскость проходит через точку $(0,-\frac{d}{b},0)$ перпендикулярно оси Oy,
7) $cz+d=0$ ($c\neq 0$)- плоскость проходит через точку $(0,0,-\frac{d}{c})$ перпендикулярно оси Oz,

8) уравнения $x=0, y=0, z=0$ определяют координатные плоскости yOz, xOz, xOy соответственно.

4.2. Прямая в пространстве

Положение прямой в пространстве однозначно можно определить, задав точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая, и вектор $\bar{l}=(m, n, p)$, которому прямая параллельна (рис. 4.4). Вектор $\bar{l}$ называется направляющим вектором прямой.

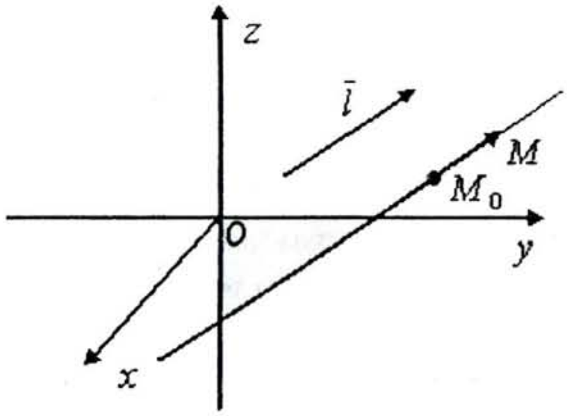


Рис. 4.4

Точка $M(x, y, z)$ будет принадлежать прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\bar{l}$. Этот факт можно записать так

$$\overline{M_0M} = t\,\bar{l}. \tag{4.5}$$

Из равенства вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и вектора $t\,\bar{l}=(tm, tn, tp)$ следует

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn, \\ z - z_0 = tp. \qquad (t \in R) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \tag{4.6}$$

Система (4.6)- параметрические уравнения прямой. Изменение параметра от $-\infty$ до $+\infty$ позволяет получить все точки на прямой. Выражая t из каждого уравнения системы (4.6) и приравнивая полученные выражения, имеем:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{4.7}$$

- канонические уравнения прямой.

Пример. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2, -3)$ параллельно вектору $\bar{l}=(2, 3, -4)$, имеют вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-4}.$$

Приравнивая поочерёдно части двойного равенства к t, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=t, \\ \dfrac{y-2}{3}=t, \\ \dfrac{z+3}{-4}=t. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+3t, \\ z=-3-4t. \end{cases}$$

В формально составленных уравнениях (4.7) могут оказаться нули в знаменателе. Обращение в нуль одного знаменателя означает обращение в нуль числителя.

Пример. $M_0(-1, 3, 8)$, $\bar{l}=(1, 0, -2)$. Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-8}{-2}.$$

Приравнивая к t с учётом предыдущего замечания, получим

$$\begin{cases} x+1=t, \\ y=3, \\ z-8=-2t. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=-1+t, \\ y=3, \\ z=8-2t. \end{cases}$$

Получили прямую, перпендикулярную оси Oy, лежащую в плоскости $y=3$, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку (0, 3, 0) на оси Oy.

Пример. Составим уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 2, 3)$ и $B(-3, 4, 8)$. В качестве опорной точки возьмём $A(1,2,3)$, а качестве направляющего вектора $\overline{AB}=(-4;2;5)$. Тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{5}.$$

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения плоскостей:

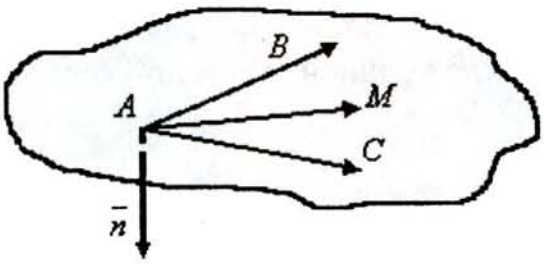
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Так как прямая принадлежит обеим плоскостям, то она перпендикулярна нормалям $\overline{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ и $\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Следовательно, векторное произведение $[\overline{n_1}, \overline{n_2}]$ параллельно прямой и может быть взято в качестве направляющего вектора. В качестве точки M_0 может быть взято любое решение системы (4.8).

4.3. Прямая и плоскость. Основные задачи

Рассмотрим на конкретных примерах основные задачи на прямую и плоскость.

Задача 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,2,3)$, $B(4,0,2)$, $C(1,-2,5)$.



Решение

Из определения векторного произведения следует, что нормальный вектор

$$\overline{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \overline{i}A_{11} + \overline{j}A_{12} + \overline{k}A_{13} = \overline{i}M_{11} - \overline{j}M_{12} + \overline{k}M_{13} =$$

$$= \overline{i}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8\overline{i} - 6\overline{j} - 12\overline{k} = (-8, -6, -12).$$

Вектор $\overline{n_1} = (4,3,6)$ также вектор нормали ($\overline{n_1} \parallel \overline{n}$), тогда из равенства $(\overline{AM}, \overline{n_1})=0$ следует $4(x-1)+3(y-2)+6(z-3)=0$ или $4x+3y+6z-28=0$-уравнение искомой плоскости.

Задача 2. Найти канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Решение

Направляющий вектор прямой $\bar{l}=[\overline{n_1},\overline{n_2}]$, где $\overline{n_1}=(1;2;3)$, $\overline{n_2}=(3;1;4)$ - нормальные векторы плоскостей (3.2.), есть вектор

$$\bar{l}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot 5-\bar{j}(-5)+\bar{k}(-5)=(5;5;-5).$$

Вектор $\bar{l}_1=(1,1,-1)$ также направляющий вектор, так как $\bar{l}\parallel\bar{l}_1$. Найдём точку M_0, принадлежащую прямой. Для этого в (4.9) положим $z=0$, тогда

$$\begin{cases} x+2y=13, \\ 3x+y=14, \\ z=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=5, \\ z=0, \end{cases}$$

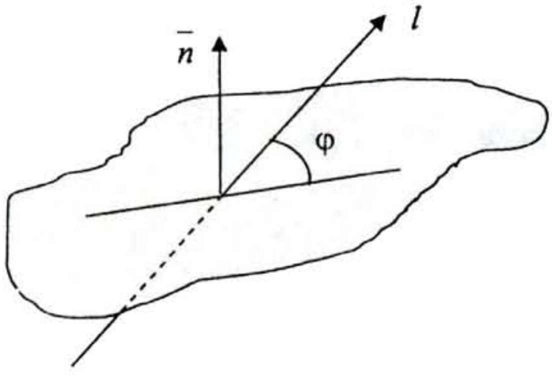
следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-1}.$$

Задача 3. Найти угол между плоскостью $2x+y+z-4=0$ и прямой, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=1-\dfrac{3}{2}t \end{cases}$$

Заметим, что углом между плоскостью и прямой называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.



Решение

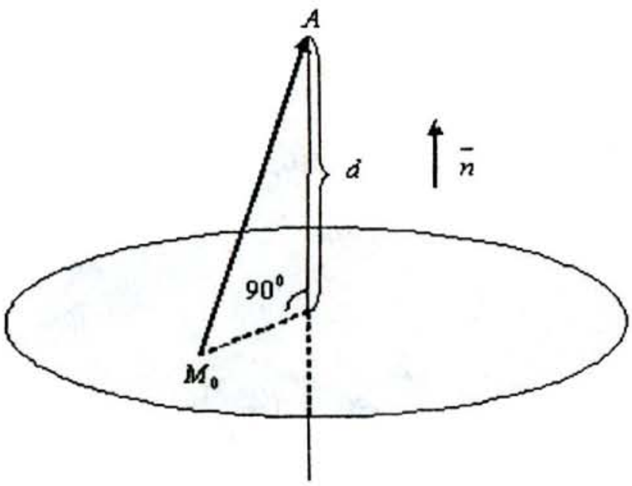
Из уравнения плоскости находим нормальный вектор плоскости $\bar{n} = (2,1,1)$, из уравнения прямой направляющий вектор $\bar{l}=(1,3,-\frac{3}{2})$, тогда

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \frac{(\bar{n},\bar{l})}{|\bar{n}|\cdot|\bar{l}|} = \frac{2+3-\frac{3}{2}}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+9+\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, один из углов $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 4. Найти расстояние от точки $A(5,1,-1)$ до плоскости x-2y-2z+4=0, то есть длину перпендикуляра, опущенного из точки A до пересечения с плоскостью.



Решение

Из уравнения плоскости находим нормальный вектор $\bar{n} = (1,-2,-2)$, а положив в урабнении x=0,y=0, находим z=2, и, следовательно, точка $M_0(0,0,2)$ принадлежит плоскости. Из определения алгебраической проекции вектора на вектор следует

$$d = \left|\text{Пр}_{\bar{n}}\,\overline{M_0A}\right| = \left|\frac{(\overline{M_0A},\bar{n})}{|\bar{n}|}\right| = \left|\frac{5\cdot1+1\cdot(-2)-3\cdot(-2)}{\sqrt{1+4+4}}\right| = 3.$$

Задача 5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ с плоскостью x+2y+3z-29=0.

Решение

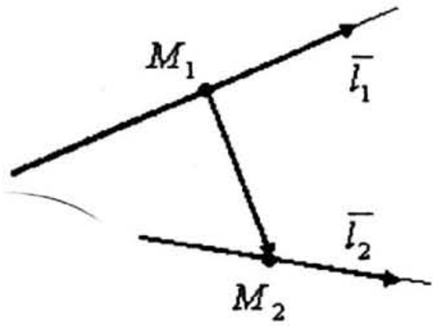
Запишем уравнения прямой в параметрической форме $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t+1, \\ z = 2t-1. \end{cases}$

Так как точка пересечения принадлежит и плоскости и прямой, то её координаты являются решением системы

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t+1, \\ z = 2t-1, \\ x+2y+3z-29=0. \end{cases}$$

Подставим *x, y, z,* выраженные через *t*, в последнее уравнение, получим $10t$-30=0 или t=3. Подставляя найденное *t* в первые три уравнения, получим точку (6,4,5) пересечения плоскости и прямой.

Задача 6. Определить взаимное расположение прямых $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$, то есть определить, являются ли они параллельными, пересекающимися или скрещивающимися.



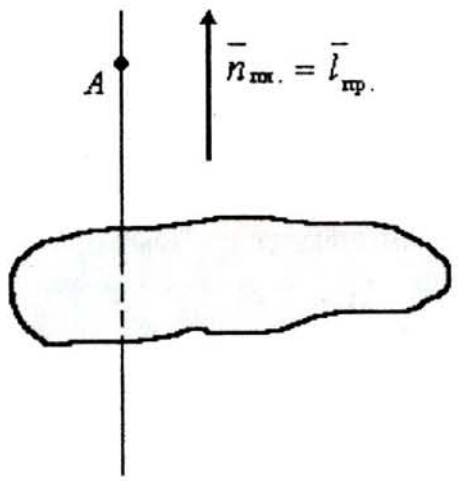
Решение

Векторы $\overline{l_1}$=(1,1,2), $\overline{l_2}$=(1,3,4)-направляющие векторы прямых, $\overline{l_1}$ и $\overline{l_2}$ неколлинеарные, так как их координаты непропорциональны, следовательно, прямые непараллельные. Из уравнений прямых находим точки $M_1(-1,0,1)$ и $M_2(0,-1,2)$, принадлежащие прямым. Если прямые пересекаются или параллельны, то векторы $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{M_1 M_2}$ компланарные, если скрещиваются, то не компланарные. Тестом на компланарность является равенство нулю смешанного произведения $\overline{l_1}\,\overline{l_2}\,\overline{M_1 M_2}$. В данном случае $\overline{l_1}\,\overline{l_2}\,\overline{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, следовательно, прямые скрещиваются.

Задача 7. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1,2,4)$ перпендикулярно плоскости x-y+2z-3=0.

Решение

Нормальный к плоскости вектор будет направляющим для прямой, следовательно, уравнения прямой имеют вид $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$.



4.4. Прямая на плоскости

Из школьного курса геометрии известно уравнение прямой вида $y=kx+b$, где k-тангенс угла наклона прямой к оси Ox (рис. 4.5).

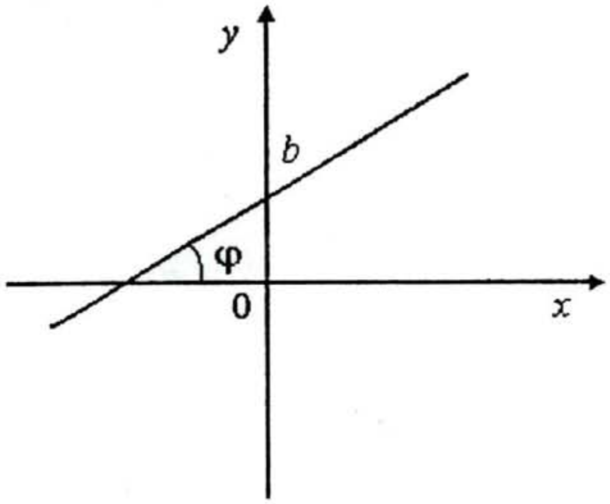


Рис. 4.5

Можно однозначно определить прямую на плоскости, задавая точку M_0, через которую проходит прямая, и параллельный или перпендикулярный ей вектор.

Составим уравнение прямой, задавая точку M_0 и параллельный прямой вектор $\bar{l} = (m, n)$ (рис. 4.6).

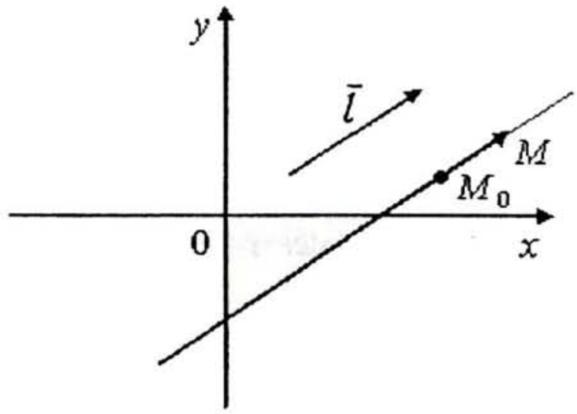


Рис. 4.6

Точка M будет принадлежать прямой тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \parallel \bar{l}$, то есть, $\overline{M_0M} = t\bar{l}$ или

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn. \end{cases} \tag{4.10}$$

Приравнивая выражения для t из уравнений системы (4.10), получим уравнение прямой в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{4.11}$$

Составим уравнение прямой, задавая точку M_0 и перпендикулярный ей вектор $\bar{n} = (a, b)$ (рис. 4.7).

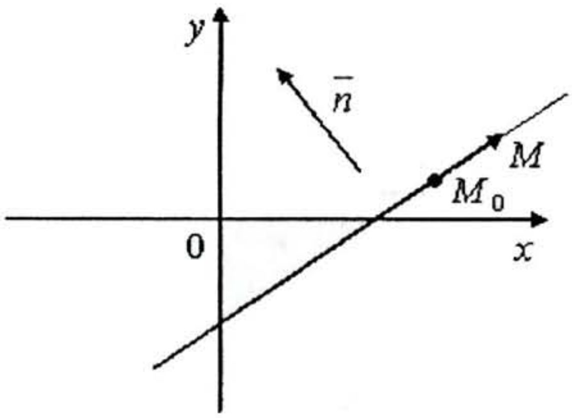


Рис. 4.7

Точка M будет принадлежать прямой тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$, то есть $(\overline{M_0M}, \overline{n})=0$ или $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

Окончательно уравнение прямой примет вид

$$ax+by+d=0\ , \qquad (4.12),$$

где $d=-ax_0-by_0$.

Укажем ещё два вида уравнения прямой на плоскости:

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - уравнение прямой в отрезках на осях (рис. 4.8);

$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$ ($p>0$)-уравнение плоскости в нормальном виде. Вектор $\overline{n^0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$-единичный нормальный вектор прямой. Расстояние от начала координат до прямой равно p (рис. 4.9).

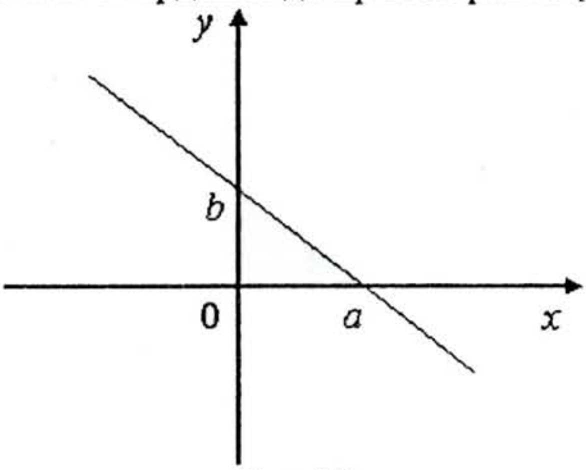


Рис. 4.8

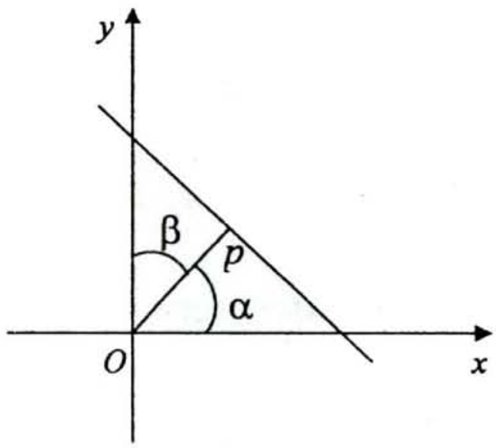


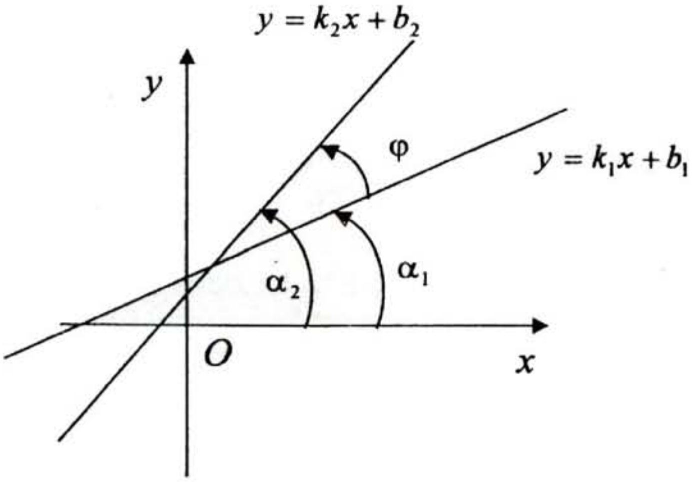
Рис. 4.9

Пример. Найдём расстояние от начала координат до прямой $3x-4y+125=0$. Поделим обе части уравнения на $|\overline{n}|$, $\overline{n}=(3,-4)$ - нормальный вектор прямой. Уравнение примет вид $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+25=0$. Умножив уравнение на -1, получим уравнение прямой в нормальном виде $-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-25=0$. Искомое расстояние равно 25.

4.5. Прямая на плоскости. Основные задачи

Задача 1. Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$. Найти угол φ между прямыми, то есть угол, на который нужно повернуть прямую l_1 до совпадения с прямой l_2.

Решение



Угол $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}$,если $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, то $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Если прямые перпендикулярны ($\varphi = \dfrac{\pi}{2}$), то из формулы $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}$ следует $0 = 1 + k_1k_2$, то есть $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Таким образом, условием перпендикулярности прямых является равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Задача 2. Найти угол между прямыми $2x - 3y + 7 = 0$ и $4x - 8y + 9 = 0$.

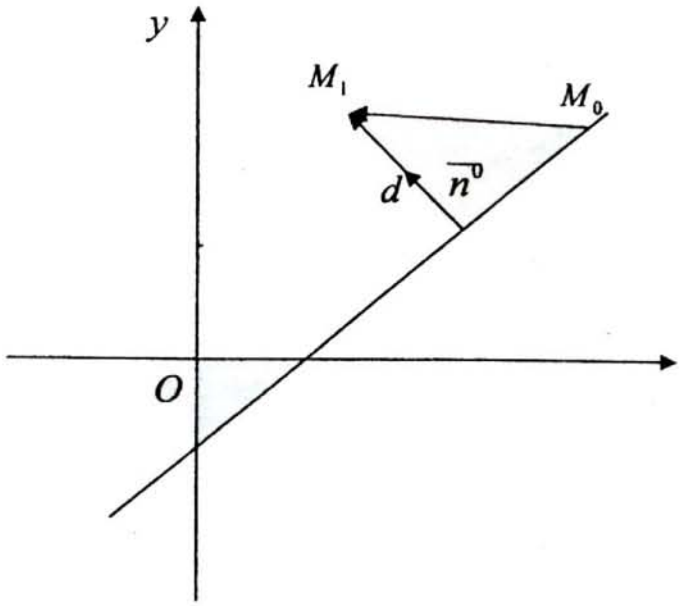
Решение

Приведём уравнения прямых к виду с угловым коэффициентом $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{8}$.

Так как $k_1 = \dfrac{2}{3}$, $k_2 = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}} = -\dfrac{1}{8}$ и $\varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$ -угол, на который нужно повернуть первую прямую до совпадения со второй.

Задача 3. Найти расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $ax + by + c = 0$.

Решение



Приведём уравнение прямой к нормальному виду

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0. \qquad (4.13)$$

Пусть точка M_0 принадлежит прямой. Вектор

$\overline{n^0}=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ перпендикулярен прямой, следовательно,

$$d=\left|\text{Пр}_{\overline{n^0}}\overline{M_0M_1}\right|=\left|\frac{(\overline{M_0M_1},\overline{n^0})}{\left|\overline{n^0}\right|}\right|=\left|(\overline{M_0M_1},\overline{n^0})\right|=$$

$$=\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(x_1-x_0)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(y_1-y_0)\right|=$$

$$=\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1-(+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_0+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_0)\right|.$$

Так как точка M_0 принадлежит прямой, то координаты удовлетворяют уравнению (4.13):

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_0+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_0+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ или

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_0+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_0=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

следовательно, $d=\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$ (4.14)

5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

5.1. Эллипс

Определение 5.1. Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы находились на оси Ox в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Сумму расстояний обозначим $2a$ (рис. 5.1). Из определения эллипса следует $MF_1 + MF_2 = 2a$, то есть

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ или $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Возводя обе части в квадрат и проделав некоторые преобразования, получим уравнение эллипса в виде

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2-c^2>0$. Обозначив $a^2-c^2=b^2$, имеем уравнение эллипса в каноническом виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.1}$$

Эллипс имеет формулу, изображённую на рис. 5.2 Заметим, что $a > b$, поэтому будем называть отрезок A_1A_2 большой осью эллипса, отрезок B_1B_2 - малой осью.

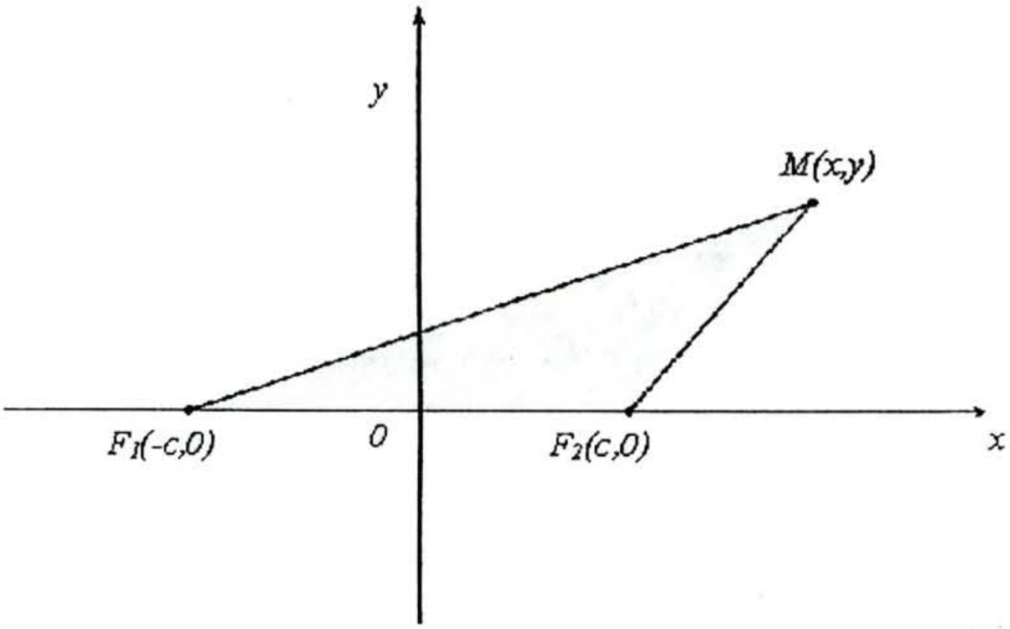


Рис. 5.1

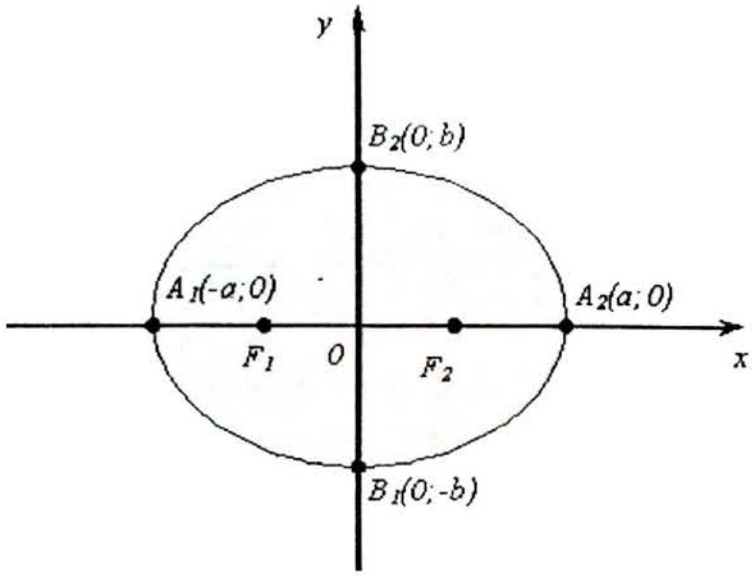


Рис. 5.2

При $a=b$ уравнение эллипса превращается в уравнение окружности с центром в начале координат.

Определение 5.2. Эксцентриситетом эллипса называется отношение половины расстояния между фокусами к большой полуоси.

Если фокусы эллипса на оси Ox, то эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$. Ясно, что $0<\varepsilon<1$, так как $0<c<a$. Эксцентриситет эллипса показывает степень сплющенности эллипса. Чем меньше ε, тем эллипс менее сплющенный. При $\varepsilon=0$ эллипс превращается в окружность.

Рассмотрим эллипс, фокусы которого в точках $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$ на оси Oy (рис. 5.3), а сумма расстояний равна $2b$. Тогда $MF_1+MF_2=2b$ или $\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b$.

Проделав некоторые преобразования, получим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$, где $a^2=b^2-c^2$, то есть $a<b$ (рис. 5.4). В этом случае $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$.

Пример. Найдём эксцентриситет и координаты фокусов эллипса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Из уравнения следует $a=3, b=4$. Так как $a<b$, то фокусы эллипса на оси Oy, $c^2=b^2-a^2=7$. Следовательно, $F_1(0;-\sqrt{7}), F_2(0,\sqrt{7})$, $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

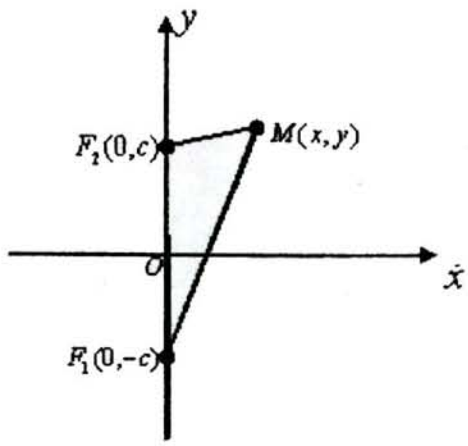


Рис. 5.3

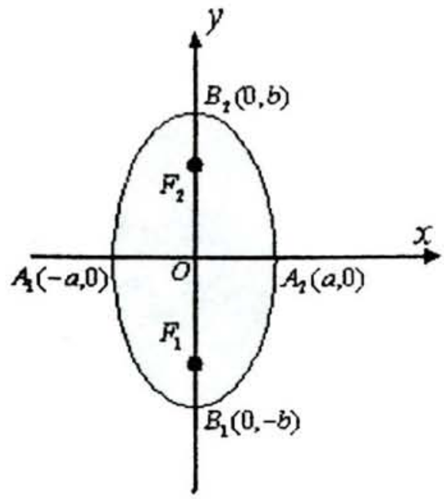


Рис. 5.4

5.2. Гипербола

Определение 5.3. Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от каждой из них до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы находились в точках $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ на оси Ox (рис. 5.5).

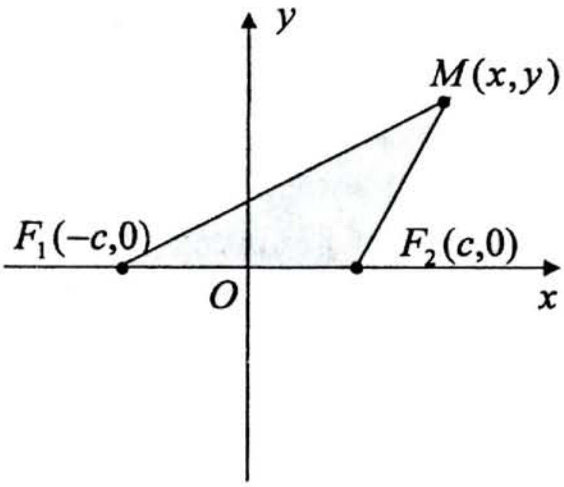


Рис. 5.5

Обозначая модуль разности расстояний $2a$, имеем, $|MF_1 - MF_2| = 2a$ $(a > 0)$ или

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a. \qquad (5.2)$$

После некоторых преобразований с учётом того, что $a < c$, уравнение (5.2) приведётся к виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$. (5.3)

Гипербола имеет форму, изображённую на рис. 5.6, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

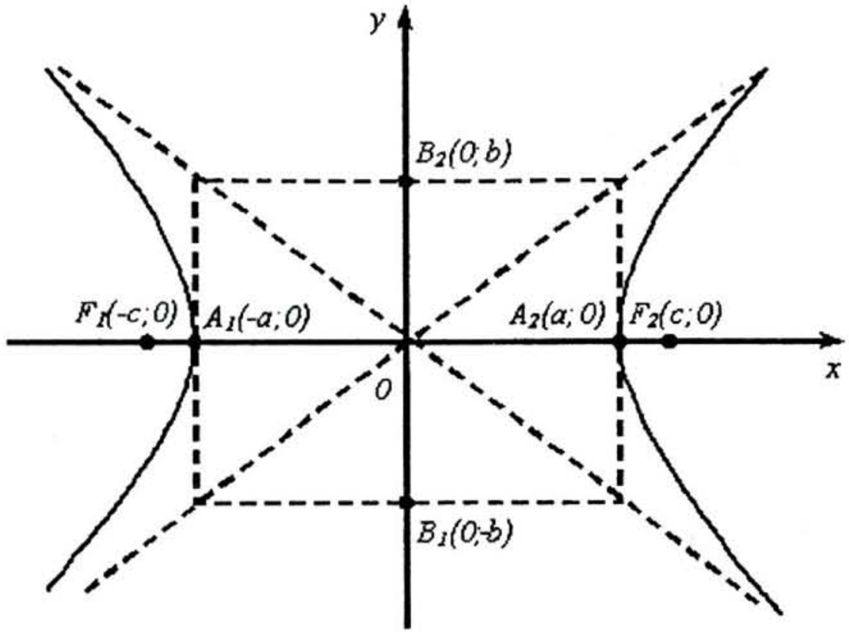


Рис. 5.6

Отрезки A_1A_2, B_1B_2 называются действительной и мнимой осью гиперболы соответственно.

Определение 5.4. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение половины фокусного расстояния к действительной полуоси.

Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы.

Чем меньше $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}$, тем меньше $\frac{b}{a}$, и, следовательно, тем более вытянут вдоль действительной оси основной прямоугольник гиперболы, проходящей через точки A_1, B_1, A_2, B_2.

Рассмотрим гиперболу, фокусы которой находятся в точках $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$ (рис. 5.7.), обозначим модуль разности расстояний $2b$. Из определения следует $|MF_1 - MF_2| = 2b$. После некоторых преобразований получим уравнение гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, где $a^2 = c^2 - b^2$.

Форма гиперболы с фокусами на оси Oy показана на рис. 5.8. Асимптотами являются прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

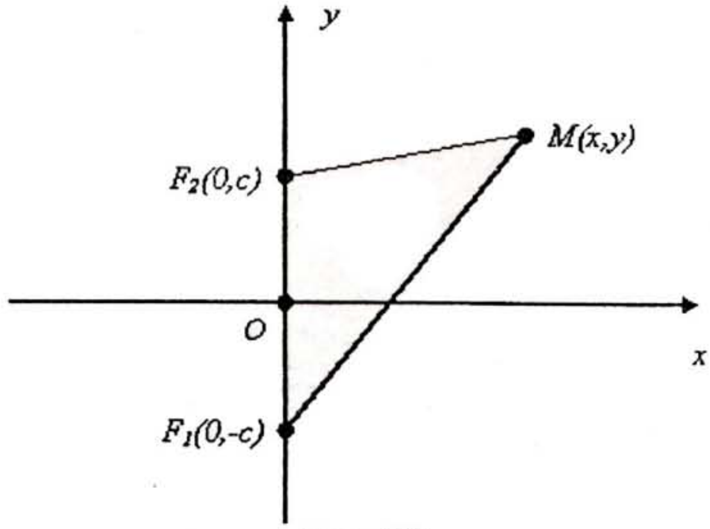


Рис. 5.7

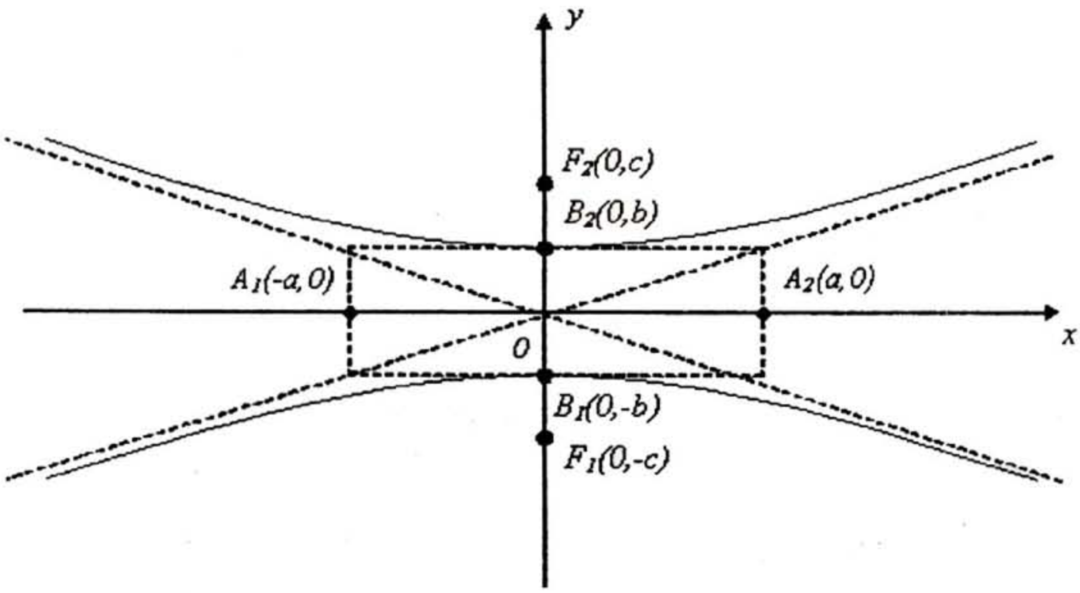


Рис. 5.8

Пример. Найдём действительную и мнимую полуоси гиперболы $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$, её эксцентриситет, координаты фокусов.

Из уравнения гиперболы $a = 5, b = 4$, фокусы на оси Oy. Тогда $c^2 = a^2 + b^2 = 41, c = \sqrt{41}$, $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{41}}{4}$, фокусы $F_1(0;-\sqrt{41}), F_2(0;\sqrt{41})$.

5.3. Парабола

Определение 5.5. Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса до директрисы называется параметром параболы и обозначается p $(p>0)$.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы фокус находился на оси Ox, а директриса была бы ей перпендикулярна (рис. 5.9).

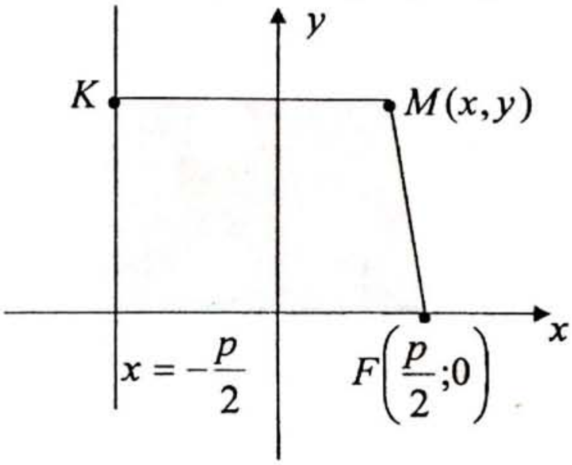


Рис. 5.9

Проведём MK перпендикулярно директрисе. Из определения параболы следует $MF=MK$, то есть $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим $x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x+px+\frac{p^2}{4}$, то есть

$$y^2=2px. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) называется каноническим уравнением параболы. Парабола будет иметь форму, изображённую на рис. 5.10.

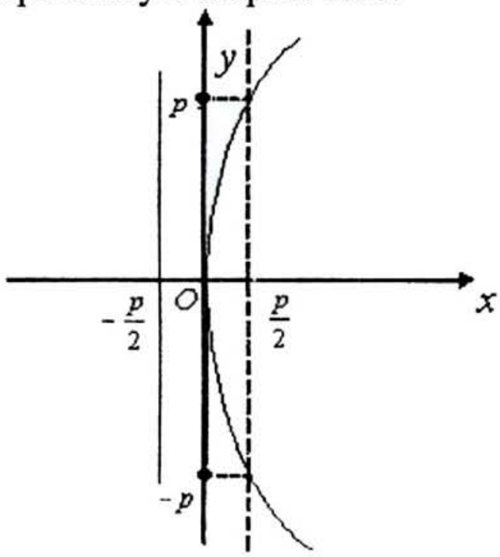


Рис. 5.10

При неограниченном возрастании x неограниченно возрастает $|y|$, парабола проходит через O (0,0)- вершину параболы.

Если фокус параболы находится слева от начала координат, то уравнение параболы имеет вид $y^2=-2px$ (рис. 5.11). Если фокус находится на оси Oy в точке $F(0;\frac{p}{2})$ (рис. 5.12), то уравнение примет вид $x^2 = 2py$, если в точке $F(0;-\frac{p}{2})$ (рис. 5.13), то $x^2 = -2py$.

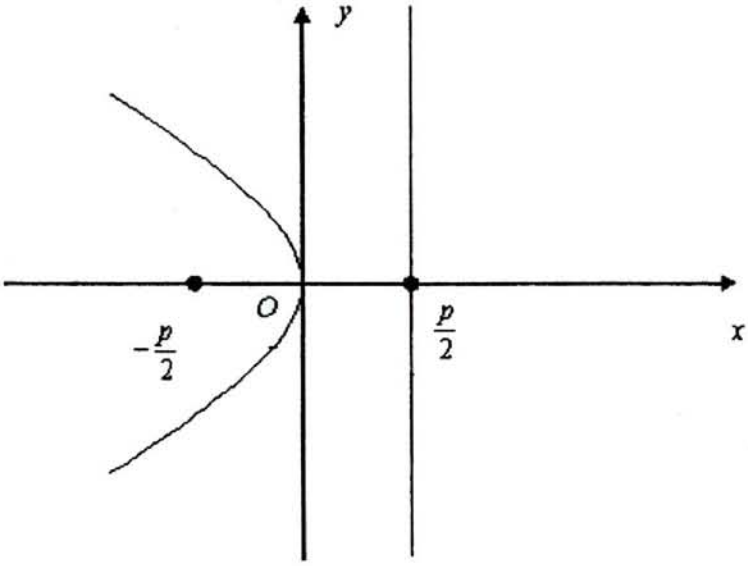


Рис. 5.11

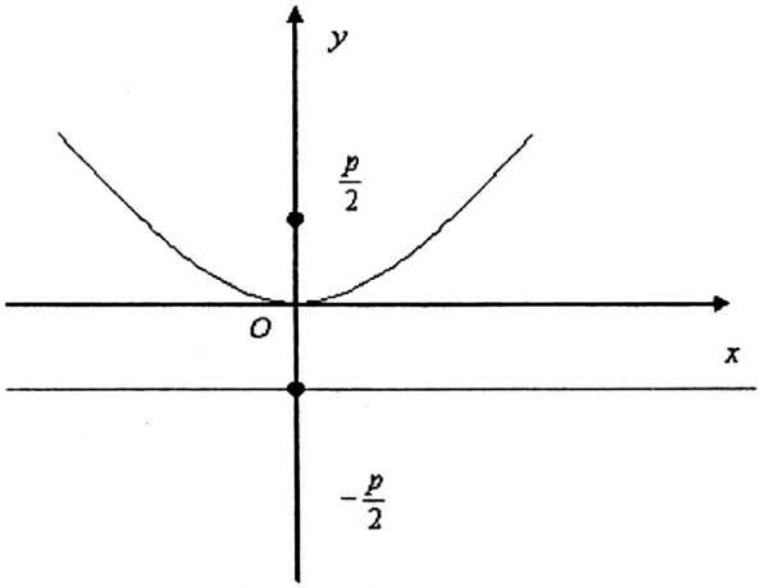


Рис. 5.12

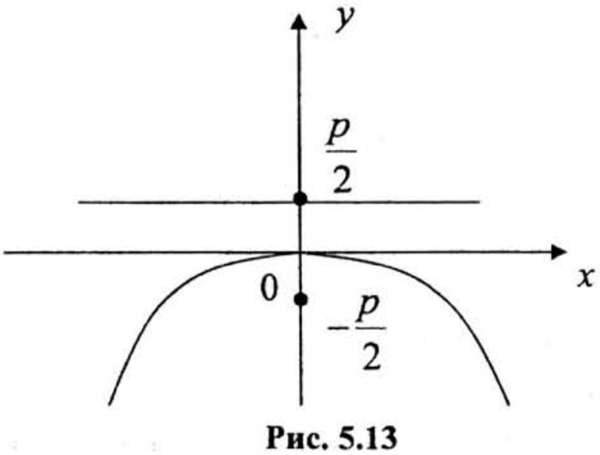


Рис. 5.13

5.4. Преобразование декартовой прямоугольной системы координат на плоскости

Рассмотрим две декартовы системы координат $0, \bar{i}, \bar{j}$ и $0', \bar{i}, \bar{j}$, то есть новая система координат получена параллельным переносом старой системы координат центром в точку $0'$ (рис. 5.14). Произвольная точка M имеет координаты *(x, y)* в старой системе координат и (x', y') в новой.

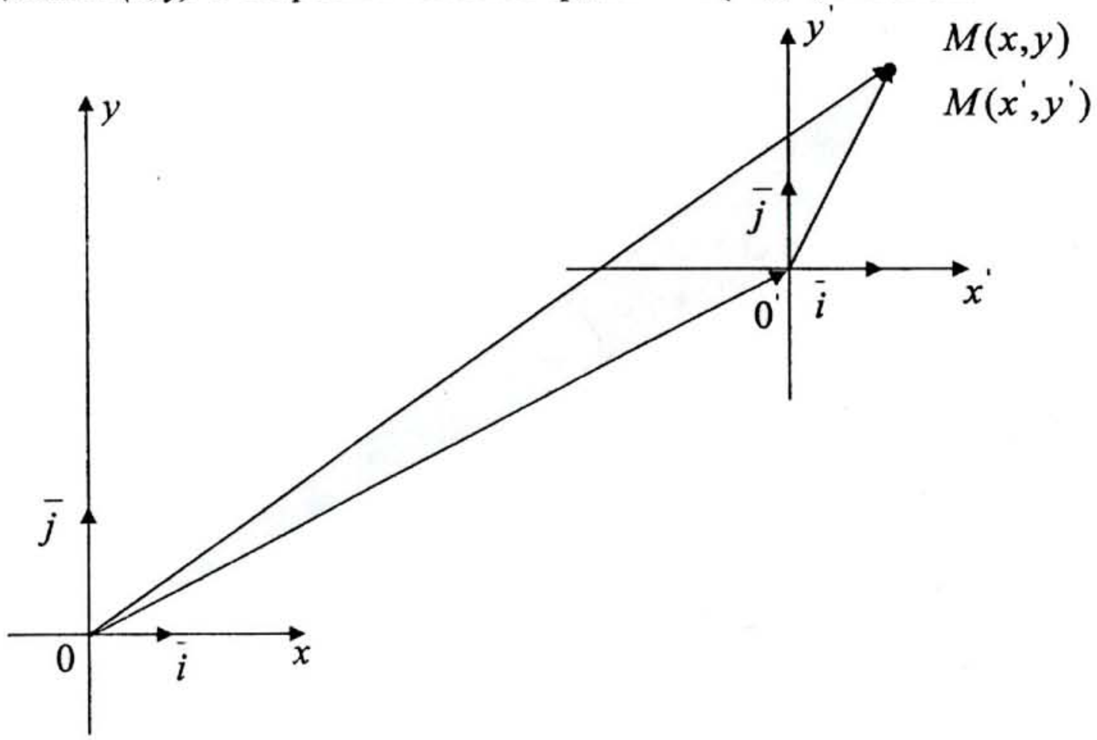


Рис. 5. 14

Из чертежа видно, что $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$.

Обозначим координаты точки O' в старой системе координат *(a, b)*, тогда $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$, $\overline{OO'} = a\bar{i} + b\bar{j}$, $\overline{O'M} = x'\bar{i} + y'\bar{j}$ и, следовательно, $x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j}$ или $(x - a - x')\bar{i} + (y - b - y')\bar{j} = 0$. Так , $\bar{i}, \bar{j}$ - базис, то $(x - a - x') = 0$ и $y - b - y' = 0$. Формулы связи старых и новых координат при параллельном переносе примут вид

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases} \tag{5.5}$$

Выведем формулы связи при повороте осей координат на один и тот же угол с сохранением масштаба, т.е. рассматриваем старую систему координат $O, \bar{i}, \bar{j}$ и новую $O, \bar{e}_1, \bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$, и $\bar{e}_2$ -единичные векторы (рис. 5.15).

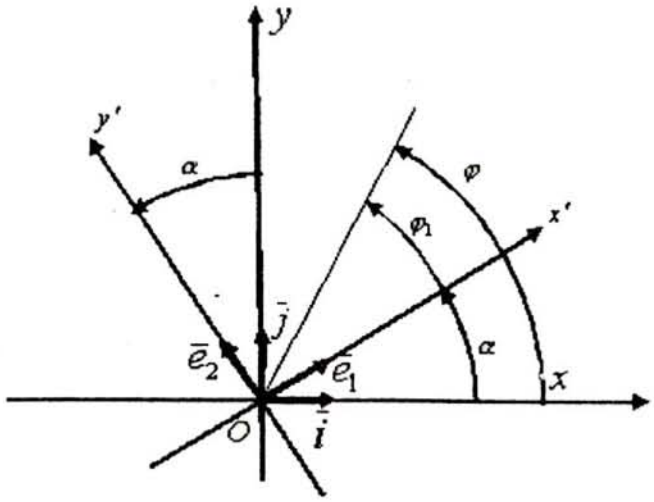


Рис. 5.15

Введём две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox'. Тогда $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $\begin{cases} x' = r\cos\varphi_1, \\ y' = r\sin\varphi_1. \end{cases}$

Так как $\varphi = \varphi_1 + \alpha$, то

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi_1 + \alpha) = r(\cos\varphi_1\cos\alpha - \sin\varphi_1\sin\alpha) = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,, \\ y = r\sin(\varphi_1 + \alpha) = r(\sin\varphi_1\cos\alpha + \cos\varphi_1\sin\alpha) = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha\,. \end{cases}$$

Следовательно, при повороте на угол α системы координат формулы связи примут вид

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Если новая система координат $O'x'y'$ получена из старой Oxy параллельным переносом и последующим поворотом на угол α, то

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,, \\ y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\,, \end{cases} \tag{5.7}$$

где (a, b)-координаты нового начала O' в старой системе координат.

Пример. Напишем формулы связи при параллельном переносе в точку $O'(2;-3)$ и последующем повороте на 45^o.

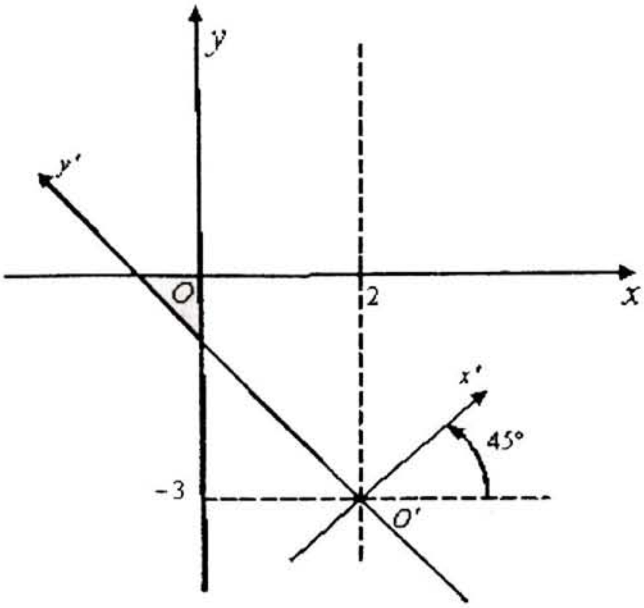


Рис. 5.16

$$\begin{cases} x = 2 + \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \\ y = -3 + \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

5.5. Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости

Определение 5.6. Общим уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (5.8)$$

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5.1. Всегда существует декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение (5.8) принимает один из следующих канонических видов:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	(1)	$y^2 = 2px$	(6)
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	(2)	$y^2 - a^2 = 0$	(7)
$a^2x^2 + c^2y^2 = 0$	(3)	$y^2 + a^2 = 0$	(8)
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	(4)	$y^2 = 0$	(9)
$a^2x^2 - c^2y^2 = 0$	(5)		

Уравнениям (2) (мнимого эллипса) и (8) (пары мнимых параллельных прямых) не удовлетворяет ни одна точка на плоскости. Уравнение (1)-уравнение эллипса, (3)-точки (пары мнимых пересекающихся прямых), (4)-гиперболы, (5)-пары пересекающихся прямых, (6)-параболы, (7)-пары параллельных прямых, (9)-пары совпавших прямых. Уравнения (1), (3), (4), (5) определяют на плоскости линии, имеющие центр симметрии, (7), (9) имеют бесконечно много центров.

Составим из коэффициентов уравнения (5.8) два определителя:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \qquad \text{и} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

В зависимости от значений δ и Δ уравнение (5.8) определяет следующий геометрический образ:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (действительный или мнимый)	Точка
$\delta < 0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	Парабола	Пара параллельных прямых (действительных или мнимых)

Пример. Определим тип уравнения

$x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 14y + 15 = 0.$

Так как $A = 1, B = -2, C = 3, D = -4, E = 7, F = 15$, -то

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 7 \\ -4 & 7 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, уравнение определяет пару пересекающихся прямых.

5.6. Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка при $B = 0$ и A и C одновременно не равных нулю:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (5.9)$$

Запишем уравнение (5.9) в новой системе координат $O_1x_1y_1$, полученной из старой параллельным переносом. Формулы связи новых и старых координат имеют вид

$$\begin{cases} x = a + x_1, \\ y = b + y_1. \end{cases} \tag{5.10}$$

Подставляя (5.10) в (5.9), получим после некоторых преобразований
$Ax_1^2 + Cy_1^2 + (2aA + 2D)x_1 + (2bC + 2E)y_1 + (a^2A + b^2C + 2aD + 2bE + F) = 0$.

Положим $2aA + 2D = 0$ и $2bC + 2E = 0$, тогда уравнение (5.9) в новой системе координат примет вид

$$Ax_1^2 + Cy_1^2 + F_1 = 0, \tag{5.11}$$

где $F_1 = a^2A + b^2C + 2aD + 2bE + F$.

Так как $AC \neq 0$, то (5.11)-уравнение эллиптического или гиперболического типа.

Пример. Приведём к каноническому виду уравнение
$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$. Подставим x и y из формул (5.10), получим
$16x_1^2 - 9y_1^2 + (32a - 64)x_1 + (-18b - 54)y_1 + (16a^2 - 9b^2 - 64a -$
$-54b - 161) = 0$.
Из условий $32a - 64 = 0$ и $-18b - 54 = 0$ найдём $a = 2, b = -3$. Центр новой системы координат находится в точке $O_1(2;-3)$, а уравнение примет вид
$16x_1^2 - 9y_1^2 - 144 = 0$ или $\dfrac{x_1^2}{9} - \dfrac{y_1^2}{16} = 1$.

Получим уравнение гиперболы с действительной полуосью $a = 3$, мнимой $b = 4$ (рис. 5.17).

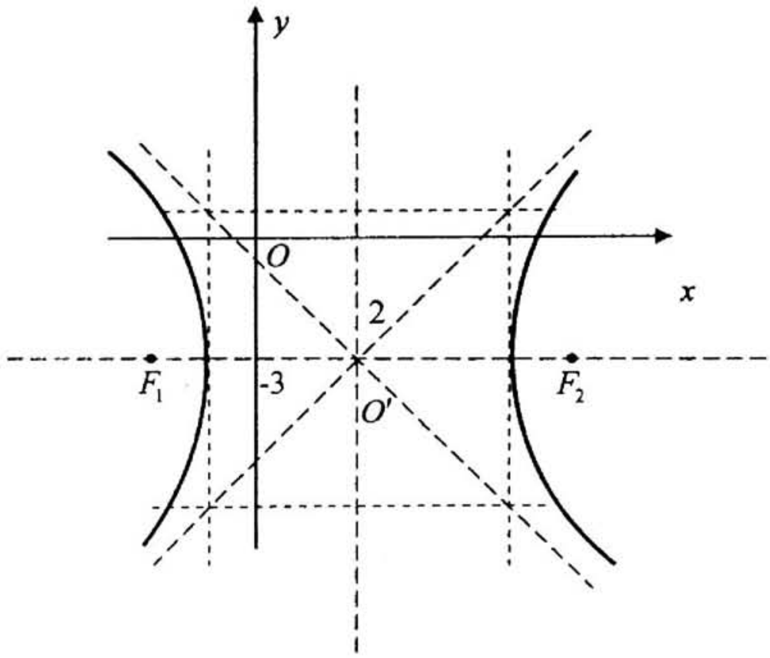


Рис. 5.17

Так как $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 5$, то $F_1(-5{,}0)$, $F_2(5{,}0)$ – фокусы в новой системе координат с учётом формул (5.10) $F_1(-3,-3), F_2(7,-3)$.

Рассмотрим более удобный на практике способ приведения уравнения второго порядка к каноническому виду. Уравнение

$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ преобразуем следующим образом:

$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) = 161$, и выражение в скобках дополним до полных квадратов, добавив недостающее слагаемое. Для сохранения равносильности добавим недостающие слагаемые и в правую часть:

$16(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 6y + 9) = 161 + 64 - 81$, то есть

$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 144$, или $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$.

Обозначив, $x_1 = x - 2$, $y_1 = y - 3$, получим уравнение гиперболы в системе координат $O_1x_1y_1$, полученной из старой Oxy параллельным переносом с центром в точке $O_1(2;-3)$:

$$\frac{x_1^2}{9} - \frac{y_1^2}{16} = 1.$$

Исследование уравнения параболического типа достаточно трудоёмко, поэтому на практике при приведении к каноническому виду уравнения, в котором нет члена, содержащего xy, удобнее пользоваться методом выделения полного квадрата.

Пример. Приведём к каноническому виду уравнение параболического типа $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$ или $x^2 + 10x = 2y - 11$.

Выражение $x^2 + 10x$ дополним до полного квадрата:

$x^2 + 10x + 25 = 2y - 11 + 25$ или $(x+5)^2 = 2(y+7)$.

Обозначим $x_1 = x + 5, y_1 = y + 7$ или $x = x_1 - 5, y = y_1 - 7$, то есть центром новой системы координат является точка $O_1(-5;-7)$, а уравнение в новой системе координат примет вид $x_1^2 = 2y_1$. Это уравнение параболы с $p = 1$ (рис. 5.18).

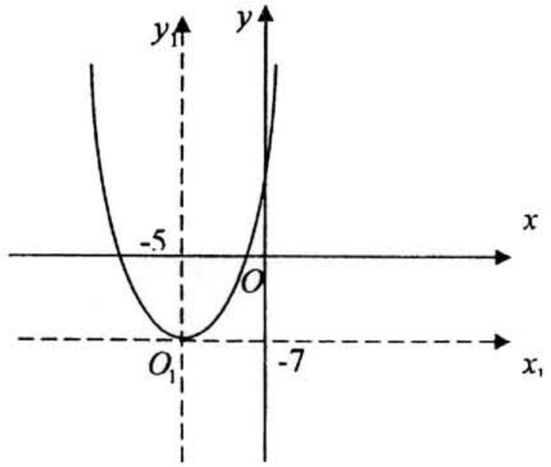


Рис. 5.18

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка
$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ при $B\neq 0, C=D=0$, т.е.

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F=0. \tag{5.12}$$

Найдём угол α, на который нужно повернуть старую систему координат, чтобы в новой системе координат $O_1x_1y_1$ в уравнении отсутствовал член, содержащий x_1y_1. Формулы связи старых и новых координат имеют вид

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{cases} \tag{5.13}$$

Подставляя x и y из формул (5.13) в уравнение (5.12), получим
$(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha)x_1{}^2+(A\sin^2\alpha+C\cos^2\alpha-$

$-2B\cos\alpha\sin\alpha)y_1{}^2+(-2A\cos\alpha\sin\alpha+2C\sin\alpha\cos\alpha+2B\cos^2\alpha-$

$-2B\sin^2\alpha)x_1y_1+F=0$.

Положим $-2A\cos\alpha\sin\alpha+2B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2C\sin\alpha\cos\alpha=0$ или:
$(C-A)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha=0$.

Если $C\neq A$, то для определения угла α получаем уравнение

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2B}{A-C}. \tag{5.14}$$

Если $A=C$, то получим уравнение $\cos 2\alpha=0$, и следовательно, в качестве α можно взять 45^o, то есть старую систему координат надо повернуть на 45^o.

Пример. Приведём к каноническому виду уравнение
$17x^2+12xy+8y^2-20=0$. Используя формулы (5.13), получим
$(17\cos^2\alpha+8\sin^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha)x_1^2+(-34\cos\alpha\sin\alpha+$

$+16\cos\alpha\sin\alpha+12\cos^2\alpha-12\sin^2\alpha)x_1y_1+(17\sin^2\alpha+8\cos^2\alpha-$

$-12\cos\alpha\sin\alpha)y^2-20=0$.

Из условия $-18\cos\alpha\sin\alpha+12\cos^2\alpha-12\sin^2\alpha=0$, поделив на $\cos^2\alpha$, получим $6\operatorname{tg}^2\alpha+9\operatorname{tg}\alpha-6=0$. Решая квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$, найдём $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Возьмём первое решение $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, одно из решений которого $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Так как α – острый, то $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ найдём по формулам
$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Формулы связи новых и старых координат будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_1. \end{cases}$$

и в системе координат Ox_1y_1 получим следующее уравнение кривой:

$20x_1^2 + 5y_1^2 - 20 = 0$ или $\dfrac{x_1^2}{1} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1$-каноническое уравнение эллипса в системе координат Ox_1y_1 (рис. 5.19).

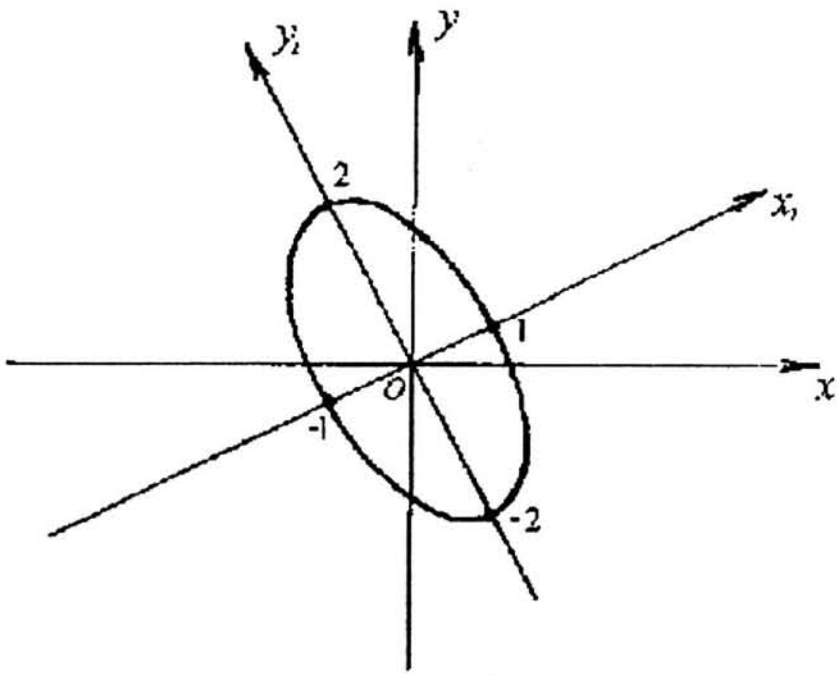


Рис. 5.19

6. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6.1. Переменная величина. Функция

Величины в математике делятся на два класса: постоянные и переменные. Постоянные - те, которые при данном исследовании сохраняют одно и то же значение; переменные могут принимать различные значения при данном исследовании. В дальнейшем будем рассматривать переменную величину, которая может принимать возможные числовые значения без ограничений, либо значения ограничиваются, например, неравенствами. Укажем наиболее распространённые способы изменения величин:

$a \le x \le b \Leftrightarrow x \in [a,b]$

$a < x < b \Leftrightarrow x \in (a,b)$

$a < x \le b \Leftrightarrow x \in (a,b]$

$a \le x < b \Leftrightarrow x \in [a,b)$

$x \ge a \Leftrightarrow x \in [a,+\infty)$

$x \le a \Leftrightarrow x \in (-\infty;a]$

$x > a \Leftrightarrow x \in (a,+\infty)$

$x < a \Leftrightarrow x \in (-\infty;a)$

$-\infty < x < +\infty \Leftrightarrow x \in (-\infty;+\infty)$ - x принимает любые значения. Множества значений переменной величины будет обозначать буквами X, Y и так далее.

Определение 6.1. Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и Y, и пусть по некоторому правилу любому x из множества X ставится в соответствие элемент y из множества Y, причём ни один элемент из множества Y не будет пропущен. Тогда говорят, что переменная y является функцией переменной x. Множество X называется областью определения функции, независимая переменная x называется аргументом, множество Y называется областью изменения функции.

Для указания того факта, что y-функция x, пишут $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ и так далее, где буквы f, φ, F и так далее указывают то правило, по которому вычисляется значение y. Для обозначения функциональной зависимости иногда повторяют букву: $y = y(x)$.

Правило может быть разной природы. Наиболее простым правилом является аналитическое выражение или формула, содержащая указание на те операции или действия, которые надо произвести с аргументом, чтобы получить соответствующее значение функции.

Пример. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1;+\infty)$.

Если при записи формулы не указывается область определения функции, автоматически определяется естественная область определения, т.е. множество всех значений аргумента, позволяющих выполнить с ними все действия по указанному правилу. В примере указана естественная область определения, так как извлечение квадратного корня возможно только при $x+1 \ge 0$.

Функция может быть определена без формулы (описательно), графически, таблично. Объем методического пособия не позволяет остановиться на этом подробно.

Определение 6.2. Пусть на некотором множестве X задана функция $y = f(x)$. Графиком функции на плоскости Oxy называется множество точек плоскости $(x, f(x))$, $x \in X$.

Например, графиком функции $y = \sqrt{x+1}$ является кривая, изображённая на рис. 6.1.

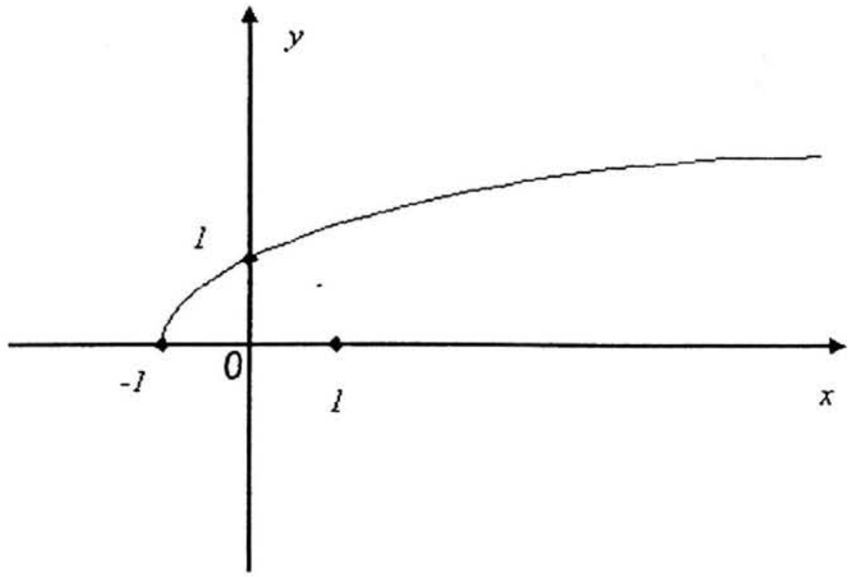


Рис. 6.1

Определение 6.3. Пусть $y = f(x)$ задана на множестве X и пусть для любых x_1 и x_2, принадлежащих X, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда любому y, принадлежащему Y, можно поставить в соответствие x, принадлежащее X, т.е. определить на множестве Y однозначную функцию $x = g(y)$. Такая функция называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Пример. Для функции $y = \sqrt{x+1}$, заданной на множестве $[-1;+\infty)$, обратной является $x = y^2 - 1$, заданная на множестве $[0;+\infty)$.

Графики функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ на плоскости Oxy совпадают, но если в равенстве $x = g(y)$ x и y поменять местами, то графики функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 6.2).

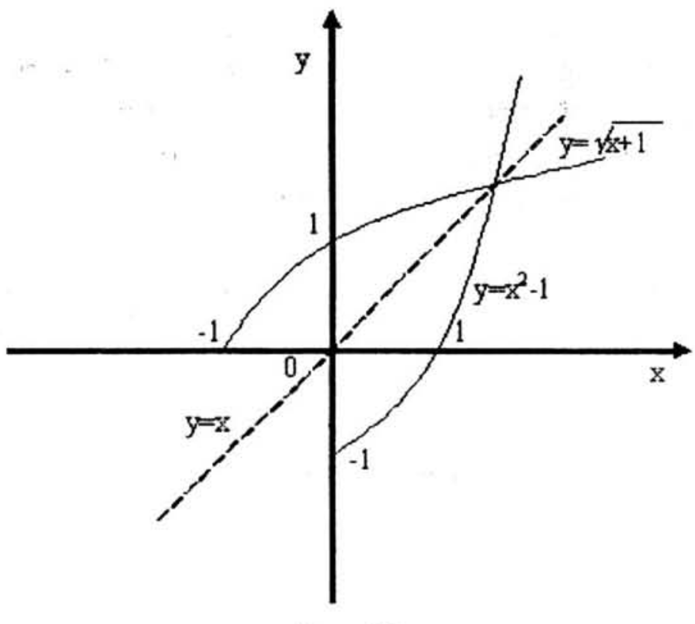


Рис. 6.2

Часто функция характеризуется словами: ограниченная, монотонная, убывающая, возрастающая, периодическая, чётная, нечётная. Дадим определения этим понятиям. Будем пользоваться для краткости следующими символами:

$\in$ -принадлежит;
$\forall$ -для всякого, всякий, любой;
$\Rightarrow$ - следует;
$\exists$ -существует;
:-такое, что

Определение 6.4. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для всех x, принадлежащих X.
В краткой записи это определение выглядит так: $y = f(x)$ называется ограниченной на X, если $\exists M \ge 0: \ |f(x)| \le M \ \ \forall x \in X$.

Определение 6.5. Функция $y = f(x)$ ограничена сверху на X, если $\exists M : f(x) \le M \ \ \forall x \in X$, и ограничена снизу, если $\exists M : f(x) \ge M \ \ \forall x \in X$.

Пример. Функция $y = \sin x$ ограничена на множестве $(-\infty;+\infty)$, так как $|\sin x| \le 1 \ \forall x$.

Определение 6.6. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве X, если $\forall x_1$ и $x_2 \in X : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, и неубывающей, если $f(x_2) \ge f(x_1)$.

Определение 6.7. Функция $y = f(x)$ называется убывающей на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : \ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, и невозрастающей, если $f(x_2) \le f(x_1)$.

Пример. Функция $y = \sqrt{x+1}$ возрастает на множестве $[-1;+\infty)$. Пусть x_1 и $x_2 \in [-1;+\infty)$ и $x_2 > x_1$, тогда $\sqrt{x_2+1} > \sqrt{x_1+1}$.

Определение 6.8. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется чётной, если $\forall x \in X \ \ f(-x) = f(x)$, и нечётной, если $\forall x \in X \ f(-x) = -f(x)$.

Например, $y = \sin x$ – нечётная функция, $y = \cos x$ – чётная.

Определение 6.9. Функция $y = f(x)$ называется периодической на множестве X, если $\exists \ T \ne 0: \ \forall x \in X \quad (x+T) \in X$ и $f(x+T) = f(x)$. Число T называется периодом.

Например, функция $y = \sin x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$. Очевидно, что если T - период, то и числа nT $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ также являются периодами.

Определение 6.10. Пусть функция $z = \varphi(y)$ определена на множестве Y, а $y = f(x)$ определена на множестве X, причём все её значения содержатся в Y. Тогда переменная z через посредничество y является функцией x. Функция $z = \varphi(f(x))$ называется сложной функцией или суперпозицией функций $\varphi(y)$ и $f(x)$.

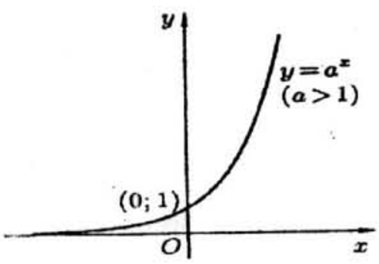
Пример. $z = \varphi(y) = \sqrt{y}$, $y = f(x) = 1 - x^2$. Составим $z = \varphi(f(x))$.

Естественная область определения X функции $y = f(x)$ - все действительные числа. Область определения Y функции $\varphi(y)$ множество $[0;+\infty)$, поэтому из множества X можем взять только те x, при которых $1 - x^2 \geq 0$, то есть множество $[-1;1]$. Следовательно, $z = \varphi(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ - сложная функция, определённая на множестве $[-1;1]$.

6.2. Основные элементарные функции и их графики

К основным элементарным функциям относятся: показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции.

1. Показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$. На рис. 6.3 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям.



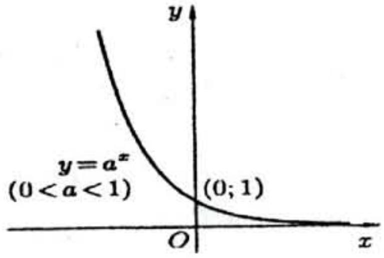


Рис. 6.3

2.Степенная функция $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$. На рис. 6.4 представлены функции с различными показателями α:

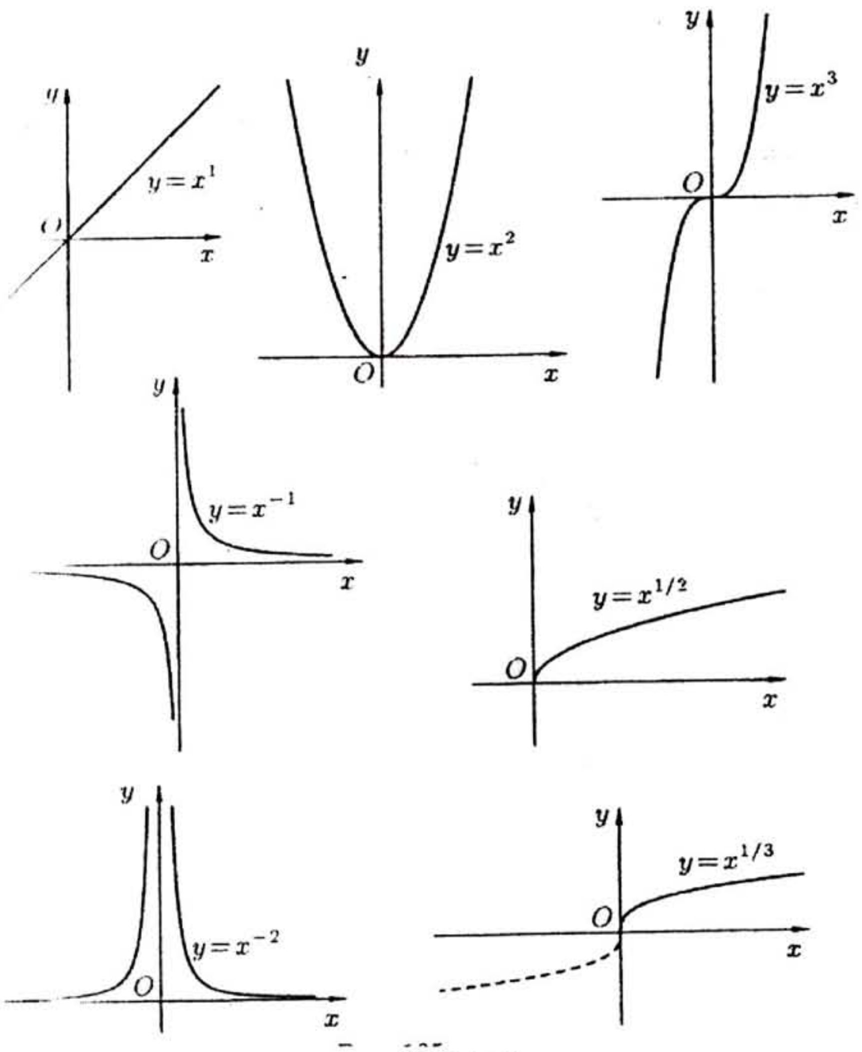


Рис. 6.4

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$; (рис. 6.5).

Рис. 6.5

4.Тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$;
Графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 6.6.

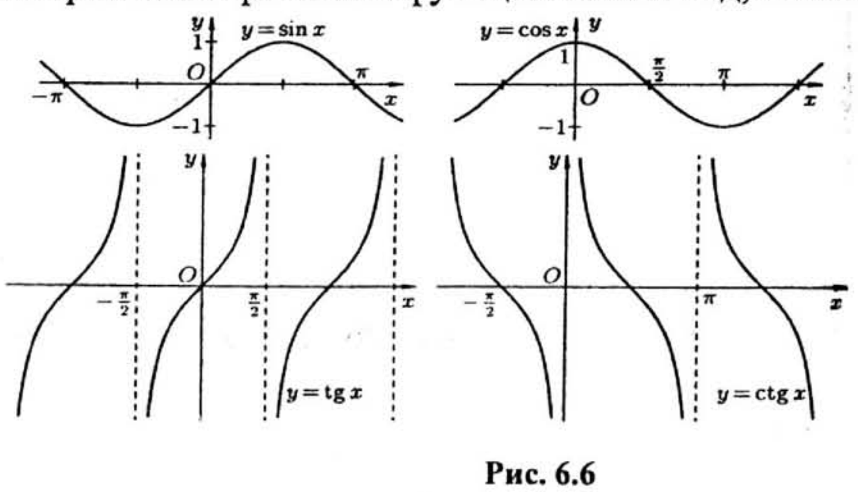


Рис. 6.6

5.Обратные тригонометрические функции
$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\operatorname{arctg} x, y=\operatorname{arcctg} x$. На рис. 6.7 показаны графики обратных тригонометрических функций.

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется элементарной функцией.

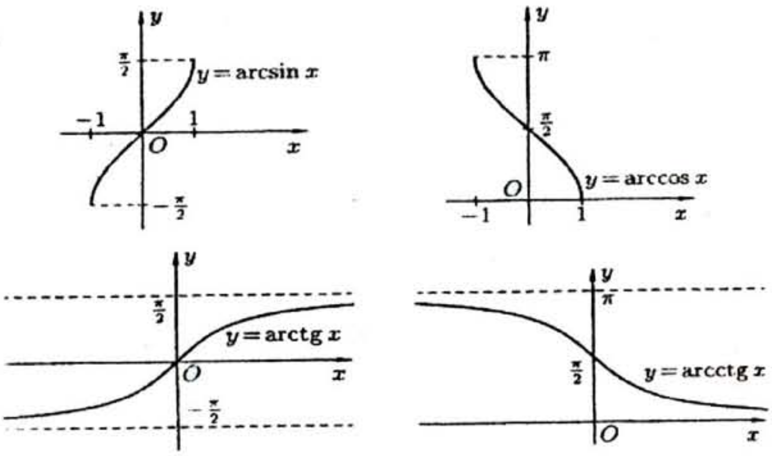


Рис. 6.7

6.3. Предел переменной величины

До сих пор нам было важно лишь множество значений, которое может принимать переменная величина x, а не тот порядок, в котором она принимает эти значения. Сейчас мы будем рассматривать переменную величину x, принимающую последовательно бесчисленное множество значений, то есть, если x' и x'' -два значения переменной x, то мы можем отличить среди них предыдущее и последующее. Кроме того, никакое значение переменной x не является последним, то есть какое бы значение x не взяли, существует бесчисленное множество значений, следующих за ним. Такую переменную величину называют упорядоченной.

Определение 6.11. Окрестностью точки a называется произвольный интервал (c,d), содержащий точку a, ε-окрестностью точки a называется симметричный относительно a интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а число ε называется радиусом окрестности.

Определение 6.12. Число a называется пределом переменной величины x, если для любой ε-окрестности точки a существует такое значение x, что все последующие значения переменной x принадлежат ε-окрестности точки $\boldsymbol{a}$, то есть $|x-a|<\varepsilon$ или $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

Этот факт записывается так: $x \to a$ или $\lim x = a$.

Можно сказать для ясности, что рано или поздно переменная x окажется в заштрихованном промежутке (рис. 6.8), а так как промежуток может быть сколь угодно малым, то x обязан бежать к a.

Рис. 6.8

Постоянную величину c можно рассматривать как величину переменную, все значения которой c. Так как $|x-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то $\lim c = c$.

Определение 6.13. Если $\lim x = 0$, то переменная величина называется бесконечно малой, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение x, что все последующие удовлетворяют условию $|x| < \varepsilon$.

Теорема 6.1. Переменная величина x не может иметь двух пределов.

Доказательство

Пусть $\lim x = a$ и $\lim x = b$ ($b > a$), тогда для любого ε существует значение x' такое, что для последующих x выполняется $|x-a| < \varepsilon$, и x'' такое, что для последующих за ним x выполняется $|x-b| < \varepsilon$. Пусть x' - предыдущее, а, x'' -последующее, тогда для всех x, следующих за x'' должно выполняться $|x-a| < \varepsilon$ и $|x-b| < \varepsilon$, что невозможно при $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$ (рис.6.9), и, следовательно, предположение неверно.

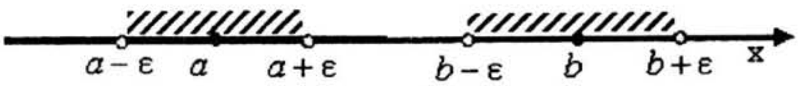


Рис. 6.9

6.4. Предел последовательности

Важным случаем упорядоченной переменной величины является тот, когда имеется возможность перенумеровать всю её последовательность значений (первое, второе и так далее): x_1, $x_2, x_3, .., x_n, \ldots$ так, что из двух значений x_i и x_j последующим является тот, который имеет больший индекс.

Пример. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ (n=1, 2, 3,…). Эта переменная величина последовательно принимает значения $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$

Пример. $x_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$. Последовательность значений такова:

$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{32}$. Видно, что среди значений этой переменной встречаются одинаковые, а именно $x_i = 0$, если i - нечётное число.

Последовательность считается заданной, если есть правило, по которому может быть вычислен любой её член, лишь только известен его номер.

Определение 6.14. Число a называется пределом последовательности x_n, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$ (т.е. найдётся номер, начиная с которого все члены окажутся в ε - окрестности точки a (рис. 6.10)). Этот факт записывается так: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

В краткой записи определение выглядит так:

$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon): \ \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$ В дальнейшем будем использовать краткую запись. Важно, что номер N не может быть указан раз и навсегда, он зависит от выбора числа ε. При уменьшении ε N, вообще говоря, увеличивается.

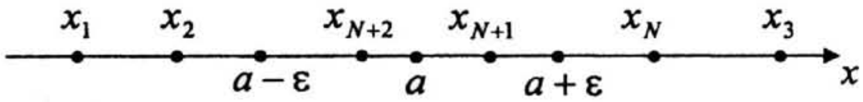


Рис. 6.10

Определение 6.15. x_n - бесконечно малая последовательность (б.м.), если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, то есть $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$

Теорема 6.2. Для того чтобы $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n - бесконечно малая.

Доказательство

Докажем необходимость, то есть тот факт, что из условия $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ следует, что $x_n = a + \alpha_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, что означает $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, то есть по определению 6.15 $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Следовательно, $x_n = a + \alpha_n$, где α_n - бесконечно малая.

Докажем достаточность.

Дано, что $x_n = a + \alpha_n$, где α_n -бесконечно малая, но тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$. Так как $\alpha_n \doteq x_n - a$, то имеем утверждение: $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Это в соответствии с определением 6.14 означает $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, что и требовалось доказать.

Доказанное утверждение можно сформулировать иначе: Число a называется пределом последовательности x_n, если разность $x_n - a$ есть бесконечно малая величина.

Термин бесконечно малая величина означает тот факт, что в процессе своего изменения переменная способна стать (по модулю) меньше любого наперёд заданного числа.

Пример. Докажем, что $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ - б.м., то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

В соответствии с определением надо доказать, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$.

Проделаем с последним неравенством равносильные преобразования:

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

В определении $N(\varepsilon)$ - номер (целое число). Если в качестве ε взять $\dfrac{1}{32}$ (а нас, естественно, интересуют малые ε), то $\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon} = \log_2 32 = 5$, то есть при $n > N = 5$ $\quad \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{32}$. Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\log_2 100$ не является целым числом, и его номер нельзя взять за N. В этом случае можно взять $N = 6$, так как из условия $n > 6$ следует, что $n = 7,8,\ldots$, то есть больше, чем $\log_2 100$, и, следовательно, $\left|\dfrac{1}{2^n}\right| < 0{,}01$.

В случае произвольного ε за $N(\varepsilon)$ принимают целую часть $\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$, обозначаемую $[\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}]$ при $\varepsilon \le \dfrac{1}{2}$. При $\varepsilon > \dfrac{1}{2}$ $\quad N(\varepsilon) = 1$.

Таким образом, мы показали, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$ что и требовалось доказать.

Определение 6.16. Последовательность x_n называется бесконечно большой (б.б.), если $\forall M > 0\ \exists N(M)$: $\forall n > N \Rightarrow |x_n| > M$, то есть с определённого номера её члены по модулю становятся больше любого наперёд заданного числа.

Пример. Докажем, что

$\lim\limits_{n\to+\infty}((-1)^{n+1}\cdot 2^n)=\infty$, то есть $\forall M>0\ \exists N(M):\ \forall n>N\ \left|(-1)^{n+1}\cdot 2^n\right|>M$

Преобразуем последнее неравенство:

$\left|(-1)^{n+1}\cdot 2^n\right|>M \Leftrightarrow 2^n>M \Leftrightarrow n>\log_2 M$.

При $M\ge 2\ N(M)=[\log_2 M]$, при $0<M<2\ N=1$.

Если последовательность x_n является б.б., и её члены положительны с некоторого номера, то говорят, что $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, если отрицательны, то $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$.

Дадим определение для этих случаев.

Определение 6.17. $\lim\limits_{n\to+\infty}x=+\infty$, если $\forall M>0\ \exists N(M):\ \forall n>N\Rightarrow x_n>M$.

Определение 6.18. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$, если $\forall M<0\ \exists N(M):\ \forall n>N\Rightarrow x_n<M$.

Сформулируем без доказательства следующие теоремы.

Теорема 6.3. Если x_n – б.б. и $x_n\ne 0\ \forall n$, то $\dfrac{1}{x_n}$ – б.м.

Теорема 6.4. Если x_n – б.м. и $x_n\ne 0\ \forall n$, то $\dfrac{1}{x_n}$ – б.б.

Пример. $x_n=n^2+1$ – б.б., так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1)=+\infty$, тогда

$y_n=\dfrac{1}{n^2+1}$ – б.м., то есть $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$.

6.5. Теоремы о последовательностях, имеющих предел

Сформулируем основные теоремы о последовательностях, но небольшой объем пособия не дает возможности привести доказательства всех теорем.

Теорема 6.5. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Заметим, что обратное утверждение неверно, то есть не всякая ограниченная последовательность имеет предел.

Пример. Последовательность $x_n=1+(-1)^n$ является ограниченной $(|x_n|\le 2)$, но не имеет предела.

Теорема 6.6. Если $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b$ и $x_n=y_n\ \forall n$, то $a=b$.

Теорема 6.7. Если $x_n\ge y_n\ \forall n$ и $\lim x_n=a, \lim y_n=b$ (a и b конечны), то $a\ge b$.

Теорема 6.8. Если $x_n \le y_n \le z_n$ $\forall n$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

Очевидно, что можно не требовать, чтобы двойное неравенство выполнялось для всех n. Достаточно, чтобы оно выполнялось с некоторого фиксированного номера.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n}{n^n} = 0$. Так как $0 < \dfrac{5^n}{n^n} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, начиная с 16-го номера, и $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n}{n^n} = 0$.

Теорема 6.9. Сумма любого фиксированного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство (для двух слагаемых)

Пусть последовательности α_n и β_n – б.м., тогда
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) : \forall n > N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon/2$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) :$
$\forall n > N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \varepsilon/2$.
Следовательно, $\forall n > N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$.
Так как $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$, то справедливо следующее утверждение:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.10. Произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая.

Пример. $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ – б.м., $\beta_n = \cos(n^2+1)$ – ограниченная $\left(|\cos(n^2+1)| \le 1\right) \Rightarrow$
$\dfrac{1}{n} \cdot \cos(n^2+1)$ – б.м., т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n^2+1)}{n} = 0$.

Чтобы сформулировать следующие теоремы, дадим определения возрастающей, убывающей, ограниченной последовательностей.

Определение 6.19. Последовательность x_n называется возрастающей (неубывающей), если из условия $n' > n$ следует $x_{n'} > x_n$ ($x_{n'} \ge x_n$).

Определение 6.20. Последовательность x_n называется убывающей (невозрастающей), если из условия $n' > n$ следует $x_{n'} < x_n$ ($x_{n'} \le x_n$).

Определение 6.21. Последовательность x_n называется ограниченной, если существует число M>0 такое, что $|x_n| \le M$ для всех n. В краткой записи это выглядит так: $\exists M > 0 : |x_n| \le M\ \forall n$.

Определение 6.22 (в краткой записи). Последовательность x_n ограничена сверху, если $\exists M : x_n \le M \ \forall n$, и ограничена снизу, если $\exists M : x_n \ge M \ \forall n$.

Теорема 6.11. Всякая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет предел.

Используем теорему 6.11 для нахождения предела последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Воспользуемся известной формулой

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (6.1)$$

где $C_n^k = \dfrac{n\cdot(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$ $\qquad (k! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)..1)$.

Тогда $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\dfrac{1}{n} + \dfrac{n(n-1)}{2!}\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}\dfrac{1}{n^3} + \ldots$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Ясно, что x_{n+1} отличается от x_n одним положительным слагаемым, то есть $x_{n+1} > x_n \ \forall n$, и, следовательно, x_n-возрастающая последовательность.

Докажем, что она ограничена сверху:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + .. + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + .. + \frac{1}{2^n} =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 3 \ \forall n.$$

Так как x_n - возрастающая и ограниченная сверху последовательность, то по теореме 6.11 последовательность имеет предел. Этот предел обозначается буквой e и равен 2,718281828459045… Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются $\ln$.

Итак, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. $\qquad (6.2)$

Этот предел часто называют вторым замечательным пределом. О первом- в следующих параграфах.

Теорема 6.12

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ (a и b конечны),то $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство

Из теоремы 6.2 п. 6.4. следует, что $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n – бесконечно малые последовательности. Тогда $z_n = x_n + y_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$. По теореме 6.9 п. 6.5. $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$ - бесконечно малая, и так как $z_n = a + b + \gamma_n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a + b$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.13. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$($a$ и bконечны),то $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = ab$.

Теорема 6.14. Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, $y_n \neq 0$ $\forall n$ и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

6.6. Предел функции

В предыдущем параграфе рассмотрен один из способов упорядочивания переменной – последовательность. Рассмотрим другие способы упорядочивания переменной.

Пусть $y = f(x)$ определена на промежутке $[c-k, c+k]$, где k достаточно мало. Рассмотрим три способа упорядочивания значений x : $x \to c-0$,$x \to c+0, x \to c$, что означает стремление x к точке c слева, справа, произвольным образом. Под стремлением понимаем тот факт, что сколь близко не подошли к точке c, всегда можно подойти ещё ближе. Рассмотрим соответствующую этим случаям упорядоченную переменную $f(x)$. Дадим определения понятию “предел функции” в этих случаях.

Определение 6.23. Предел функции $y = f(x)$ равен числу A при x стремящемся к c слева, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $c - \delta < x < c$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6.11).

Этот факт обозначается $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = A$.

Кратко это определение записывается так: $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x : c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Другими словами, значения функции $f(x)$ будут всё меньше и меньше отличаться от A при приближении x к c слева.

Последующие определения сформулируем в краткой записи.

Определение 6.24. $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$
$\forall x : c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6.12).

Определение 6.25. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$
$\forall x : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6.13).

Неравенство $0 < |x - c| < \delta$ равносильно системе

$$\begin{cases} -\delta < x - c < \delta \\ x \neq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - \delta < x < c + \delta \\ x \neq c \end{cases},$$

то есть x находится в δ - окрестности точки c, но не принимает значение равное c.

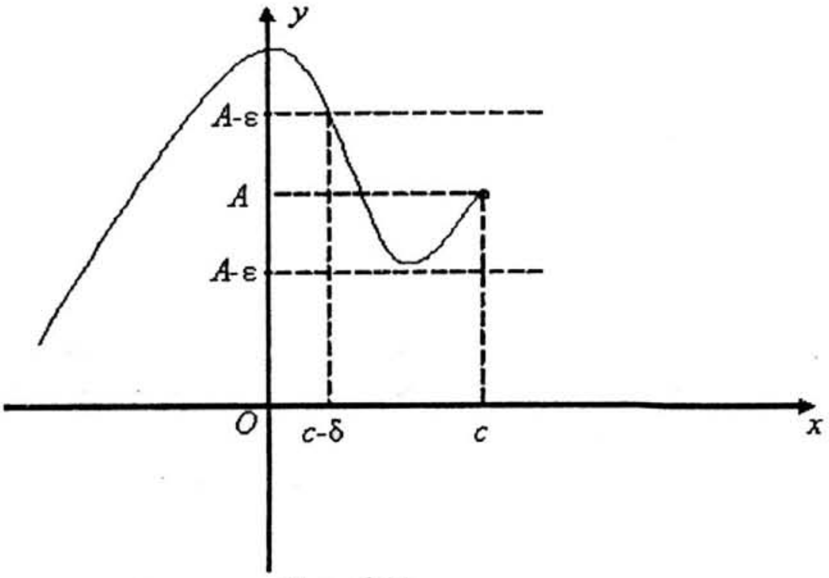


Рис. 6.11

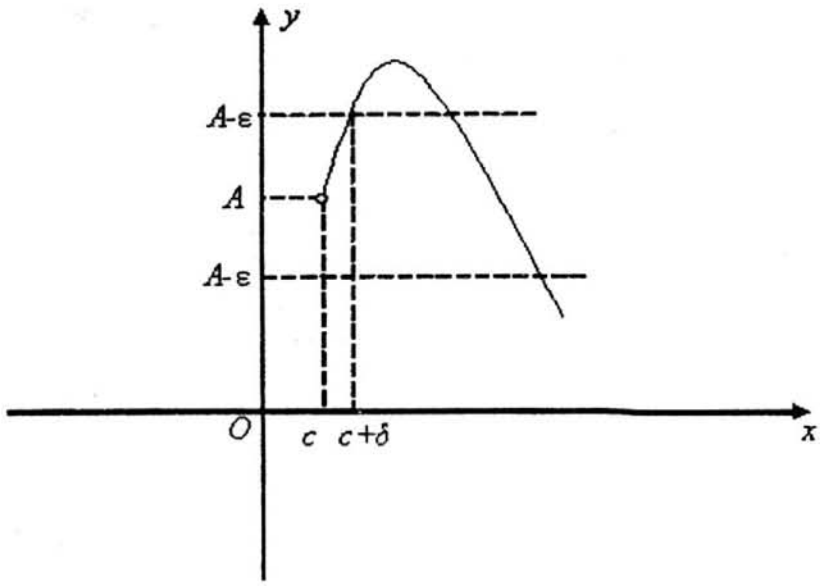


Рис. 6.12

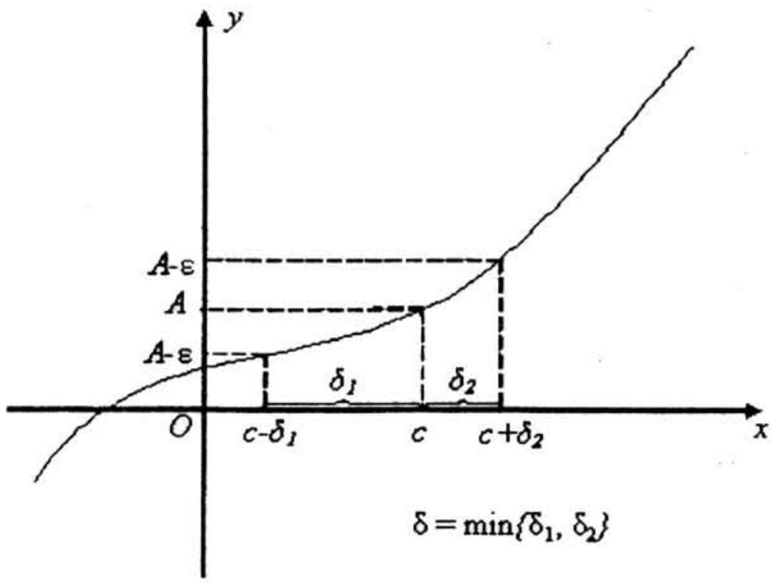


Рис. 6.13

Пример

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty;0],\\ 1-x,\ x\in(0;1),\\ 0,\ x\in[1;+\infty).\end{cases}$$

Из рисунка 6.14 видно, что $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

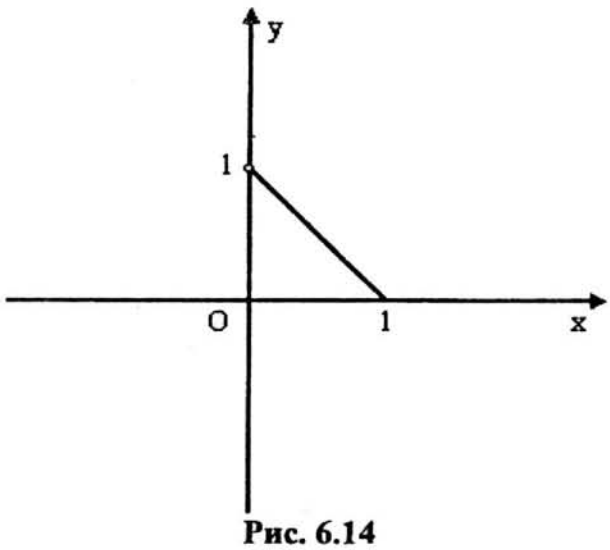


Рис. 6.14

Сформулируем без доказательства теорему о связи предела функции с односторонними пределами.

Теорема 6.15. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=A$.

В примере $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует, так как односторонние пределы не равны.

Как и для последовательности, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6.16 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая (б.м.) при $x \to c$, то есть $\lim\limits_{x\to c} \alpha(x) = 0$.

Сформулированные определения предела функции были даны для случая, когда аргумент x стремится к конечному числу c. Дадим определения при $x \to \infty$, то есть при таком последовательном изменении x, когда $|x|$ становится и остаётся больше любого заданного положительного числа.

Определение 6.26. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ $\forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6.15).

Определение 6.27. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ $\forall x : x > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6.16).

Определение 6.28. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ $\forall x : x < N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6.17).

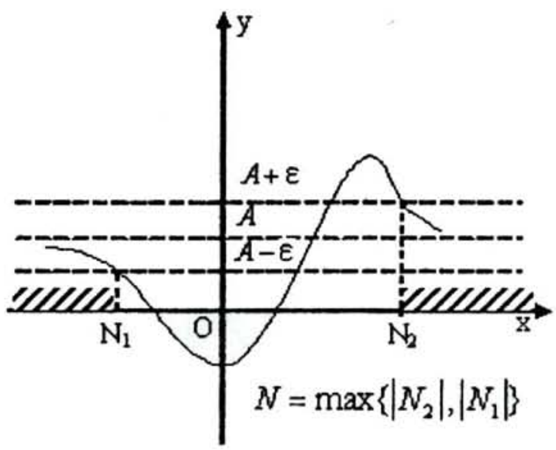


Рис. 6.15

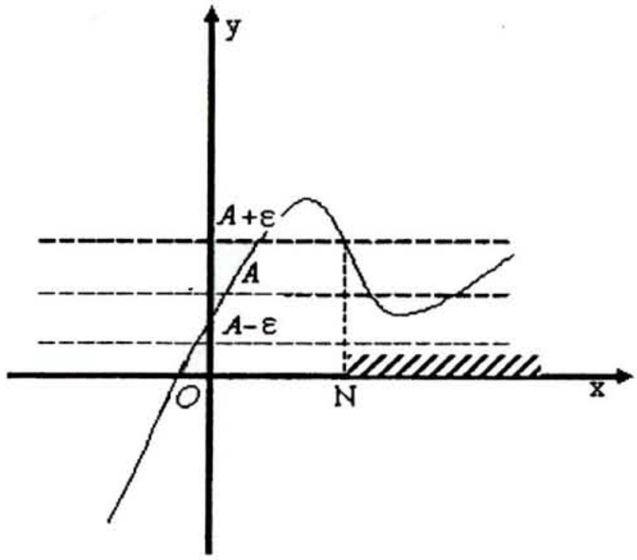


Рис. 6.16

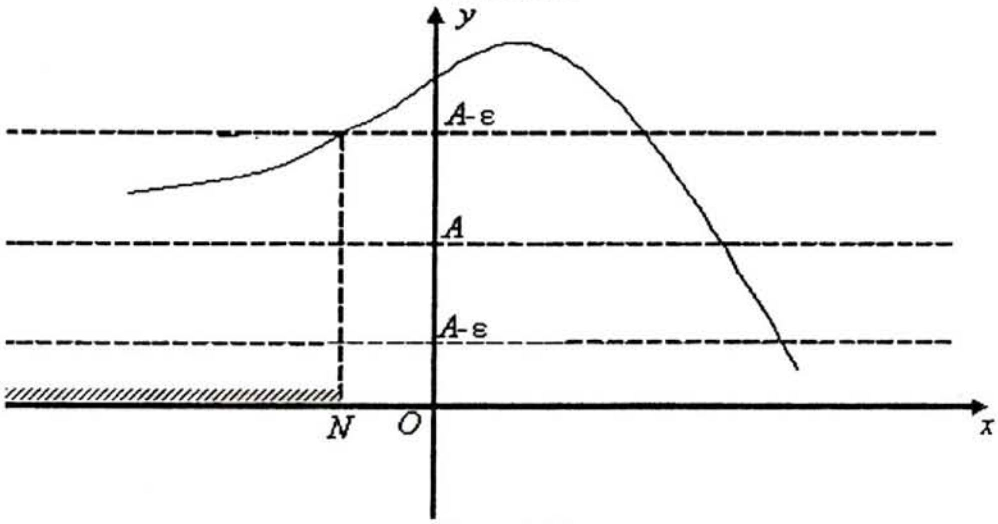


Рис. 6.17

Дадим определение бесконечно большой (б.б.) функции при $x \to c$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Определение 6.29 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, если $\forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > 0$

$\forall x : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$ (рис. 6.18).

Определение 6.30 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, если $\forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > 0$

$\forall x : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (рис. 6.19).

Определение 6.31. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$, если $\forall M < 0 \;\; \exists \delta(M) > 0$

$\forall x : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < M$ (рис.6.20).

Определение 6.32. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, если $\forall M > 0 \;\; \exists N(M)$

$\forall x : x > N \Rightarrow f(x) > M$ (рис. 6.21).

Можно дать определения тому, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+c-0} f(x) = +\infty$ и так далее, предлагаем сделать это самостоятельно.

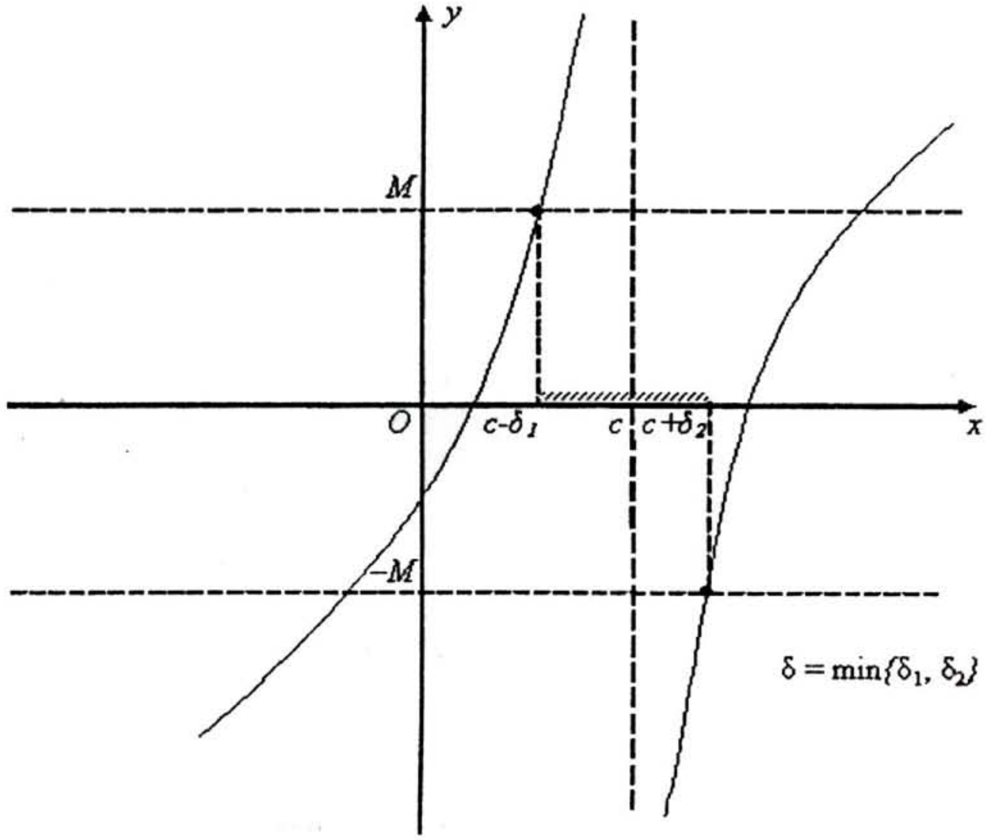


Рис. 6.18

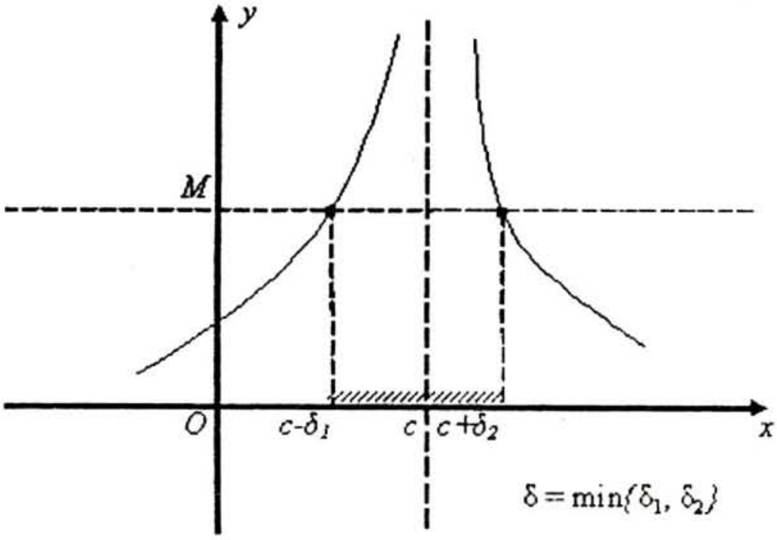


Рис. 6.19

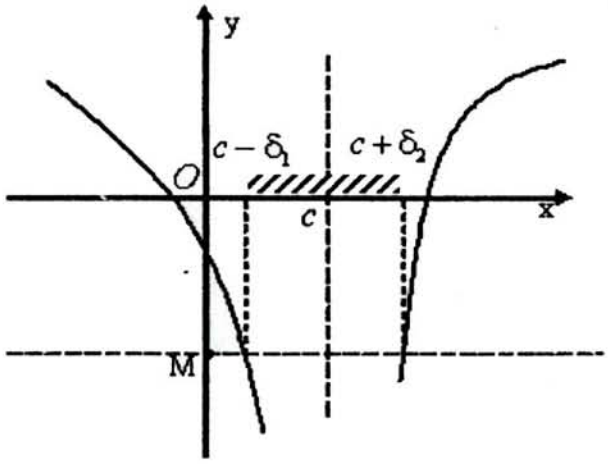


Рис. 6.20

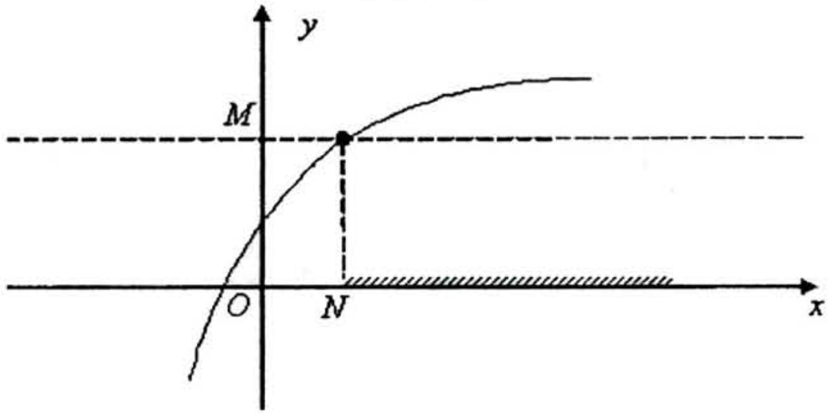


Рис. 6.21

6.7. Теоремы о функциях, имеющих предел

Сформулируем основные теоремы.

Теорема 6.17. Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - б.м. при $x \to c$, тогда $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ -б.м. при $x \to c$.

Теорема справедлива для любого фиксированного числа слагаемых.

Теорема 6.18. Пусть $\alpha(x)$ -б.м. при $x \to c$, а $\beta(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки c, тогда $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ - б.м. при $x \to c$.

Пример. $\alpha(x)=x$ - б.м. при $x \to 0$, $\beta(x)=\sin\frac{1}{x}$ ограничена ($\left|\sin\frac{1}{x}\right|<1$), тогда $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ - б.м. при $x \to 0$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Теорема 6.19. Пусть $\alpha(x)$ - б.м. при $x \to c$ и $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки c, тогда $\frac{1}{\alpha(x)}$ - б.б. при $x \to c$ (величина обратная б.м. есть б.б.).

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0,$ то есть $x-1$ - б.м. при $x\to 1$, тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty,$ то есть $\dfrac{1}{x-1}$ -б.б. при $x\to 1$.

Теорема 6.20. Пусть $\alpha(x)$ -б.б. при $x\to c$, тогда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ -б.м. при $x\to c$.
(величина обратная б.б. есть б.м.)

Теорема 6.21. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м. при $x\to c$, тогда $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ -б.м. при $x\to c$.

Теорема 6.22. Пусть $\alpha(x)\le f(x)\le g(x)$ в некоторой окрестности точки c и $\lim\limits_{x\to c}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=A,$ тогда $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$.

Эту теорему иногда называют теоремой о двух милиционерах.

Теоремы справедливы и при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ так же, как и следующие теоремы, в которые для упрощения будем использовать записью $\lim f(x)=A$, предполагая, что x может стремиться как к c, так и к $\infty, +\infty, -\infty$.

Теорема 6.23. Предел суммы фиксированного числа слагаемых равен сумме пределов слагаемых, если эти пределы конечны.

Доказательство (для двух)

Пусть $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$ (A и B конечны). По теореме 6.16 $f(x)=A+\alpha(x),$ $g(x)=B+\beta(x),$ где $\alpha(x)$ и $\beta(x)-$б.м. Тогда $f(x)+g(x)=A+B+\gamma(x)$, где $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)-$б.м. по теореме 6.17, следовательно, $\lim(f(x)+g(x))=A+B$ по той же теореме 6.16 п. 6.6.

Теорема 6.24. Предел частного двух функций равен частному пределов числителя и знаменателя, если эти пределы конечные и предел знаменателя не равен нулю.

6.8. Первый и второй замечательные пределы

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. (6.3)

Воспользуемся тригонометрическим кругом (рис. 6.22).

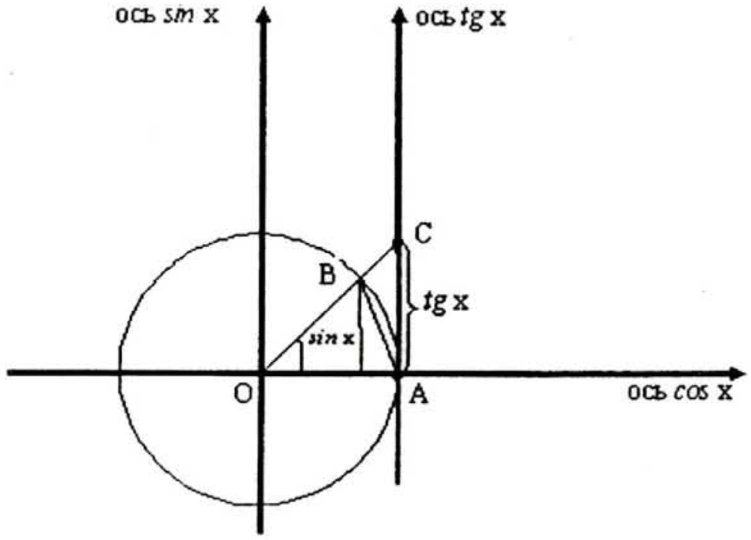


Рис. 6.22

При $x > 0$ имеем $S_{\Delta OBA} < S_{\text{сект}\,OBA} < S_{\Delta OCA}$, то есть $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$ Разделим неравенство на $\frac{1}{2}\sin x$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. При $x \to 0$ $\cos x \to 1$, тогда по теореме 6.22 п.6.7. $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x} = 1$ или $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ чётная, то $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = 1$, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

В п. 6.5. было доказано, что последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ имеет предел, обозначаемый e. Заметим, что $\frac{1}{n}$ – б.м. при $n \to +\infty$, а n-обратная к ней б.б. Можно показать, что если $x \to \infty$, то $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ также имеет предел равный e:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

Обозначим $\frac{1}{x} = u$, тогда $u \to 0$ и $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$. (6.4)

Покажем на примерах использование замечательных пределов.

Пример. Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x}$. Обозначим $9x = t$, тогда $x = \frac{t}{9}$ и при $x \to 0$ $t \to 0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t \cdot 9}{5t} = \frac{9}{5}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{9}{5}\cdot 1 = \frac{9}{5}$.

Пример
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3}{5})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3}{5}=1\cdot 1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x+1})^x=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x+1})^x$.

Обозначим $\frac{2}{x+1}=u$, тогда $x=\frac{2-u}{u}$ и при $x\to+\infty$ $u\to 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x+1})^x=\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2-u}{u}}=\lim\limits_{u\to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{2-u}=e^2$, так как

$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e, \lim\limits_{u\to 0}(2-u)=2.$

Пример. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}=\ln e=1.$ (6.5)

Следует заметить, что при вычислении пределов не совсем корректно пользовались понятием непрерывности функции, которое будем рассматривать в дальнейшем.

6.9. Неопределённые выражения

В п. 6.7 рассматривались выражения вида $f(x)+\varphi(x), f(x)\cdot\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в предположении, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к конечным пределам (в случае частного $\lim\varphi(x)\neq 0$). Рассмотрим на примерах некоторые случаи, когда пределы бесконечны, либо пределы знаменателя и числителя равны нулю.

I. Неопределённость вида "$\frac{0}{0}$"

Пример. Рассмотрим $f(x)=\frac{1}{x^2}$ и $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ - б.м. при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Пример . $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x$ -б.м. при $x\to 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Пример. Рассмотрим две б.м. последовательности $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ и $y_n = \dfrac{1}{n}$, тогда последовательность $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ имеет вид 1,-1,1,-1,... . Очевидно, что предел последовательности не существует.

Видно, что в зависимости от конкретного закона стремления к нулю числителя и знаменателя предел частного может быть конечным, бесконечным или не существовать вовсе. Ситуация, при которой пределы числителя и знаменателя равны нулю, обозначается "$\dfrac{0}{0}$" и называется неопределённостью. Её можно представить как "борьбу" двух тенденций: числитель пытается устремить дробь к нулю, а знаменатель, стремясь к нулю, увеличить дробь сколь угодно велико. Термин "раскрыть неопределённость" подразумевает выяснение того, какая из тенденций "сильнее", или они уравновешивают друг друга.

II. Неопределённость вида "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Её можно охарактеризовать как "борьбу" числителя, который стремится увеличить дробь сколь угодно велико, со знаменателем, пытающимся её уменьшить до нуля.

Пример. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ б.б. при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$ ("победил" числитель).

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ("победил" знаменатель).

Пример. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2+8} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{8}{x^2}} = \frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

III.Неопределённость вида "$0\cdot\infty$"

Пример. $f(x) = \sin(x-1)$ - б.м., а $\varphi(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ - б.б. при $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\frac{1}{(x-1)^2} = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x-1} = \infty, \text{т.к.} \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1, \text{а} \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty.$$

Пример. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ - б.м., $\varphi(x)=\sqrt{x}$ - б.б. при $x\to+\infty$. Обозначим $\frac{1}{x}=t$, тогда при $x\to+\infty \quad t\to 0+0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}=\lim_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{t}\sqrt{t}=\lim_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0+0}\sqrt{t}=1\cdot 0=0.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg5x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos 5x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$,

так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=1$.

К неопределённостям относятся и следующие ситуации "0^0", "1^∞", "$+\infty-(+\infty)$", "$-\infty-(-\infty)$", "$+\infty+(-\infty)$", рассмотреть которые не позволяет малый объём методического пособия.

Приведём ещё несколько примеров раскрытия неопределённостей.

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+5}{x+1}=\frac{6}{2}=3$.

Пример

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}=\left\{\begin{array}{l}\pi-x=t\Rightarrow t\to 0\\ x=\pi-t\end{array}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t(2\pi-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{2\pi-t}=1\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}.$$

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}=\left\{\begin{array}{l}\arcsin 2x=t\Rightarrow t\to 0\\ x=\frac{1}{2}\sin t\end{array}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin t}=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=2\cdot 1=2.$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+x-1}-\sqrt{x^4+8})=\{+\infty-(+\infty)\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^4+x-1}-\sqrt{x^4+8})(\sqrt{x^4+x-1}+\sqrt{x^4+8})}{(\sqrt{x^4+x-1}+\sqrt{x^4+8})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x-1-x^4-8}{\sqrt{x^4+x-1}+\sqrt{x^4+8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-9}{\sqrt{x^4+x-1}+\sqrt{x^4+8}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{9}{x})}{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{8}{x^4}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{(1-\frac{9}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{8}{x^4}}}=$$

$$=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

6.10. Классификация бесконечно малых функций

Определение 6.33. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ -б.м. при $x \to c$ ($x \to \infty$), тогда если

1) $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, где A конечное, не равное нулю число, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются б.м. одного порядка при $x \to c$ ($x \to \infty$);

2) $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to c$ ($x \to \infty$). Этот факт обозначается $\alpha(x)=o\,(\beta(x))$ ($\alpha(x)$ есть "о - малое" относительно $\beta(x)$).

3) $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ -б.м. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$, при $x \to c\,(x \to \infty)$.

Определение 6.34. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ -б.м. при $x \to c$ ($x \to \infty$) и $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, тогда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м. при $x \to c\,(x \to \infty)$. Этот факт обозначается $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to c$ ($x \to \infty$).

Пример. Покажем, что $\alpha(x) = 1 - \cos x$ и $\beta(x) = \dfrac{x^2}{2}$ эквивалентные б.м. при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} =$$

$=1\cdot 1 = 1$, что и требовалось доказать.

Пример. Покажем, что $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \begin{Bmatrix} e^x - 1 = t \Rightarrow t \to 0 \\ x = \ln(t+1) \end{Bmatrix} = \lim_{e\to 0}\frac{\mathrm{t}}{\ln(\mathrm{t}+1)} = 1.$$

При вычислении предела воспользовались формулой (6.5).

Пример. Покажем, что $\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ есть б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=0\cdot 1=0$$

Иногда необходима более точная характеристика поведения б.м., выражаемая числом. В этом случае в качестве эталона выбирают простейшую б.м., её называют основной. Например, при $x\to 0$ это x, при $x\to 1$ это $x-1$, при $x\to\infty$ это $\frac{1}{x}$.

Определение 6.35. $\alpha(x)$ -б.м. *к*- го порядка относительно $\beta(x)$ при $x\to c$ ($x\to\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to c\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=A,$ где A конечно и не равно нулю.

Пример. Определим порядок малости $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}-1$ при $x\to +0$.
В этом случае $\beta(x)=x$.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}-1}{x^k}=\lim_{x\to+0}\frac{(\sqrt{1+\mathrm{x}^2}-1)(\sqrt{1+\mathrm{x}^2}+1)}{x^k\cdot(\sqrt{1+\mathrm{x}^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1+x^2-1}{x^k\cdot(\sqrt{1+\mathrm{x}^2}+1)}=\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x^k\cdot(\sqrt{1+\mathrm{x}^2}+1)}=\begin{cases}0, & k<2\\ \frac{1}{2}, & k=2\\ \infty, & k>2\end{cases}.$$

Следовательно, $\alpha(x)$ -б.м. второго порядка при $x\to +0$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}-1}{x^k}=\frac{1}{2}$ при *k*=2, то есть $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}-1$ -б.м. 2-го порядка малости при $x\to 0$.

Пример. Определим порядок малости $\alpha(x)=\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x\to\infty$, то есть сравним с $\beta(x)=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{(\frac{1}{x})^k}=\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=t\Rightarrow t\to 0\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t^{3k}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t\cdot t^{3k-1}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{t^{3k-1}}=1 \text{ при } k=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\alpha(x)$ имеет порядок малости $\frac{1}{3}$ при $x \to \infty$.

Приведём таблицу основных эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$, $\qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$,

$\operatorname{tg} x \sim x$, $\qquad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$,

$\arcsin x \sim x$, $\qquad a^x - 1 \sim x\ln a$,

$\operatorname{arctg} x \sim x$, $\qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

$e^x - 1 \sim x$,

$\ln(1+x) \sim x$,

6.11. Теоремы о бесконечно малых функциях

Сформулируем теоремы, облегчающие нахождение пределов функций.

Теорема 6.25. $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентные б.м. при $x \to c\,(x \to \infty)$ тогда и только тогда, когда $f(x) - \varphi(x) = o(\alpha(x))$ (разность эквивалентных б.м. есть б.м. более высокого порядка).

Теорема 6.26. Сумма бесконечно малых разных порядков эквивалентна б.м. наименьшего порядка.

Доказательство

Пусть $\tilde{\alpha}(x)$ и $\tilde{\beta}(x)$ - б.м. и $\tilde{\alpha}(x) \sim c_1(\alpha(x))^{k_1}$, $\tilde{\beta} \sim c_2(\alpha(x))^{k_2}$, где $\alpha(x)$ - б.м. Пусть $k_1 < k_2$, тогда $\tilde{\beta}(x)$ -б.м. более высокого порядка малости, чем $\tilde{\alpha}(x)$.

$$\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)+\tilde{\beta}(x)}{\tilde{\alpha}} = \lim\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{a}}+\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right) = \lim\left(1+\frac{c_2\alpha^{k_2}}{c_1\alpha^{k_1}}\right) = \lim\left(1+\frac{c_2}{c_1}\alpha^{k_2-k_1}\right) = 1,$$ так как

$k_2 - k_1 > 0$ и $\lim \alpha^{k_2-k_1} = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.27. Произведение бесконечно малых эквивалентно произведению эквивалентных бесконечно малых (без доказательства).

Теорема 6.28. Предел отношения б.м. равен пределу отношения эквивалентных б.м., если этот предел существует.

Доказательство

Пусть $\tilde{\alpha} \sim \alpha$, $\tilde{\beta} \sim \beta$, тогда по теореме 6.25 $\tilde{\alpha} = \alpha + o(\alpha)$, $\tilde{\beta} = \beta + o(\beta)$.

$$\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\beta+o(\beta)}=\lim\frac{\alpha(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha})}{\beta(1+\frac{o(\beta)}{\beta})}=\lim\frac{\alpha}{\beta},$$ так как $\lim\frac{o(\alpha)}{\alpha}=0$ и

$\lim\frac{o(\beta)}{\beta}=0$ по определению б.м. более высокого порядка малости.

Можно доказать справедливость этого утверждения, если предел отношения бесконечен.

Пример. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin(x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$

Пример. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+e^{x^2}-1}{\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$

При вычислении использовали теорему 6.26: $\sin x+e^{x^2}-1\sim\sin x$, так как $\sin x\sim x$ – б.м. первого порядка, а $e^{x^2}-1\sim x^2$ – б.м. второго порядка.

Пример

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\ln\cos x}{\mathrm{tg}^2 x}=\left\{\begin{matrix}x-2\pi=t\\ x=t+2\pi\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\cos(t+2\pi)}{\mathrm{tg}^2(t+2\pi)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\cos t}{\mathrm{tg}^2 t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+(\cos t-1))}{\mathrm{tg}^2 t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

В этом примере использовали тот факт, что $\ln(1+u)\sim u$ при $u\to0$ $(u=\cos t-1)$, и $\mathrm{tg}\,t\sim t$ при $t\to0$.

6.12. Классификация бесконечно больших функций

Напомним, что к б.б.- функциям относятся функции, пределы которых при $x\to c$ или $x\to\infty$ равны ∞.

Определение 6.36. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ -б.б. при $x\to a$ $(x\to\infty)$, тогда если

1) $\lim\limits_{\substack{x\to c\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A\neq0$ (A – конечное), то $f(x)$ и $\varphi(x)$ называется б.б. одного порядка роста при $x\to c$ $(x\to\infty)$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to c\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, то $\varphi(x)$ -б.б. высшего порядка роста, чем $f(x)$ при $x\to c$ $(x\to\infty)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, то $f(x)$ - б. б. высшего порядка роста, чем $\varphi(x)$ при $x \to c\ (x \to \infty)$.

Определение 6.37. $f(x)$ и $\varphi(x)$ - эквивалентные б.б. при $x \to c\ (x \to \infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$.

Определение 6.38. Б.б. $f(x)$ имеет κ - й порядок роста относительно б.б. $\varphi(x)$ при $x \to a\ (x \to \infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{(\varphi(x))^k} = A \neq 0$ (A – конечное).

Пример. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$, $\varphi(x) = 3x^2 + 2x - 3$ – б.б. при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{3x^2+2x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{3},$$

то есть $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного порядка роста.

6.13. Определение непрерывной функции Классификация точек разрыва

Определение 6.39. Пусть функция $f(x)$ определена при $x = c$ и в некоторой окрестности точки c. Если существует $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, то функция называется непрерывной в точке c.

Согласно теореме 6.15 это означает, что $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c)$.

Определение 6.40. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки c, но не определена в самой точке c, или её значение в точке c не равно $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, или $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ не существует. Тогда c - точка разрыва функции.

Определение 6.41. Пусть c-точка разрыва функции $f(x)$ и $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$ конечные. Тогда точка c называется точкой разрыва 1-го рода. Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен, точка c называется точкой разрыва 2-го рода. На рис. 6.23 точки c_1 и c_2 - точки разрывов 1-го рода, точки c_3 и c_4 - 2-го рода.

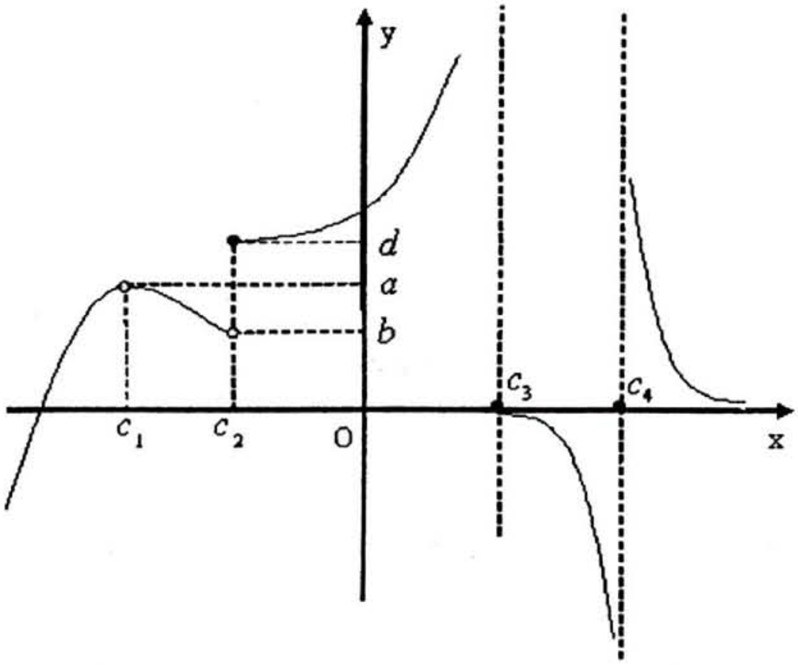


Рис. 6.23

Заметим, что если бы $f(c_1) = a$, то $f(x)$ была бы непрерывна в точке $x = c_1$. Это возможно в силу того, что односторонние пределы равны. Такой разрыв называется устранимым разрывом 1-го рода.

Непрерывность функции даёт возможность заменить нахождение предела функции простой подстановкой вместо независимой переменной её предела, чем и пользовались в предыдущих параграфах при нахождении пределов.

Все рассмотренные элементарные функции непрерывны при всех x, в которых они существуют. Примем это без доказательства, а в качестве примера докажем непрерывность функции $f(x) = \sin x$, то есть докажем, что $\lim\limits_{x \to c} \sin x = \sin c$ для всех $c \in (-\infty;+\infty)$.

$|\sin x - \sin c| = \left|2\sin\frac{x-c}{2}\cos\frac{x+c}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-c}{2}\right| \le |x-c|$, если x достаточно близко к c. Следовательно, если $|x-c| < \varepsilon$, то $|\sin x - \sin c| < \varepsilon$, где ε - произвольно положительное число ($\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ в данном случае).

Определение 6.42. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна во всех точках этого множества.

Например, $f(x) = \sin x$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

6.14. Теоремы о непрерывных функциях

Теорема 6.29. Пусть $\varphi(y)$ определена на $[c,d]$, $f(x)$ на $[a,b]$, причём значения $f(x) \in [c,d]$. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a,b)$, а $\varphi(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Пример. Функцию $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ можно представить как сложную функцию $g(y) = \operatorname{arctg} y$, где $y(x) = \frac{1}{x}$. Функция $g(y)$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$, $y(x)$ непрерывна во всех точках x кроме $x = 0$, следовательно, $f(x)$ непрерывна во всех точках кроме $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$, то $x = 0$-точка неустранимого разрыва 1-го рода.

Теорема 6.30. Сумма фиксированного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

Доказательство (для двух)

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке c, тогда по теореме о пределе суммы
$\lim\limits_{x\to c}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim\limits_{x\to c} f_1(x) + \lim\limits_{x\to c} f_2(x) = f_1(c)+f_2(c)$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.31. Произведение фиксированного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

Теорема 6.32. Частное непрерывных в точке c функций непрерывно в точке c, если знаменатель при $x = c$ не равен нулю.

Теорема 6.33. (Первая теорема Больцано-Коши)
Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b) < 0$ (на концах принимает значения разных знаков). Тогда существует точка $c \in (a,b)$, в которой $f(c) = 0$ (рис. 6.24).

Теорема 6.34. (вторая теорема Больцано-Коши)
Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a,b]$,
$f(a) = A, f(b) = B$ и $A \neq B$, тогда для любого числа $C \in [A,B]$ существует по крайней мере одна точка $c \in [a,b]$, такая, что $f(c) = C$ (рис. 6.25)

Можно сказать и так: значения, принимаемые непрерывной функцией $f(x)$, когда x непрерывно изменяется в некотором промежутке на оси Ox сплошь заполняют некоторый промежуток на оси Oy.

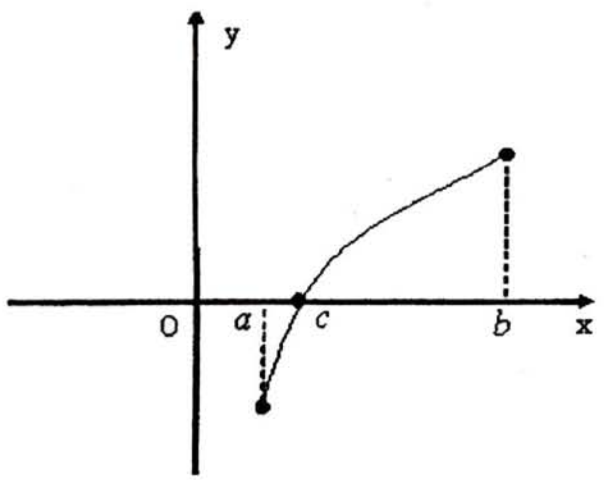


Рис. 6.24

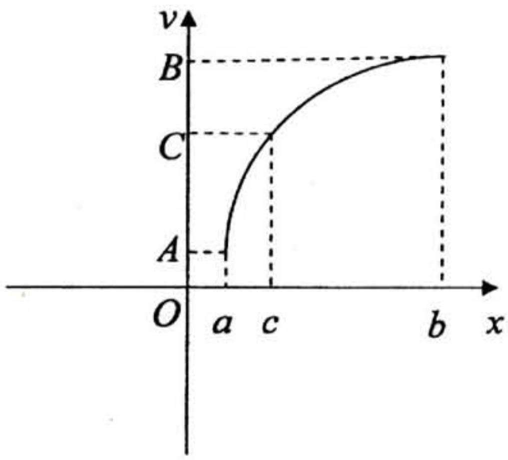


Рис. 6.25

Теорема 6.35. (Теорема Вейерштрасса).
Если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, то она достигает на этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значений по крайней мере один раз (рис. 6.26).

Из теоремы 6.35 следует, что непрерывная на замкнутом промежутке функция является ограниченной.

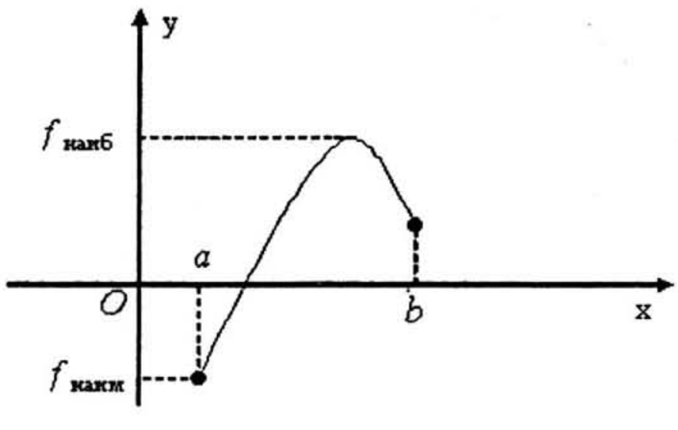


Рис. 6.26

7. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛАМ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ УСВОЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Элементы линейной алгебры

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы их свойства?
2. Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?
3. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
4. Каковы способы вычисления определителей?
5. Что называется расширенной матрицей системы линейных уравнений?
6. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
7. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
8. Какие неизвестные в системе линейных уравнений и в каком случае называют свободными, а какие базисными?
9. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?
10. Какая матрица называется единичной?
11. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?
12. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

Элементы векторной алгебры

1. Что называется вектором и модулем вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?
3. Какие операции над векторами называются линейными и каковы свойства этих операций?
4. Что является базисом на плоскости и в пространстве?
5. Какой базис называют ортонормированным?
6. Что называется скалярным произведением двух векторов, каковы его свойства?
7. Что называется векторным произведением двух векторов, каковы его свойства?
8. Что называется смешанным произведением трех векторов, каковы его свойства?
9. Что следует из равенства нулю скалярного, векторного и смешанного произведений?
10. Запишите формулы связи декартовой и полярной систем координат.
11. Запишите формулы преобразования координат при параллельном переносе, повороте системы координат.

Прямая и плоскость

1. Как записать уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору?
2. Как записать уравнения прямой, проходящей через точку параллельно заданному вектору?
3. Что называется нормальным уравнением плоскости, уравнением плоскости в общем виде, уравнением плоскости "в отрезках"?
4. Как найти угол между прямой и плоскостью?
5. Как определить взаимное расположение прямых, плоскостей, прямой и плоскости в пространстве?
6. Как найти расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой?
7. Как определить угол между прямыми, лежащими в плоскости?
8. Что называют нормальным уравнением прямой на плоскости, уравнением прямой "в отрезках"?

Кривые второго порядка на плоскости

1. Каковы канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы?
2. Как определить фокусы, эксцентриситет эллипса и гиперболы; фокус, эксцентриситет и директрису параболы?
3. Как определить асимптоты гиперболы?
4. Как определить тип кривой второго порядка?

Основы математического анализа

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной функции, монотонной функции.
2. Что называется упорядоченной переменной?
3. Сформулируйте определения предела последовательности, предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному числу и предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.
4. Как связано понятие предела функции с понятиями её пределов слева и справа?
5. Какая функция называется бесконечно малой? Сформулируйте теоремы о бесконечно малых функциях.
6. Какие бесконечно малые называют бесконечно малыми разного порядка малости; одного порядка малости; эквивалентными?
7. Какая функция называется бесконечно большой? Как связаны бесконечно большие с бесконечно малыми?
8. Сформулируйте определение числа e ("второй замечательный предел").
9. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке и на отрезке. Какие точки называются точками разрыва функции?
10. Сформулируйте определения точек разрыва первого и второго рода.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Работа 1

Задача 1. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Решить систему: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления с использованием обратной матрицы; 3) методом определителей:

1.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -23, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 8. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 11x_3 = -23, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} -8x_1 + 29x_2 - 10x_3 = 11, \\ -5x_1 + 18x_2 - 7x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_2 + 13x_3 = -23, \\ 3x_1 - x_3 = -5. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = -13, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 = -13. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19, \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 30, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 7, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 11. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 24, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 14, \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 21, \\ x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 33. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16, \\ 7x_1 - 7x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 27. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -13. \end{cases}$

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) уравнения сторон; уравнение высоты, опущенной из вершины C; 3) уравнение медианы к стороне AC; 4) угол A; 5) сделать чертёж в системе координат xOy:

2.1. A(1; 5), B(5; 2), C(1; 2).

2.2. A(1; 2), B(5; 5), C(5; 2).

2.3. A(5; 2), B(1; 5), C(5; 5).

2.4. A(5; 5), B(1; 2), C(1; 5).

2.5. A(-6; 3), B(-2; 6), C(-2; 3).

2.6. A(-2; 3), B(-6; 6), C(-2; 6).

2.7. A(-2; 6), B(-6; 3), C(-6; 6).

2.8. A(-6; 6), B(-2; 3), C(-6; 3).

2.9. A(-5;-1), B(-2;-5), C(-2;-1).

2.10. A(-2;-1), B(-5;-5), C(-2;-5).

2.11. A(-2;-5), B(-5;-1), C(-5;-5).

2.12. A(-5;-5), B(-2;-1), C(-5;-1).

2.13. A(3;-1), B(8;-4), C(8;-1).

2.14. A(8;-1), B(3;-4), C(8; -4).

2.15. A(8;-4), B(3;-1), C(3;-4).

2.16. A(3;-4), B(8;-1), C(3;-1).

2.17. A(-2; 3), B(4; 3), C(2; 5).

2.18. A(0; 1), B(4; 3), C(2; 5).

2.19. A(-2; 3), B(4; 3), C(0; 1).

2.20. A(-2; 3), B(2; 5), C(0; 1).

2.21. A(0; 1), B(4; 3), C(2; -1).

2.22. A(2; -1), B(2; 5), C(4; 3).

2.23. A(-5; 2), B(-5; 4), C(-3; 0).

2.24. A(-2; -2), B(4; -2), C(0; -4).

2.25. A(-2;-1), B(4;-2), C(2; 0).

2.26. A(2; 0), B(0;-4), C(4;-2).

2.27. A(-2;-2), B(0;-4), C(2; 0).

2.28. A(0; 2), B(2; 0), C(-2; -2).

2.29. A(0; 2), B(0;-4), C(-2;-2).

2.30. A(2; 0), B(-2;-2), C(0;-4).

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти : 1) уравнения прямой AB; 2) уравнение плоскости ABC; 3) площадь грани ABC; 4) объём пирамиды; 5) длину и уравнения пирамиды; 6) угол между ребром AD и гранью ABC:

3.1. A(2; 5; 1), B(2; 5;-2), C(1; 2;-1), D(3;-3; 6).

3.2. A(2; 1; 4), B(3; 3; 2), C(-1; 0; 1), D(4; 2; 3).

3.3. A(0;-1; 2), B(2; 0; 4), C(2; 0; 3), D(3; 1;-1).

3.4. A(1; 0; 1), B(3;-2; 2), C(2; 2; 3), D(3; 1;-1).

3.5. A(0; 1; 1), B(0; 1; 4), C(-1;-2;-1), D(1;-7; 6).

3.6. A(-1; 0; 1), B(0; 2;-1), C(-2;-1;-2), D(1; 1; 0).

3.7. A(1;-1; 0), B(3; 0; 2), C(3; 0; 1), D(6; 0; 3).

3.8. A(2; 0; 1), B(4;-2; 2), C(3; 2; 3), D(4; 1;-1).

3.9. A(-1; 2; 0), B(-1; 2; 3), C(-2;-1;-2), D(0;-6; 5).

3.10. A(1;-5; 2), B(2; 1; 0), C(0;-2;-1), D(3; 0; 1).

3.11. A(-2; 1; 0), B(0; 2; 2), C(0; 2; 1), D(3; 2; 3).

3.12. A(1; 0;-2), B(2; 2; 0), C(3;-2;-1), D(3; 1;-4).

3.13. A(3; 5; 8), B(6; 5; 8), C(7; 7; 3), D(8; 4; 1).

3.14. A(1; 0;-1), B(2; 2; 1), C(3;-2; 0), D(3; 1;-3).

3.15. A(0; 0; 1), B(2; 1; 3), C(2; 1;-1), D(1; 2; 3).

3.16. A(1; 0; 0), B(3;-2; 1), C(3; 1;-2), D(2; 2; 2).

3.17. A(-1;-1;-1), B(0; 1; 1), C(1;-3; 0), D(1; 0;-3).

3.18. A(-1; 0;-2), B(1; 1; 0), C(1; 2; 0), D(1;-2;-1).

3.19. A(1; 0; 2), B(3;-2; 3), C(2; 2; 4), D(3; 1; 0).

3.20. A(1; 0; 0), B(2; 2; 3), C(0; 3; 2), D(7;-3; 5).

3.21. A(2;-1; 0), B(4; 0; 2), C(4; 0; 1), D(7; 0; 3).

3.22. A(2;-2;-2), B(3; 0; 0), C(4;-4;-1), D(4;-1;-4).

3.23. A(0;-2;-2), B(2;-1; 0), C(4;-1;-4), D(3; 0; 0).

3.24. A(2; 0;-2), B(4;-2;-1), C(4; 1;-4), D(3; 2; 0).

3.25. A(2;-2; 0), B(3; 0; 2), C(4;-4; 1), D(4;-1;-2).

3.26. A(1; 2; 3), B(3; 3; 5), C(2; 4; 5), D(3; 0; 4).

3.27. A(-1; 2;-3), B(1; 0;-2), C(0; 4;-1), D(1; 3;-5).

3.28. A(0;-2; 1), B(1; 0; 4), C(-1; 1; 3), D(6;-5; 6).

3.29. A(-1;-1; 2), B(-1;-1; 5), C(-2;-4; 0), D(-2;-9; 7).

3.30. A(0;-1;-2), B(2; 0; 0), C(2; 0;-1), D(5; 0; 1).

Задача 4. Используя преобразования параллельного переноса, привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду и построить кривую:

4.1. а) $5x^2 + 10x + 9y^2 - 4 = 0$, б) $4x - y^2 - 2y - 5 = 0$.

4.2. а) $3x^2 + 12x - y + 17 = 0$, б) $4x^2 + 16x - y^2 - 6y + 11 = 0$.

4.3. а) $x^2 + 4x - 4y^2 - 8y + 4 = 0$, б) $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$.

4.4. а) $4x^2 - 8x + 3y^2 + 12y + 4 = 0$, б) $2x^2 - 16x + y + 35 = 0$.

4.5. а) $x^2 + 2x + 1 + 2y^2 - 4y = 0$, б) $3x + y^2 + 2y + 7 = 0$.

4.6. а) $x^2 - 6x + 9 - 5y^2 - 10y = 0$, б) $x^2 + 4x + y + 9 = 0$.

4.7. а) $4x^2 - 8x + 2y^2 + 8y + 11 = 0$, б) $y^2 - 8y + x + 21 = 0$.

4.8. а) $x^2 + 4x - 9y^2 + 18y + 4 = 0$, б) $3x^2 - 6x - y + 1 = 0$.

4.9. а) $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$, б) $x + y^2 - 4y + 9 = 0$.

4.10. а) $x^2 + 6x - 9y^2 - 18y - 9 = 0$, б) $4x^2 - 8x - y + 1 = 0$.

4.11. а) $4x^2+8x+5y^2-20y+4=0$, б) $x+y^2-2y+2=0$.

4.12. а) $9x^2+36x-2y^2-4y+16=0$, б) $2x^2-4x-y=0$.

4.13. а) $4x^2-16x+3y^2-24y+52=0$, б) $5x-y^2-2y-11=0$.

4.14. а) $5x^2+10x-y^2+10y-30=0$, б) $3x^2+30x-y+77=0$.

4.15. а) $4x^2-16x-3y^2-6y+1=0$, б) $2x^2-4x+y+7=0$.

4.16. а) $4x^2+8x+y^2-10y+25=0$, б) $x-y^2+2y+3=0$.

4.17. а) $4x^2-24x+9y^2-36y+36=0$, б) $3x-y^2-2y-4=0$.

4.18. а) $5x^2+10x-y^2-2y+29=0$, б) $4x^2+8x-y-1=0$.

4.19. а) $9x^2+18x+4y^2-16y-11=0$, б) $x+y^2+2y+3=0$.

4.20. а) $x^2-y^2+2y-4=0$, б) $2x^2+20x-y+48=0$.

4.21. а) $4x^2+8x+3y^2-12y+4=0$, б) $4x^2+8x+y+6=0$.

4.22. а) $x^2+4x-5y^2+30y-46=0$, б) $x-y^2-2y-5=0$.

4.23. а) $2x^2-8x+y^2-2y+7=0$, б) $x+y^2-2y+3=0$.

4.24. а) $3x^2+24x-y^2+10y+20=0$, б) $y^2+2y-4x-11=0$.

4.25. а) $x^2+4x+5y^2-10y+4=0$, б) $4x^2-8x-y+1=0$.

4.26. а) $9x^2-18x-4y^2-24y+9=0$, б) $3x-y^2-2y-16=0$.

4.27. а) $x^2+10x+4y^2-8y+25=0$, б) $2x^2+4x+y+3=0$.

4.28. а) $x^2+4x-3y^2+6y+4=0$, б) $4x-y^2+2y+11=0$.

4.29. а) $x^2-4x+16y^2-16y+4=0$, б) $y^2-2y-x-4=0$.

4.30. а) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 18y - 41 = 0,$ б) $x^2 - 2x - y - 1 = 0.$

Задача 5. Дано уравнение линии второго порядка в некотором ортонормированном базисе. Используя теорию квадратичных форм, выполнить следующие задания: 1) написать каноническое уравнение и определить тип кривой; 2) указать ортонормированный базис, в котором уравнение принимает канонический вид; 3) записать преобразования координат, приводящее уравнение к каноническому виду; 4) построить кривую в исходной системе координат:

5.1. $15x^2 - 2\sqrt{55xy} + 9y^2 = 20.$

5.2. $4xy + 3y^2 = 36.$

5.3. $5x^2 + 2\sqrt{3xy} + 3y^2 = 12.$

5.4. $5x^2 + 12xy = 36.$

5.5. $5x^2 + 4\sqrt{6xy} + 7y^2 = 22.$

5.6. $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 2.$

5.7. $4x^2 + 24xy + 11y^2 = 20.$

5.8. $3x^2 - 2\sqrt{5xy} - y^2 = 8.$

5.9. $6x^2 - 4\sqrt{14xy} + 5y^2 = 26.$

5.10. $x^2 - 2\sqrt{21xy} + 5y^2 = 24.$

5.11. $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$

5.12. $13x^2 - 48xy + 27y^2 = 45.$

5.13. $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 8.$

5.14. $5x^2 + 12xy = 36.$

5.15. $2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0.$

5.16. $2x^2 - 2\sqrt{3xy} + 9 = 0.$

5.17. $18x^2 - 24xy + 11y^2 - 3 = 0.$

5.18. $4xy - 3y^2 + 1 = 0.$

5.19. $x^2 - xy + y^2 = 0.$

5.20. $2x^2 + 2\sqrt{2xy} + 3y^2 = 1.$

5.21. $3x^2 + 2\sqrt{5xy} + 7y^2 = 8.$

5.22. $4xy - 3y^2 - 4 = 0.$

5.23. $5x^2 + 5y^2 - 16xy = 39.$

5.24. $3x^2 - 3y^2 - 8xy = 25.$

5.25. $5x^2 - 5y^2 - 2\sqrt{6xy} = 14.$

5.26. $5y^2 - 2\sqrt{6xy} = 6.$

5.27. $4x^2 + 2\sqrt{5xy} = 25.$

5.28. $5x^2 - 2\sqrt{2xy} + 4y^2 = 6.$

5.29. $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 81.$

5.30. $7x^2 + 2\sqrt{6xy} + 2y^2 = 16.$

Работа 2

Задача 1. Найти пределы функции, не используя правило Лопиталя:

1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)(x-1)}{1+2x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2-x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\,\mathrm{arctg}\,3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-7x+6}{\sin(6-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2+x}\right)^{2x}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{(x+1)^2+(x-1)^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-10x+9}{\arcsin(x-9)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{\arcsin(7-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/x^2}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{(x+2)^3+(x-2)^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{\mathrm{tg}(x-1)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-\sqrt{x+3}}{x^2-x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin 2x)}{1-\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-7x+6}{\mathrm{tg}(6-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+10}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x}-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{\sin(5-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{x^4+1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x-1}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x}{\ln(1+2x)}$,

г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{\sin(x-7)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x+\sqrt{x^4+1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x^2-3x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{\arcsin(1-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(x-1)}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\pi(x+1)}{\ln(1+2x)}$,

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{\arcsin(x-4)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+1}{1-x^5}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x}-2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7^{-3x}-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-3x+2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x+3)^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-3x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{3+x^4}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{5}{2}x\right)}{\arcsin 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\arcsin(x-3)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\cos x)^{1x^2}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_5(1+5x^2)}{x\arcsin 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-9x+8}{\operatorname{arctg}(8-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^4+x}}{(x+1)^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos x)}$,

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x^2-4x+3}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{(x+5)^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\operatorname{tg}3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-4)}{x^2-5x+4}$,

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\operatorname{ctg}x}$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{x^4-12x}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{\operatorname{arctg}(2-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to0}(2-e^{x^2})^{1/(1-\cos x)}$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{(x-2)(x-1)}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7^{-2x}-1}{\operatorname{arctg}3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

д) $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-1}{\sqrt{x^8-x-1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_5(1+2x^2)}{\operatorname{tg}^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\operatorname{tg}(3-x)}{x^2-2x-3}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^4+x}}{x^2+4}$,

1.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^8+x}}{1-x^4}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin\pi(x+7)}$,

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-7x+10}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(6-5\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-4x+3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 2x}{\ln(1+3x^2)}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{\arcsin(x-1)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x+3}$.

1.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+7}{1-x^5}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x}{1-5^x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{\mathrm{tg}(1-x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$.

1.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^4-1}}{3x^2+x-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x}-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-8^x}{x^2-3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-9x+8}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

1.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{1-\sqrt{3x+1}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{\log_2(1+3x)}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{arctg}(1-x)}{x^2-8x+7}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1x^2}$.

1.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+x^2 2x}{x-x^6}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{4x}-2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-3^x}{2x^2-x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\arcsin(x-2)}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

1.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^3+x-10}$,

1.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{x^2+3\sqrt{x^4+x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2-x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\arcsin(x-3)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/x^2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{\operatorname{arctg}(x-2)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$.

1.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(x+2)^2}{1-x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\operatorname{tg}2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{\operatorname{ctg}x}$.

1.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8+x^5-1}}{2x^4+x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}(x-3)}{x^2-5x+6}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

1.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^3}{2x^3+x+3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt{9+2x}-5}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-10x+9}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

1.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3}{3-x^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-2x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2-x)}{x^2+x-6}$,

д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-2)}$.

Задача 2. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Построить график функции:

2.1. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x=-1, \\ x^2-1, & -1\le x<1, \\ 3^{1/(2-x)}, & x\ge 1. \end{cases}$

2.2. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-2, \\ x^2+2x, & -2\le x<0, \\ 3^{1/(1-x)}, & x\ge 0. \end{cases}$

2.3. $f(x)=\begin{cases} 2^{1/(x+3)}, & x\le -1, \\ x^2-1, & -1<x<1, \\ 1-x, & x\ge 1. \end{cases}$

2.4. $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2-2x, & 0\le x<2, \\ 3^{1/(3-x)}, & x\ge 2. \end{cases}$

2.5. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x<-1, \\ 1-x^2, & -1\le x<1, \\ 2^{1/(3-x)}, & x\ge 1. \end{cases}$

2.6. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-2, \\ x^2+2x, & -2\le x<0, \\ 3^{1/(1-x)}, & x\ge 0. \end{cases}$

2.7. $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & x<-\pi, \\ \sin x, & -\pi\le x<0, \\ \pi^{1/(1-x)}, & x\ge 0. \end{cases}$

2.8. $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2-2x, & 0\le x<2, \\ 3^{1/(x-3)}, & x\ge 2. \end{cases}$

2.9. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-1, \\ x^2, & -1\le x<0, \\ 2^{1/(x-1)}, & x\ge 0. \end{cases}$

2.10. $f(x)=\begin{cases} 2^{1/(x+4)}, & x\le -2, \\ x^2+2x, & -2<x<0, \\ -x, & x\ge 0. \end{cases}$

2.11. $f(x)=\begin{cases} 3^{1/(x+1)}, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 2-x, & x\ge 1. \end{cases}$

2.12. $f(x)=\begin{cases} -(x+2), & x<-2, \\ -(x^2+2x), & -2\le x<0, \\ 2^{1/(x-2)}, & x\ge 0. \end{cases}$

2.13. $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1,\\ \cos(\pi x/2), & -1<x<1,\\ 2^{1/(2-x)}, & x\ge 1.\end{cases}$

2.14. $f(x)=\begin{cases}\pi^{1/(1+x)}, & x\le 0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ x-\pi, & x\ge \pi.\end{cases}$

2.15. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ x^2-1, & -1\le x<1,\\ 3^{1/(x-2)}, & x\ge 1.\end{cases}$

2.16. $f(x)=\begin{cases}2^{1/(x+2)}, & x\le 0,\\ x^2-2x, & 0<x<2,\\ 2-x, & x\ge 2.\end{cases}$

2.17. $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x<-1,\\ 1-x^2, & -1\le x<1,\\ 2^{1/(x-3)}, & x\ge 1.\end{cases}$

2.18. $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 2x-x^2, & 0\le x<2,\\ 2^{1/(x-4)}, & x\ge 2.\end{cases}$

2.19. $f(x)=\begin{cases}3^{1/(x+2)}, & x\le -1,\\ 1-x^2, & -1<x<1,\\ x-1, & x\ge 1.\end{cases}$

2.20. $f(x)=\begin{cases}-(x+2), & x\le -2,\\ -(x^2+2x), & -2\le x<0,\\ 2^{1/(2-x)}, & x\ge 0.\end{cases}$

2.21. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & x<-\pi,\\ \sin x, & -\pi\le x<0,\\ \pi^{1/(x-1)}, & x\ge 0.\end{cases}$

2.22. $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 2x-x^2, & 0\le x<\pi,\\ 2^{1/(4-x)}, & x\ge 2.\end{cases}$

2.23. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x<1,\\ 2^{1/(1-x)}, & x\ge 0.\end{cases}$

2.24. $f(x)=\begin{cases}3^{1/(x+3)}, & x<-2,\\ -(x^2+2x), & -2\le x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$

2.25. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 3^{1/(2-x)}, & x\ge 1.\end{cases}$

2.26. $f(x)=\begin{cases}3^{1/(x+1)}, & x\le 0,\\ 2x-x^2, & 0<x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$

2.27. $f(x)=\begin{cases}2^{1/(x+2)}, & x\le -1,\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1<x<1,\\ x-1, & x\ge 1.\end{cases}$

2.28. $f(x)=\begin{cases}\pi^{1/(x+1)}, & x\le 0,\\ -\sin x, & 0<x<\pi,\\ \pi-x, & x\ge \pi.\end{cases}$

2.29. $f(x)=\begin{cases}2^{1/(x+1)}, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<1,\\ 2-x, & x\ge 1.\end{cases}$

2.30. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 3^{1/(x-2)}, & x\ge 1.\end{cases}$

Задача 3. Даны четыре комплексных числа a_1, a_2, b_1, b_2.

Найти: a_1+a_2, a_1-a_2, $a_1\cdot a_2$, a_1/a_2, $(b_1/b_2)^{12}$, $\sqrt[3]{b_1/b_2}$:

3.1. $a_1=1+i,\quad a_2=1-3i,\quad b_1=-2\sqrt{2},\quad b_2=1+i.$

3.2. $a_1=2-i,\quad a_2=3-i,\quad b_1=-4,\quad b_2=1+i\sqrt{3}.$

3.3. $a_1=3-i,\quad a_2=2+3i,\quad b_1=2\sqrt{2},\quad b_2=1-i.$

3.4. $a_1=3+i,\quad a_2=2+3i,\quad b_1=4,\quad b_2=1-i\sqrt{3}.$

3.5. $a_1=2+i,\quad a_2=3+i,\quad b_1=2\sqrt{2},\quad b_2=1+i.$

3.6. $a_1=1+2i,\quad a_2=7-i,\quad b_1=2\sqrt{2},\quad b_2=-1-i.$

3.7. $a_1=1-3i,\quad a_2=5+2i,\quad b_1=-2\sqrt{2},\quad b_2=-1+i.$

3.8. $a_1=1-2i,\quad a_2=4+3i,\quad b_1=-2\sqrt{2},\quad b_2=-1-i.$

3.9. $a_1=2-3i,\quad a_2=5-i,\quad b_1=4,\quad b_2=-1+i\sqrt{3}.$

3.10. $a_1=3-2i,\quad a_2=1+6i,\quad b_1=1,\quad b_2=-\sqrt{3}-i.$

3.11. $a_1=5-i,\quad a_2=3+5i,\quad b_1=-1,\quad b_2=-\sqrt{3}-i.$

3.12. $a_1 = 2-4i,\quad a_2 = 2+7i,\qquad b_1 = 1,\qquad b_2 = \sqrt{3}+i.$

3.13. $a_1 = 1+3i,\quad a_2 = 5+2i,\qquad b_1 = 4i,\qquad b_2 = 1-i\sqrt{3}.$

3.14. $a_1 = 2-3i,\quad a_2 = 3+6i,\qquad b_1 = -4i,\qquad b_2 = 1+i\sqrt{3}.$

3.15. $a_1 = 3-5i,\quad a_2 = 2+8i,\qquad b_1 = -2\sqrt{2}i,\qquad b_2 = 1+i.$

3.16. $a_1 = 2+5i,\quad a_2 = 5-3i,\qquad b_1 = -2\sqrt{2},\qquad b_2 = 1-i.$

3.17. $a_1 = 5-2i,\quad a_2 = 6+i,\qquad b_1 = -4,\qquad b_2 = 1-i\sqrt{3}.$

3.18. $a_1 = 6-i,\quad a_2 = 3+2i,\qquad b_1 = 4,\qquad b_2 = \sqrt{3}-i.$

3.19. $a_1 = 3-2i,\quad a_2 = 2-5i,\qquad b_1 = -1,\qquad b_2 = \sqrt{3}+i.$

3.20. $a_1 = 7-i,\quad a_2 = 2+5i,\qquad b_1 = -1,\qquad b_2 = \sqrt{3}-i.$

3.21. $a_1 = 5+i,\quad a_2 = 3-2i,\qquad b_1 = 4,\qquad b_2 = -1-i\sqrt{3}.$

3.22. $a_1 = 4-i,\quad a_2 = 2+3i,\qquad b_1 = -4,\qquad b_2 = -1+i\sqrt{3}.$

3.23. $a_1 = 4+i,\quad a_2 = 3+2i,\qquad b_1 = 2\sqrt{2},\qquad b_2 = -1+i.$

3.24. $a_1 = 6-i,\quad a_2 = 1+7i,\qquad b_1 = -4,\qquad b_2 = -\sqrt{3}+i.$

3.25. $a_1 = 5+2i,\quad a_2 = 2+5i,\qquad b_1 = 1,\qquad b_2 = -\sqrt{3}+i.$

3.26. $a_1 = 7+i,\quad a_2 = 1-5i,\qquad b_1 = -1,\qquad b_2 = -\sqrt{3}+i.$

3.27. $a_1 = 7-i,\quad a_2 = 2+5i,\qquad b_1 = 1,\qquad b_2 = \sqrt{3}-i.$

3.28. $a_1 = 2-i,\quad a_2 = 6+5i,\qquad b_1 = 2\sqrt{2}i,\qquad b_2 = -1-i.$

3.29. $a_1 = 3-5i,\quad a_2 = 3+i,\qquad b_1 = -i,\qquad b_2 = \sqrt{3}+i.$

3.30. $a_1 = 3-i,\quad a_2 = 1+8i,\qquad b_1 = i,\qquad b_2 = -\sqrt{3}-i.$

Задача 4. Построить область, ограниченную линиями, уравнения которых заданы в полярной системе координат:

4.1. $r = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.2. $r = \dfrac{1}{2} + \cos\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.3. $r = \dfrac{1}{2} - \sin\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.4. $r = \dfrac{1}{2} - \cos\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.5. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$, $\quad r = 2$, $\quad (r \geq 2)$.

4.6. $r = 1 - \sqrt{2}\sin\varphi$, $\quad r = 2$, $\quad (r \geq 2)$.

4.7. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$, $\quad r = 2$, $\quad (r \geq 2)$.

4.8. $r = 1 - \sqrt{2}\cos\varphi$, $\quad r = 2$, $\quad (r \geq 2)$.

4.9. $r = 2\cos 3\varphi$, $\quad r = \sqrt{3}$, $\quad (r \geq \sqrt{3})$.

4.10. $r = 2\sin 3\varphi$, $\quad r = \sqrt{3}$, $\quad (r \geq \sqrt{3})$.

4.11. $r = 2\cos 6\varphi$, $\quad r = \sqrt{3}$, $\quad (r \geq \sqrt{3})$.

4.12. $r = 2\sin 6\varphi$, $\quad r = \sqrt{3}$, $\quad (r \geq \sqrt{3})$.

4.13. $r = \sqrt{3}\cos\varphi$, $\quad r = \sin\varphi$, $\quad (r \geq \sin\varphi)$.

4.14. $r = \cos\varphi$, $\quad r = \sqrt{3}\sin\varphi$, $\quad (r \geq \cos\varphi)$.

4.15. $r = \cos\varphi$, $\quad r = \sin\varphi$, $\quad (r \geq \cos\varphi)$.

4.16. $r^2 = 4\sin^2\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.17. $r^2 = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.18. $r^2 = 4\cos^2\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.19. $r^2 = 2\sin 2\varphi \cdot \cos^2 2\varphi$, $\quad$ 4.20. $r^2 = 4\sin^2\varphi$,

4.21. $r^2 = 4\cos 2\varphi$, $\quad r = \sqrt{2}$, $\quad (r \geq \sqrt{2})$.

4.22. $r = 4\cos^3\varphi$, $\quad r = \frac{1}{2}$, $\quad (r \geq \frac{1}{2})$.

4.23. $r = 4\sin^3\varphi$, $\quad r = \frac{1}{2}$, $\quad (r \geq \frac{1}{2})$.

4.24. $r = \cos\varphi + \sin\varphi$, $\quad r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad (r \geq \frac{\sqrt{3}}{2})$.

4.25. $r = 2\sin 4\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.26. $r = \cos\varphi - \sin\varphi$, $\quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad (r \geq \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4.27. $r = 2\cos 4\varphi$, $\quad r = \sqrt{2}$, $\quad (r \geq \sqrt{2})$.

4.28. $r = 2\sin^2\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.29. $r = 2\cos^2\varphi$, $\quad r = 1$, $\quad (r \geq 1)$.

4.30. $r = \sin 2\varphi$, $\quad r = \frac{1}{2}$, $\quad (r \geq \frac{1}{2})$.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставить поля шириной 4-5 см. для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы следует проставить дату её выполнения.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач должны располагаться в порядке возрастания номеров задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать её условие.

6. После получения прорецензированной незачтённой работы студент должен исправить все ошибки и выполнить все рекомендации рецензента в той же тетради.

7. Номер варианта расчетно- графической работы определяется по последним двум цифрам номера зачётной книжки студента и соответствует этим цифрам, если они образуют число от 01 до 30. Если же число больше 30, то номер варианта равен остатку после деления этого числа на тридцать. Если же в остатке получится ноль, тогда ваш вариант 30.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления /Г. М. Фихтенгольц.-М.: Наука, 1969.-608с.

2. **Карпелевич, Ф. И.** Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский.-М.:Наука, 1967.-312с.

3. **Беклемишев Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев.-М.: Наука, 1974.-320с.

4. Сборник задач по математике для ВТУЗов/под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.-М.: Наука, 1986.-462с.

5. **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике/ Д. Т. Письменный.-М.: Айрис-пресс, 2005.-602с.

6. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах/ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.-М.: Высшая школа, 1986.-304с.

7. **Зюзина, Р. П.** Высшая математика: контрольные работы 1,2 для студентов-заочников/Сост.: Р.П. Зюзина, М. Г. Ефимова. НГТУ. Н. Новгород. 2003.-20с.