

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

Нижегородский государственный технический университет

**И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова, М.Л. Мухина**

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: бакалавров и магистров «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» и дипломированных специалистов «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»*

Нижний Новгород 2006

**УДК 514.18**  
**ББК 22.151.1**  
**С925**

**Рецензенты:**

доктор педагогических наук, профессор кафедры «Начертательная геометрия, машинная графика и САПР» НГАСУ *М.В. Лагунова*,  
доцент, кандидат технических наук, зав. кафедрой  
«Начертательная геометрия и графика» ВГАВТ *А.Ю. Логинов*

**Скобелева И.Ю., Ширшова И.А., Мухина М.Л.**

**С925** **Начертательная геометрия:** учеб. пособие / И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова, М.Л. Мухина; НГТУ. Нижний Новгород, 2006. – 150 с.  
**ISBN 5-93272-369-6**

Приведены материалы по курсу «Начертательная геометрия». Рассмотрены методы построения пространственных объектов на плоскости, представлены позиционные и метрические задачи, имеющие исключительно практическое значение.

Углубленно разработаны темы «Поверхности», «Развертка поверхностей», «Аксонметрические проекции», что способствует более детальному изучению курса.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей.

Рис. 176. Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

**УДК 514.18**  
**ББК 22.151.1**

**ISBN 5-93272-369-6**

© Нижегородский государственный  
технический университет, 2006  
© Скобелева И. Ю., Ширшова И.А.,  
Мухина М. Л., 2006

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ</b> .....	<b>6</b>
<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	<b>7</b>
<b>1. ПРЕДМЕТ КУРСА</b> .....	<b>8</b>
1.1. Метод начертательной геометрии .....	8
1.2. Задачи начертательной геометрии .....	8
<b>2. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ</b> .....	<b>8</b>
2.1. Центральным метод проецирования .....	8
2.2. Параллельный метод проецирования .....	9
2.3. Свойства параллельных проекций .....	10
2.4. Ортогональные проекции .....	10
<b>3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ</b> .....	<b>11</b>
3.1. Ортогональные (прямоугольные) проекции точки. Проецирование точки на три плоскости проекций .....	11
3.2. Основные свойства комплексного чертежа .....	14
3.3. Комплексный чертеж без указания осей .....	14
<b>4. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ</b> .....	<b>15</b>
4.1. Классификация прямых .....	15
4.1.1. Линии уровня .....	16
4.1.2. Проецирующие прямые .....	18
4.1.2. Проецирующие прямые .....	19
4.2. Взаимное положение прямых линий .....	22
4.3. Принадлежность точки прямой линии .....	25
4.4. Определение натуральной величины отрезка. Способ треугольника .....	25
<b>5. ПЛОСКОСТЬ</b> .....	<b>27</b>
5.1. Способы задания плоскости .....	27
5.2. Классификация плоскостей .....	28
5.3. Проецирующие плоскости .....	28
5.4. Плоскости уровня .....	32
5.5. Относительное положение двух плоскостей .....	35
<b>6. ПОВЕРХНОСТЬ</b> .....	<b>35</b>
6.1. Способы задания поверхностей .....	35
6.2. Классификация поверхностей .....	38

6.3. Поверхности вращения .....	38
6.4. Поверхности сдвига.....	42
6.5. Винтовые поверхности .....	43
6.6. Изображение поверхностей на комплексном чертеже .....	43
6.6.1. Построение очерков конических поверхностей .....	44
6.6.2. Построение очерков цилиндрических поверхностей.....	46
<b>7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ. МЕТОД КОНКУРИРУЮЩИХ ТОЧЕК .....</b>	<b>47</b>
<b>8. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ .....</b>	<b>48</b>
8.1. Относительное положение прямой и плоскости.....	48
8.2. Принадлежность точки и прямой линии плоскости.....	48
8.3. Параллельность прямой и плоскости .....	49
8.4. Линии уровня плоскости .....	50
8.5. Пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения .....	52
8.6. Пересечение двух плоскостей частного положения.....	53
8.7. Пересечение плоскости общего положения и плоскости частного положения .....	54
8.8. Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения. Первая позиционная задача .....	55
8.9. Пересечение двух плоскостей общего положения. Вторая основная позиционная задача .....	58
8.10. Сечение поверхности плоскостью .....	60
8.11. Точка на поверхности.....	60
8.12. Сечение многогранника плоскостью частного положения.....	64
8.13. Сечение многогранника плоскостью общего положения .....	65
8.14. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения .....	66
8.15. Цилиндрические сечения .....	68
8.16. Конические сечения .....	69
8.17. Пересечение прямой с поверхностью .....	74
<b>9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....</b>	<b>77</b>
9.1. Способ вспомогательных параллельных плоскостей .....	78
9.2. Способ вспомогательных сфер.....	82
9.2.1. Способ концентрических сфер .....	82
9.2.2. Способ эксцентрических сфер.....	88

<b>10. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ .....</b>	<b>98</b>
10.1. Теорема о проекциях прямого угла .....	98
10.2. Линии наибольшего наклона плоскости .....	99
10.3. Перпендикулярность прямой и плоскости.....	100
10.4. Взаимная перпендикулярность плоскостей.....	101
<b>11. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА .....</b>	<b>102</b>
11.1. Способ замены плоскостей проекций.....	102
11.2. Способ плоскопараллельного движения .....	106
11.3. Вращение.....	111
11.3.1. Вращение вокруг проецирующей прямой.....	111
11.3.2. Вращение вокруг линии уровня (совмещение).....	114
<b>12. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ .....</b>	<b>117</b>
12.1. Развертка поверхности прямой призмы .....	120
12.2. Развертка поверхности правильной пирамиды .....	121
12.3. Развертка поверхности прямого кругового конуса.....	122
12.4. Развертка поверхности прямого кругового цилиндра .....	123
12.5. Развертки цилиндрических и призматических поверхностей.....	123
12.5.1. Способ раскатки .....	123
12.5.2. Способ нормального сечения .....	126
12.6. Развертки линейчатых поверхностей.....	130
12.7. Развертки неразвертывающихся поверхностей .....	133
12.7.1. Способ цилиндров.....	133
12.7.2. Способ конусов .....	137
<b>13. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ .....</b>	<b>139</b>
13.1. Виды аксонометрических проекций .....	140
13.2. Прямоугольные (ортогональные) аксонометрические проекции .....	141
13.3. Прямоугольная изометрическая и диметрическая проекции .....	142
13.4. Аксонометрические проекции окружности.....	145
13.4.1. Построение эллипсов по восьми точкам .....	146
13.4.2. Построение овалов.....	148
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>150</b>

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

### Геометрические знаки:

$\Phi$  – геометрическая фигура

$A, B, C, D, E, F \dots$  – точки в пространстве (прописные буквы латинского алфавита)

$a, b, c, d, e, f \dots$  – прямые и кривые линии в пространстве (строчные буквы латинского алфавита)

$(AB)$  – прямая неограниченной длины, проходящая через точки  $A$  и  $B$

$[AB)$  – луч с началом в точке  $A$

$[AB]$  – отрезок прямой, ограниченный точками  $A$  и  $B$

$|AB|$  – расстояние от точки  $A$  до точки  $B$

$|A, a|$  – расстояние от точки  $A$  до прямой  $a$

$|A, \alpha|$  – расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$

$\alpha, \beta, \delta, \gamma, \lambda, \vartheta \dots$  – плоскости и углы – буквы греческого алфавита

### Знаки, выражающие отношения между геометрическими образами:

$=$  – равенство, совпадение

$\rightarrow$  – отображение

$\Rightarrow$  – следовательно

$\Leftrightarrow$  – если (в том только случае), эквивалентность

$\times$  – пересечение в случае, когда результатом пересечения является точка

$\cap$  – пересечение в случае, когда результатом пересечения является множество точек:

$a = \alpha \cap \beta$

$\in$  – принадлежность:  $A \in a$

$\subset$  – включение:  $a \subset \alpha$

$\cup$  – объединение:  $ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$

$\Pi_1$  – горизонтальная плоскость проекций

$\Pi_2$  – фронтальная плоскость проекций

$\Pi_3$  – профильная плоскость проекций

$\parallel$  – параллельность

$\perp$  – перпендикулярность

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория начертательной геометрии составляет основу инженерной практики, геометрической и конструкторской подготовки инженера.

Учебное пособие по начертательной геометрии предназначено для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений, охватывает все вопросы действующей учебной программы. В основу положены лекции по начертательной геометрии, читаемые авторами в Нижегородском государственном техническом университете.

В пособии дается методика построения технического чертежа и широко используются средства наглядного показа: выразительные проекционные объекты и их объемные модели.

Геометрические задачи решаются одновременно на комплексных чертежах и на наглядных изображениях по одним и тем же правилам. Как видно из опыта, использование средств наглядного показа способствует целенаправленному формированию пространственных представлений и развитию пространственного воображения, приобретению навыков чтения чертежей, геометрического конструирования.

В учебном пособии учащиеся встретятся с рассмотрением решений не только типовых геометрических задач на формирование, задание и изображение поверхностей технических форм и их разверток, аксонометрических изображений, но и познакомятся с процессом решения конкретных задач по каждой теме курса начертательной геометрии.

При подготовке пособия были учтены советы и замечания старшего преподавателя кафедры «Инженерная графика» НГТУ Г. В. Веселовой, ныне находящейся на заслуженном отдыхе. Авторы выражают искреннюю благодарность Г. В. Веселовой.

Пожелания и замечания следует направлять по адресу: 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24, КСФ, кафедра «Инженерная графика».

# 1. ПРЕДМЕТ КУРСА

## 1.1. Метод начертательной геометрии

Начертательная геометрия – это раздел геометрии, в котором трехмерные пространственные объекты изучаются по их плоским изображениям – чертежам. Чертежом называют изображение предмета, построенное по особым правилам при помощи чертежных инструментов или средствами компьютерной графики, в точной зависимости от размеров и положения в пространстве соответствующих линий предмета. «Чертеж – это язык техники», – говорил один из создателей начертательной геометрии Гаспар Монж. «Начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками как элементами всякого изображения», – писал автор классического русского учебника начертательной геометрии В.И. Курдюмов.

## 1.2. Задачи начертательной геометрии

Начертательная геометрия занимается двумя основными вопросами:

1. Изучением методов построения изображений трехмерных пространственных форм на плоскости.
2. Изучением пространственных форм по их плоским изображениям.

Основные требования, предъявляемые к чертежам:

- наглядность,
- простота и точность выполнения,
- обратимость, то есть возможность решения задачи о восстановлении формы и размеров изображаемого предмета.

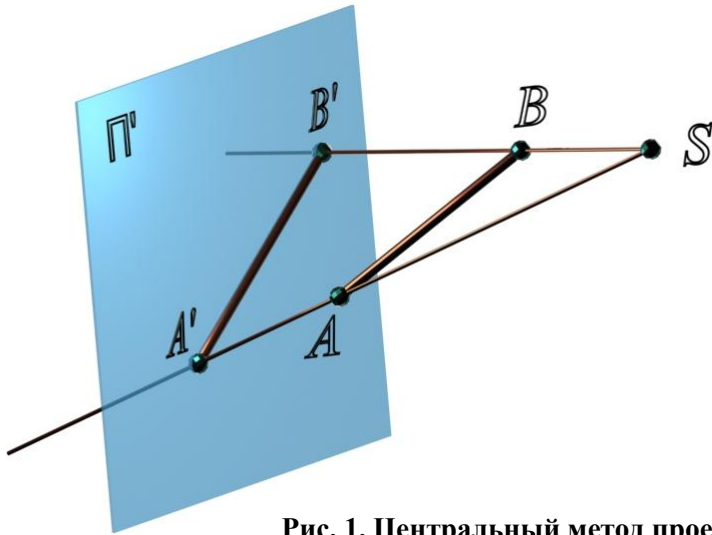
# 2. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

## 2.1. Центральное проецирование

В пространстве выбирают произвольную точку  $S$  – центр проецирования и плоскость  $\Pi'$  – плоскость проекций или картинную плоскость (рис. 1). Для получения центральной проекции предмета, например отрезка  $[AB]$ , необходимо через центр проекций и каждую точку предмета (точки  $A$  и  $B$ ) провести прямые до пересечения с картинной плоскостью. Эти прямые называются проецирующими лучами. Точка пересечения проецирующего луча с картинной плоскостью называется проекцией точки на эту плоскость.

Проекция предмета на плоскость – это множество проекций всех его точек на заданную плоскость.





**Рис. 1. Центральный метод проецирования:**

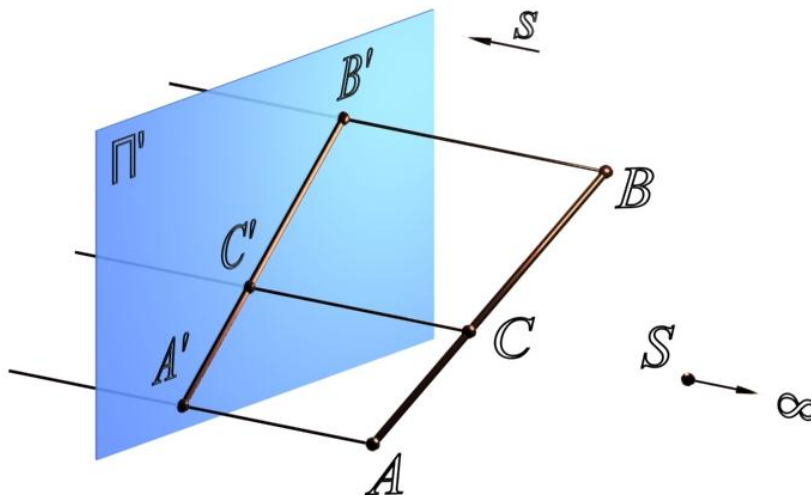
$[SA)$  и  $[SB)$  – проецирующие лучи;

$A' = [SA) \cap \Pi'$  и  $B' = [SB) \cap \Pi'$  – центральные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi'$

Чертежи, полученные методом центрального проецирования, отличаются большой наглядностью, поскольку построены на том же принципе, что и аппарат человеческого зрения. Однако такие чертежи сложно выполнять и измерять, поскольку размеры предмета искажаются.

## 2.2. Параллельный метод проецирования

Если центр проекций удалить в бесконечность, то угол между проецирующими лучами будет стремиться к нулю, и проецирующие лучи окажутся параллельными (рис. 2).



**Рис. 2. Параллельный метод проецирования:**

$s$  – направление проецирования;

$[SA)$ ,  $[SB)$  и  $[SC)$  – проецирующие лучи;

$A', B'$  и  $C'$  – параллельные проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\Pi'$  в направлении  $s$

### 2.3. Свойства параллельных проекций

1. Проекцией точки является точка (см. рис. 2).
2. Проекцией прямой линии является прямая линия (см. рис. 2), за исключением случая, когда прямая параллельна направлению проецирования.
3. При параллельном проецировании сохраняются пропорции.
4. Если точка принадлежит какой-либо линии, то проекция этой точки принадлежит проекции этой линии  $C \in AB \Rightarrow C' \in A'B'$  (см. рис. 2).
5. Если прямые параллельны между собой, то их проекции также параллельны (рис. 3).

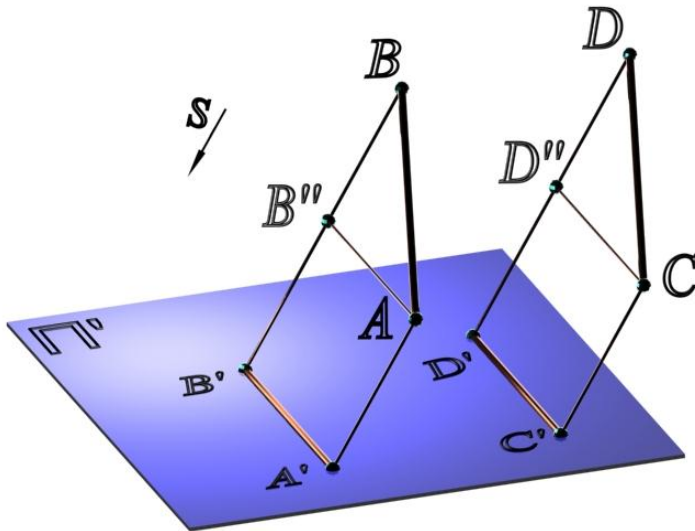


Рис. 3. Проекции параллельных прямых:

$$[AB] \parallel [DC]; [A'B'] \parallel [D'C']$$

### 2.4. Ортогональные проекции

Если направление проецирования  $s$  перпендикулярно плоскости проекций, то метод проецирования называется ортогональным (рис. 4), а полученные проекции – ортогональными.

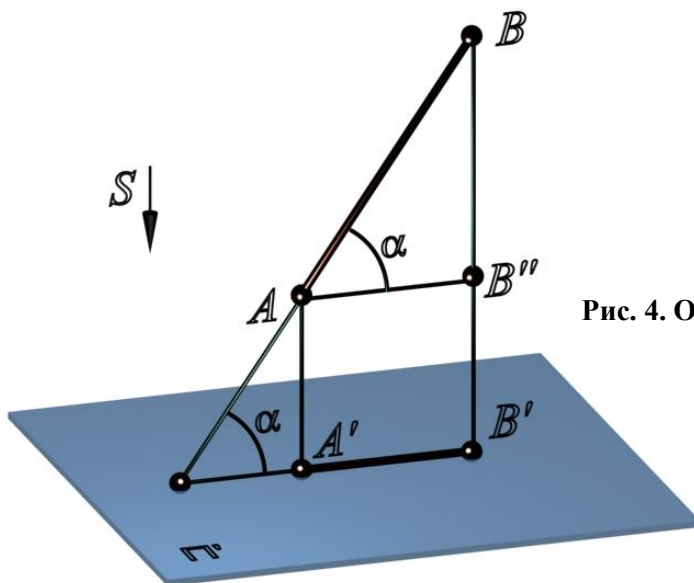


Рис. 4. Ортогональное проецирование:

$$s \perp \Pi',$$

$$|A'B'| = |A''B''| = |AB| \times \cos \alpha$$

Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования и имеет те же свойства.

Изображения, полученные при проецировании на одну плоскость проекций, не являются обратимыми, то есть задача о восстановлении оригинала по заданной проекции  $A'$  не решается однозначно. Проекции всех точек  $A, C, D$  и т. д., расположенных на проецирующем луче  $AA'$  на плоскость  $\Pi'$ , совпадают.

Для получения обратимых чертежей нужны некоторые дополнительные условия. Например, изображаемый предмет жестко связывают с координатными осями и проецируют на плоскость вместе с ними. Такие чертежи называются аксонометрическими. Другой метод состоит в том, что предмет проецируют на несколько взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Такие чертежи называются ортогональными и именно они получили наибольшее распространение в технике.

### 3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ

#### 3.1. Ортогональные (прямоугольные) проекции точки. Проецирование точки на три плоскости проекций

Рассмотрим систему трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций (рис. 5):  $\Pi_1$  – горизонтальная плоскость проекций,  $\Pi_2$  – фронтальная плоскость проекций и  $\Pi_3$  – профильная плоскость проекций.

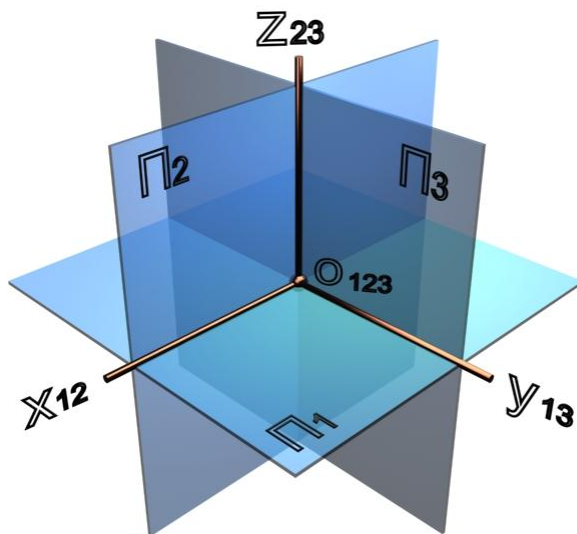


Рис. 5. Плоскости проекций:

$$x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2;$$

$$y_{13} = \Pi_1 \cap \Pi_3;$$

$$z_{23} = \Pi_2 \cap \Pi_3.$$

Точка пересечения трех плоскостей  $O_{123}$  – начало координат. Линия пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей называется осью проекций  $x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2$ , линия пересечения горизонтальной и профильной плоскостей называется осью проекций  $y_{13} = \Pi_1 \cap \Pi_3$ , линия пересечения фронтальной и профильной плоскостей называется осью проекций  $z_{23} = \Pi_2 \cap \Pi_3$ .

Поскольку плоскости проекций бесконечны, три плоскости разделят все пространство на восемь частей – октантов. Порядок отсчета октантов (см. рис. 5): слева от плоскости  $\Pi_3$  (против часовой стрелки) с первого по четвертый, справа – с пятого по восьмой.

Направление осей  $x, y, z$  в первом октанте считается положительным. Знаки осей, продолженных за начало координат, считают отрицательными.

Для получения проекций точки  $A$  на три плоскости (рис. 6)  $\Pi_1, \Pi_2$  и  $\Pi_3$  через точку  $A$  проводятся проецирующие лучи  $[AA_1)$  – до пересечения с плоскостью  $\Pi_1$ ,  $[AA_2)$  – до пересечения с плоскостью  $\Pi_2$  и  $[AA_3)$  – до пересечения с плоскостью  $\Pi_3$ . Точка  $A_1$  – горизонтальная проекция точки  $A$ ,  $A_2$  – фронтальная проекция точки  $A$ ,  $A_3$  – профильная проекция точки  $A$ . Точки  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$  – вспомогательные, лежащие соответственно на осях  $x, y, z$ .

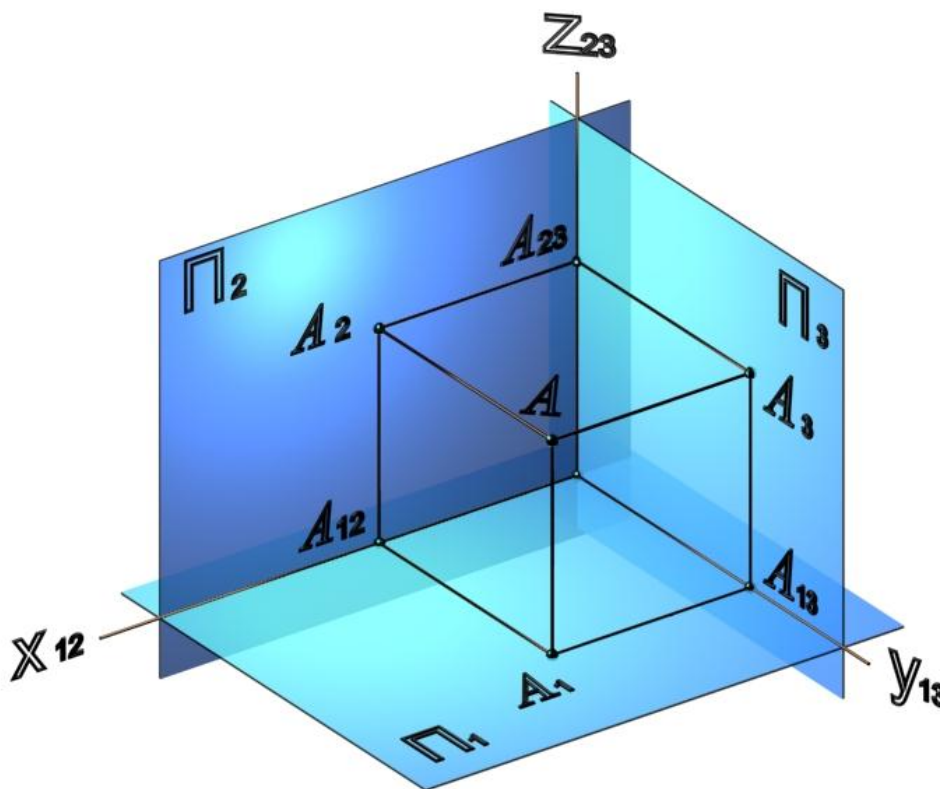
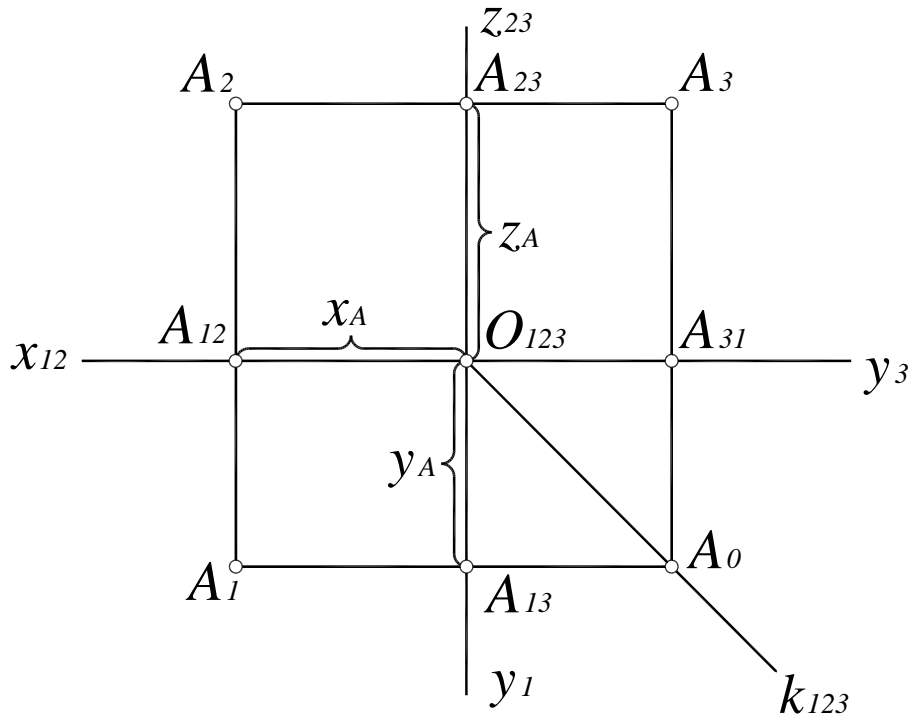


Рис. 6. Проецирование точки на три плоскости проекций

Для получения плоского чертежа точки  $A$  необходимо повернуть плоскость  $\Pi_1$  вокруг оси  $x$  по часовой стрелке, а плоскость  $\Pi_3$  – вокруг оси  $z$  до совмещения с  $\Pi_2$ . Плоскость  $\Pi_2$ , точки  $A_2$  и  $A_{12}$  остаются неподвижными (рис. 7), точки  $A_1$  и  $A_{13}$  и ось  $y_1$  поворачиваются вместе с  $\Pi_1$ . После поворота, точки  $A_1, A_{12}$  и  $A_2$  образуют вертикальную линию связи. Точки  $A_{23}$  и  $A_3$ , поворачиваясь вместе с  $\Pi_3$  и осью  $z_3$ , образуют, после поворота, горизонтальную линию связи  $A_2A_3$ . Точки  $A_1$  и  $A_3$  соединяются ломаной линией связи  $A_1A_0A_3$ . Вершина ломаной линии связи или точка преломления  $A_0$  лежит на биссектрисе угла  $y_1O_{123}y_3$ . Множество вершин ломаных линий связи определяют условную линию, называемую постоянной прямой комплексного чертежа  $k_{123}$ .



**Рис. 7. Трехкартинный комплексный чертеж точки:**

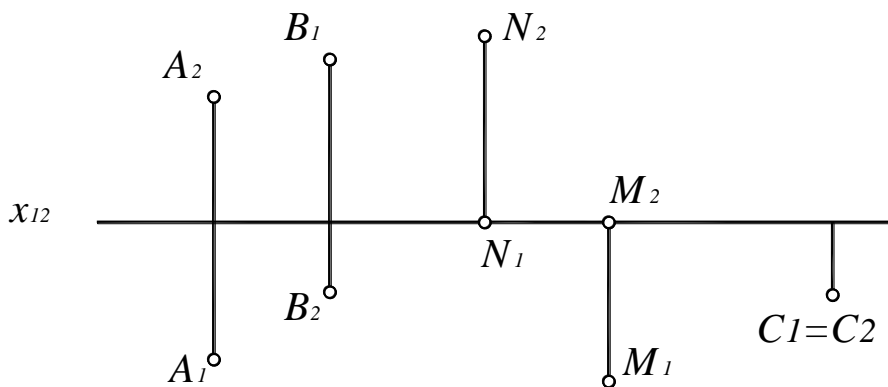
$$A_1A_{13} = O_{123}A_{12} = A_2A_{23} = x - \text{широта } A;$$

$$A_1A_{12} = O_{123}A_{13} = A_{23}A_3 = y - \text{глубина точки } A;$$

$$A_2A_{12} = O_{123}A_{23} = A_{31}A_3 = z - \text{высота точки } A$$

Чертеж трех совмещенных плоскостей проекций называется трехкартинным комплексным чертежом. Метод образования комплексного чертежа называют методом Монжа, в честь французского ученого Гаспара Монжа, жившего в XIX веке, первым предложившего использовать совмещенные чертежи.

Для решения задач в начертательной геометрии часто используются чертежи на двух совмещенных плоскостях проекций, которые называются двухкартинными комплексными чертежами (рис. 8).



**Рис. 8. Двухкартинный комплексный чертеж точек, занимающих различное положение относительно плоскостей проекций**

### 3.2. Основные свойства комплексного чертежа

1. Горизонтальная и фронтальная проекция точки  $A$  лежат на вертикальной линии связи  $A_1A_2 \perp x_{12}$ .

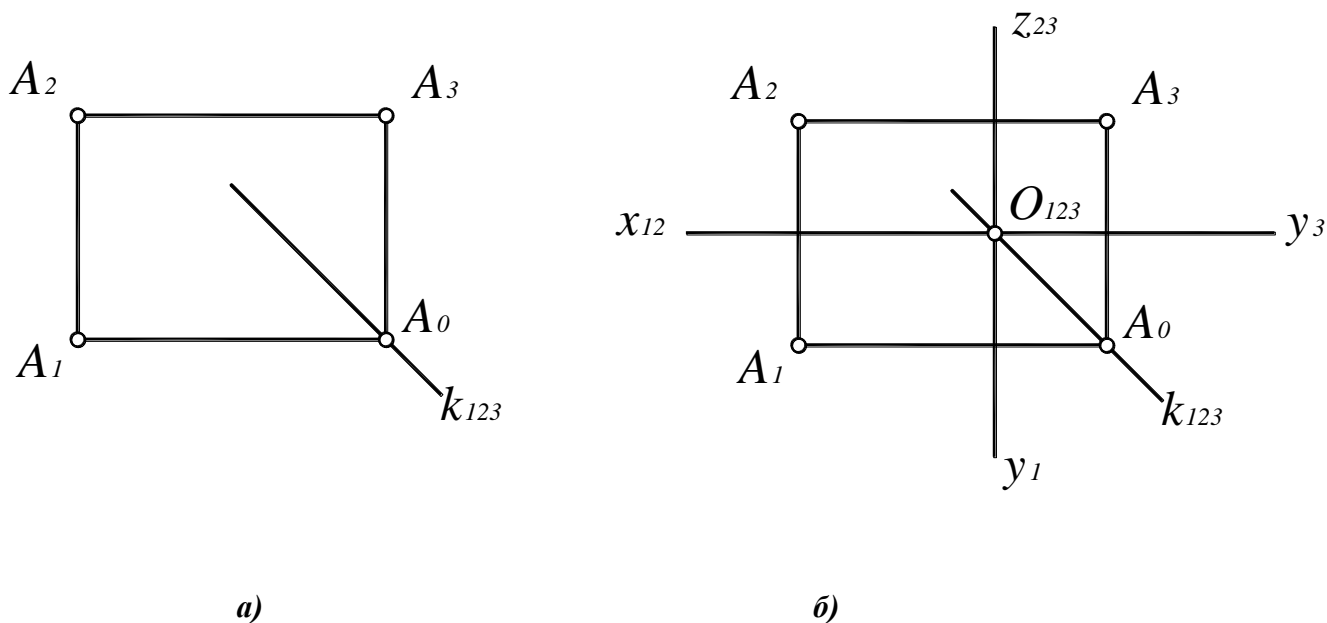
2. Фронтальная и профильная проекции точки  $A$  лежат на горизонтальной линии связи  $A_2A_3 \perp z_{23}$ .

3. Горизонтальная и профильная проекция точки  $A$  лежат на ломаной линии связи  $A_1A_3 = A_1A_0 + A_0A_3$ , вершина которой находится на постоянной прямой комплексного чертежа  $k_{123}$ .

### 3.3. Комплексный чертеж без указания осей

Оси проекций фиксируют положение плоскостей проекций. Практически гораздо важнее установить взаимное расположение изображаемых объектов и их элементов, нежели расстояния до плоскостей проекций. На рис. 9, *а* представлен комплексный чертеж точки  $A$  без указания осей.

На технических чертежах оси не проводят, предполагая, что проецирование ведется ортогонально на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.



**Рис. 9. Двухкартинные комплексные чертежи точки  $A$ :**

*а* – безосный;

*б* – с восстановленными осями

Если же оси показать необходимо, их можно восстановить (рис. 9, *б*) таким образом, чтобы  $x_{12} \perp A_1A_2$ ,  $z_{23} \perp A_2A_3$ , а начало координат находилось на постоянной прямой комплексного чертежа  $k_{123}$ .

## 4. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Прямая линия в системе плоскостей проекций занимает определенное положение. Прямая может располагаться относительно плоскостей проекций произвольно или занимать некоторое частное положение – быть параллельной, перпендикулярной или принадлежать какой-либо плоскости проекций.

### Способы задания прямой

- Двумя точками.
- Точкой и направлением.
- Линией пересечения двух плоскостей.
- Своими проекциями.

### 4.1. Классификация прямых

В зависимости от положения прямых относительно плоскостей проекций различают прямые общего положения и прямые частного положения.

#### Прямые общего положения

*Прямая общего положения* – прямая, наклоненная под произвольными углами ко всем трем плоскостям проекций (рис. 10, 11).

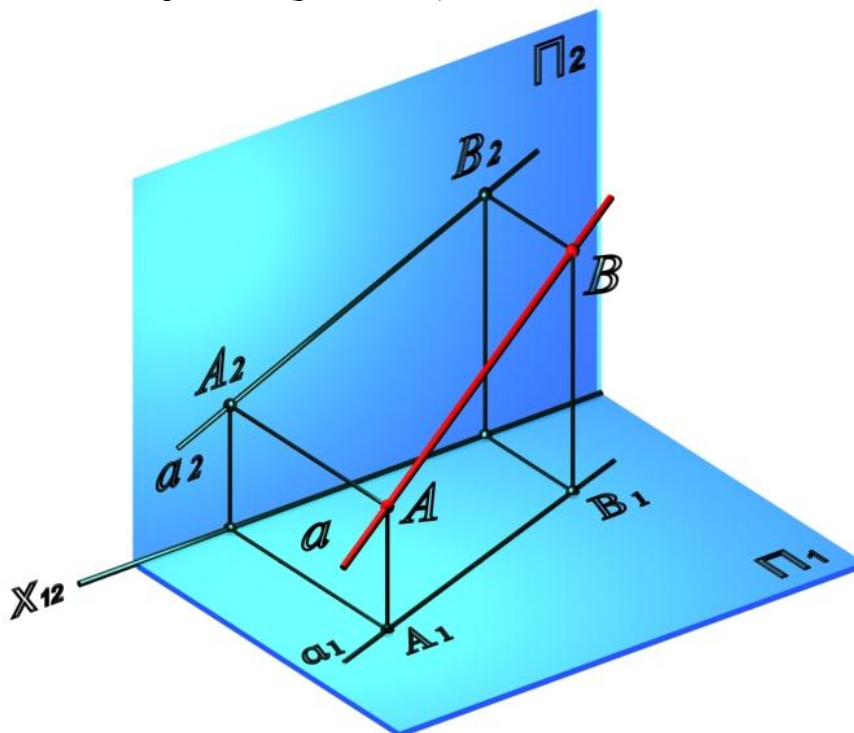
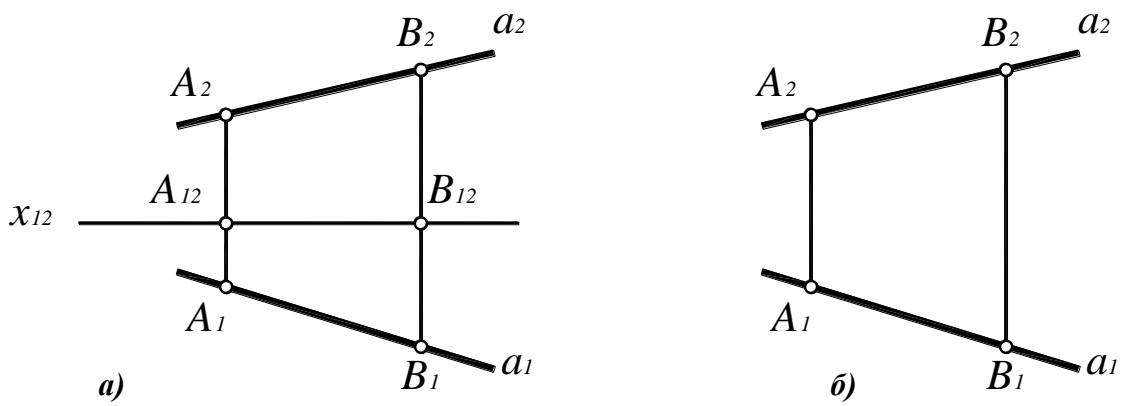


Рис. 10. Прямая общего положения:

$a(AB)$  – прямая общего положения;

$a_1(A_1B_1)$  – горизонтальная проекция прямой  $a(AB)$ ;

$a_2(A_2B_2)$  – фронтальная проекция прямой  $a(AB)$



**Рис. 11. Комплексный чертёж прямой общего положения:**  
*a* – двухкартинный комплексный чертёж;  
*б* – безосный комплексный чертёж

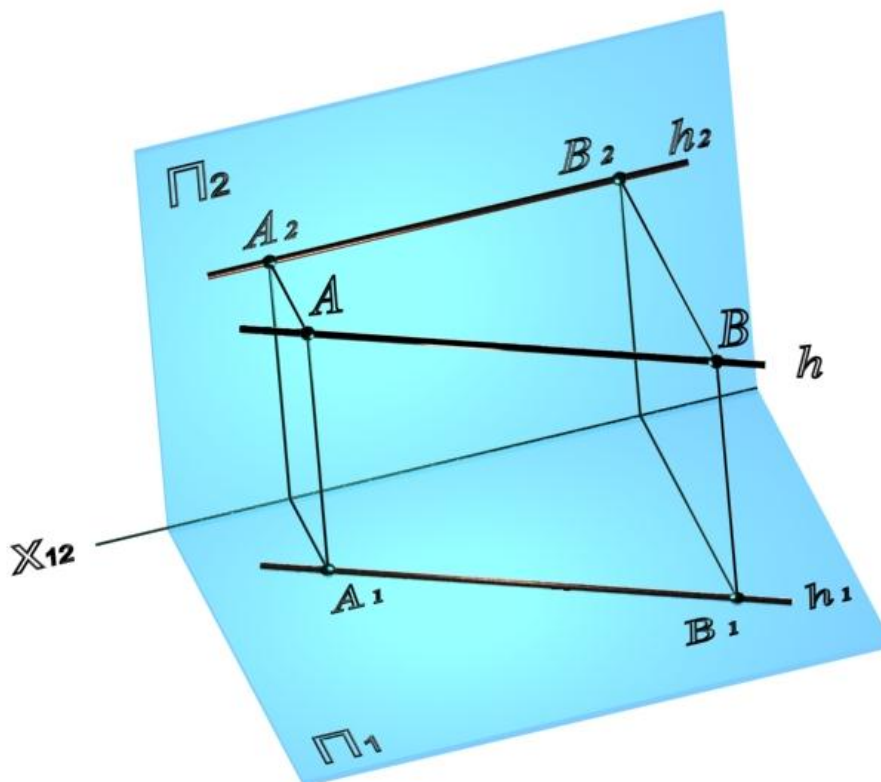
### Прямые частного положения

Среди прямых частного положения различают линии уровня и проецирующие прямые.

#### 4.1.1. Линии уровня

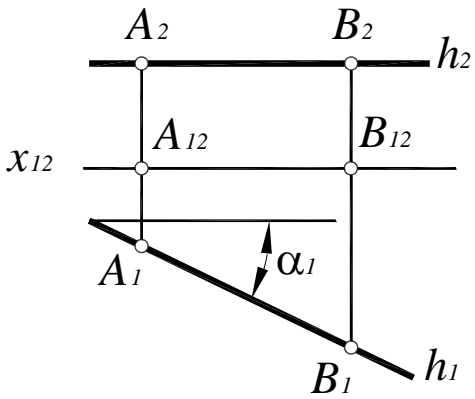
Прямые линии, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются линиями уровня.

**Горизонталь** *h* – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $h \parallel \Pi_1$ , (рис. 12, 13).



**Рис. 12. Горизонталь**





Поскольку высоты всех точек горизонтали равны между собой:

$$h_2 \perp A_1A_2 \text{ или } h_2 \parallel x_{12}.$$

Любой отрезок горизонтали проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину:

$$[A_1B_1] = [AB].$$

Угол наклона  $h$  к  $\Pi_2$  также проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину:

$$\angle \alpha_1 = \angle \alpha = \angle h, \Pi_2.$$

Рис. 13. Комплексный чертёж горизонтали

**Фронталь**  $f$  – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций  $f \parallel \Pi_2$  (рис. 14, 15).

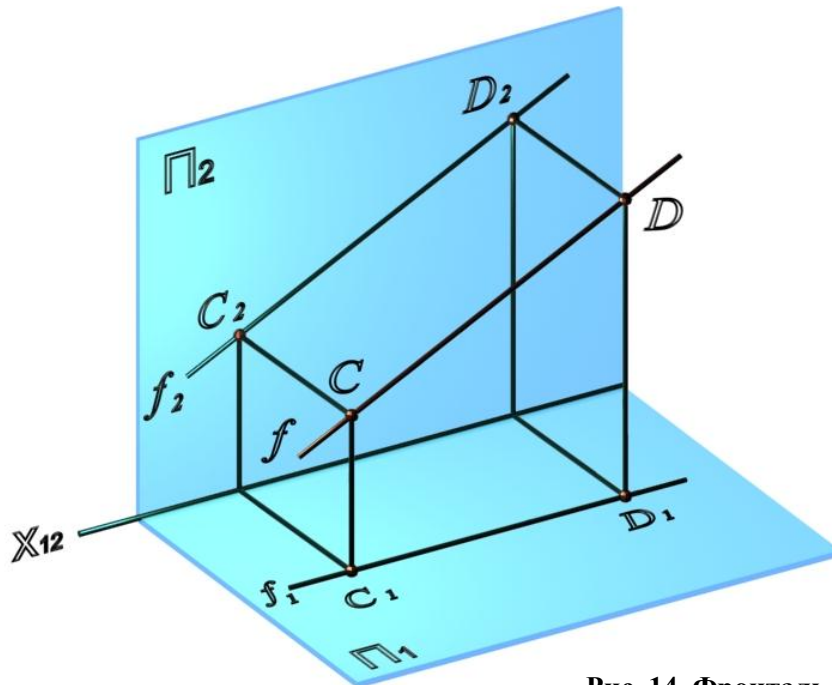
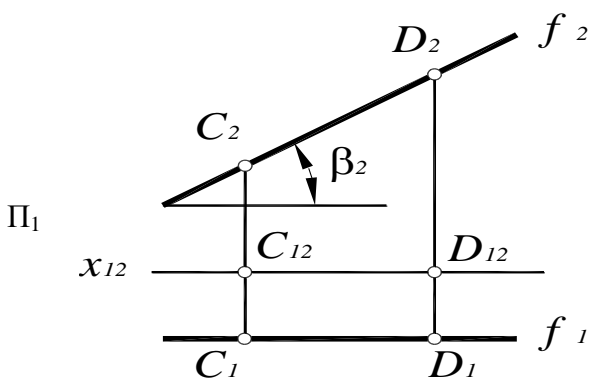


Рис. 14. Фронталь



Поскольку глубина всех точек фронтали одинакова:

$$f_1 \perp C_1C_2$$

Отрезки фронтали и угол наклона к проецируются на  $\Pi_1$  в натуральную величину:

$$[C_2D_2] = [CD]; \angle \beta_1 = \angle \beta = \angle f, \Pi_1.$$

Рис. 15. Комплексный чертёж фронтали

**Профильная прямая**  $p$  – прямая, параллельная профильной плоскости проекций  $p \parallel \Pi_3$  (рис. 16, 17).

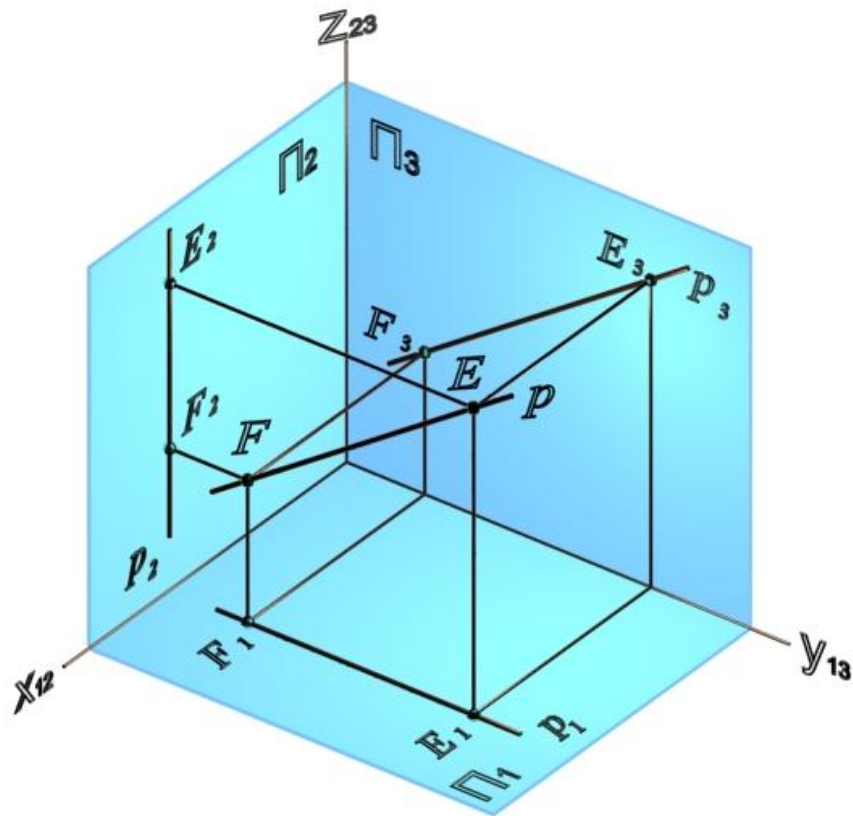


Рис. 16. Профильная прямая

Поскольку широта всех точек профильной прямой одинакова:

$$p_2 \perp E_2E_1.$$

Отрезки профильной прямой и углы наклона к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проецируются на  $\Pi_3$  в натуральную величину:

$$[E_3F_3] = [EF];$$

$$\angle \tau_3 = \angle \tau = \angle p, \Pi_1; \angle \varphi_3 = \angle \varphi = \angle p, \Pi_2.$$

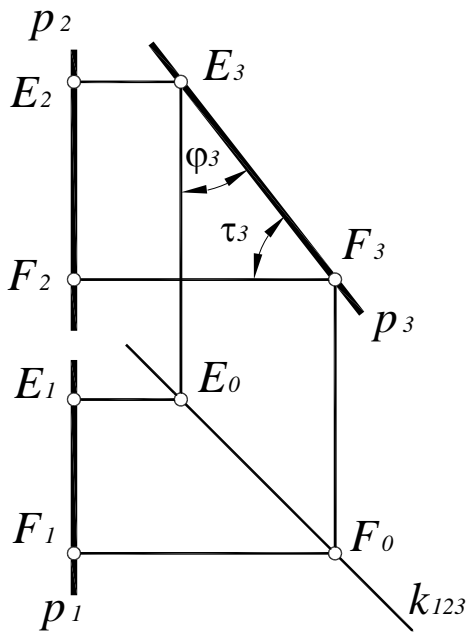


Рис. 17. Комплексный чертеж профильной прямой

### 4.1.2. Проецирующие прямые

Прямая линия, перпендикулярная одной из плоскостей проекций или параллельная направлению проецирования, называется проецирующей.

**Горизонтально-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $a_1 \perp \Pi_1$  (рис. 18, 19).

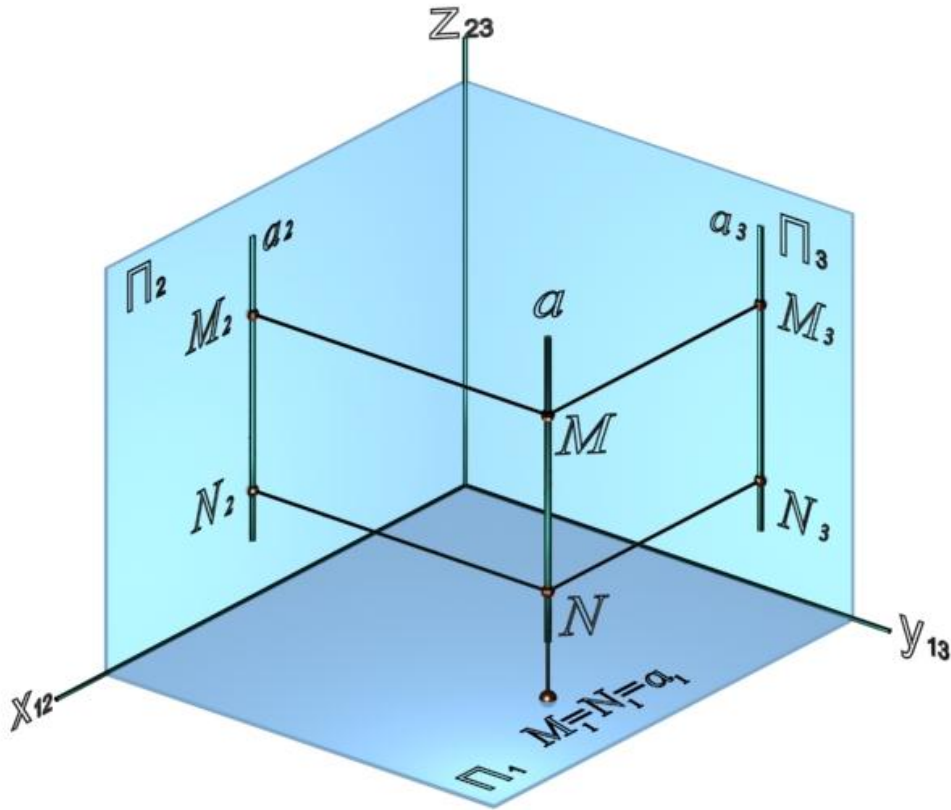


Рис. 18. Горизонтально-проецирующая прямая

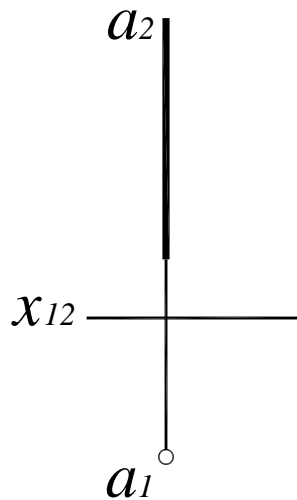


Рис. 19. Комплексный чертеж горизонтально-проецирующей прямой

**Фронтально-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $b \perp \Pi_2$  (рис. 20, 21).

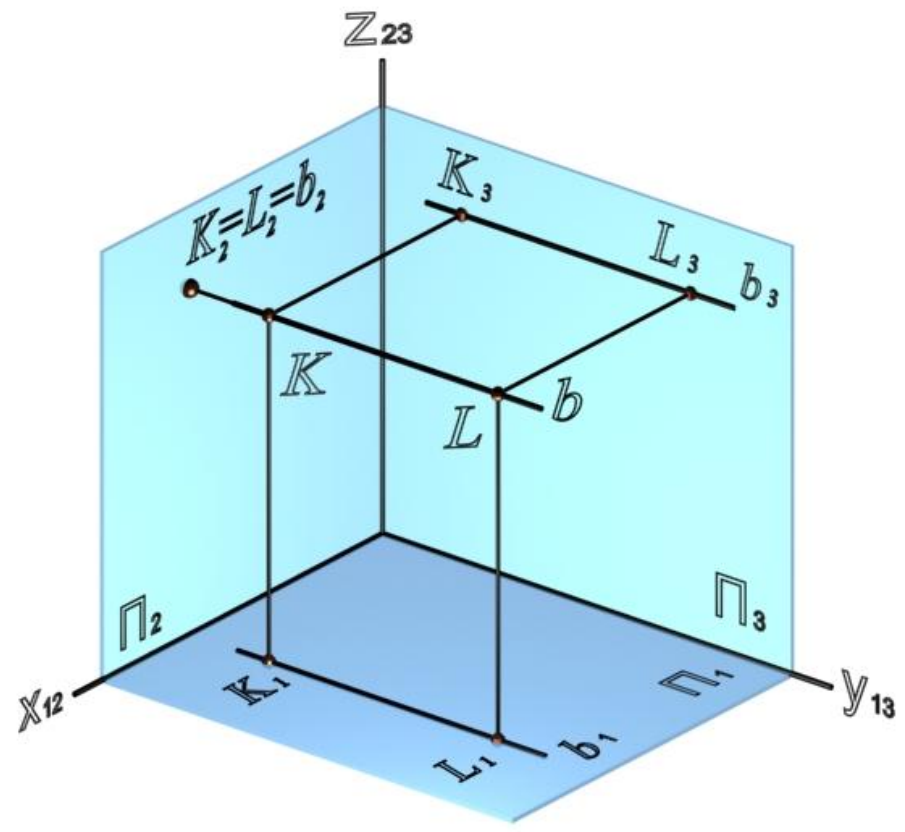


Рис. 20. Фронтально-проецирующая прямая

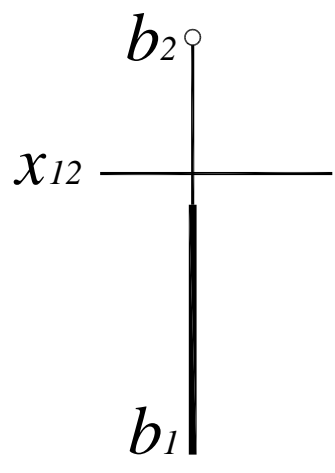


Рис. 21. Комплексный чертеж фронтально-проецирующей прямой

**Профильно-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $c \perp \Pi_3$  (рис. 22, 23).

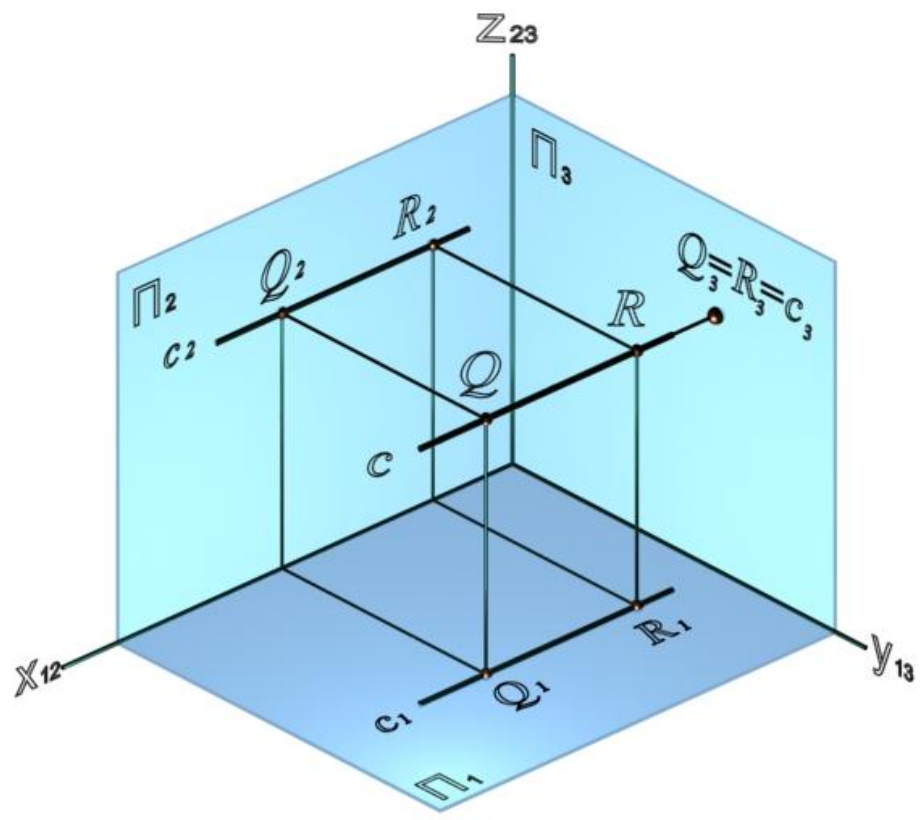


Рис. 22. Профильно-проецирующая прямая

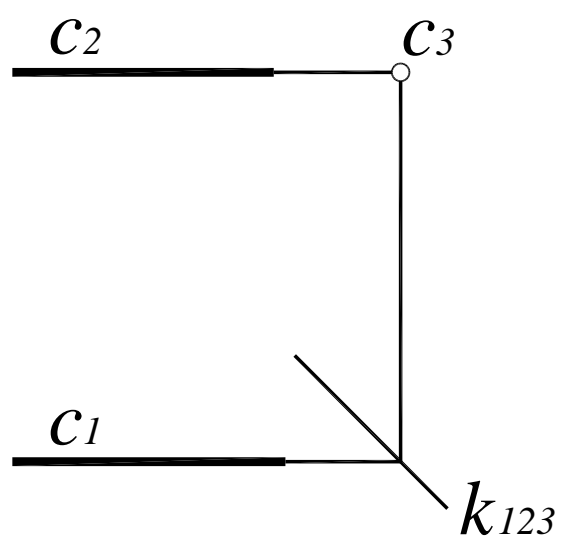


Рис. 23. Комплексный чертеж профильно-проецирующей прямой

## 4.2. Взаимное положение прямых

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися.

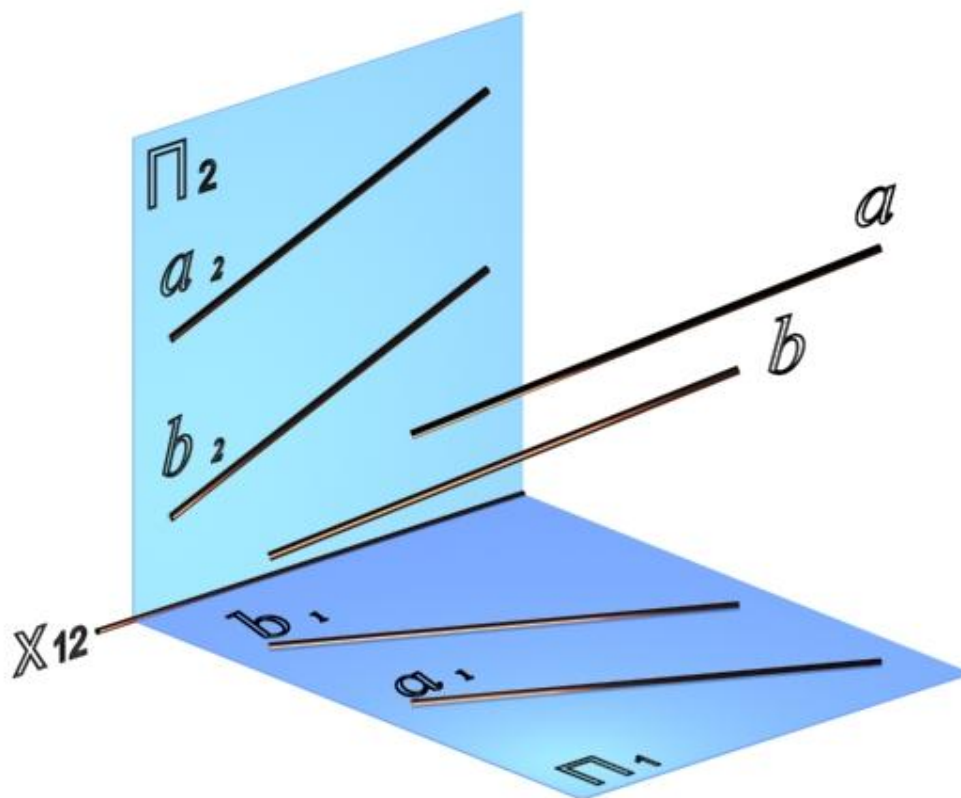


Рис. 24. Параллельные прямые  $a$  и  $b$

Если прямые параллельны (рис. 24, 25), то их одноименные проекции параллельны:  
 $a \parallel b \Rightarrow (a_1 \parallel b_1) \text{ и } (a_2 \parallel b_2)$ .

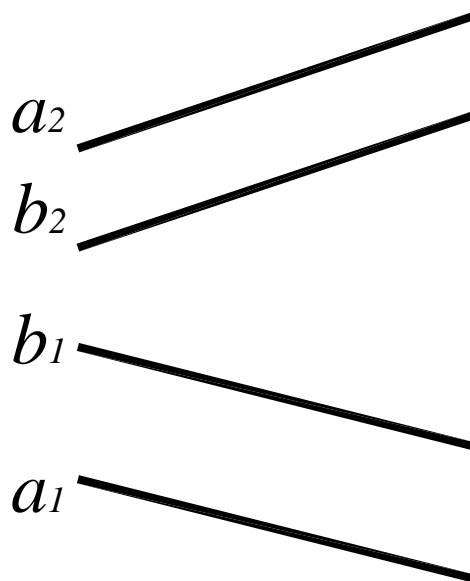


Рис. 25. Комплексный чертеж параллельных прямых  $a$  и  $b$

Пересекающиеся прямые имеют общую точку (рис. 26, 27), то есть точки пересечения их одноименных проекций лежат на общей линии связи:

$$c \times d = K \Rightarrow c_1 \times d_1 = K_1 ;$$

$$c_2 \times d_2 = K_2 \text{ и } K_1 K_2 \perp x_{12}.$$

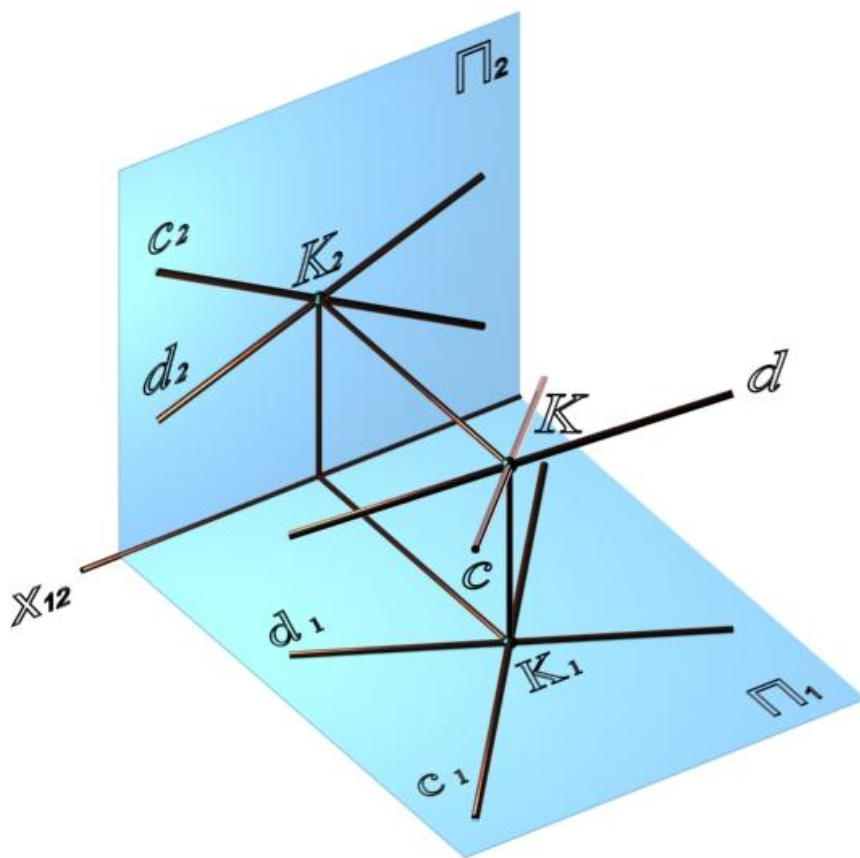


Рис. 26. Пересекающиеся прямые

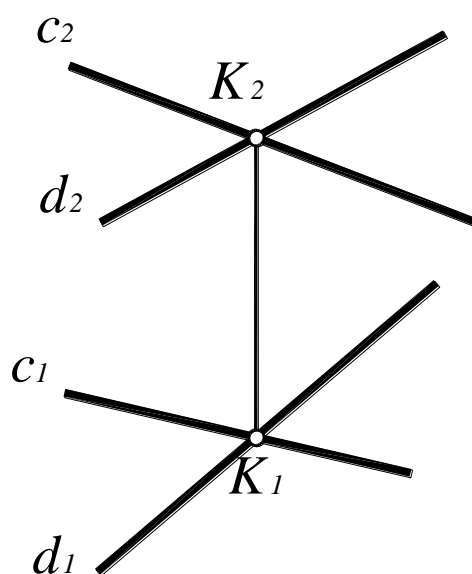


Рис. 27. Комплексный чертеж пересекающихся прямых  $c$  и  $d$

Прямые, не имеющие общей точки и не параллельные между собой, являются скрещивающимися (рис. 28, 29).

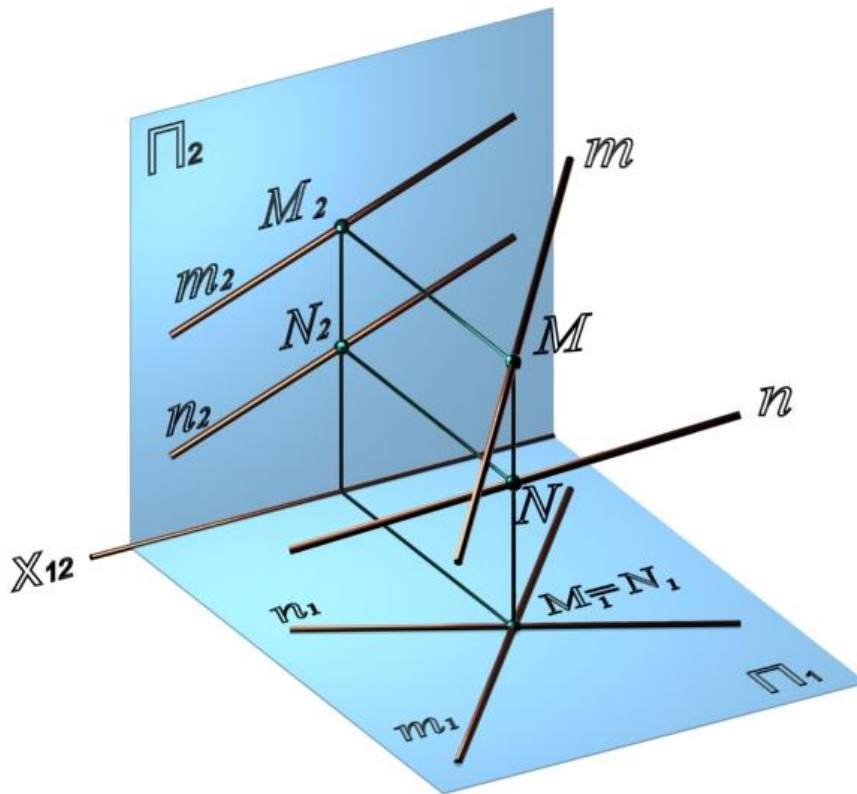


Рис. 28. Скрещивающиеся прямые  $m$  и  $n$

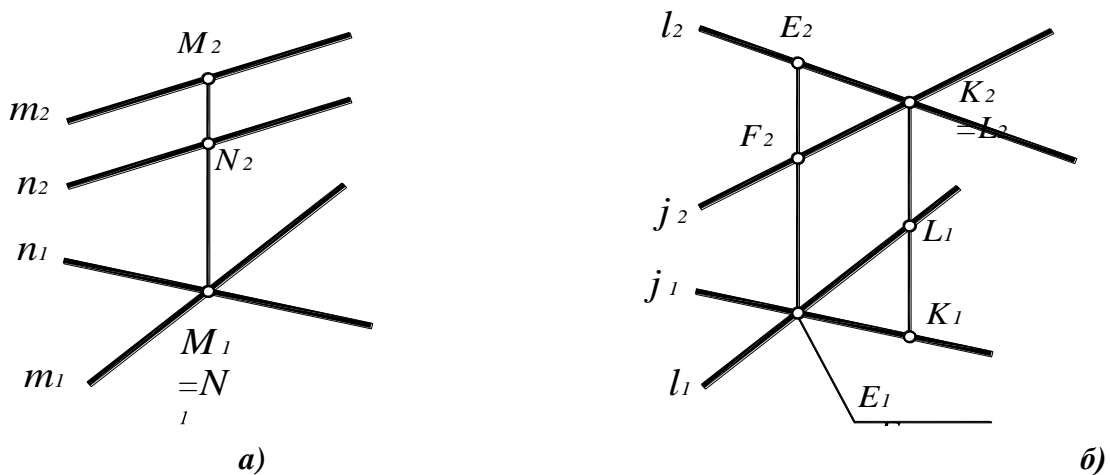


Рис. 29. Проекция скрещивающихся прямых:

$a$  – скрещивающиеся прямые  $m$  и  $n$ ;

$б$  – скрещивающиеся прямые  $l$  и  $j$

Проекция прямых пересекаются  $l_1 \times j_1 = E_1$ , но  $E_1 K_2$  не является общей линией связи

(см. рис. 29, б).

Если пересекающиеся и параллельные прямые лежат в одной плоскости, то скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях.



### 4.3. Принадлежность точки прямой линии

Точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат соответствующим (одноименным) проекциям прямой (рис. 30).

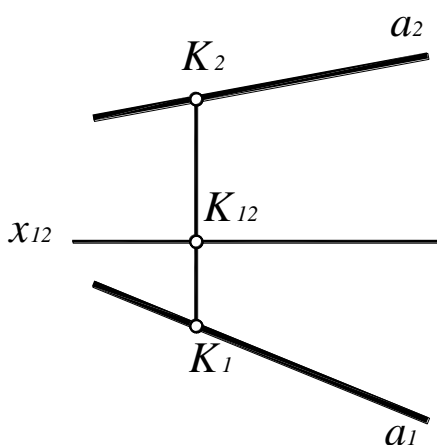


Рис. 30. Принадлежность точки прямой линии:

$$K \in a \Leftrightarrow K_1 \in a_1 \text{ и } K_2 \in a_2;$$

$$[K_1 K_2] \perp x_{12}$$

### 4.4. Определение натуральной величины отрезка. Способ треугольника

Отрезок  $[AB]$  – отрезок прямой общего положения. Ни одна из проекций отрезка не равна его натуральной величине.

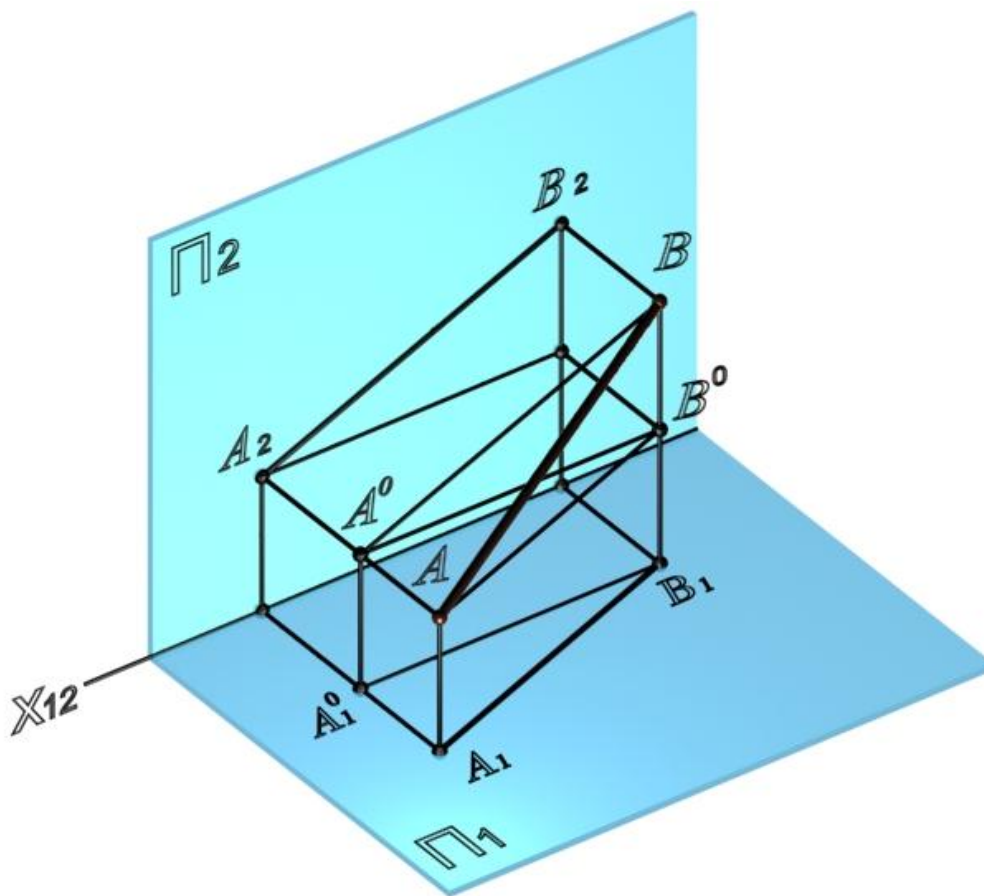
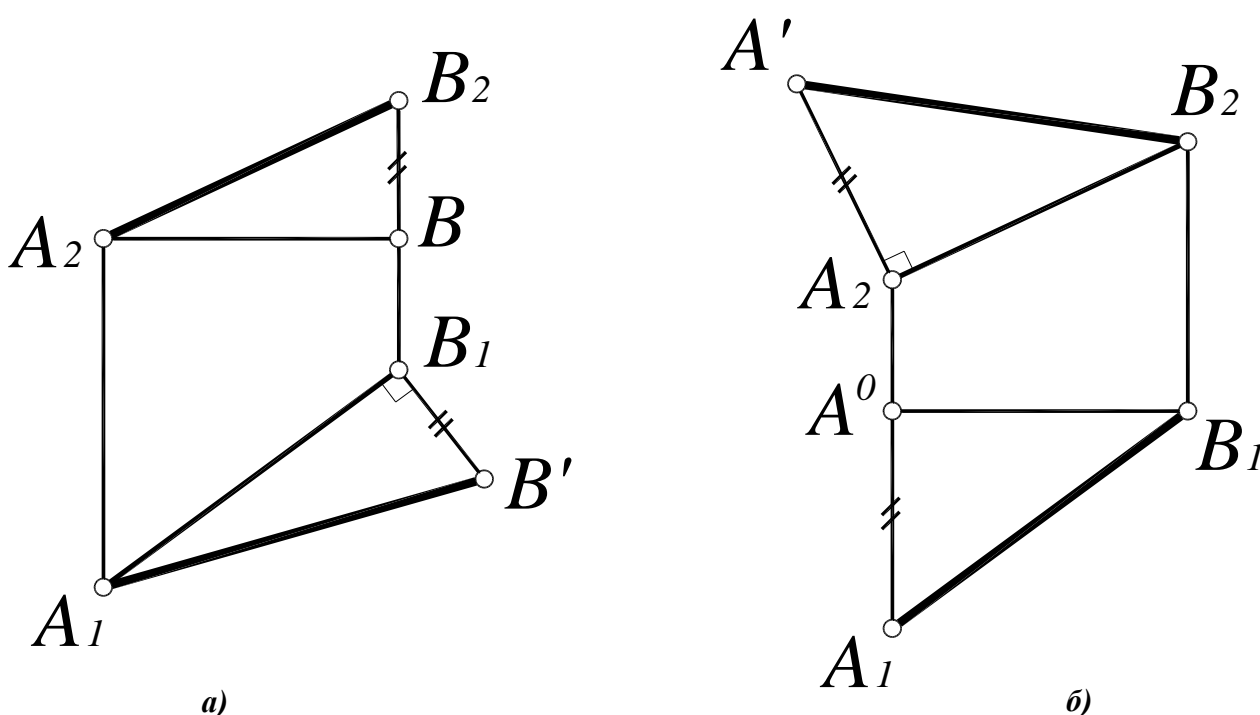


Рис. 31. Определение натуральной величины отрезка способом треугольника

На рис. 31  $A_1ABB_1$  – прямоугольная трапеция, наклонной стороной которой является отрезок  $[AB]$ , высотой – его горизонтальная проекция  $[A_1B_1]$ , основаниями – горизонтально-проецирующие прямые  $(AA_1)$  и  $(BB_1)$ .

Если провести прямую  $(AB^0) \parallel (A_1B_1)$ , то от трапеции  $A_1ABB_1$  отсекается прямоугольный треугольник  $ABB^0$  с гипотенузой  $[AB]$ , один катет которого  $[AB^0] = [A_1B_1]$ , другой –  $[BB^0]$  равен разности высот точек  $A$  и  $B$ .

На комплексном чертеже (рис. 32, а) прямоугольный треугольник строится непосредственно при горизонтальной проекции отрезка:  $\Delta A_1B_1B' = \Delta ABB^0$ . Одним катетом прямоугольного треугольника является горизонтальная проекция  $[A_1B_1]$ , вторым – разность высот точек  $A$  и  $B$  (отрезок  $[BB^0] = [B_1B']$ ), гипотенуза  $[A_1B']$  и будет равна натуральной величине отрезка  $[AB]$ .



**Рис. 32. Определение натуральной величины отрезка:**

$a$  – на горизонтальной проекции;

$б$  – на фронтальной проекции

Аналогичные построения возможны и на фронтальной проекции (рис. 32, б), тогда одним катетом прямоугольного треугольника является фронтальная проекция  $[A_2B_2]$ , а вторым – разность глубин точек  $A$  и  $B$  (отрезок  $[A_2A'] = [A_1A^0]$ ), гипотенуза  $[B_2A']$  будет равна натуральной величине отрезка  $[AB]$ .

Таким образом, можно сформулировать общее правило:

*Натуральная величина отрезка прямой определяется гипотенузой прямоугольного треугольника, одним катетом которого является одна из проекций отрезка, а вторым – разность расстояний концов другой проекции отрезка относительно друг друга.*

## 5. ПЛОСКОСТЬ

В геометрии плоскость представляют как бесконечную поверхность, имеющую на всем протяжении одинаковое направление. Плоскость безгранична и бесконечна.

### 5.1. Способы задания плоскости

На комплексном чертеже плоскость задается проекциями тех элементов, которыми она задана в пространстве. Плоскость однозначно определяют (рис. 33, 34):

- три точки, не лежащие на одной прямой  $\alpha(ABC)$  (рис 33, а);
- пересекающиеся прямые  $\beta(b \times c)$  (рис 33, б);
- прямая и точка  $\gamma(a, D)$  (рис 33, в);
- параллельные прямые  $\delta(l \parallel n)$  (рис 33, г);

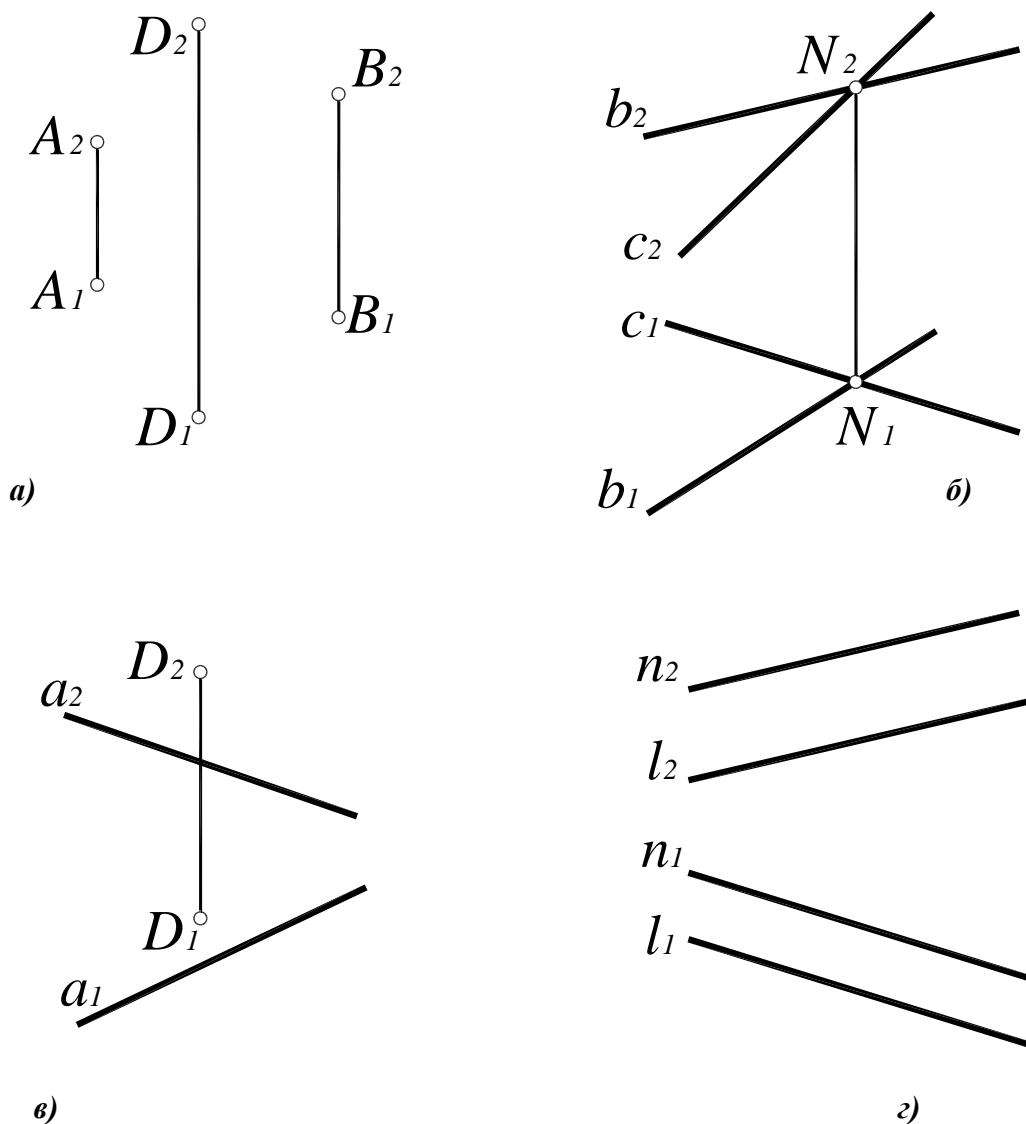
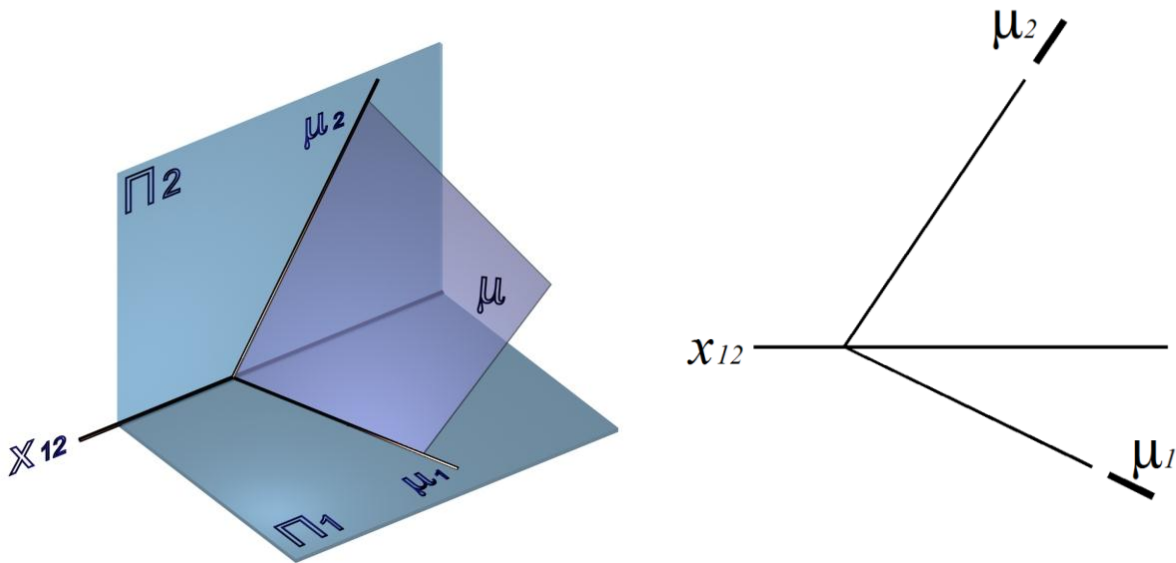


Рис. 33. Способы задания плоскостей:

а –  $\alpha(ABC)$ ; б –  $\beta(b \times c)$ ; в –  $\gamma(a, D)$ ; г –  $\delta(l \parallel n)$

- следы плоскости – линии пересечения плоскости с плоскостями проекций  $\mu(\mu_1, \mu_2)$  (рис. 34);



**Рис. 34. Задание плоскости следами  $\mu(\mu_1, \mu_2)$ :**  
*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

- проекции плоской фигуры (треугольника, окружности, и т. д.).

## 5.2. Классификация плоскостей

В зависимости от положения относительно плоскостей проекций различают плоскости общего положения и плоскости частного положения.

**Плоскость общего положения** – плоскость, наклоненная под произвольными углами к плоскостям проекций (см. рис. 33, 34).

**Плоскости частного положения** можно разделить на две группы – проецирующие плоскости и плоскости уровня. Плоскости частного положения чаще всего задаются следами.

## 5.3. Проецирующие плоскости

Плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются проецирующими.

**Горизонтально-проецирующая плоскость**  $\delta(\delta_1) \perp \Pi_1$  – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис. 35, 36). Горизонтально-проецирующая плоскость задается горизонтальным следом плоскости  $\delta_1$ , который является геометрическим местом горизонтальных проекций всех точек, принадлежащих данной плоскости.

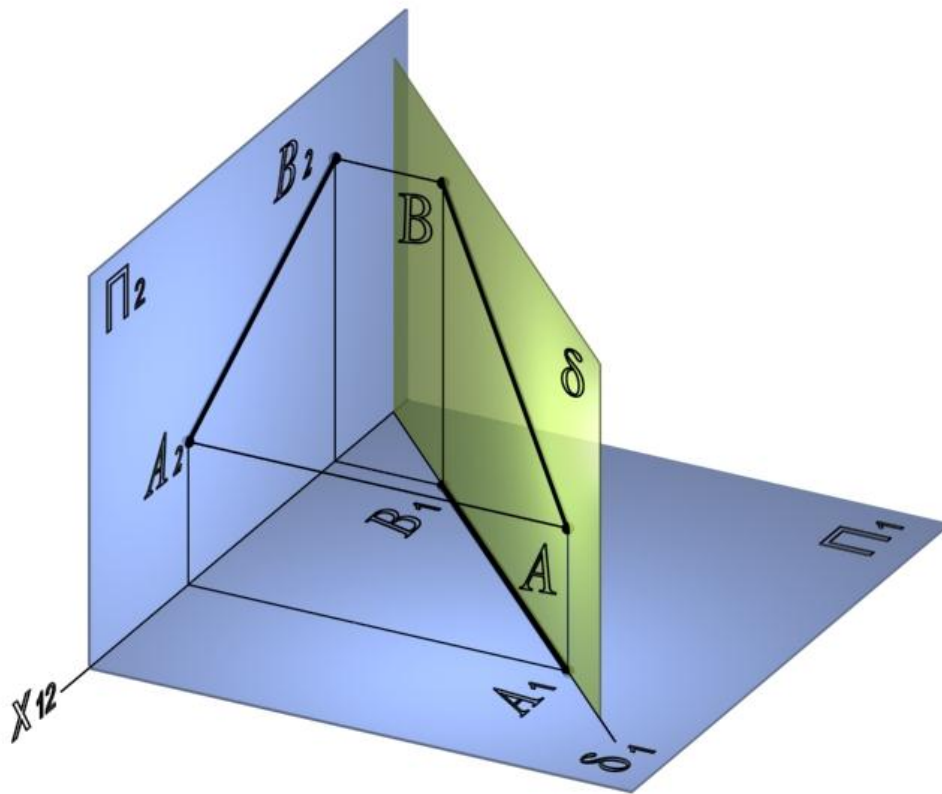


Рис. 35. Горизонтально-проецирующая плоскость  $\delta(\delta_1)$

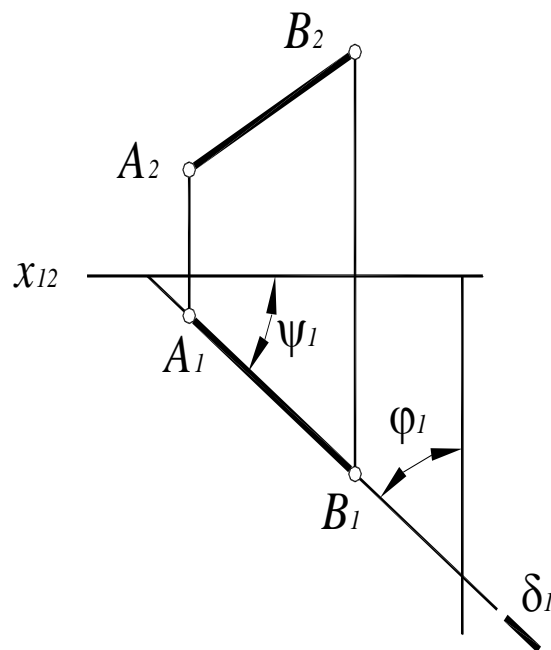


Рис. 36. Комплексный чертёж горизонтально-проецирующей плоскости  $\delta(\delta_1)$ :

$$\psi = \angle \delta(\delta_1), \Pi_2 ; \varphi = \angle \delta(\delta_1) \Pi_3 ;$$

$$AB \subset \delta(\delta_1) \perp \Pi_1 \Rightarrow A_1 B_1 \subset \delta_1$$

Углы наклона горизонтально-проецирующей плоскости к  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

**Фронтально-проецирующая плоскость**  $\gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2$  – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , задается фронтальным следом плоскости  $\gamma_2$  (рис. 37, 38).

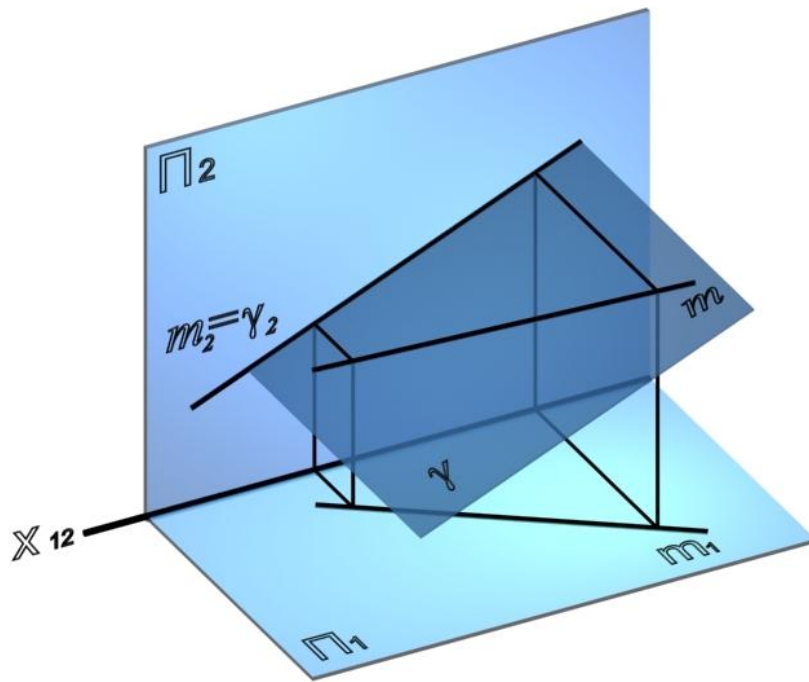


Рис. 37. Фронтально-проецирующая плоскость  $\gamma(\gamma_2)$

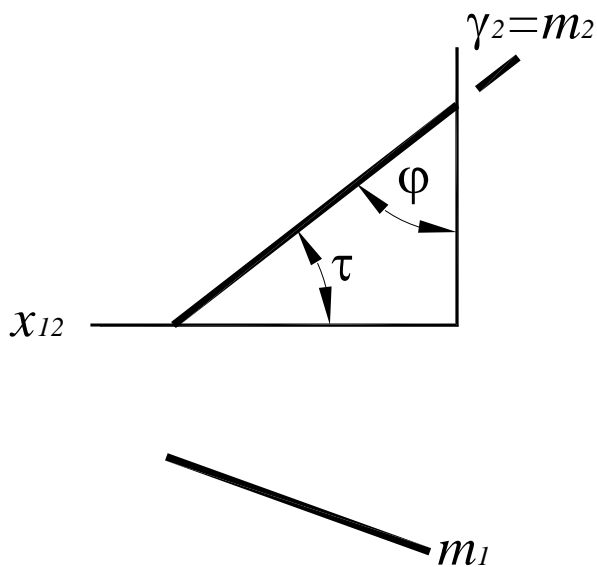


Рис. 38. Комплексный чертеж фронтально-проецирующей плоскости  $\gamma(\gamma_2)$ :

$$\tau = \angle \gamma(\gamma_2) \Pi_1; \varphi = \angle \gamma(\gamma_2) \Pi_3;$$

$$m \subset \gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 \subset \gamma_2$$

Проекции всех линий и точек, лежащих во фронтально-проецирующей плоскости, совпадают с фронтальным следом этой плоскости. Углы наклона фронтально-проецирующей плоскости к  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  проецируются на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину.

**Профильно-проецирующая плоскость**  $\sigma(\sigma_3) \perp \Pi_3$  – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\Pi_3$ , задается профильным следом плоскости  $\sigma_3$  (рис. 39, 40).

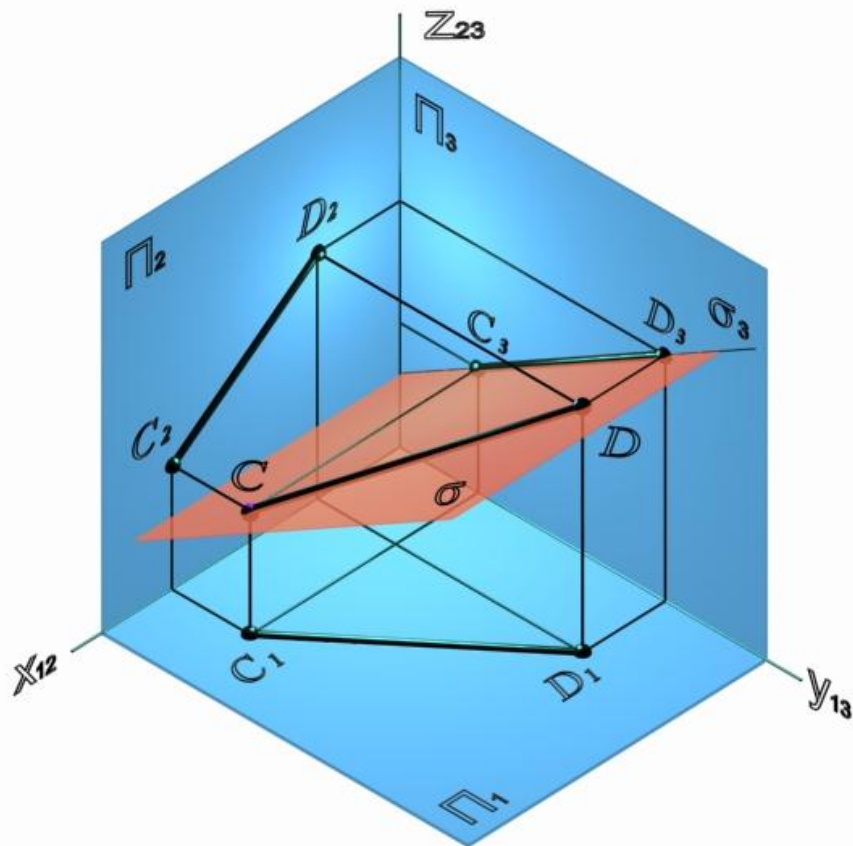


Рис. 39. Профильно-проецирующая плоскость  $\sigma(\sigma_3)$

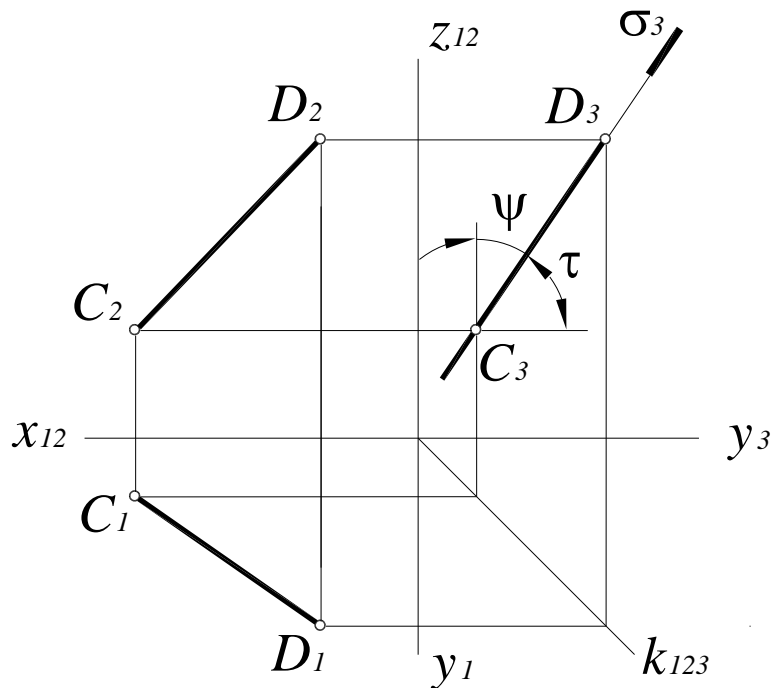


Рис. 40. Комплексный чертёж профильно-проецирующей плоскости  $\sigma(\sigma_3)$ :

$$\tau = \angle \sigma(\sigma_3) \Pi_1; \quad \psi = \angle \sigma(\sigma_3) \Pi_2;$$

$$CD \subset \sigma(\sigma_3) \perp \Pi_3 \Rightarrow C_3 D_3 \subset \sigma_3$$

## 5.4. Плоскости уровня

Плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций, называются плоскостями уровня. Как и проецирующие плоскости, плоскости уровня задаются следами. Все объекты, лежащие в плоскости уровня, проецируются на параллельную плоскость проекций в натуральную величину.

*Горизонтальная плоскость уровня  $v \parallel \Pi_1$*  – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 41).

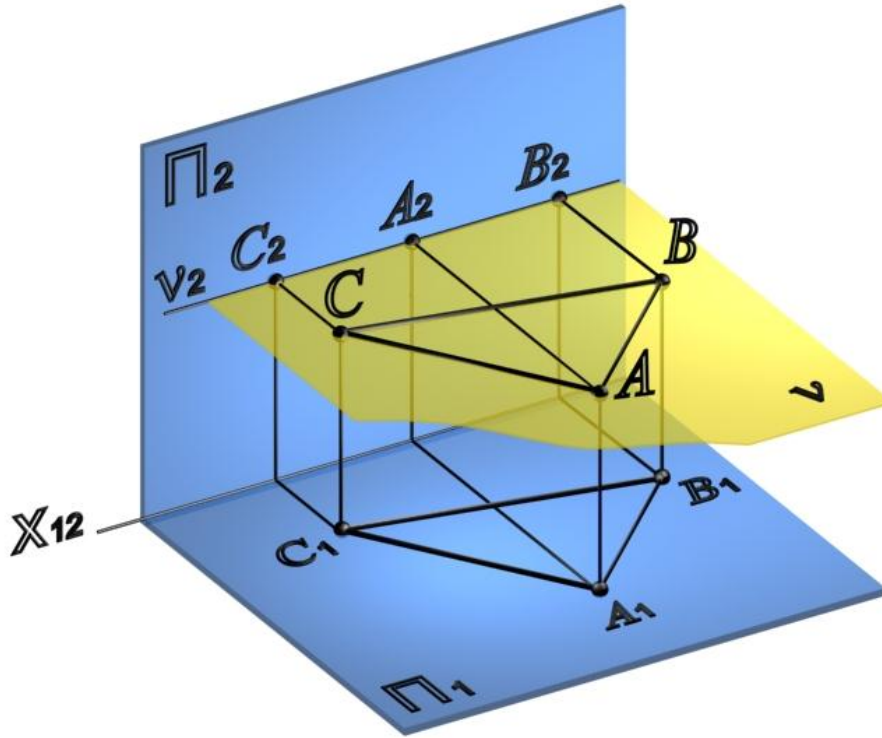


Рис. 41. Горизонтальная плоскость уровня  $v(ABC)$

Треугольник  $ABC$ , лежащий в горизонтальной плоскости уровня, проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину (рис. 42).

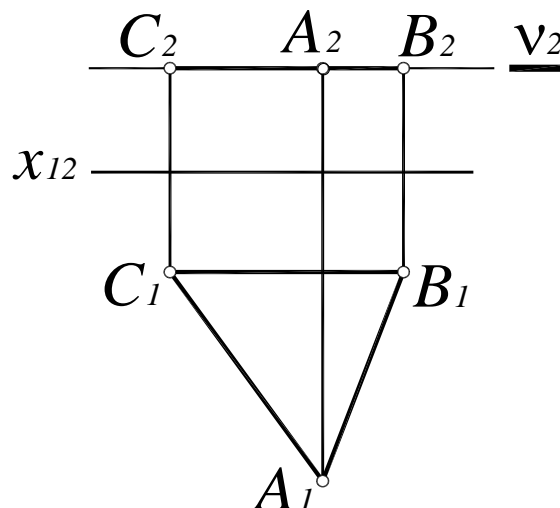


Рис. 42. Комплексный чертеж горизонтальной плоскости уровня  $v(ABC)$



**Фронтальная плоскость уровня**  $\mu \parallel \Pi_2$  – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 43).

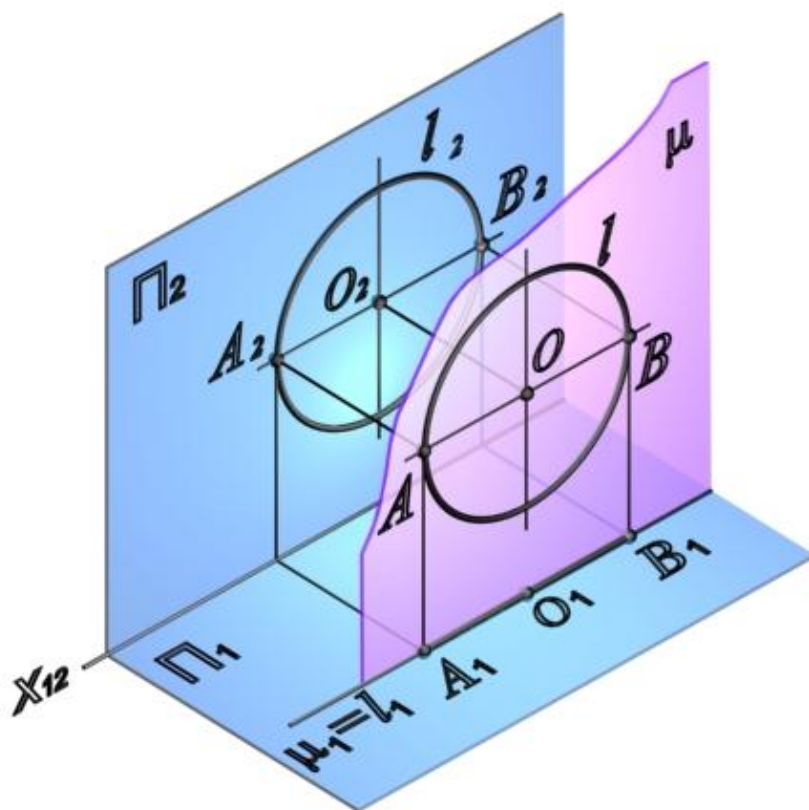


Рис. 43. Фронтальная плоскость уровня  $\mu(\mu_1)$

На рис. 44 показана окружность  $l$  с центром в точке  $O$  и диаметром  $AB$ , лежащая во фронтальной плоскости уровня  $\mu(\mu_1)$ . Эта окружность проецируется на  $\Pi_2$  без искажения.

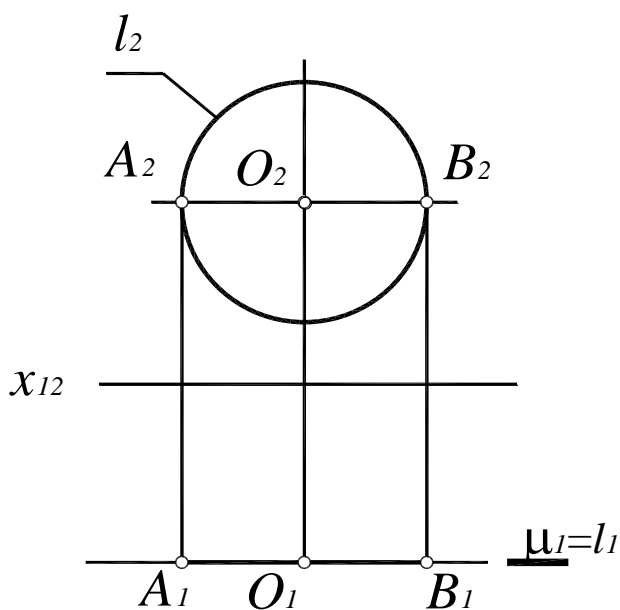


Рис. 44. Комплексный чертеж фронтальной плоскости уровня  $\mu(\mu_1)$

**Профильная плоскость уровня**  $\omega \parallel \Pi_3$  – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций (рис. 45).

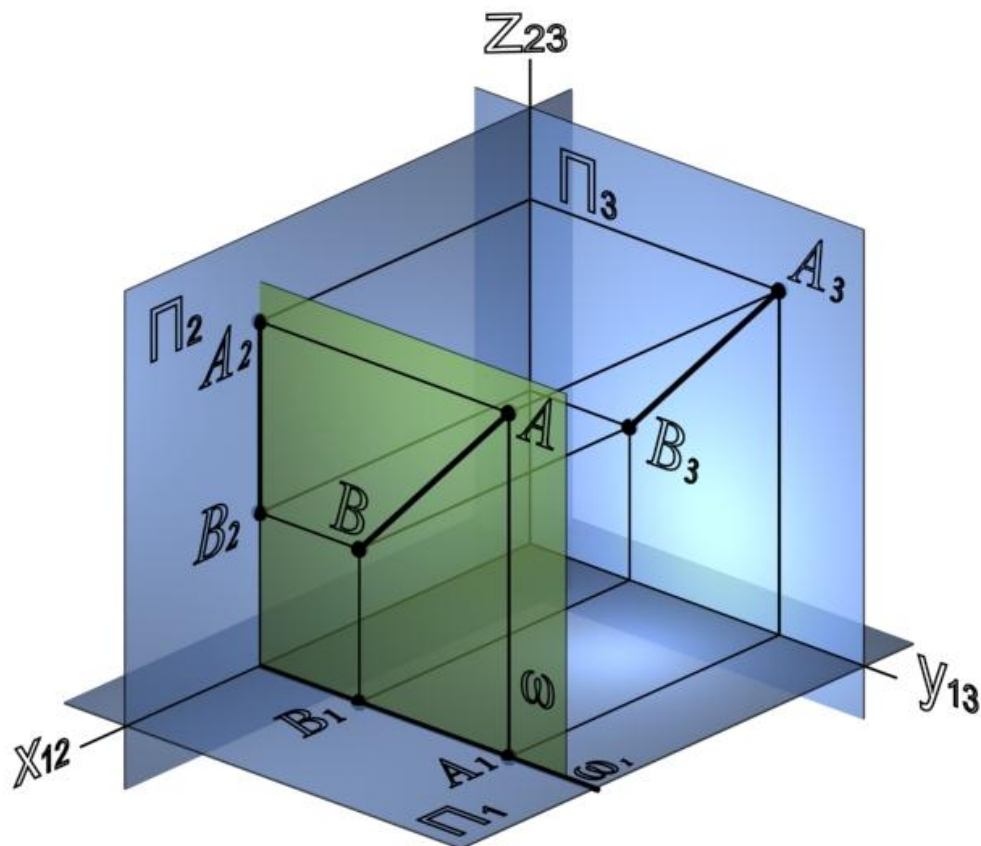


Рис. 45. Профильная плоскость уровня  $\omega(\omega_1)$

Отрезок  $[AB]$ , лежащий в профильной плоскости уровня  $\omega(\omega_3)$ , проецируется на плоскость  $\Pi_3$  в натуральную величину (рис. 46).

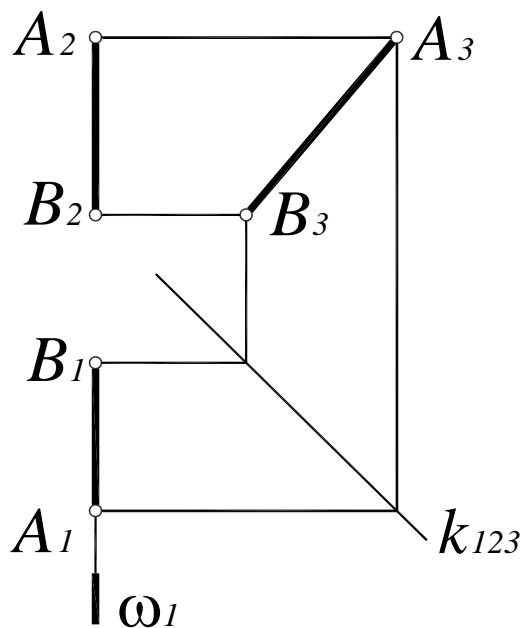


Рис. 46. Комплексный чертеж профильной плоскости уровня  $\omega(\omega_1)$

## 5.5. Относительное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут совпадать, пересекаться или быть параллельными.

Плоскости параллельны (рис. 47), если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

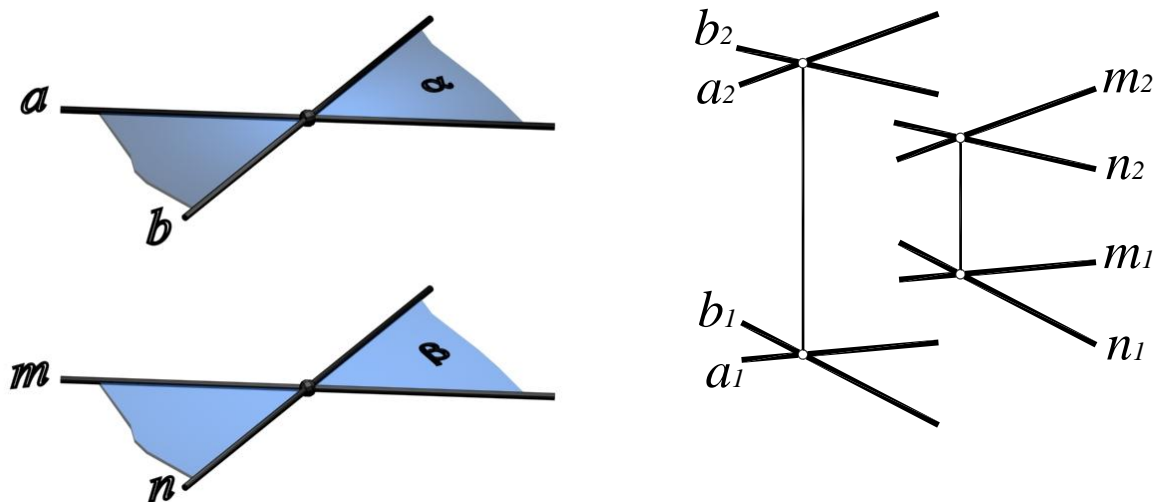


Рис. 47. Параллельные плоскости общего положения:

$$\begin{aligned} & \alpha(a \times b), \\ & \beta(m \times n), \\ & \alpha \parallel \beta, \Leftrightarrow \begin{cases} a \parallel m (a_1 \parallel m_1, a_2 \parallel m_2); \\ b \parallel n (b_1 \parallel n_1, b_2 \parallel n_2) \end{cases} \end{aligned}$$

## 6. ПОВЕРХНОСТЬ

Поверхность – это наружная сторона предмета, или граница, отделяющая геометрическое тело от внутреннего пространства или другого тела (толковый словарь русского языка под редакцией Д.Н. Ушакова).

Поверхность можно рассматривать как непрерывную совокупность последовательных положений линий, перемещающихся в пространстве по определенному закону. Движущуюся линию в этом случае называют образующей поверхности, а линии (а иногда и точки), определяющие закон ее перемещения, – направляющими.

### 6.1. Способы задания поверхностей

#### *Аналитический*

Поверхность рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида  $F(x, y, z) = 0$  (рис. 48, а, б, в). Порядок уравнения соответствует порядку поверхности. Порядок поверхности можно определить и геометрически, как порядок кривой, по которой плоскость пересекает поверхность, или как число точек пересечения прямой с поверхностью.

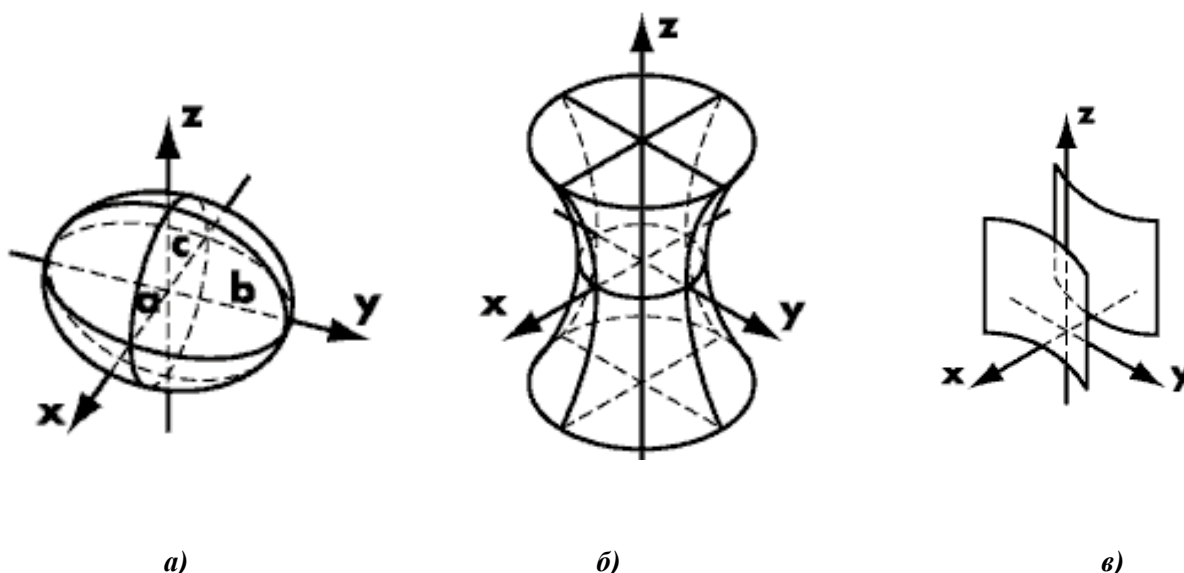


Рис. 48. Аналитические поверхности:

$a$  – эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$b$  – гиперboloид однополостный

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$c$  – гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

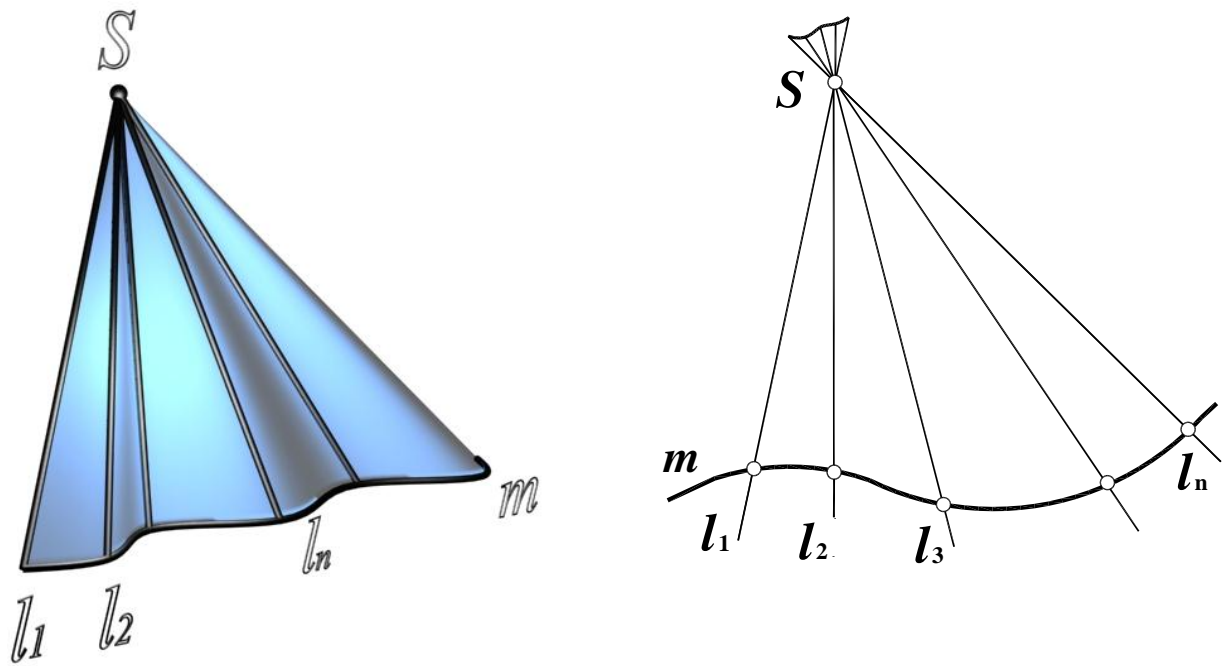
Аналитический способ задания поверхности находит широкое применение в практике, особенно если требуется исследовать свойства поверхности.

### Кинематический

Кинематическую поверхность можно рассматривать как непрерывную совокупность последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по некоторым неподвижным линиям. Таким образом, на любой кинематической поверхности можно выделить два семейства линий: семейство образующих и семейство направляющих. Направляющие и образующие обладают следующим свойством: никакие две линии одного семейства не пересекаются между собой, но каждая линия одного семейства пересекает все линии другого.

Рассмотрим формирование конической поверхности (рис. 49). Такая поверхность образована движением прямой образующей  $l$ , постоянно проходящей через точку  $S$  и во всех своих положениях пересекающей некоторую направляющую кривую  $m$ . Если направляющая  $m$  – окружность, каждая точка которой равноудалена от вершины  $S$ , образуется прямой круговой конус.

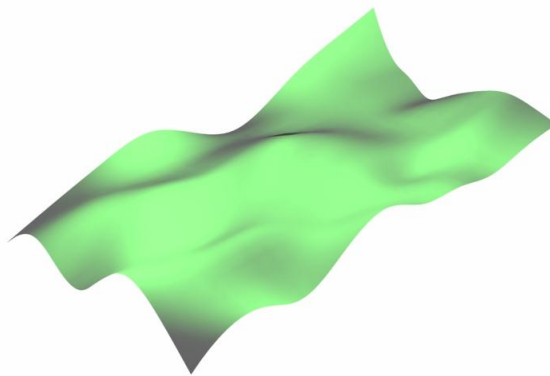
Совокупность точек, линий и различных условий, определяющих закон перемещения образующей, называют также определителем поверхности. Например, определителем конуса вращения могут быть ось и образующая или вершина и направляющая линия. Определителем цилиндра вращения может быть ось и образующая (прямая или кривая) или ось и направляющая (окружность). Окружность может быть и направляющей линией цилиндра и его образующей. В начертательной геометрии все поверхности рассматриваются как кинематические, то есть образованные непрерывным перемещением в пространстве какой – либо линии или поверхности.



**Рис. 49. Образование конической поверхности:**  
 $S$  – вершина конической поверхности;  
 $m$  – направляющая;  
 $l_1, l_2 \dots l_n$  – последовательные положения образующей

### **Каркасный**

Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности или поверхности с произвольными образующими называются скульптурными или поверхностями произвольных форм (рис. 50). Такие поверхности обычно задают достаточно плотной сетью линий и точек, принадлежащих этим поверхностям. Совокупность таких линий называется каркасом поверхности. При этом точки, лежащие между линиями каркаса, определяются приближенно.



**Рис. 50. Скульптурная поверхность**

Одним из наиболее распространенных в промышленности методов конструирования поверхностей является метод конструирования с помощью непрерывного каркаса. Метод каркасного конструирования используется при изготовлении кузовов автомобилей, самолетов и в судостроении, для выполнения штампов при изготовлении поверхностей из листового материала, в топографии, горном и дорожном деле.

## 6.2. Классификация поверхностей

### 1. По способу задания:

- аналитические;
- кинематические;
- скульптурные (поверхности произвольных форм).

### 2. По закону движения образующей:

- с поступательным движением образующей;
- с вращательным движением образующей;
- с винтовым движением образующей.

### 3. По виду образующей:

- поверхности с прямолинейной образующей или линейчатые поверхности;
- поверхности с криволинейной образующей.

### 4. По закону изменения формы образующей:

- поверхности с образующей постоянного вида;
- поверхности с образующей переменного вида.

### 5. По признаку развертывания:

- развертывающиеся поверхности – можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Сюда относятся поверхности всех многогранников, цилиндрические, конические, торсовые.
- неразвертывающиеся – нельзя совместить с плоскостью без разрывов и складок. Сюда относятся все остальные поверхности.

Наибольшее распространение в технике получили поверхности вращения, сдвига и винтовые.

## 6.3. Поверхности вращения

Поверхности вращения – поверхности, образованные вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси (рис. 51, *а*). Направляющей поверхности вращения является окружность постоянного (цилиндр) или переменного радиуса (конус, сфера). Нормальное – перпендикулярное оси вращения сечение любой поверхности вращения, представляет собой окружность с центром на ее оси.

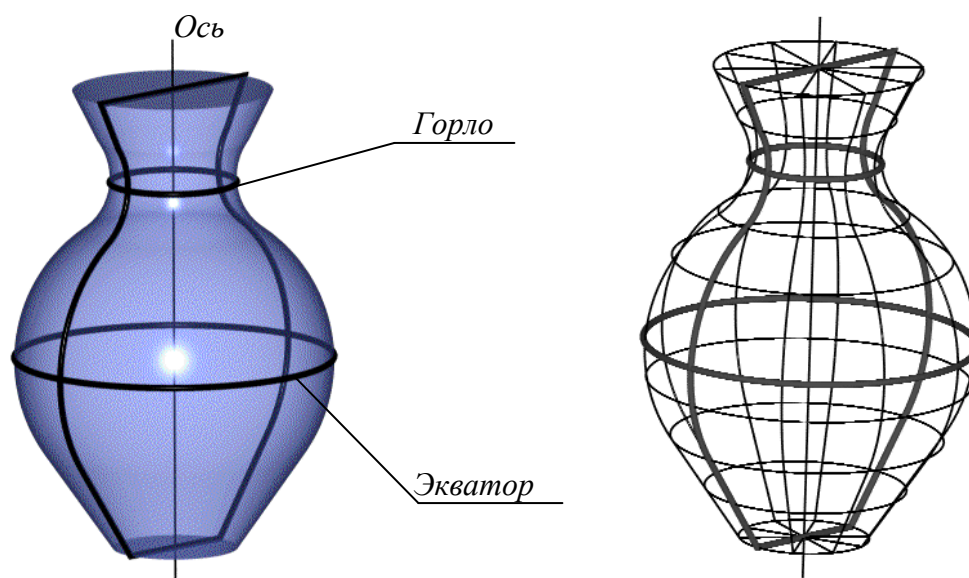


Рис. 51. Поверхность вращения:

*а* – основные линии на поверхности вращения;

*б* – представление поверхности вращения в виде сети

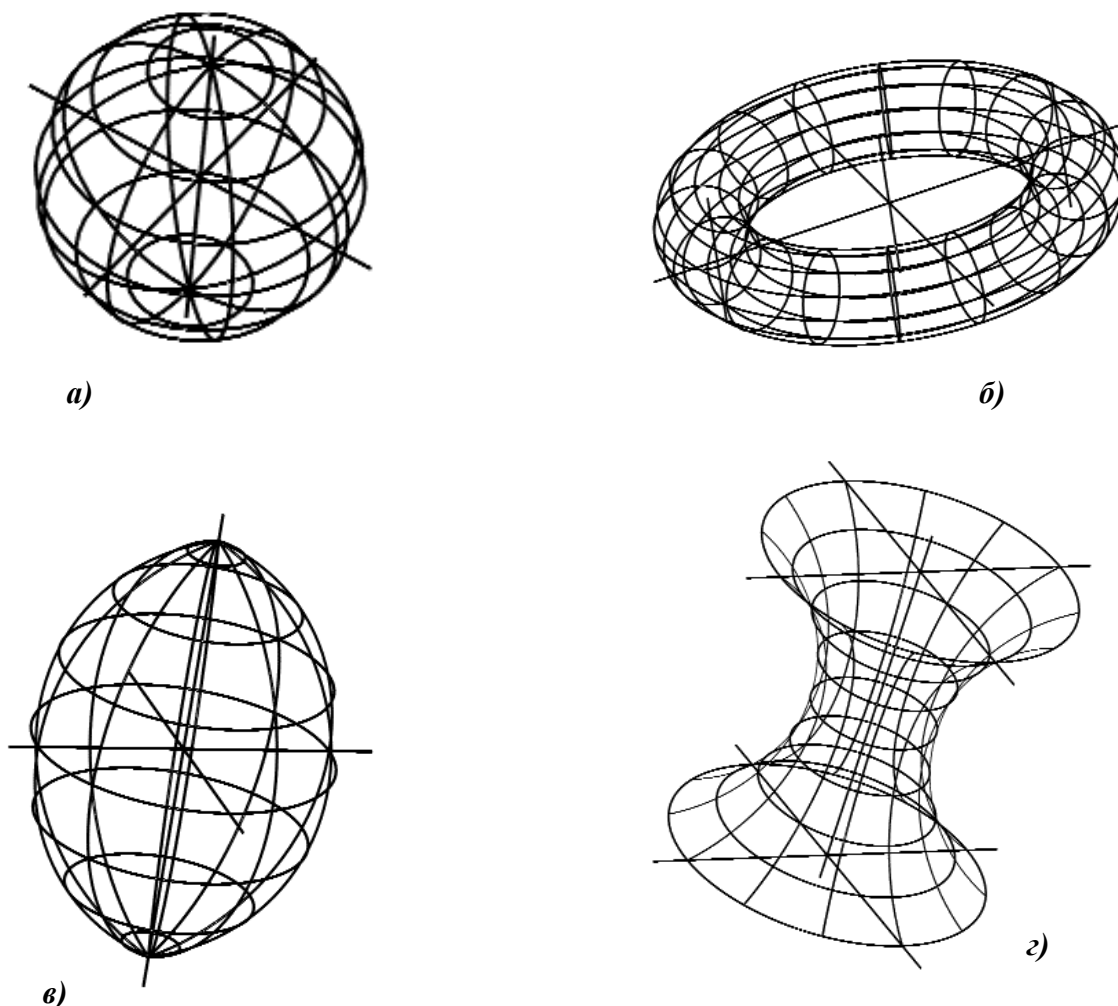
Направляющие называют также параллелями поверхности вращения. Плоскости параллелей перпендикулярны к оси поверхности. Наибольшую из параллелей называют экватором поверхности, наименьшую – горлом. Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют меридиональными, а линии, по которым они пересекают поверхность – меридианами. Поверхность вращения можно представить параллелями или меридианами поверхности, а также сетью, состоящей из параллелей и меридианов (рис. 51, б).

Поверхность вращения называют закрытой, если меридиональное сечение поверхности является замкнутой кривой линией, пересекающей ось поверхности в двух точках.

При вращении вокруг оси плоской или пространственной алгебраической кривой  $n$ -го порядка образуется алгебраическая поверхность вращения, в общем случае,  $2n$ -го порядка. Если кривая второго порядка вращается вокруг своей оси, то она образует поверхность второго порядка.

В зависимости от вида образующей различают:

**Торовые поверхности** – поверхности, образованные вращением окружности или дуги окружности:



**Рис. 52. Торовые поверхности:**

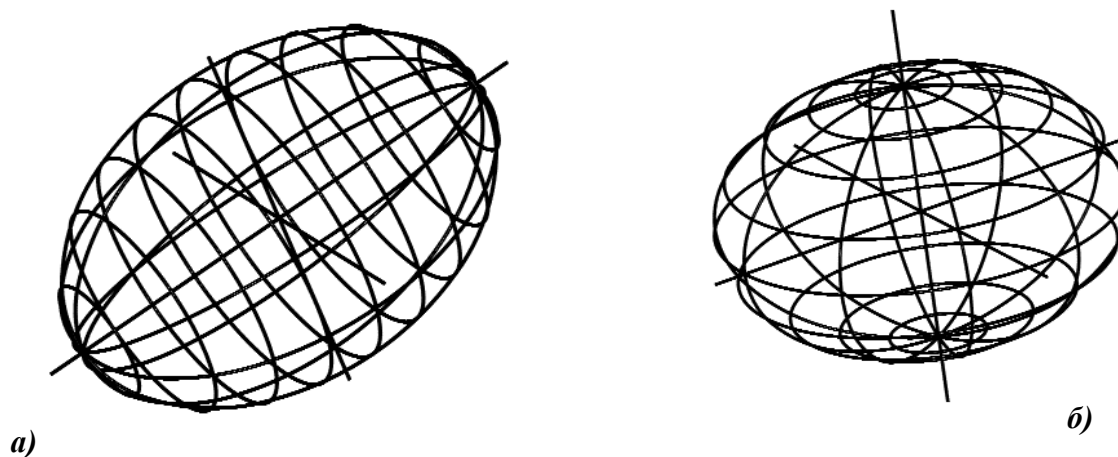
$a$  – сфера;  $б$  – открытый тор (кольцо);  $в$  – закрытый тор;  $з$  – глобоид

- **Сфера** образуется вращением окружности вокруг оси, проходящей через ее центр (рис. 52,  $a$ ).
- **Тор** образуется вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не проходящей через ее центр (тор является поверхностью четвертого порядка). Различают **открытый тор**, образованный вращением окружности вокруг оси, которая

не пересекает образующую (рис. 52, б) и **закрытый тор**, образованный вращением окружности вокруг оси, которая пересекает образующую окружность или касается ее (рис. 52, в).

- **Глобoid** образуется вращением окружности достаточно большого радиуса вокруг оси, которая не пересекает образующую (рис. 52, г).

**Эллипсоид вращения** образуется вращением эллипса вокруг его оси. Если за ось вращения принята большая ось эллипса, эллипсоид вращения называют вытянутым (рис. 53. а), если малая – сжатым или сфероидом (рис. 53, б). Земной шар, например, по форме близок к сфероиду.

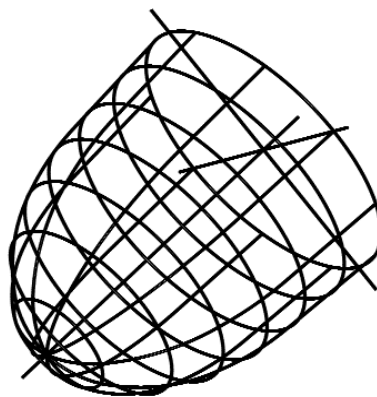


**Рис. 53. Поверхности вращения:**

а – вытянутый эллипсоид;

б – сфероид

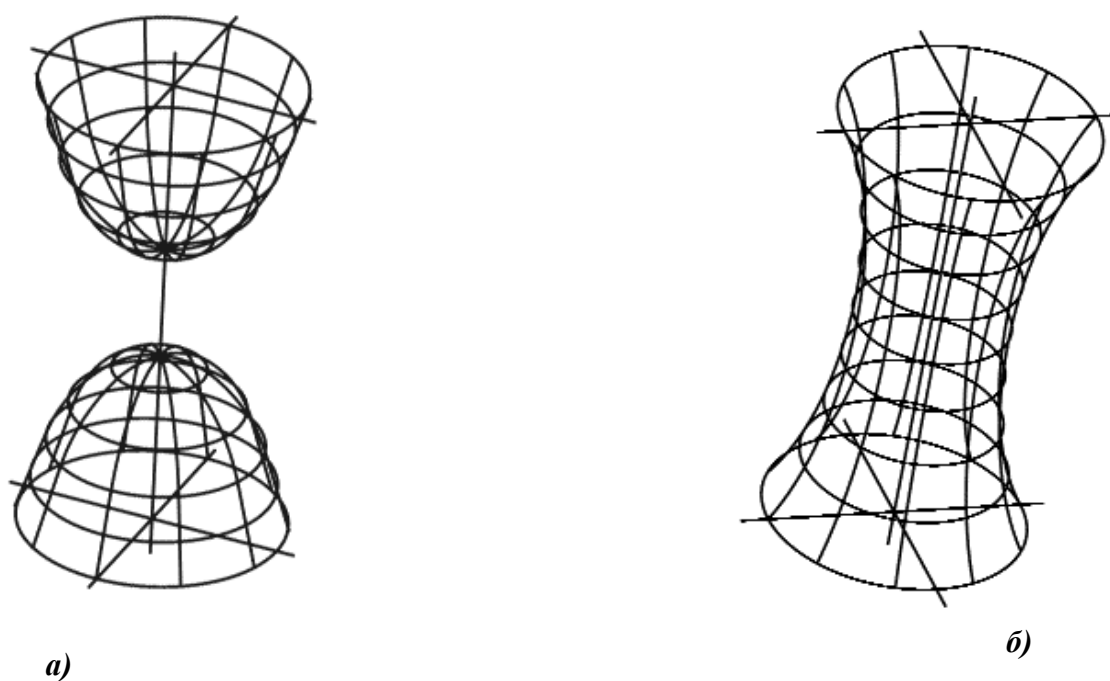
**Параболоид вращения** образуется вращением параболы вокруг ее оси (рис. 54). Параболоиды вращения используются в качестве отражающей поверхности в прожекторах и фарах автомобилей для получения параллельного светового пучка.



**Рис. 54. Параболоид вращения**

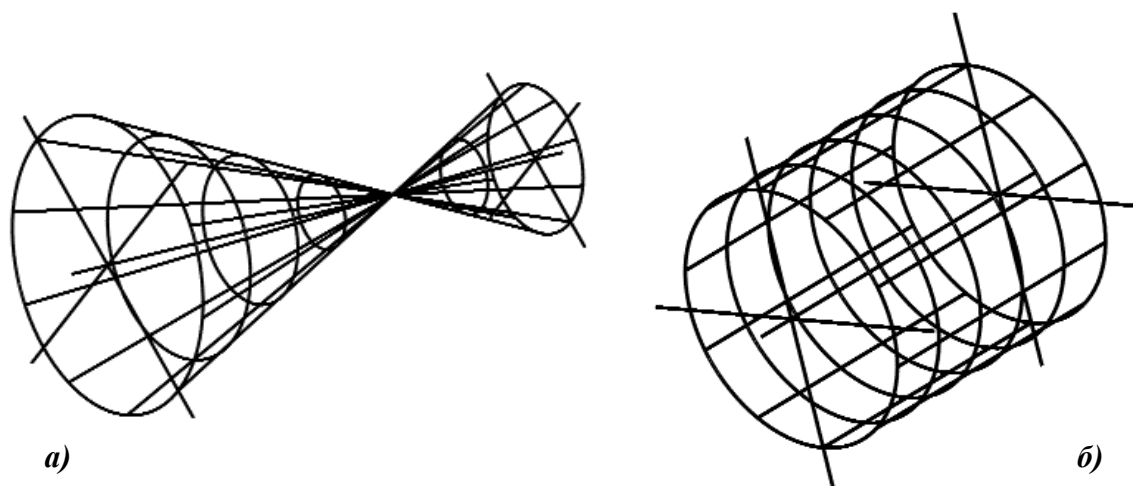
**Гиперболоид вращения** образуется вращением гиперболы. Различают **однополостный гиперболоид** (рис. 55, а), образованный вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси, и **двуполостный гиперболоид** (рис. 55, б), образованный вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.





**Рис. 55. Поверхности вращения:**  
*a* – двухполостной гиперboloид;  
*б* – однополостной гиперboloид

**Конус вращения** (прямой круговой конус) образуется вращением вокруг оси кривой 2-го порядка, распадающейся на две пересекающиеся прямые (рис. 56, *a*).

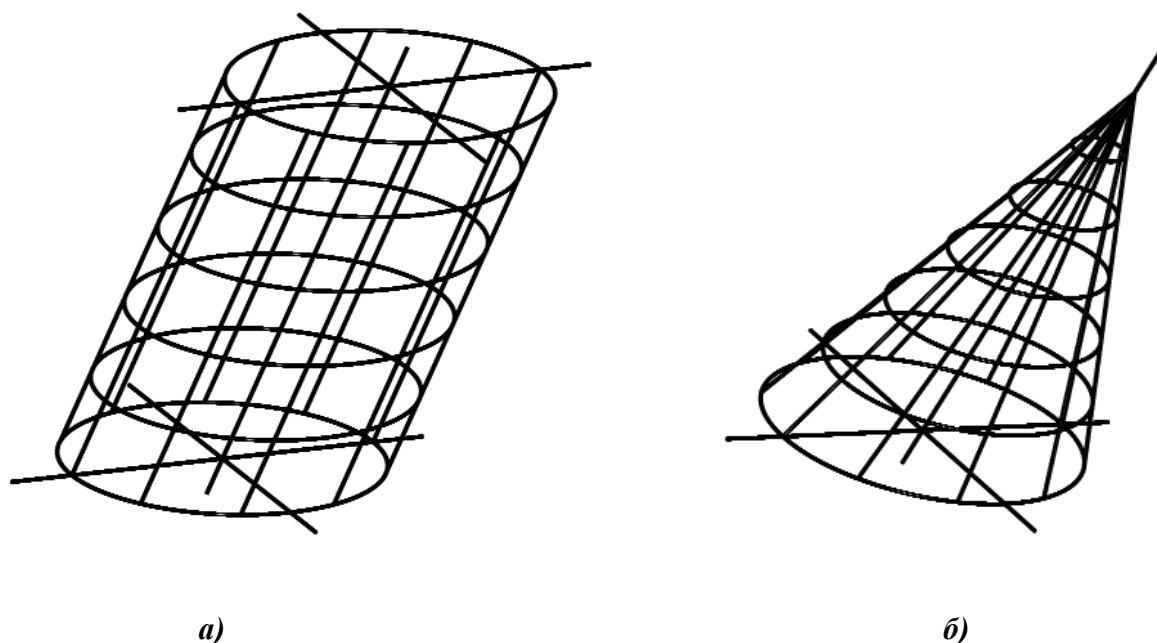


**Рис. 56. Поверхности вращения:**  
*a* – конус;  
*б* – цилиндр

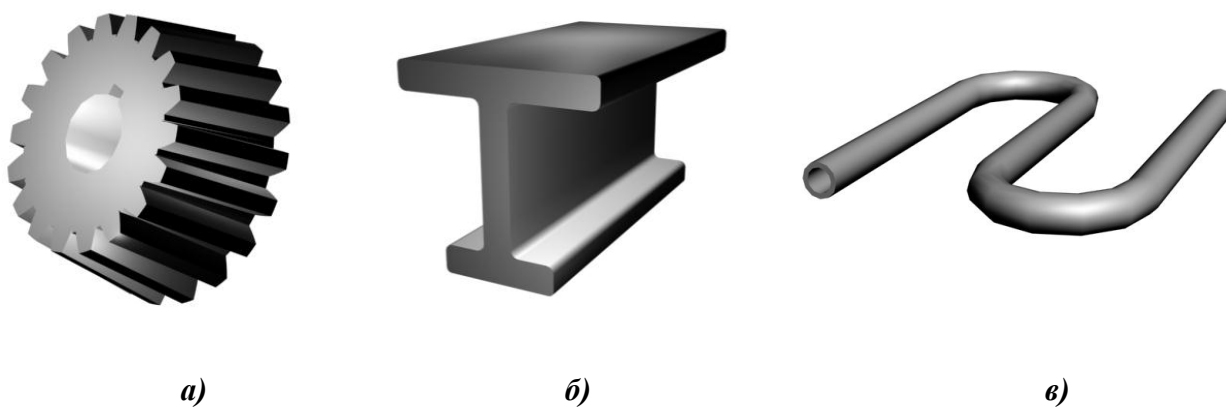
**Цилиндр вращения** (прямой круговой цилиндр) образуется вращением вокруг оси кривой 2-го порядка, распадающейся на две параллельные прямые (рис. 56, *б*).

## 6.4. Поверхности сдвига

Поверхности сдвига или так называемые поверхности экструдий – поверхности, образованные смещением произвольной образующей вдоль произвольной направляющей (рис. 57, 58). Образующие и направляющие поверхности сдвига могут быть как постоянного, так и переменного вида.



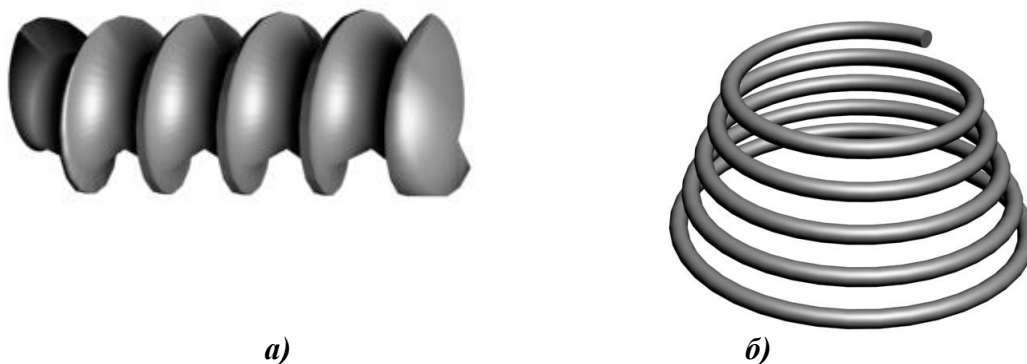
**Рис. 57. Поверхности сдвига:**  
*a* – наклонный цилиндр;  
*б* – наклонный конус



**Рис. 58. Поверхности сдвига, применяемые в технике:**  
*a* – коническое зубчатое колесо;  
*б* – швеллер;  
*в* – змеевик

## 6.5. Винтовые поверхности

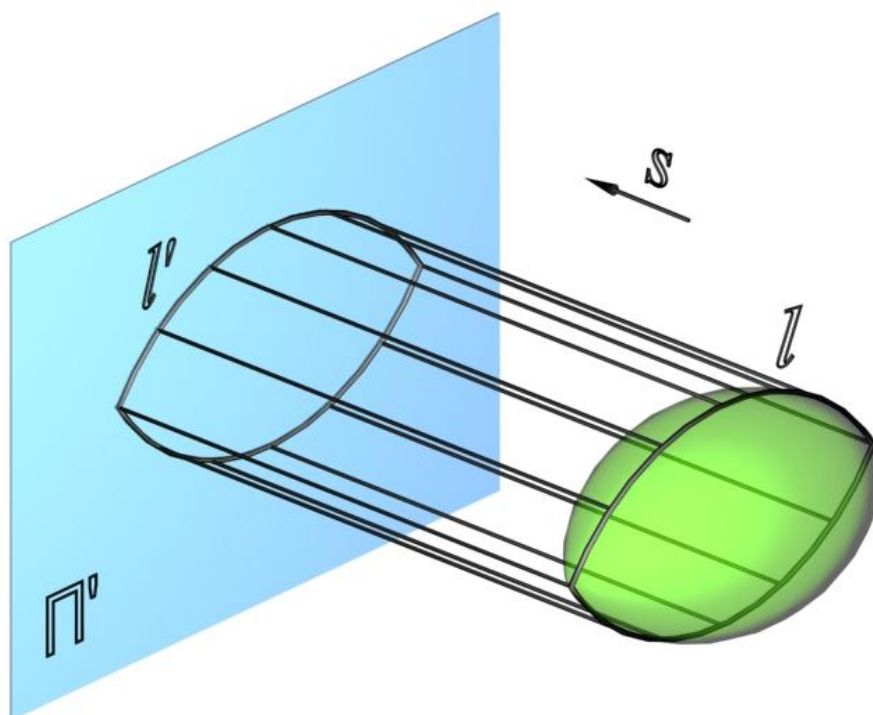
Винтовые поверхности – поверхности, образованные вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси с одновременным смещением в осевом (поверхность цилиндрической резьбы, рис. 59, а) или осевом и радиальном направлении (коническая пружина, рис. 59, б). Направляющей винтовой поверхности является винтовая линия.



**Рис. 59. Винтовые поверхности:**  
*а – поверхность трапецидальной резьбы;*  
*б – поверхность конической пружины*

## 6.6. Изображение поверхностей на комплексном чертеже

На комплексном чертеже изображается очерк поверхности, а также наиболее важные линии и точки на поверхности.



**Рис. 60. Образование очерка поверхности**

Очерк поверхности – линия, которая ограничивает проекцию поверхности. Для получения очерка поверхности проводят множество проецирующих лучей в направлении

проецирования  $s$ , касательных к данной поверхности. Точки касания поверхности и проецирующих лучей образуют линию  $l$ , называемую контурной линией. Совокупность проецирующих лучей образует проецирующую цилиндрическую поверхность, проекция которой и представляет собой очерк  $l'$  данной поверхности на соответствующей плоскости проекций  $\Pi'$  (рис. 60). Очерк поверхности можно определить и как проекцию контурной линии на заданную плоскость проекций. Очерк поверхности является границей видимости поверхности.

### 6.6.1. Построение очерков конических поверхностей

Фронтальный очерк поверхности наклонного конуса представляет собой равнобедренный треугольник  $A_2B_2S_2$ . Горизонтальный очерк поверхности наклонного конуса с круговым основанием состоит из дуги окружности основания и касательных, проведенных из проекции вершины конуса (рис. 61).

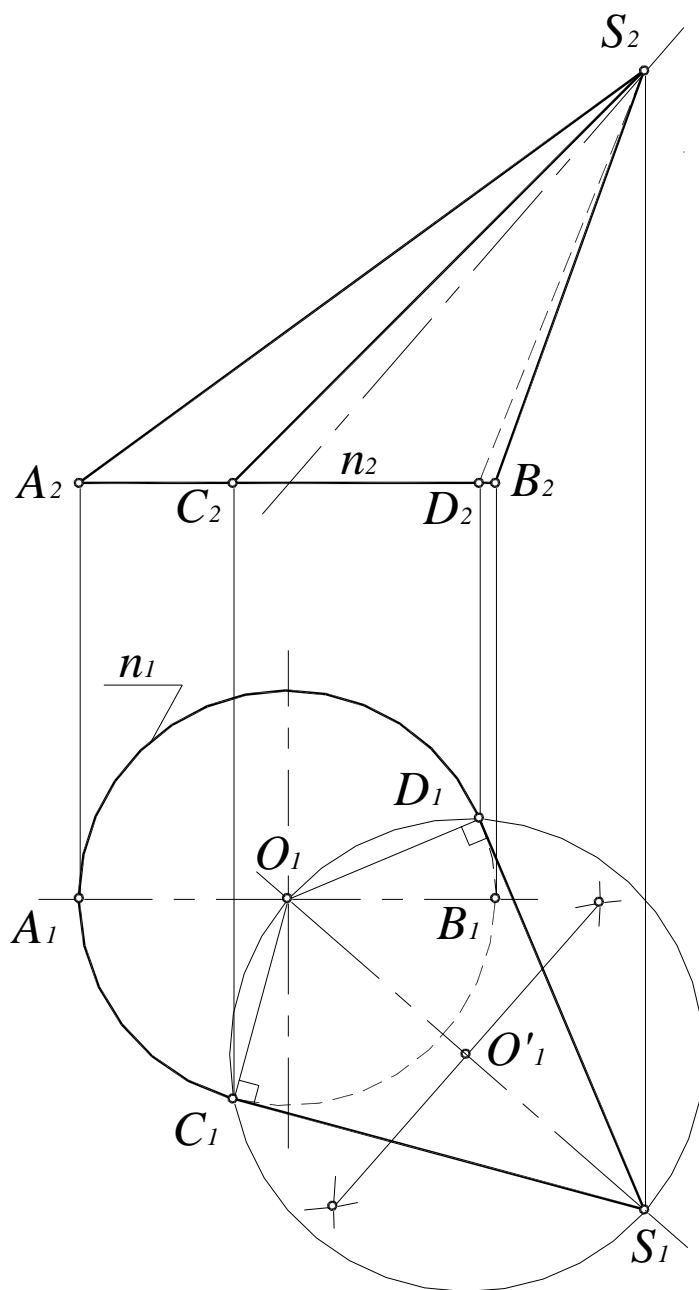


Рис. 61. Построение очерка поверхности наклонного конуса с круговым основанием

Для построения касательных на  $\Pi_1$  вершину конуса  $S$  нужно соединить с центром окружности основания  $O_1$ . Затем отрезок делится пополам и строится вспомогательная окружность радиусом  $O'_1S_1$ . Точки  $C_1$  и  $D_1$  пересечения вспомогательной окружности и окружности основания и являются точками касания. Угол  $O_1D_1S_1$  – прямой.

Фронтальный очерк поверхности прямого кругового конуса, ось которого является фронталью, представляет собой равнобедренный треугольник  $A_2B_2S_2$  (рис. 62). Горизонтальный очерк состоит из части эллипса и двух касательных к нему прямых. Эллипс можно построить по двум осям малой  $A_1B_1$  и большой  $C_1C'_1$ , равной диаметру окружности основания конуса (см. п. 13.4.1 рис. 173).

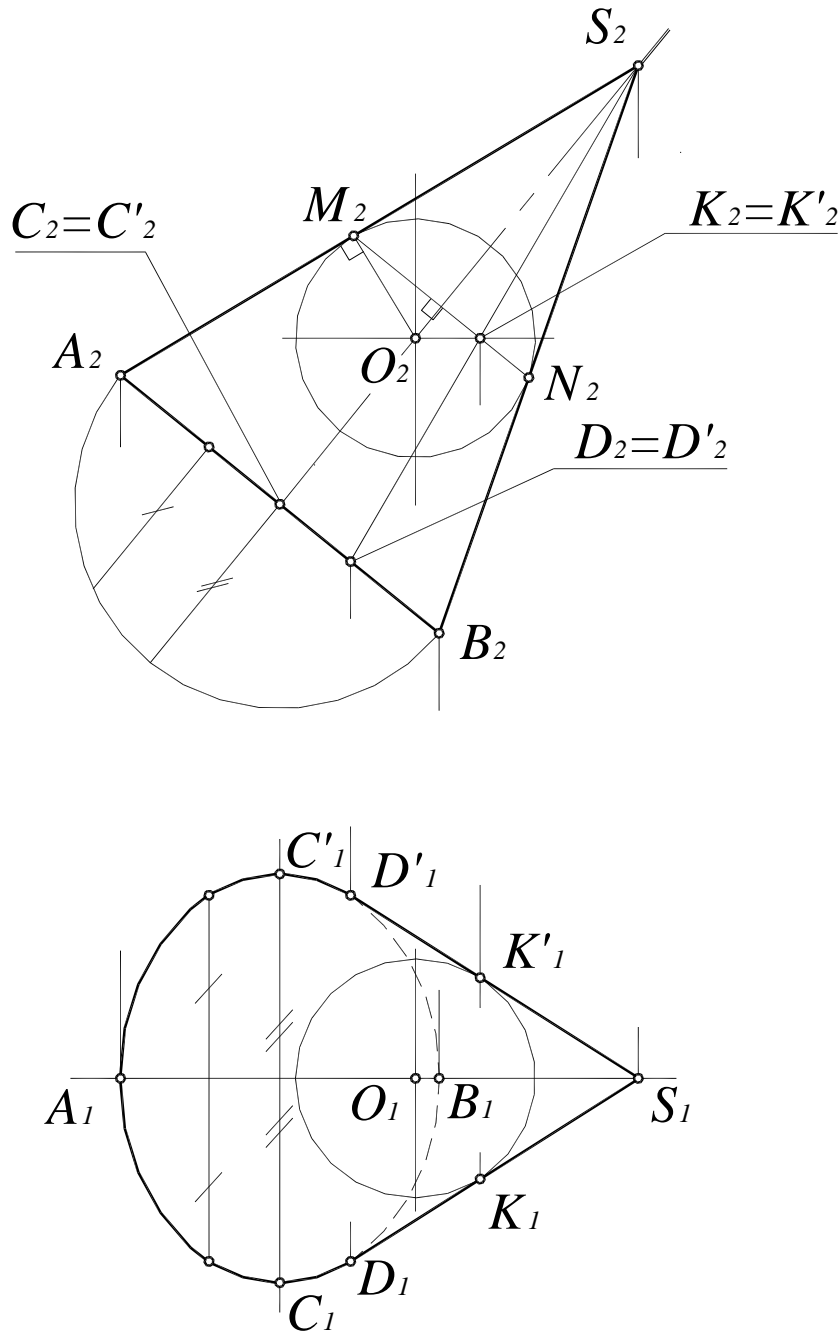


Рис. 62. Построение очерка поверхности прямого кругового конуса

Для определения прямых  $(SD)$  и  $(SD')$ , касательных к эллипсу, используется произвольная вспомогательная сфера с центром  $O(O_1O_2)$  на оси конуса, касательная к его поверхности. Из произвольной точки  $O(O_1O_2)$  на оси конуса восстанавливаются перпендикуляры  $(O_2M_2)$  и  $(O_2N_2)$  на образующие  $(S_2A_2)$  и  $(S_2B_2)$ . Линия  $(M_2N_2)$  – проекция линии касания конуса и вспомогательной сферы. Затем определяются фронтальные

проекции случайных точек искомых касательных  $K_2$  и  $K'_2$  как точки пересечения полученной линии ( $MN$ ) и экватора вспомогательной сферы. Далее определяются горизонтальные проекции  $K_1$  и  $K'_1$  на горизонтальной проекции экватора вспомогательной сферы. Прямые  $(S_1K_1)$  и  $(S_1K'_1)$  касаются эллипса в точках  $D_1$  и  $D'_1$ .

### 6.6.2. Построение очерков цилиндрических поверхностей

Для построения фронтального очерка поверхности наклонного цилиндра с круговым основанием (рис. 63) строятся проекции верхнего и нижнего оснований –  $(A_2B_2)$  и  $(A'_2B'_2)$  и очерковые образующие  $(A_2A'_2)$  и  $(B_2B'_2)$ .

Для построения горизонтального очерка строят окружности верхнего и нижнего оснований, затем через центры окружностей проводятся перпендикуляры  $(C_1D_1)$  и  $(C'_1D'_1)$  к оси цилиндра.

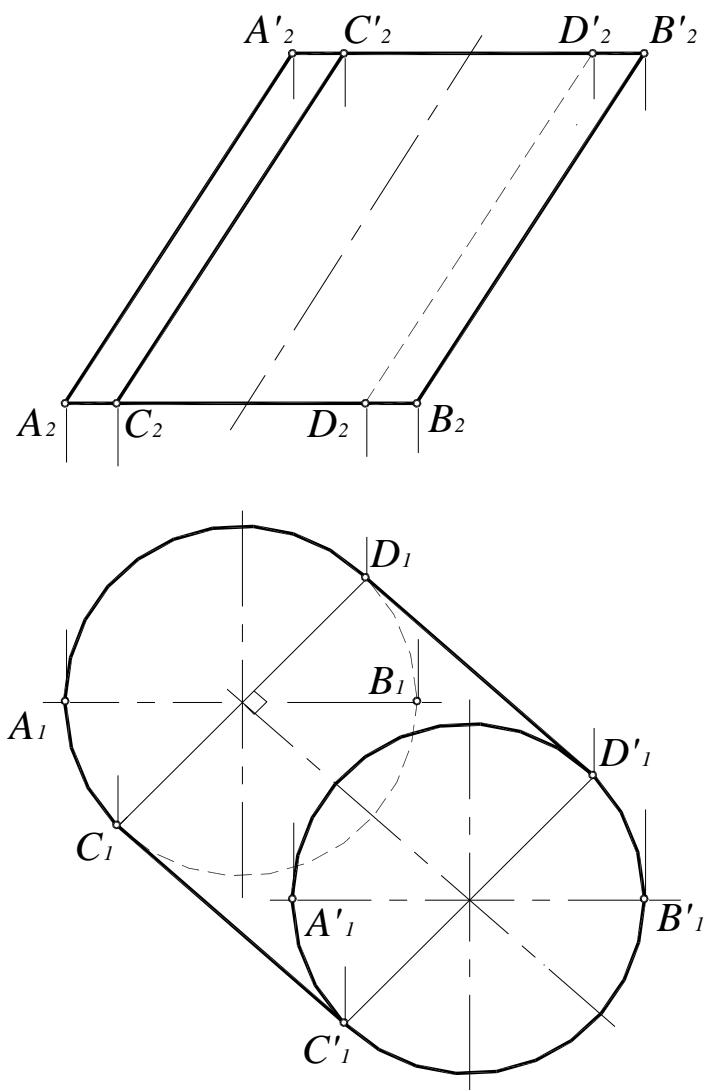
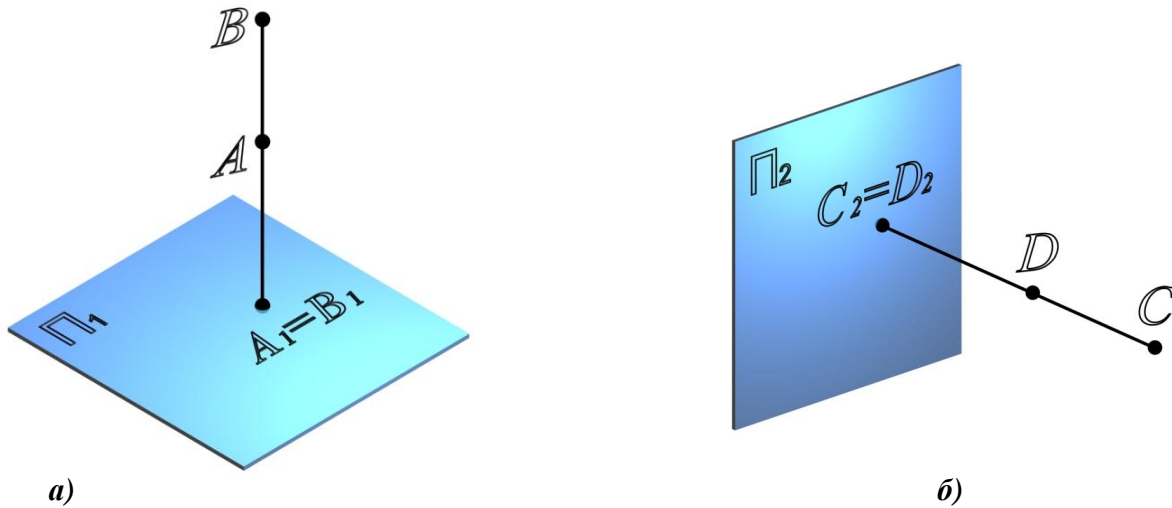


Рис. 63. Построение очерка наклонного цилиндра с круговым основанием

## 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ. МЕТОД КОНКУРИРУЮЩИХ ТОЧЕК

Точки, расположенные на одной проецирующей прямой, называются конкурирующими.

Точки, расположенные на одной горизонтально-проецирующей прямой, называются конкурирующими относительно горизонтальной плоскости проекций. Из двух точек  $A$  и  $B$  (рис. 64, *a*), конкурирующих на горизонтальной плоскости проекций, видима та, высота которой больше ( $B$ –видима,  $A$ –невидима).

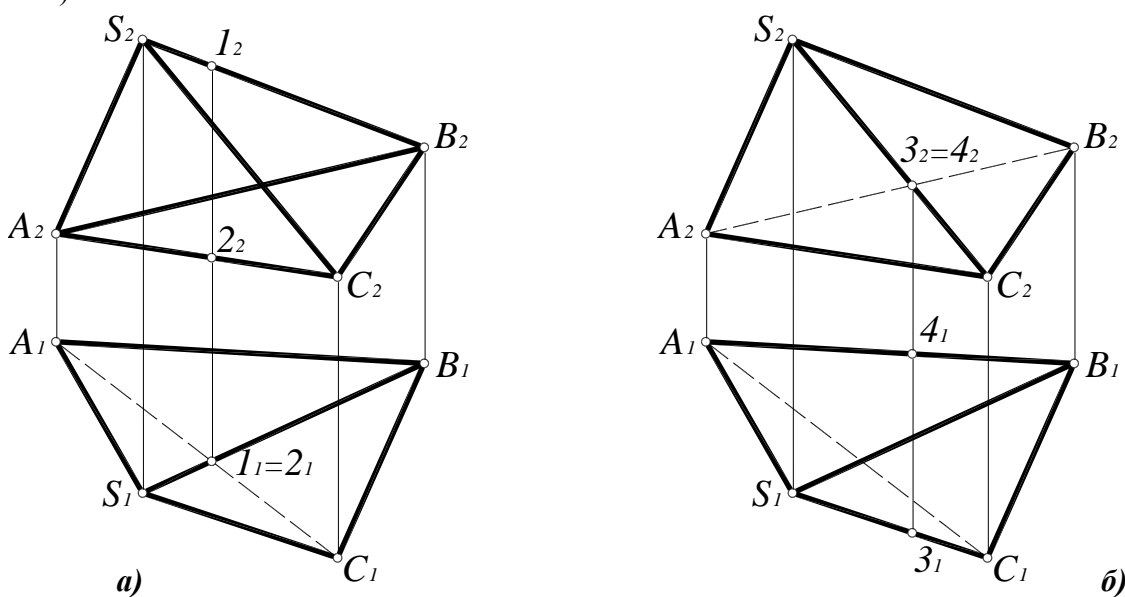


**Рис. 64. Конкурирующие точки:**

*a* – относительно горизонтальной плоскости проекций;  
*б* – относительно фронтальной плоскости проекций

Точки, расположенные на одной фронтально-проецирующей прямой, называются конкурирующими относительно фронтальной плоскости проекций. Из двух точек  $C$  и  $D$  (рис. 64, *б*), конкурирующих относительно фронтальной плоскости проекций, видима та точка, у которой больше глубина ( $C$  – видима,  $D$  – невидима).

Рассмотрим определение видимости на комплексном чертеже на примере тетраэдра (рис. 65).



**Рис. 65. Определение видимости ребер тетраэдра на комплексном чертеже:**

*a* – относительно горизонтальной плоскости проекций;  
*б* – относительно фронтальной плоскости проекций

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций нужно найти точки, конкурирующие относительно  $\Pi_1$  (рис. 65, а). Ребра  $SA$ ,  $SC$ ,  $AB$  и  $BC$  являются очерковыми, следовательно, видимыми. Остается выяснить видимость ребер  $AC$  и  $SB$ . Точки  $1 \in SB$  и  $2 \in AC$  являются конкурирующими на  $\Pi_1$ , поскольку находятся на проецирующем луче. Фронтальная проекция точки  $1$  лежит выше (высота точки  $1$  больше), поэтому она видима на  $\Pi_1$ , следовательно, видимо и ребро  $SB$ , а ребро  $AC$  невидимо. Если хотя бы одно ребро грани невидимо, вся грань  $ABC$  невидима на  $\Pi_1$ .

Видимость на фронтальной проекции (рис. 65, б) определяется с помощью конкурирующих точек  $3 \in SC$  и  $4 \in AB$ . Горизонтальная проекция точки  $3$  лежит ниже (глубина точки  $3$  больше), следовательно, точка  $3$  и ребро  $SC$  на фронтальной плоскости проекции видимы, а точка  $4$ , ребро  $AB$  и грань  $ASB$  невидимы на  $\Pi_2$ .

## 8. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

### 8.1. Относительное положение прямой и плоскости

Прямая по отношению к плоскости может занимать три различных положения:

- прямая  $l$  лежит в плоскости (рис. 66, а);
- прямая  $n$  параллельна плоскости (рис. 66, б);
- прямая  $d$  пересекается с плоскостью (рис. 66, в).

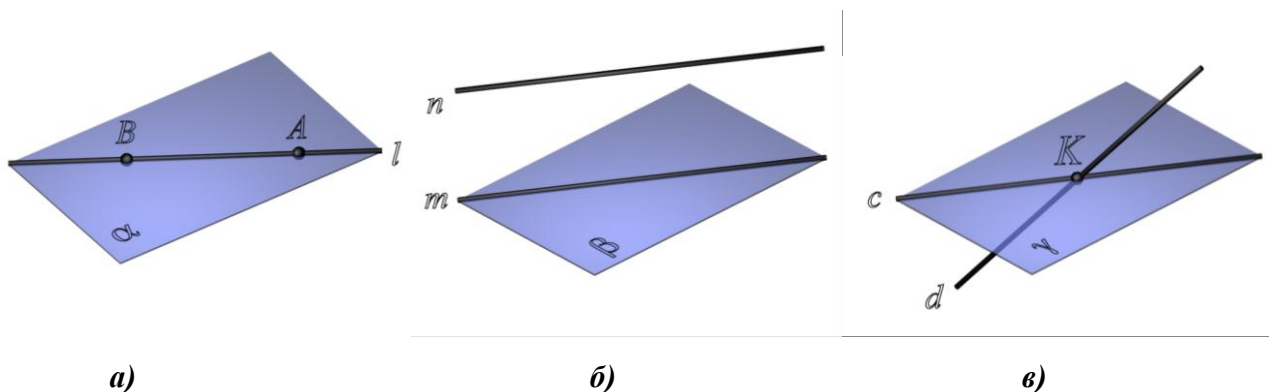


Рис. 66. Относительное положение прямой и плоскости:  
 $a - l \subset \alpha$  ;  $b - n \parallel \beta$  ;  $v - d \times \gamma$

### 8.2. Принадлежность точки и прямой линии плоскости

Прямая линия принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат плоскости (рис. 67).

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости (см. рис. 67).



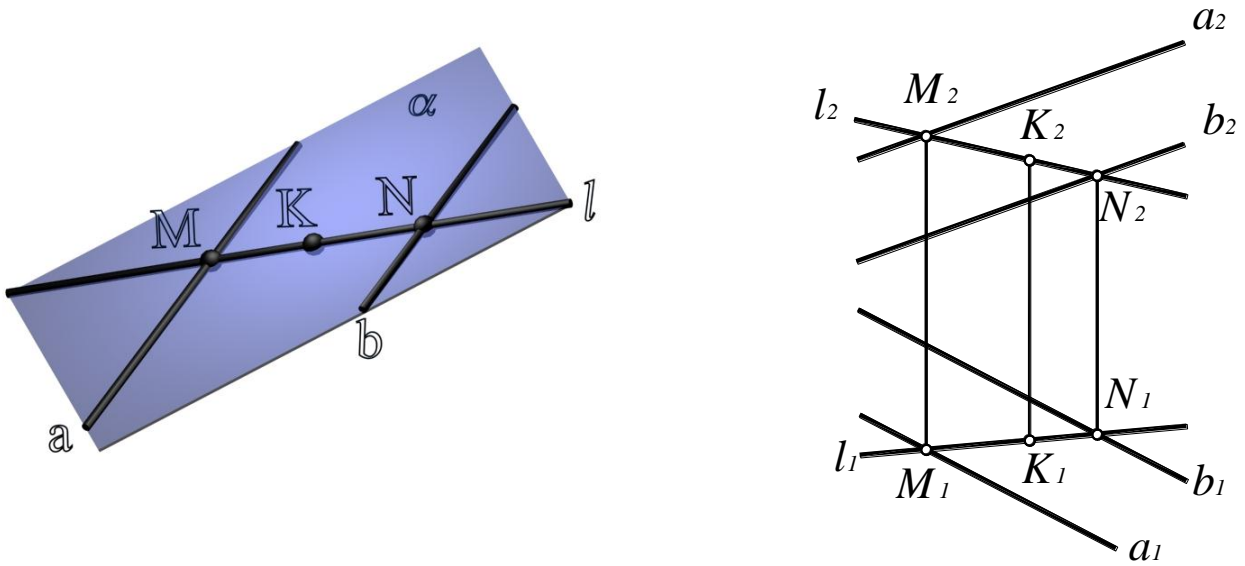


Рис. 67. Принадлежность точки и прямой линии плоскости:

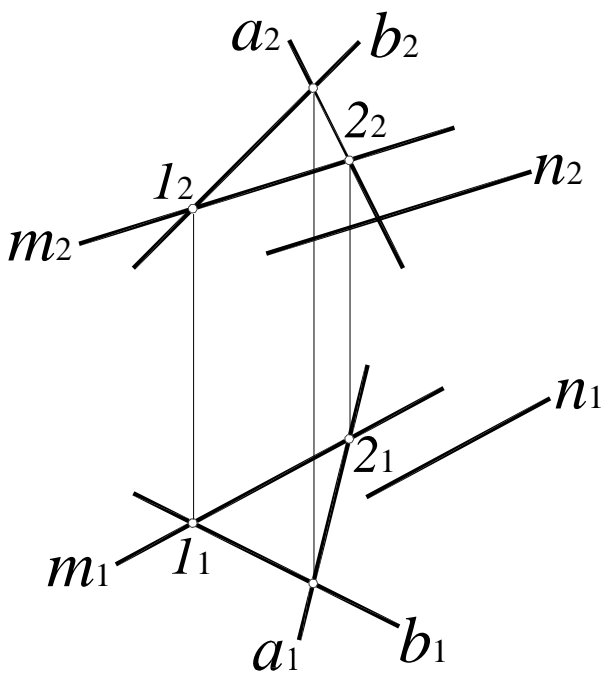
$$\left. \begin{array}{l} M \in \alpha(a \parallel b) \\ N \in \alpha(a \parallel b) \end{array} \right\} \Rightarrow l(MN) \subset \alpha(a \parallel b);$$

$$K \in l(MN) \Rightarrow K \in \alpha(a \parallel b)$$

### 8.3. Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 68).

Рис. 68. Параллельность прямой и плоскости:



$$\alpha(a \times b);$$

$$m \in \alpha(a \times b) \left\{ \begin{array}{l} 1 \in b \Rightarrow 1 \in \alpha(a \times b) \\ 2 \in a \Rightarrow 2 \in \alpha(a \times b) \end{array} \right.;$$

$$n \parallel m \left\{ \begin{array}{l} n_1 \parallel m_1 \\ n_2 \parallel m_2 \end{array} \right. \Rightarrow n \parallel \alpha(a \times b)$$

## 8.4. Линии уровня плоскости

Прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные одной из плоскостей проекций, называются линиями уровня плоскости.

Прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ , называется горизонталью плоскости (рис. 69). Все горизонтали плоскости параллельны между собой, поскольку каждая из них может быть получена как линия пересечения данной плоскости общего положения и горизонтальной плоскости уровня.

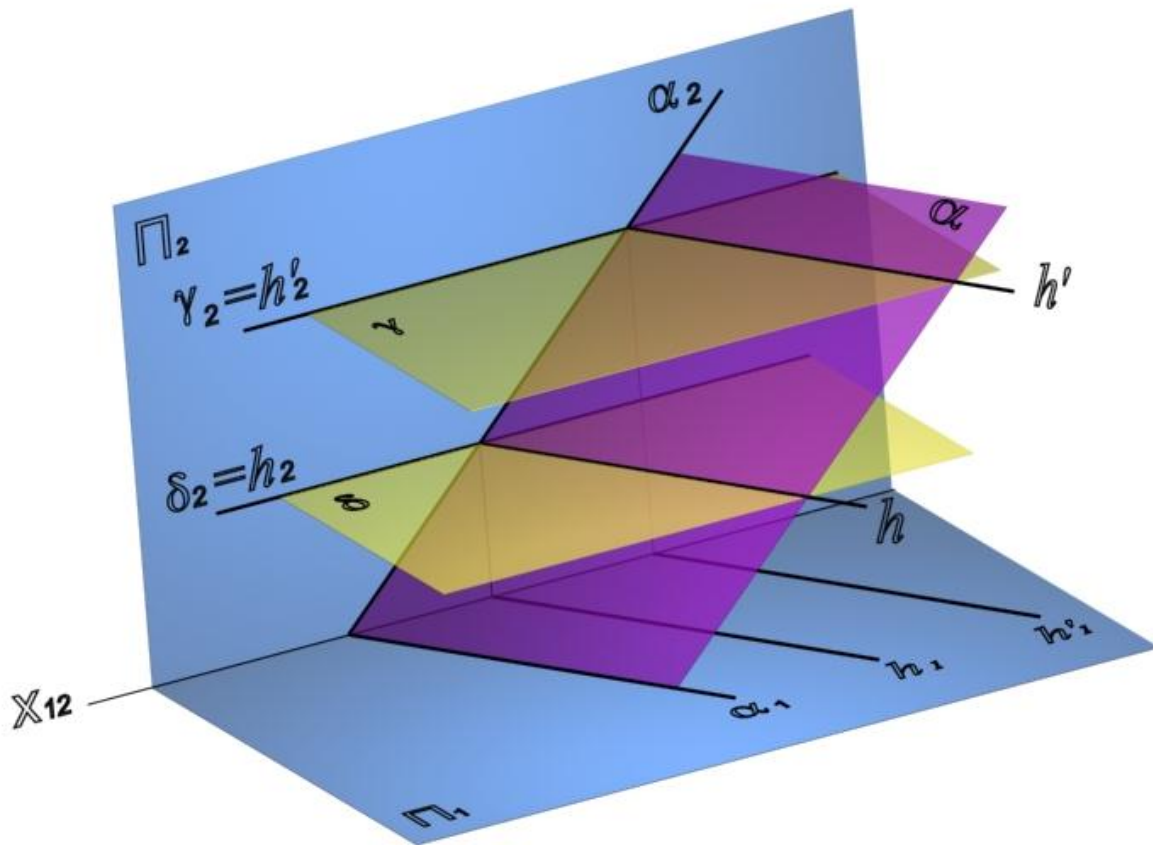


Рис. 69. Горизонтали плоскости:

- $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ ;
- $\delta(\delta_2) \parallel \Pi_1$ ;
- $\gamma(\gamma_2) \parallel \Pi_1$ ;
- $\delta(\delta_2) \cap \alpha = h$ ;
- $h \parallel \Pi_1$ ;
- $\gamma(\gamma_2) \cap \alpha = h'$ ;
- $h' \parallel \Pi_1$ ;
- $h' \parallel h'_1$

Рассмотрим построение горизонтали плоскости общего положения  $\alpha(ABC)$  (рис. 70, а).

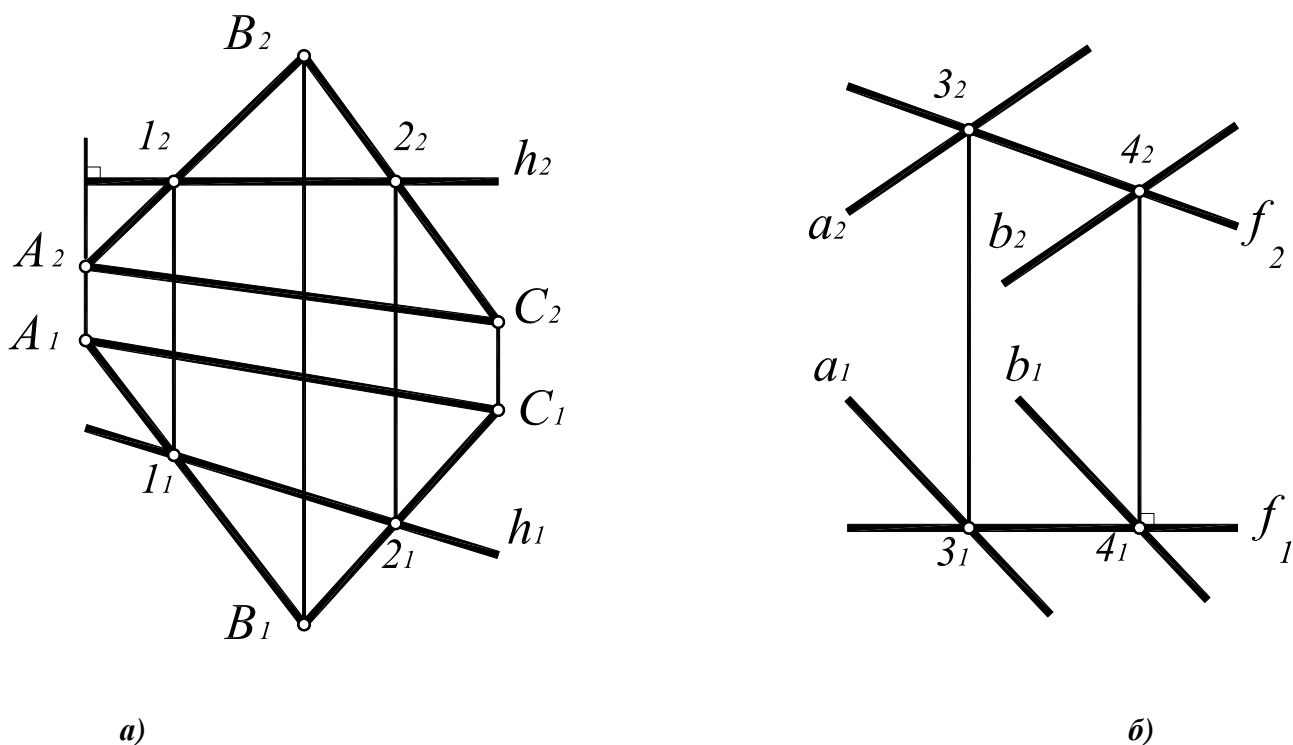


Рис. 70. Линии уровня плоскости:

$a$  – горизонталь плоскости  $\alpha(ABC)$ :

$$\begin{aligned} h_2 \perp (A_1A_2); \quad h_2 \times (A_2B_2) = I_2; \quad h_2 \times (B_2C_2) = 2_2; \\ (I_2 - I_1) \times A_1B_1 = I_1; \quad (2_2 - 2_1) \times B_1C_1 = 2_1; \\ h_1 = (I_1 - 2_1); \end{aligned}$$

$b$  – фронталь плоскости  $\beta(a//b)$ :

$$\begin{aligned} f_1 \perp (3_1 - 4_2); \quad f_1 \times a_1 = 3_1; \quad f_1 \times b_1 = 4_1; \\ (3_1 - 3_2) \times a_2 = 3_2; \quad (4_1 - 4_2) \times b_2 = 4_2; \\ f_2 = (3_2 - 4_2) \end{aligned}$$

Фронтальная проекция любой горизонтали всегда перпендикулярна линиям связи, поэтому построение горизонтали начинается с построения ее фронтальной проекции  $h_2 \perp (A_1A_2)$ . Поскольку горизонталь лежит в плоскости, она пересекается с прямой  $(AB)$  в точке  $I$ , а с прямой  $(BC)$  – в точке  $2$ . Горизонтальные проекции точек  $I$  и  $2$  однозначно определяют положение горизонтальной проекции горизонтали  $h_1(I_1 - 2_1)$ .

Фронталь плоскости  $\beta(a//b)$  строится аналогично, но построение фронтали начинается с построения ее горизонтальной проекции (рис. 70, б). Все фронталь плоскости также параллельны между собой, поскольку каждая из них может быть получена как линия пересечения данной плоскости общего положения и фронтальной плоскости уровня.

Таким образом, любую плоскость общего положения можно представить как совокупность параллельных линий уровня – горизонталей, фронталей или профильных прямых. Иными словами, плоскость общего положения, заданную любым способом, можно также задать параллельными линиями уровня или пересекающимися горизонталью и фронталью. Такой способ задания плоскостей наиболее удобен для решения ряда метрических задач.

## 8.5. Пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения

Рассмотрим построение точки пересечения  $K$  фронтально-проецирующей плоскости  $\gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2$  и прямой  $a(a_1, a_2)$  общего положения (рис. 71, 72).

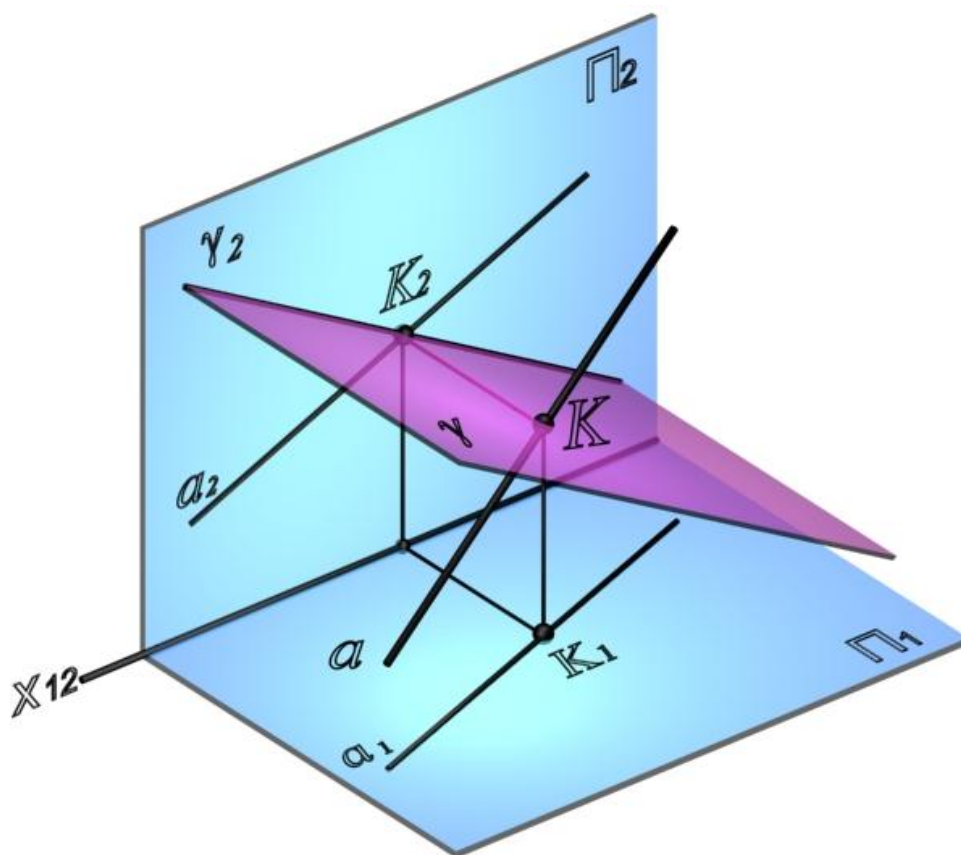


Рис. 71. Пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения

Поскольку  $K \in \gamma(\gamma_2)$ ,  $K_2 \in \gamma_2$ , но одновременно  $K \in a$ , следовательно,  $K_2 = \gamma_2 \times a_2$ , а  $K_1 = (K_2 K_1) \times a_1$ .

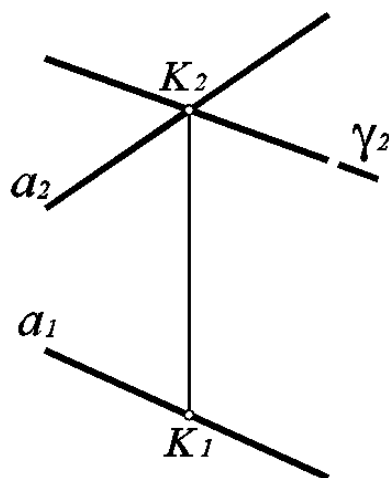


Рис. 72. Построение линии пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения

## 8.6. Пересечение двух плоскостей частного положения

Линией пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей  $\delta(\delta_2)$  и  $\sigma(\sigma_2)$  является фронтально-проецирующая прямая  $l$  (рис. 73).

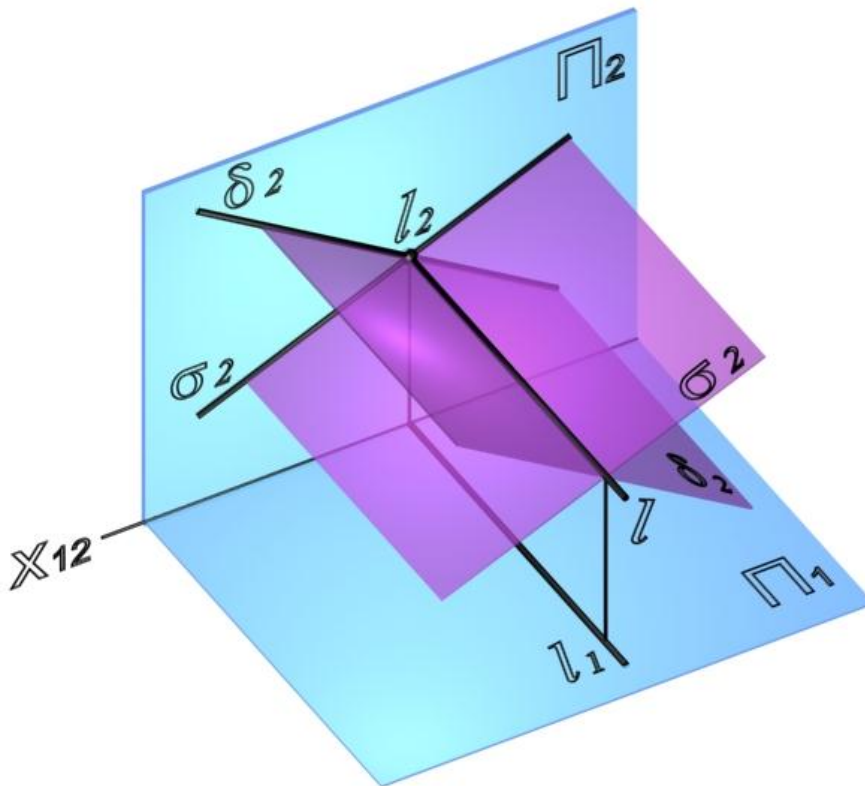


Рис. 73. Пересечение плоскостей частного положения

Фронтальная проекция линии пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей  $\delta(\delta_2)$  и  $\sigma(\sigma_2)$  определяется как точка пересечения фронтальных следов плоскостей  $\delta_2$  и  $\sigma_2$ :  $l_2 = \delta_2 \times \sigma_2$ , а горизонтальная проекция строится по линии связи, перпендикулярно направлению оси  $x_{12}$  (рис. 74).

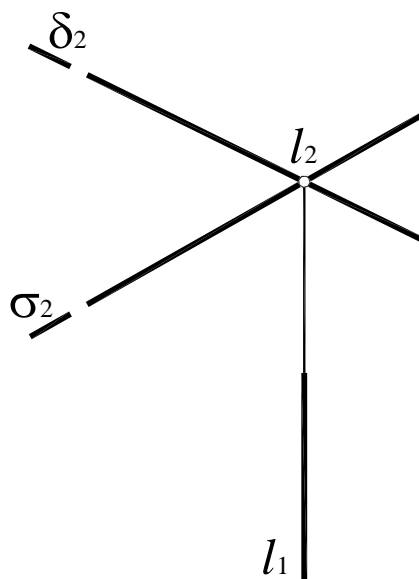
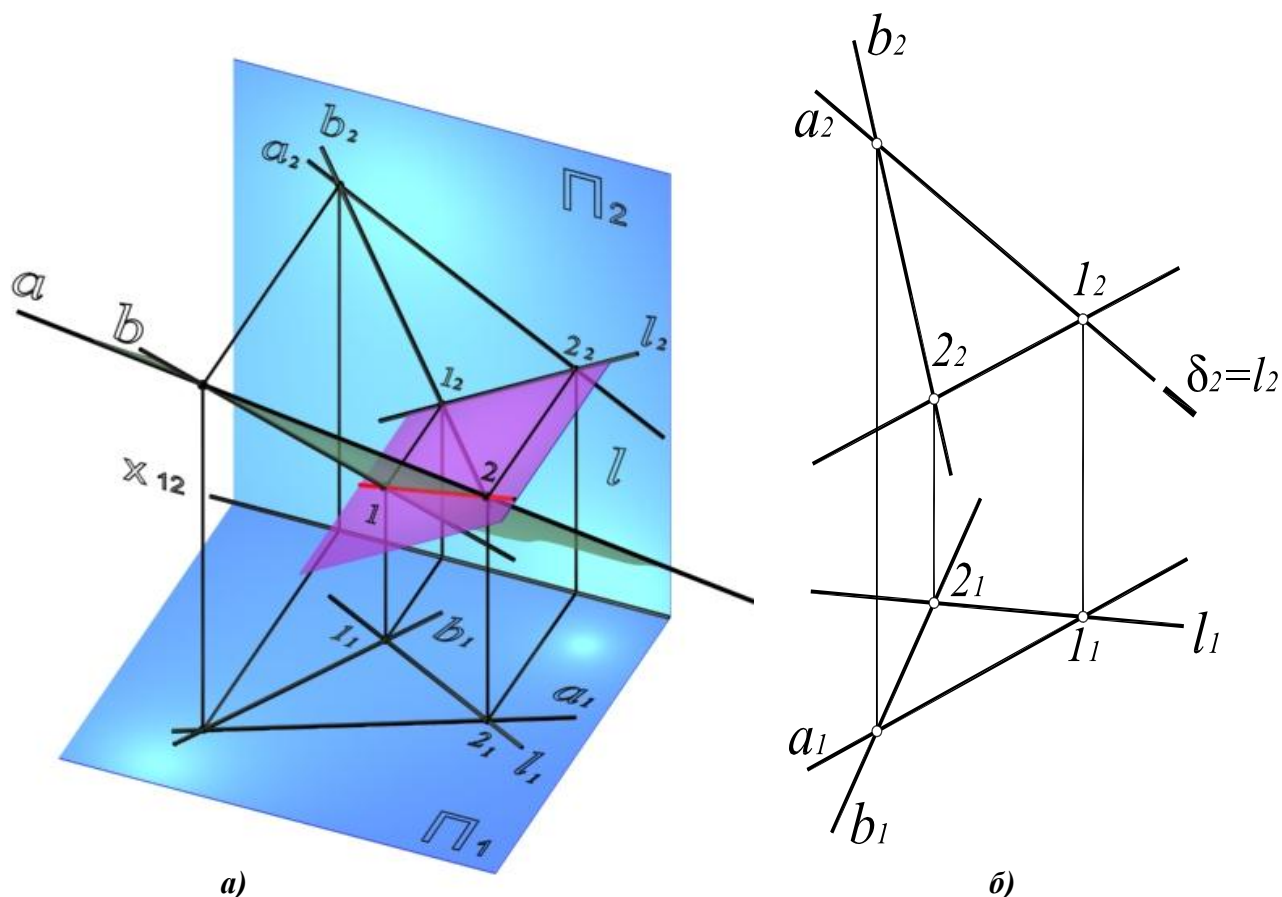


Рис. 74. Построение линии пересечения фронтально-проецирующих плоскостей  $\delta$  и  $\sigma$

## 8.7. Пересечение плоскости общего положения и плоскости частного положения

Линией пересечения двух плоскостей (рис. 75, а) является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, принадлежащие обеим плоскостям одновременно.



**Рис. 75. Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью**  
*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

$$\begin{aligned} l_1 &= a_2 \times \delta_2; l_1 \in a_1; \\ 2_2 &= b_2 \times \delta_2; 2_1 \in b_1; \\ l_1 &(1_1 - 2_1); \\ l_2 &= \delta_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим построение линии пересечения  $l$  плоскости общего положения  $\alpha(a \times b)$  и фронтально-проецирующей плоскости  $\delta(\delta_2)$  (рис. 75, б). Линия, по которой пересекаются две плоскости, принадлежит обеим плоскостям одновременно, следовательно, для ее построения достаточно определить две точки, общие для пересекающихся плоскостей, или одну точку и направление линии пересечения.

В данном случае, достаточно определить точки пересечения прямых  $a$  и  $b$  с плоскостью  $\delta(\delta_2)$ . Они однозначно определяют линию пересечения  $l$ .

## 8.8. Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения. Первая позиционная задача

Задача об определении точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения называется первой позиционной задачей. На рис. 76 представлено наглядное изображение решения первой позиционной задачи.

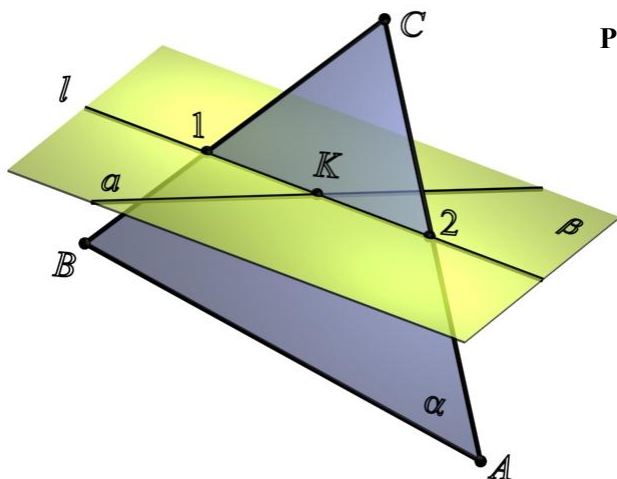


Рис. 76. Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения

**Дано:**  $\alpha(ABC)$  – плоскость общего положения;  
 $a(a_1, a_2)$  – прямая общего положения.

**Определить:**  $K = a \times \alpha(ABC)$ .

**Решение:**

1. Прямую заключить во вспомогательную плоскость частного положения:  $a \in \beta$ .
2. Определить линию  $l$  как линию пересечения вспомогательной и заданной плоскостей  $l = \alpha(ABC) \cap \beta$ .
3. Определить взаимное положение заданной прямой  $a$  и полученной прямой  $l$ . Поскольку прямые  $a$  и  $l$  лежат в одной плоскости, они могут пересекаться или быть параллельными. Точка пересечения  $K = a \times l$  и является искомой точкой пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha(ABC)$ . Если прямые  $a$  и  $l$  параллельны, то прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha(ABC)$ .

### Определение точки пересечения прямой $a(a_1, a_2)$ и плоскости $\alpha(ABC)$ на комплексном чертеже:

1. Заключить прямую  $a(a_1, a_2)$  во вспомогательную проецирующую плоскость  $\beta(\beta_2)$  (рис. 77).
2. Определить линию пересечения  $l$  ( $1-2$ ) вспомогательной плоскости  $\beta(\beta_2)$  и заданной плоскости  $\alpha(ABC)$ :

$$l = \alpha(ABC) \cap \beta(\beta_2); l_2 = \beta_2; l_1 = (1_1-2_2).$$

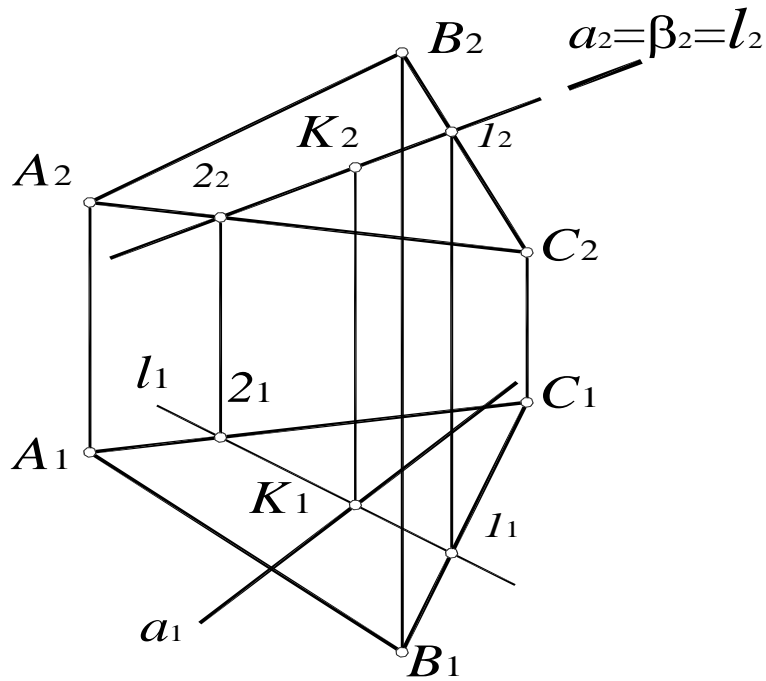


Рис. 77. Пересечение прямой  $a(a_1, a_2)$  и плоскости  $\alpha(ABC)$

3. Определить взаимное положение заданной прямой  $a$  и полученной прямой  $l$ . В данном случае, прямые  $a$  и  $l$  пересекаются в точке  $K$ , которая и является искомой точкой пересечения прямой  $a(a_1, a_2)$  и плоскости  $\alpha(ABC)$ :

$$l_1 \times a_1 = K_1; K_2 \in a_2; K = a(a_1, a_2) \times \alpha(ABC).$$

4. Считая плоскость непрозрачной, определить видимость прямой  $a(a_1, a_2)$  относительно плоскости  $\alpha(ABC)$  (рис. 78, 79).

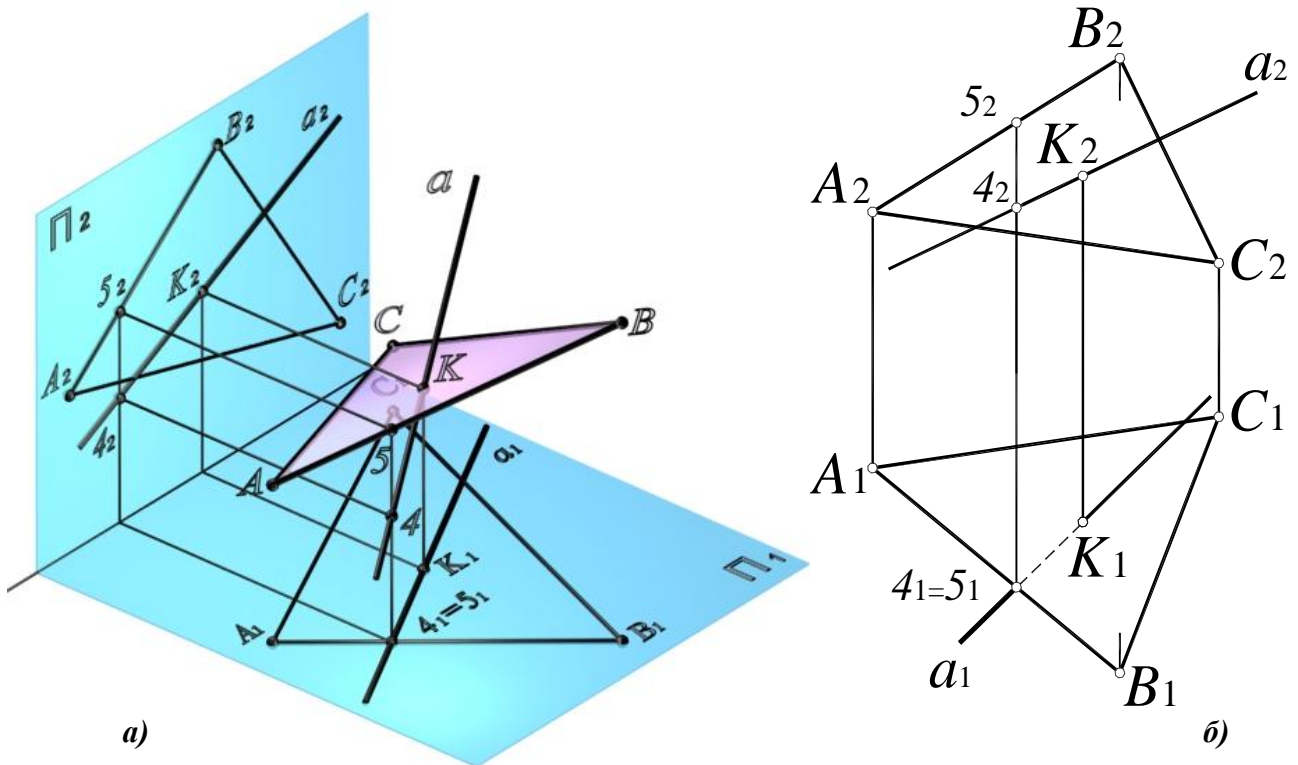


Рис. 78. Определение видимости относительно горизонтальной плоскости проекций:

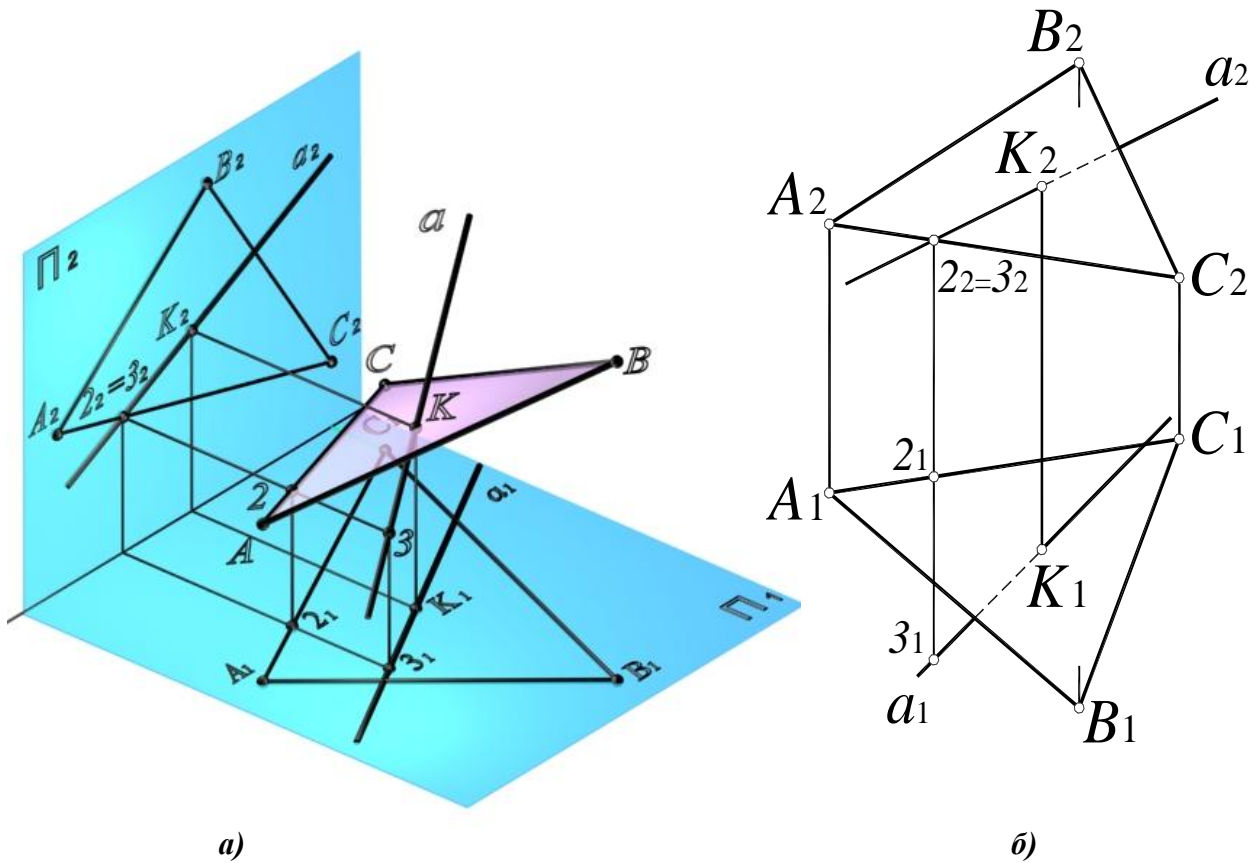
$a$  – наглядное изображение;

$b$  – комплексный чертёж



Для определения видимости относительно горизонтальной плоскости проекций необходимо найти конкурирующие точки – точки, горизонтальные проекции которых совпадают.

Прямые  $a$  и  $(AB)$  в пространстве являются скрещивающимися (точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи), поэтому для определения видимости прямой относительно плоскости достаточно определить видимость прямой  $a$  относительно прямой  $(AB)$  (рис. 78, а). Для этого рассмотрим две конкурирующие точки: 4 – на прямой  $a$  и 5 – на прямой  $(AB)$  (рис. 78, б). Высота точки 5 больше, следовательно, на  $\Pi_1$  видима прямая  $(AB)$ , то есть плоскость, а прямая  $a$  – невидима.



**Рис. 79. Определение видимости относительно фронтальной плоскости проекций:**

- $a$  – наглядное изображение;
- $b$  – комплексный чертеж

Видимость прямой  $a$  по отношению к плоскости  $\alpha(ABC)$  на фронтальной плоскости проекций (рис. 79) определяется с помощью конкурирующих точек 2 – на прямой  $(AC)$  и 3 – на прямой  $a$ . Глубина точки 3 больше, следовательно, видима будет прямая  $a$ .

## 8.9. Пересечение двух плоскостей общего положения. Вторая основная позиционная задача

Вторая позиционная задача – это задача об определении линии пересечения двух плоскостей. Наглядное изображение решения второй позиционной задачи показано на рис. 80.

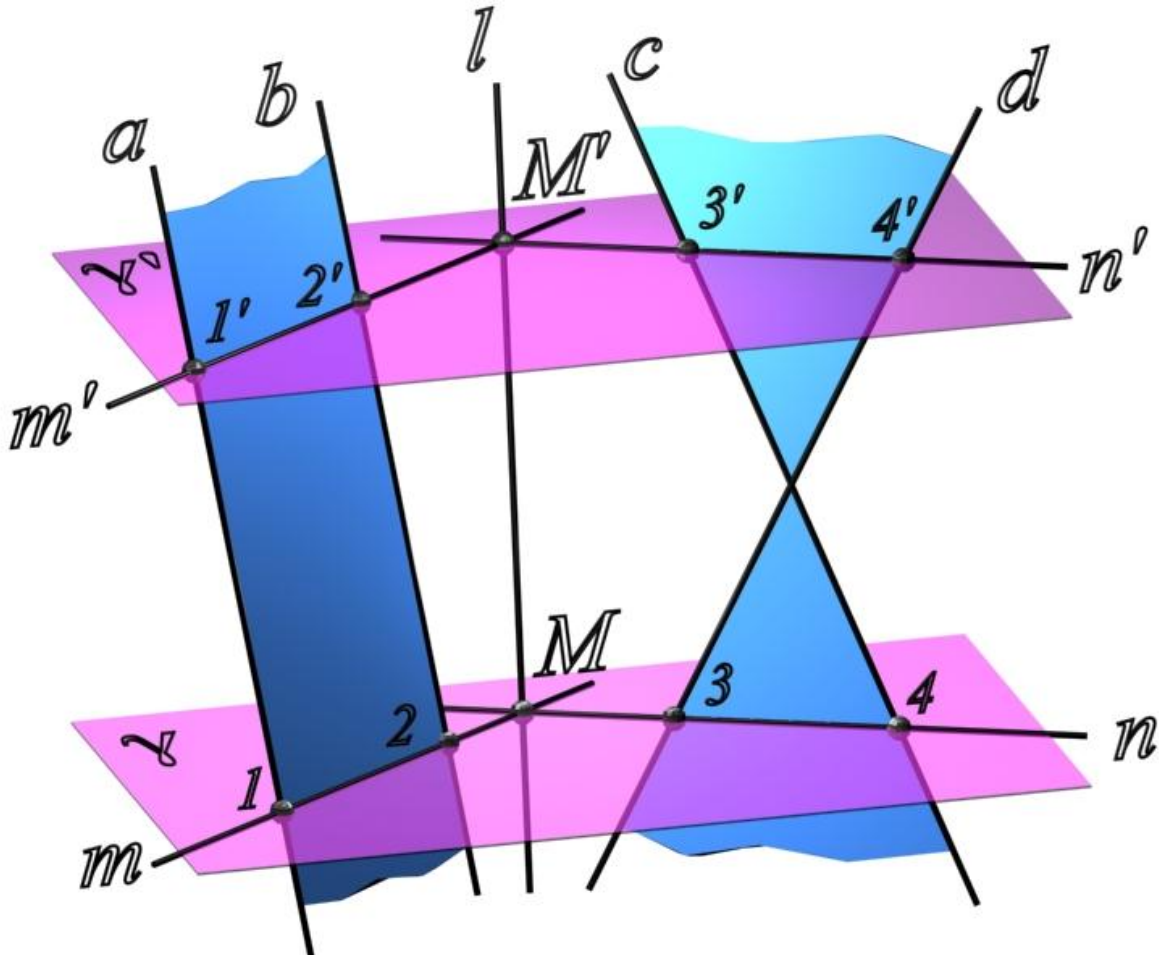


Рис. 80. Пересечение двух плоскостей общего положения

Алгоритм решения второй позиционной задачи состоит в следующем:

1. Заданные плоскости  $\alpha(a//b)$  и  $\beta(c \times d)$  пересечь вспомогательной плоскостью частного положения  $\gamma$ .

2. Определить линии пересечения  $m$  и  $n$  вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей:

$$\begin{aligned} \gamma \cap \alpha(a//b) &= m; \\ \gamma \cap \beta(c \times d) &= n. \end{aligned}$$

3. Определить точку  $M$  пересечения линий  $m$  и  $n$ . Точка  $M$  принадлежит прямой  $m$ , а, следовательно, и плоскости  $\alpha(a//b)$ . Точка  $M$  принадлежит прямой  $n$ , следовательно, и плоскости  $\beta(c \times d)$ . Таким образом, точка  $M$  принадлежит обеим плоскостям, то есть является одной из точек линии пересечения.

4. Вторую точку линии пересечения определяют аналогично, рассекая плоскости  $\alpha(a//b)$  и  $\beta(c \times d)$  вспомогательной плоскостью частного положения  $\gamma'$ .

**Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(c \times d)$  на комплексном чертеже:**

1. Пересечь данные плоскости вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью  $\gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2$  (рис. 81).

2. Определить линии пересечения вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей:

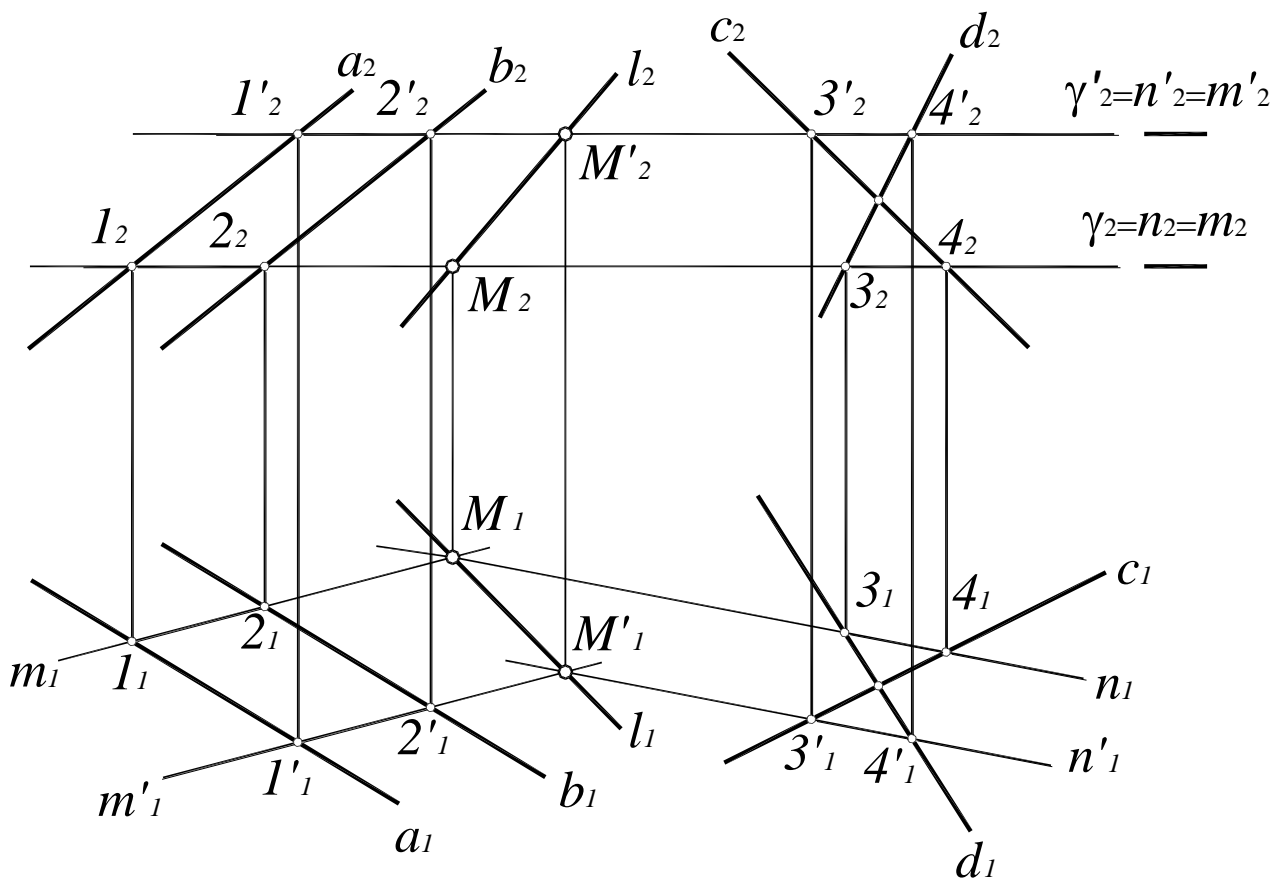
$$m = \gamma(\gamma_2) \cap \alpha(a||b); m_2 = \gamma_2; m_1 = a_1;$$

$$n = \gamma(\gamma_2) \cap \beta(c \times d); n_2 = \gamma_2; n_1 = \beta_1;$$

3. Определить точку пересечения прямых  $n$  и  $m$ :  $M = n \times m$ .

4. Точка  $M \subset m \Rightarrow M \subset \alpha(a||b)$ ;  $M \subset n \Rightarrow M \subset \beta(c \times d)$  таким образом, точка  $M$  является одной из точек искомой линии пересечения плоскостей.

5. Точка  $M'$  определяется аналогично, с помощью второй вспомогательной плоскости  $\gamma'(\gamma'_2)$ .



**Рис. 81. Вторая позиционная задача**

6. Через полученные точки  $M$  и  $M'$  провести прямую  $l$ . Прямая  $l$  – искомая линия пересечения плоскостей  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(c \times d)$ .

## 8.10. Сечение поверхности плоскостью

В сечении поверхности плоскостью получается плоская кривая линия, которую строят по отдельным точкам. Сначала строят опорные точки – точки смены видимости и экстремальные (крайние). Точки смены видимости принадлежат очерковым образующим поверхности. Экстремальными точками являются: самая близкая и самая удаленная, высшая и низшая и т. д. относительно плоскостей проекций.

Если проекция линии пересечения этими точками не определяется полностью, то строят дополнительные, промежуточные между опорными, точки. При построении сечений секущая плоскость обычно считается прозрачной и определяется только видимостью поверхности и линии сечения.

## 8.11. Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности. Для построения точек на поверхности или определения недостающих проекций строится сечение поверхности вспомогательной плоскостью. Вспомогательная плоскость выбирается таким образом, чтобы в сечении получались простые линии – прямые или окружности. Кроме того, окружность в сечении должна проецироваться на одну из плоскостей проекций без искажения.

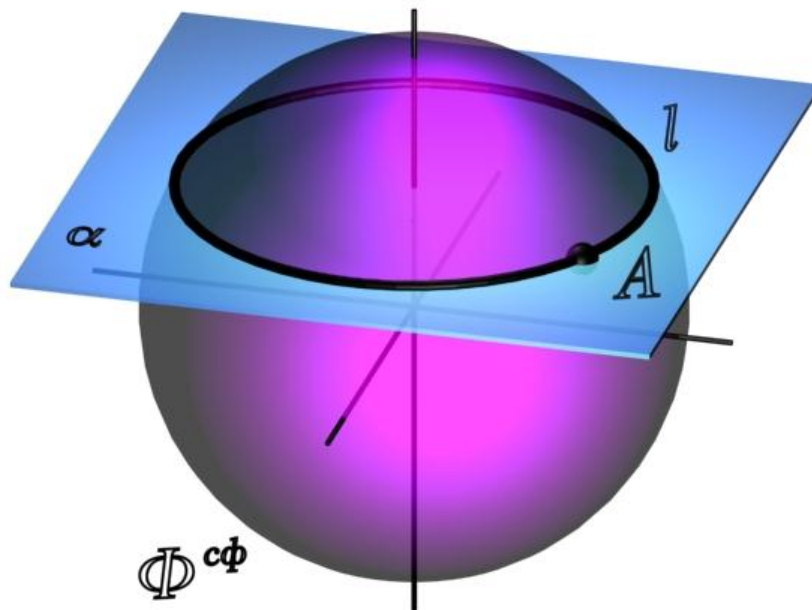


Рис. 82. Точка на поверхности сферы

$$l \in \Phi_{сф};$$
$$A \in l \Rightarrow A \in \Phi_{сф}$$

Любая плоскость пересекает поверхность сферы по окружности (рис. 82), но без искажения на соответствующую плоскость проекций проецируются только окружности, лежащие в плоскостях уровня. Таким образом, для построения точки на поверхности сферы в качестве вспомогательных плоскостей используются только плоскости уровня.

На поверхности конуса можно получить как окружности, так и прямые линии.

Для построения горизонтальной проекции точки  $A$  на поверхности конуса (рис. 83, 84), конус пересекается горизонтальной плоскостью уровня  $\alpha(\alpha_2)$ , проходящей через точку  $A$ .

В сечении конуса получается окружность радиуса  $r$ , которая проецируется на  $\Pi_1$  без искажения – как окружность  $l_1$  с центром в точке  $O_1$  радиусом  $r_1=r$ . Фронтальная проекция окружности –  $l_2$  представляет собой отрезок  $[1_2 2_2]$ .

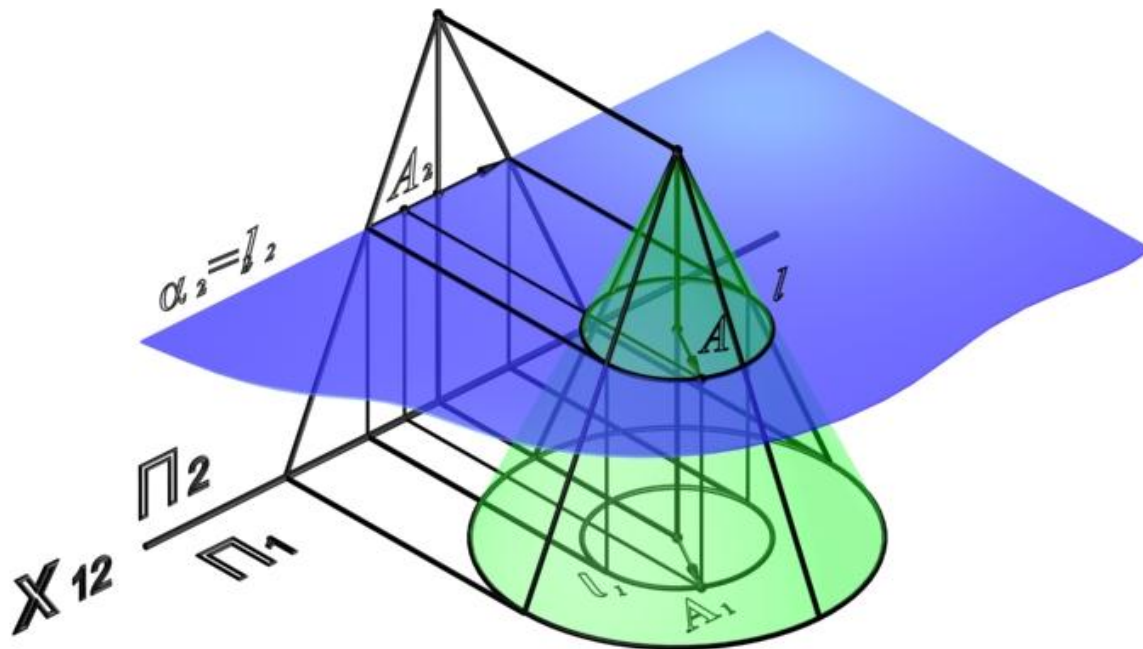


Рис. 83. Точка на поверхности конуса

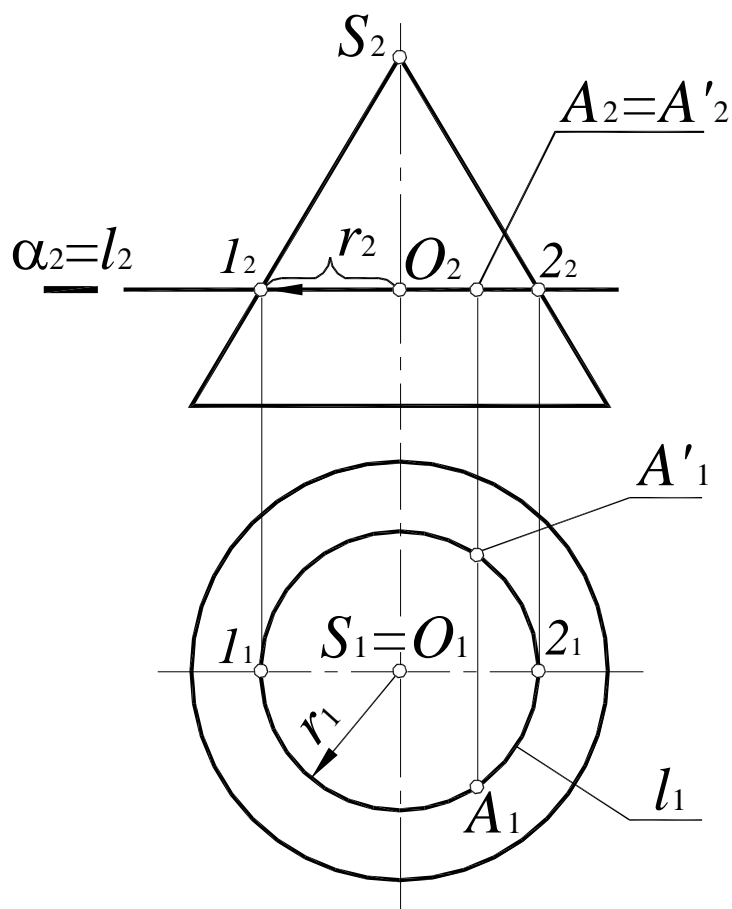


Рис. 84. Построение точки на поверхности конуса

Горизонтальная проекция точки  $A$  строится на пересечении вертикальной линии связи ( $A_2 A_1$ ) и окружности  $l_1$ . При этом фронтальной проекции  $A_2$  могут соответствовать две точки –  $A$  и  $A'$ .

Поскольку любая плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его по двум пересекающимся прямым, вспомогательную плоскость можно задать точкой  $A$  и осью вращения конуса (рис. 85).

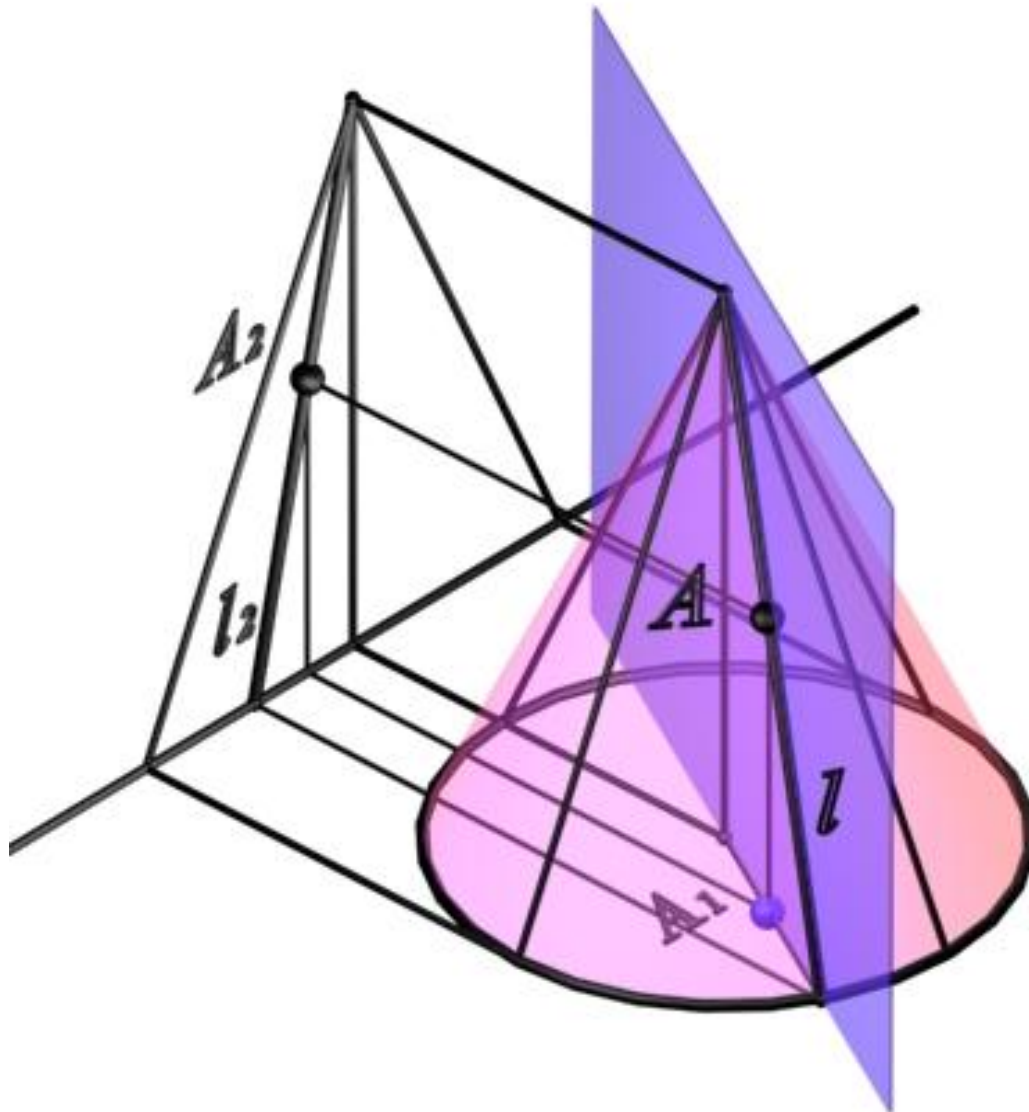
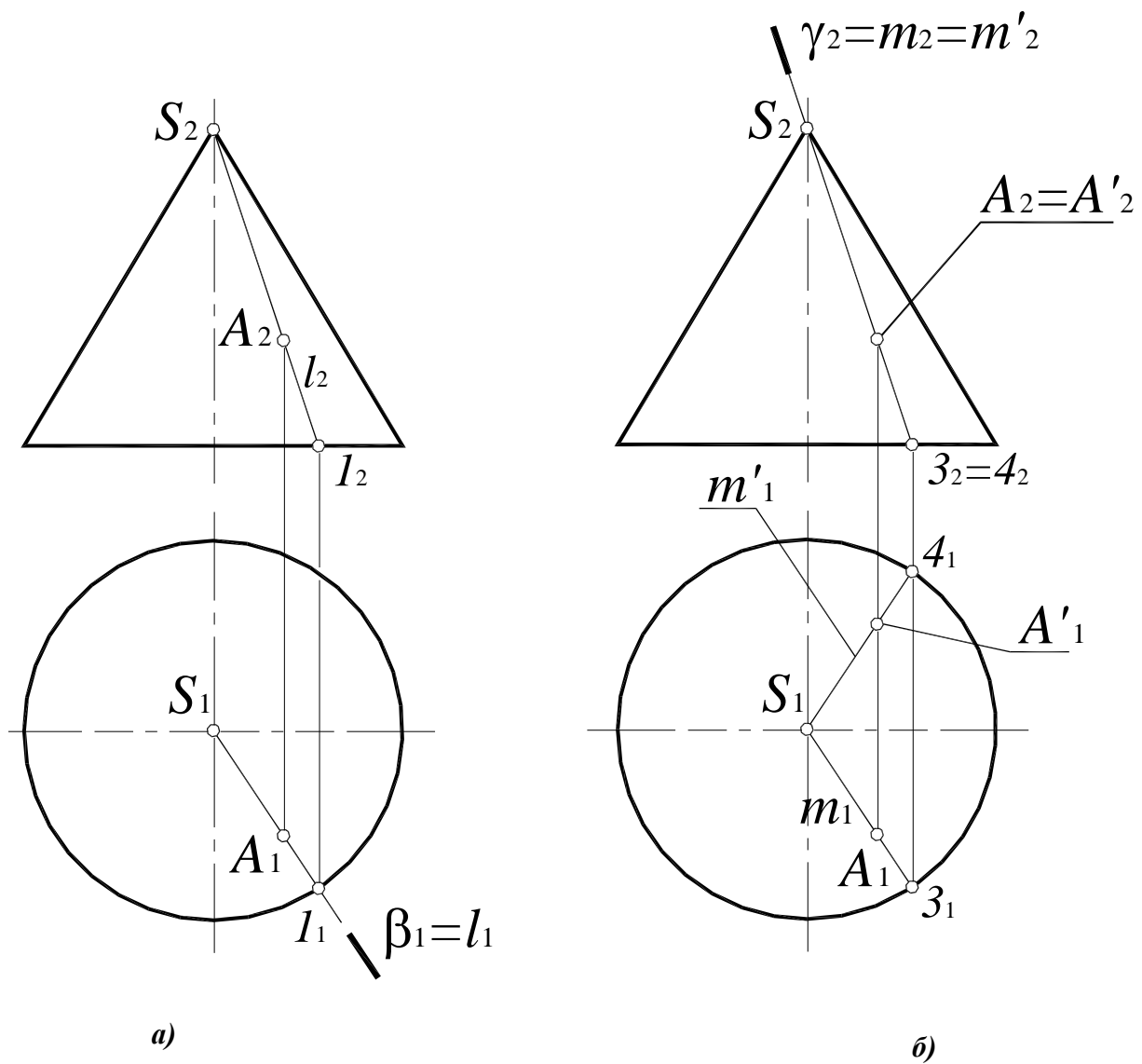


Рис. 85. Точка на поверхности конуса

Если необходимо определить фронтальную проекцию точки  $A$ , принадлежащей поверхности конуса (рис. 86,  $a$ ), конус пересекается вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскостью  $\beta(A, i)$ , проходящей через ось вращения конуса и искомую точку. Плоскость  $\beta(A, i)$  пересекает основание конуса в точке  $I$ . Вершина конуса  $S$  и точка  $I$  определяют образующую конуса  $l$ , проходящую через точку  $A$ :

$$l_1 = \beta_1, l_2 = (S, I_2); A_2 \in l_2.$$



**Рис. 86. Построение точки на поверхности конуса:**

*a* – определение фронтальной проекции;  
*б* – определение горизонтальной проекции

Если необходимо определить горизонтальную проекцию точки  $A$ , принадлежащей поверхности конуса (рис. 86, *б*), конус пересекается вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью  $\gamma(\gamma_2) \in S$ . Плоскость  $\gamma(\gamma_2)$  пересекает основание конуса в точках 3 и 4. Вершина конуса  $S$  и точка 3 определяют образующую конуса  $m$ , проходящую через точку  $A$ :

$$m_2 = \gamma_2, m_1 = (S_1, 3_1); A_1 \in m_1;$$

$$m'_2 = \gamma_2, m'_1 = (S_1, 3_1); A'_1 \in m'_1.$$

Таким образом, данной фронтальной проекции точки  $A_2$  могут соответствовать две точки –  $A$  и  $A'$ .

## 8.12. Сечение многогранника плоскостью частного положения

При пересечении гранной поверхности с плоскостью получается ломаная линия. Для ее построения достаточно определить точки пересечения ребер многогранника и секущей плоскости и соединить построенные точки с учетом их видимости (рис. 87).

Секущая плоскость  $\beta(\beta_2)$  занимает фронтально проецирующее положение, поэтому точки пересечения ребер определяются как точки пересечения прямой общего положения и плоскости частного положения.

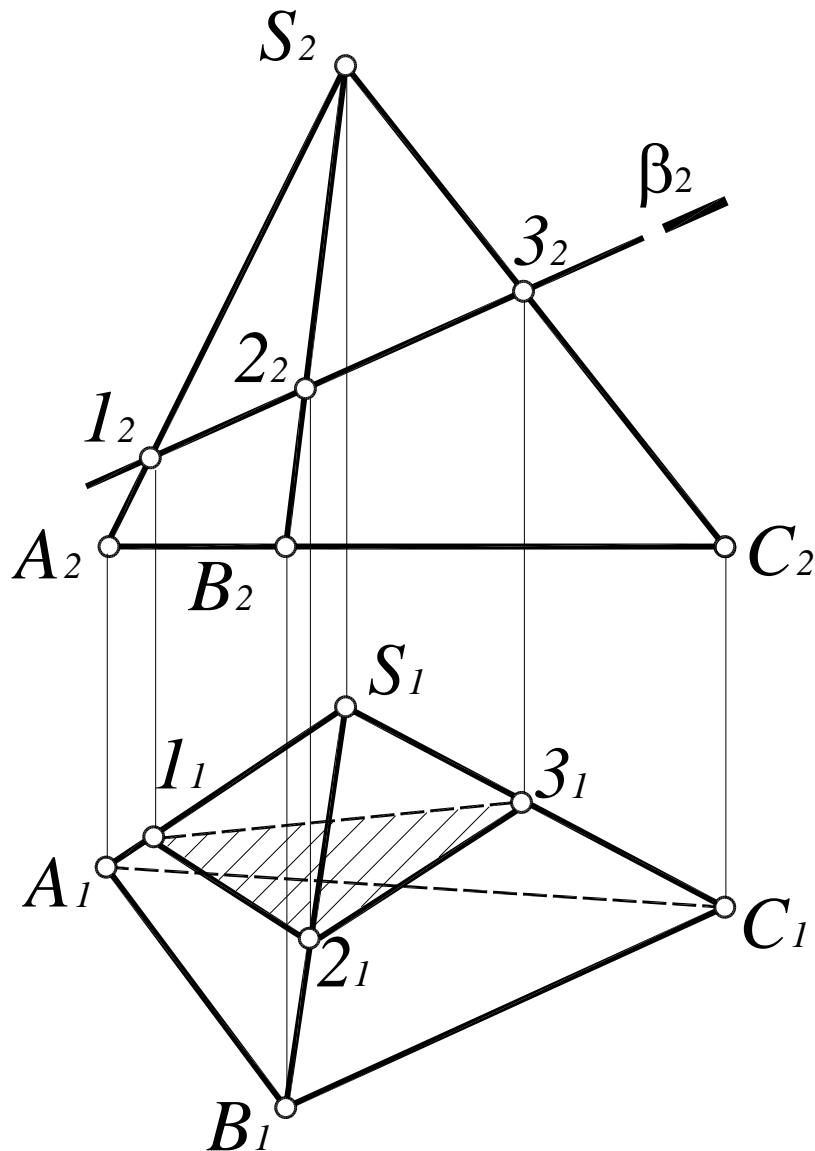


Рис. 87. Сечение многогранника плоскостью частного положения:

$$AS \cap \beta = 1(1_2, 1_1);$$

$$BS \cap \beta = 2(2_2, 2_1);$$

$$CS \cap \beta = 3(3_2, 3_1)$$

Видимость определяется методом конкурирующих точек. Грань  $ACS$  относительно плоскости  $\Pi_1$  невидима, следовательно, и линия  $(1_1-3_1)$  также невидима. Видимость на  $\Pi_2$ , в данном случае, не определяется.





2. Поскольку основание призмы ограничено треугольником  $ABC$ , точки пересечения полученной линии со сторонами треугольника являются искомыми точками сечения:

$$AC \times n = I; AB \times n = II.$$

3. Точка III определяется как точка пересечения ребра  $AA'$  с плоскостью общего положения  $\alpha(a \times l)$  (первая позиционная задача):

$$\begin{aligned} AA' &\in \gamma(\gamma_2); \\ \gamma(\gamma_2) \cap \alpha(a \times l) &= m; m_2 = \gamma_2; m_1 = (3_1, 4_1); \\ AA' \times m &= III. \end{aligned}$$

Точки пересечения прямых  $(BB')$  и  $(CC')$  находятся за пределами ребер призмы, поэтому построения этих точек не показаны.

4. Сечение данной призмы плоскостью  $\alpha(a \times l)$  представляет собой треугольник I, II, III. Видимость сечения определяется в соответствии с видимостью граней призмы.

#### 8.14. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности закрытого тора с фронтально-проецирующей плоскостью  $\mu(\mu_2)$  (рис. 89). Сначала определяются опорные точки: 1 и 2 – точки пересечения плоскости  $\mu(\mu_2)$  с плоскостью основания тора, точка 3 – точка пересечения плоскости  $\mu(\mu_2)$  с очерковой образующей тора.

Промежуточные точки 4 и 5 строятся при помощи вспомогательной плоскости уровня  $\gamma(\gamma_2)$ , которая пересекает поверхность тора по линии:

$$l = \Phi^m \cap \gamma(\gamma_2), l_2 = \gamma_2; l - \text{окружность радиуса } r,$$

а плоскость  $\mu(\mu_2)$  – по фронтально-проецирующей прямой:

$$p = \mu(\mu_2) \cap \gamma(\gamma_2); p \perp \Pi_2; l \times p = 4, 5.$$

Точки 4 и 5 пересечения полученных линий принадлежат секущей плоскости  $\mu(\mu_2)$  и линии  $l$  поверхности тора, то есть принадлежат плоскости и поверхности одновременно, а следовательно, являются точками искомой линии пересечения  $m$ .

Точки 6, 7, 8 и 9 определяются аналогично. Полученные точки соединяют плавной лекальной кривой и определяют видимость линии пересечения  $m$  относительно поверхности.

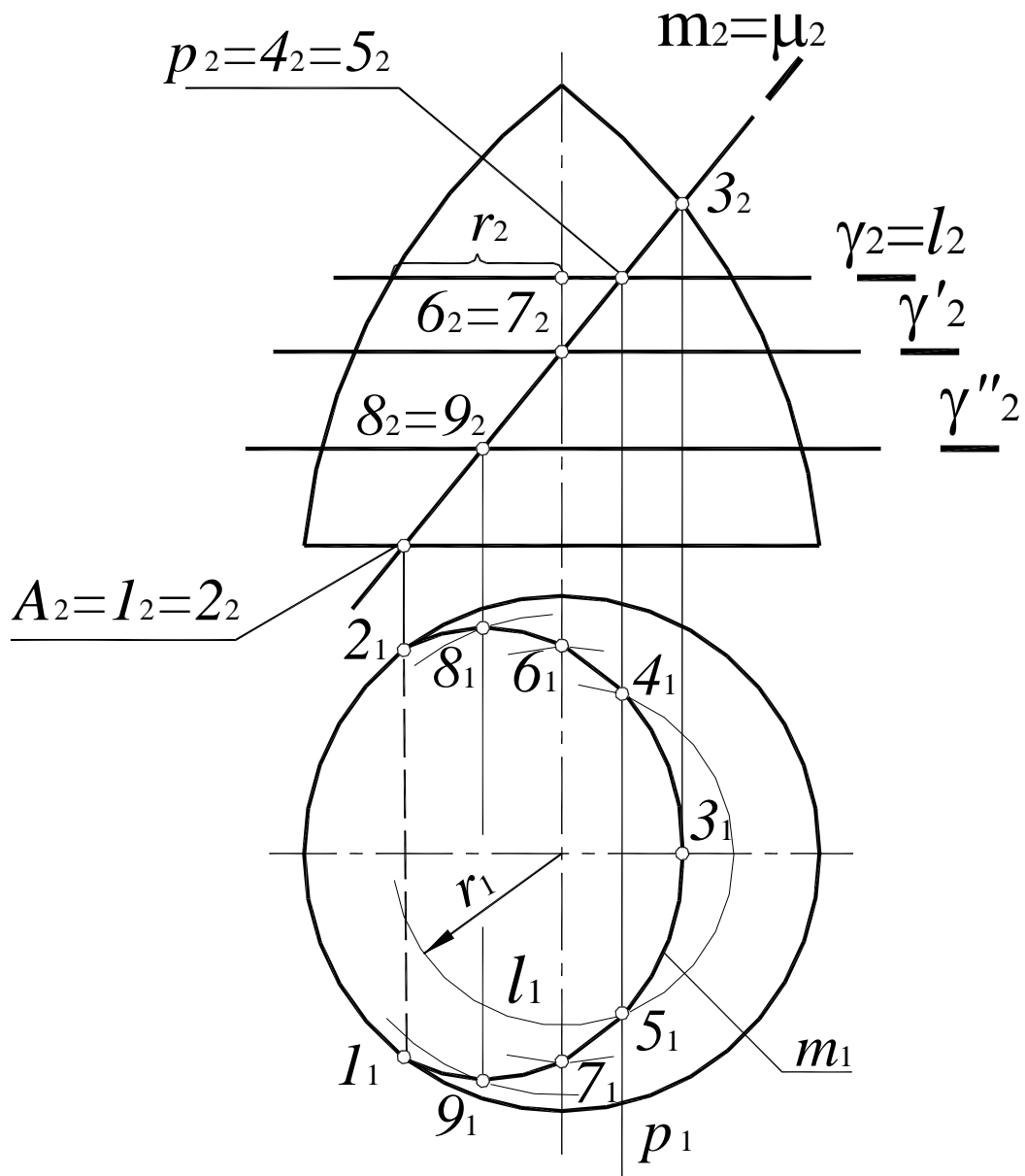


Рис. 89. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения

1.  $\gamma(\gamma_2) \cap \Phi^T = l$ ;  $l_2 = \gamma_2$ ,  
 $l_1$  – окружность радиуса  $r$ ;
2.  $\gamma(\gamma_2) \cap \mu(\mu_2) = p$ ,  
 $p \perp \Pi_2$ ;
3.  $p_1 \times l_1 = 4_1, 5_1$

При построении сечений поверхности плоскостью общего положения выполняют такое преобразование комплексного чертежа, при котором плоскость займет частное положение.

## 8.15. Цилиндрические сечения

В сечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии:

**Окружность**, если секущая плоскость  $\delta(\delta_2)$  перпендикулярна оси вращения цилиндра (рис. 90);

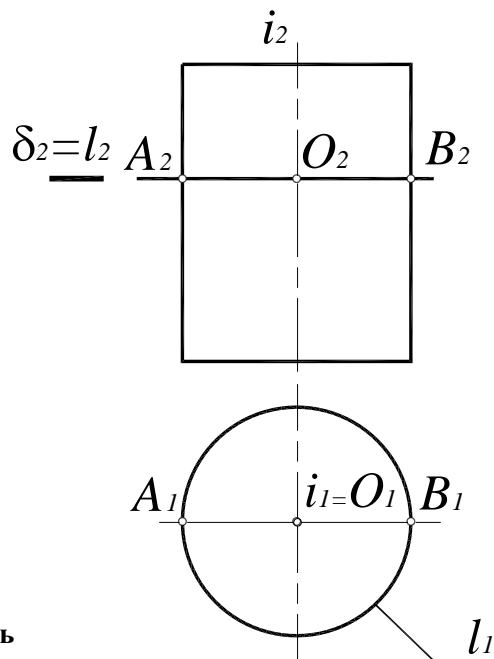
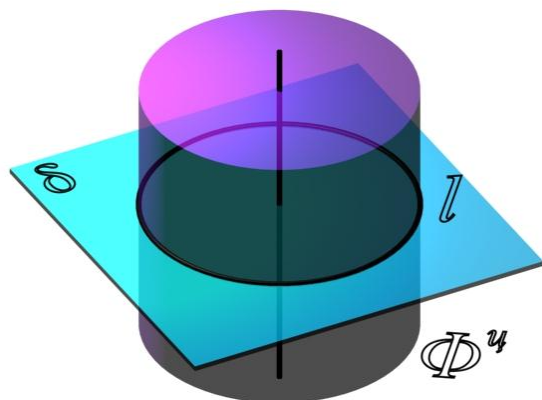


Рис. 90. Окружность

**Эллипс**, если секущая плоскость  $\alpha(\alpha_2)$  наклонена под произвольным углом к оси цилиндра (рис. 91);

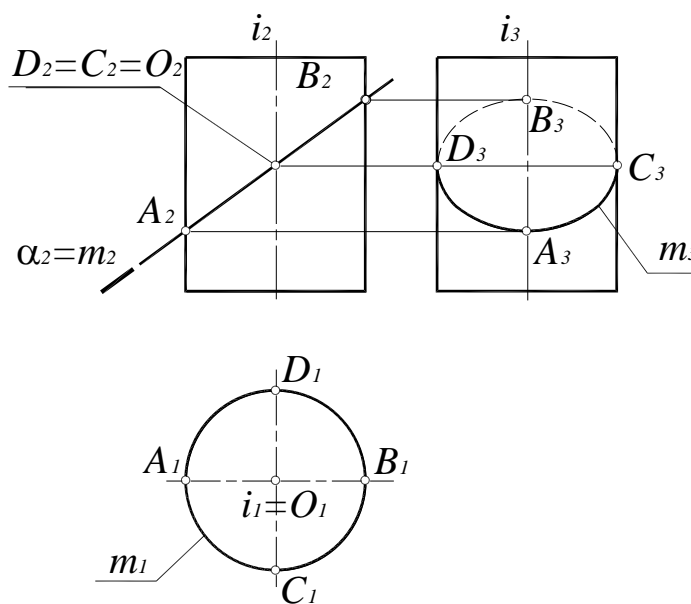
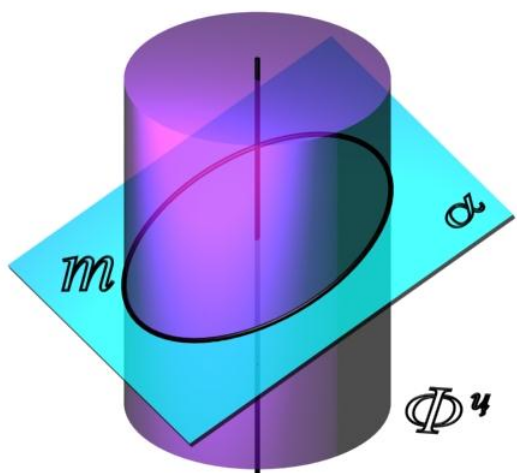


Рис. 91. Эллипс

Две параллельные прямые (образующие), если секущая плоскость  $v(v_2)$  параллельна оси цилиндра (рис. 92).

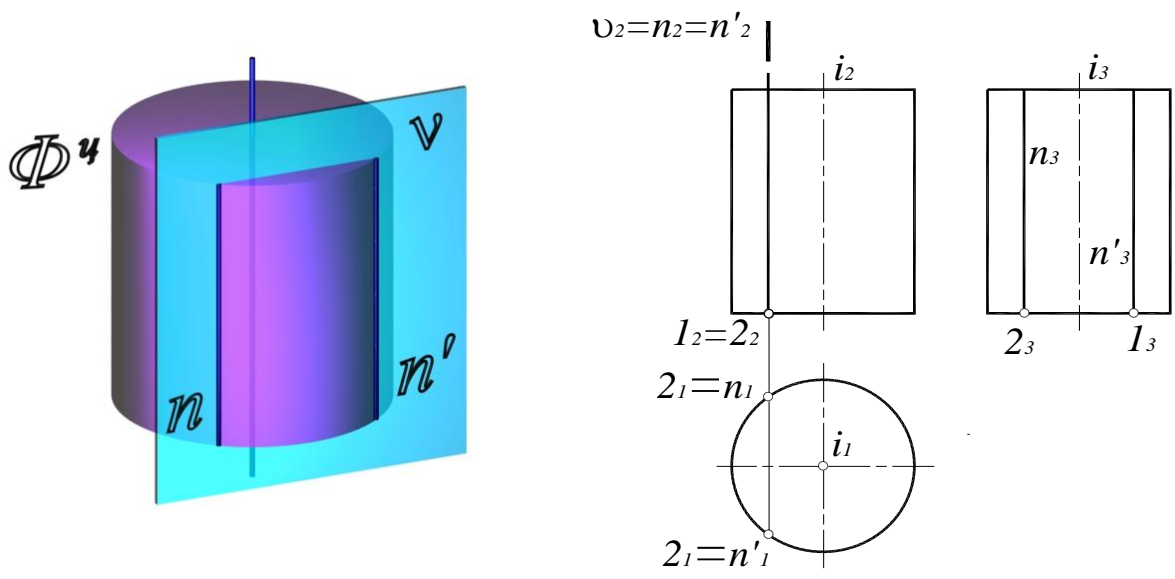


Рис. 92. Параллельные прямые

На плоскость, перпендикулярную оси вращения поверхности, окружность и эллипс на поверхности цилиндра проецируются в окружность, совпадающую с проекцией всей поверхности.

### 8.16. Конические сечения

Кривые линии, которые получаются в сечении прямого кругового конуса плоскостью, называются коническими сечениями. В зависимости от положения секущей плоскости по отношению к конической поверхности образуются следующие линии:

**Окружность**, если секущая плоскость  $\eta(\eta_2)$  перпендикулярна оси вращения конуса  $i$  (рис. 93).

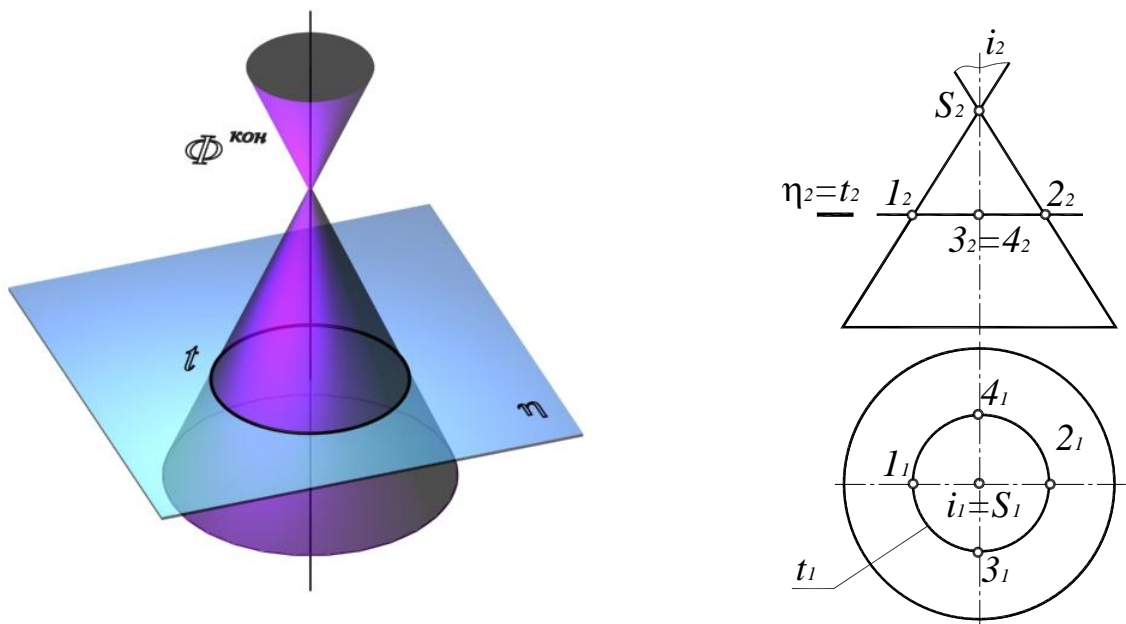
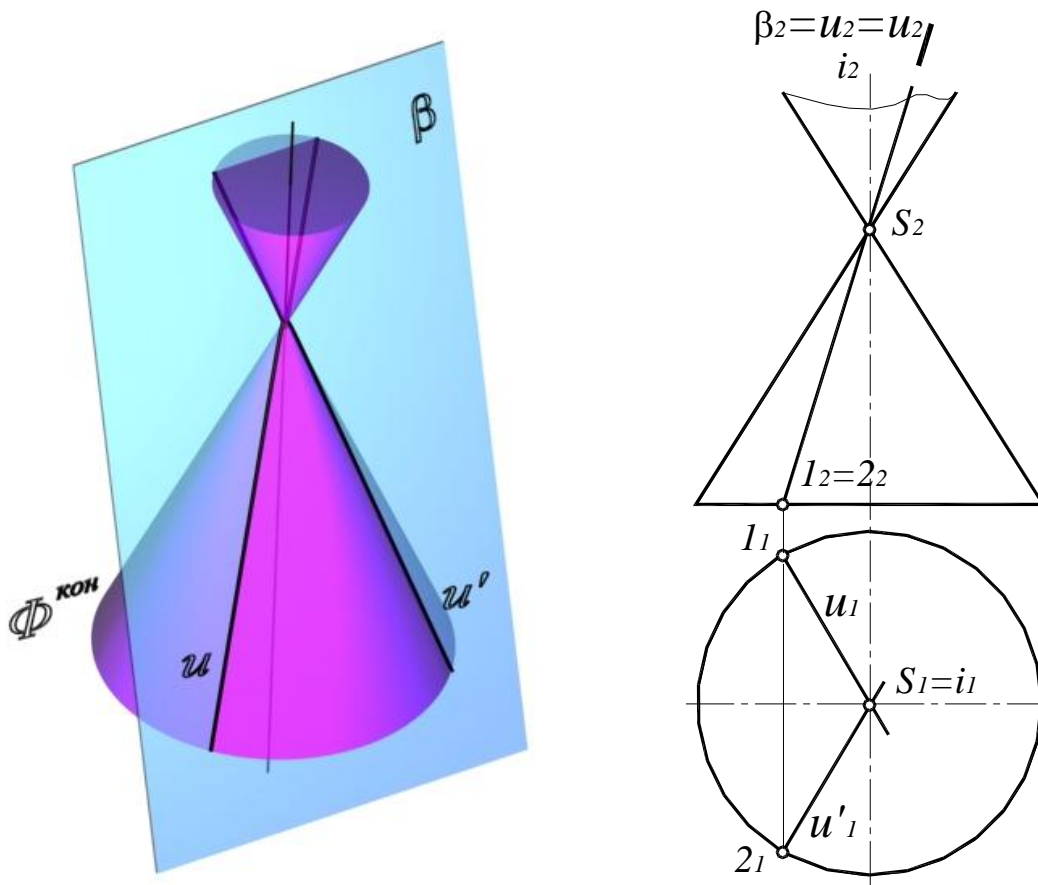


Рис. 93. Окружность

*Две пересекающиеся прямые*, если секущая плоскость  $\beta(\beta_2)$  проходит через вершину поверхности конуса (рис. 94).



**Рис. 94. Пересекающиеся прямые**

*Эллипс* (рис. 95), если секущая плоскость  $\mu(\mu_2)$  пересекает все образующие, расположенные по одну сторону от вершины конуса.

Точки  $A$  и  $B$  являются опорными и не требуют дополнительных построений (см. рис. 95.). Отрезок  $[AB]$  определяет большую ось эллипса. Для определения малой оси отрезок  $[A_2B_2]$  делят пополам. Так получается центр эллипса – точка  $O$ . Затем через точку  $O$  проводят вспомогательную плоскость  $\sigma(\sigma_2)$ , которая пересекает поверхность конуса по окружности:

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma_2) \cap \Phi^k &= l; l_2 = \sigma_2; l_1 - \text{окружность}; \\ \sigma(\sigma_2) \cap \mu(\mu_2) &= m; m \perp \text{П}\sigma_2; \\ m_1 \times l_1 &= C_1D_1; [C_1D_1] - \text{малая ось эллипса.} \end{aligned}$$

Для построения фокуса проводят биссектрису угла  $\angle S_2B_2A_2$ , между образующей конуса и следом секущей плоскости  $\mu_2$  до пересечения с осью конуса. Из полученной точки опускают перпендикуляр на след плоскости  $\mu_2$ . Эта точка  $F$  и является фокусом. Из точки  $A_2$  откладывают расстояние  $AF' = FB$ .

Свойство эллипса: *сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равна большой оси эллипса  $AB = FP + F'P$ .*

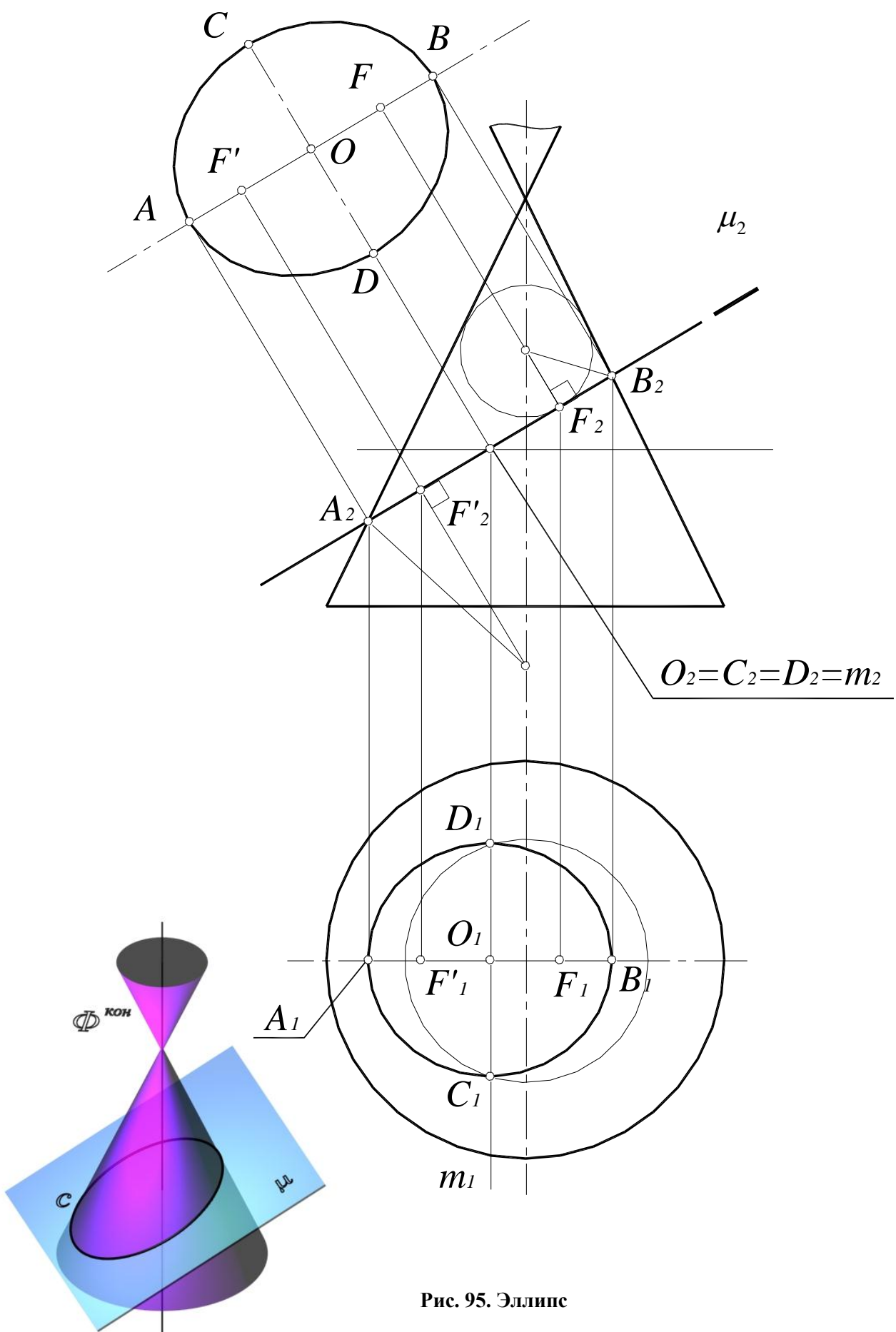
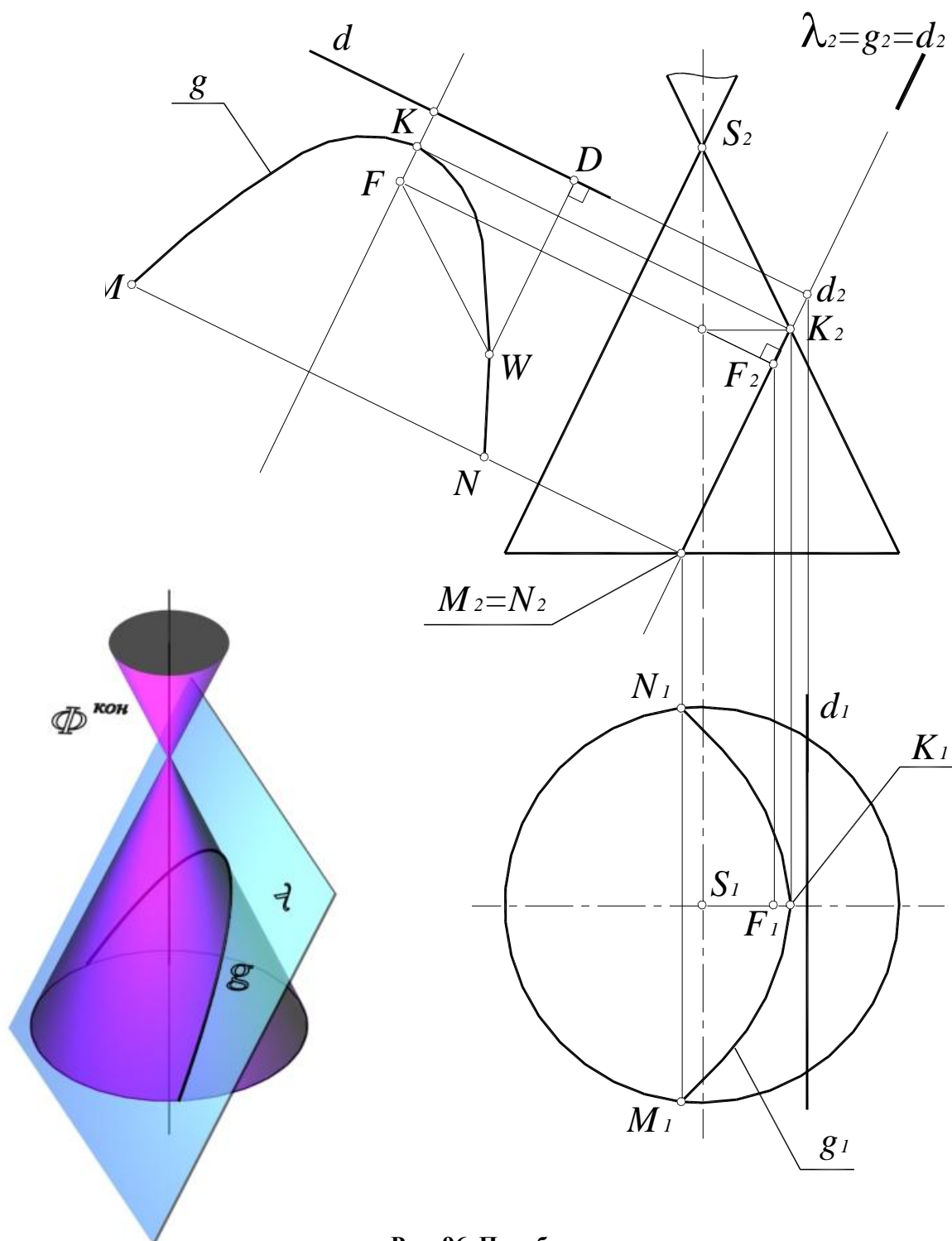


Рис. 95. Эллипс

**Парабола** (рис. 96), если секущая плоскость  $\lambda(\lambda_2)$  параллельна одной из образующих поверхности конуса.



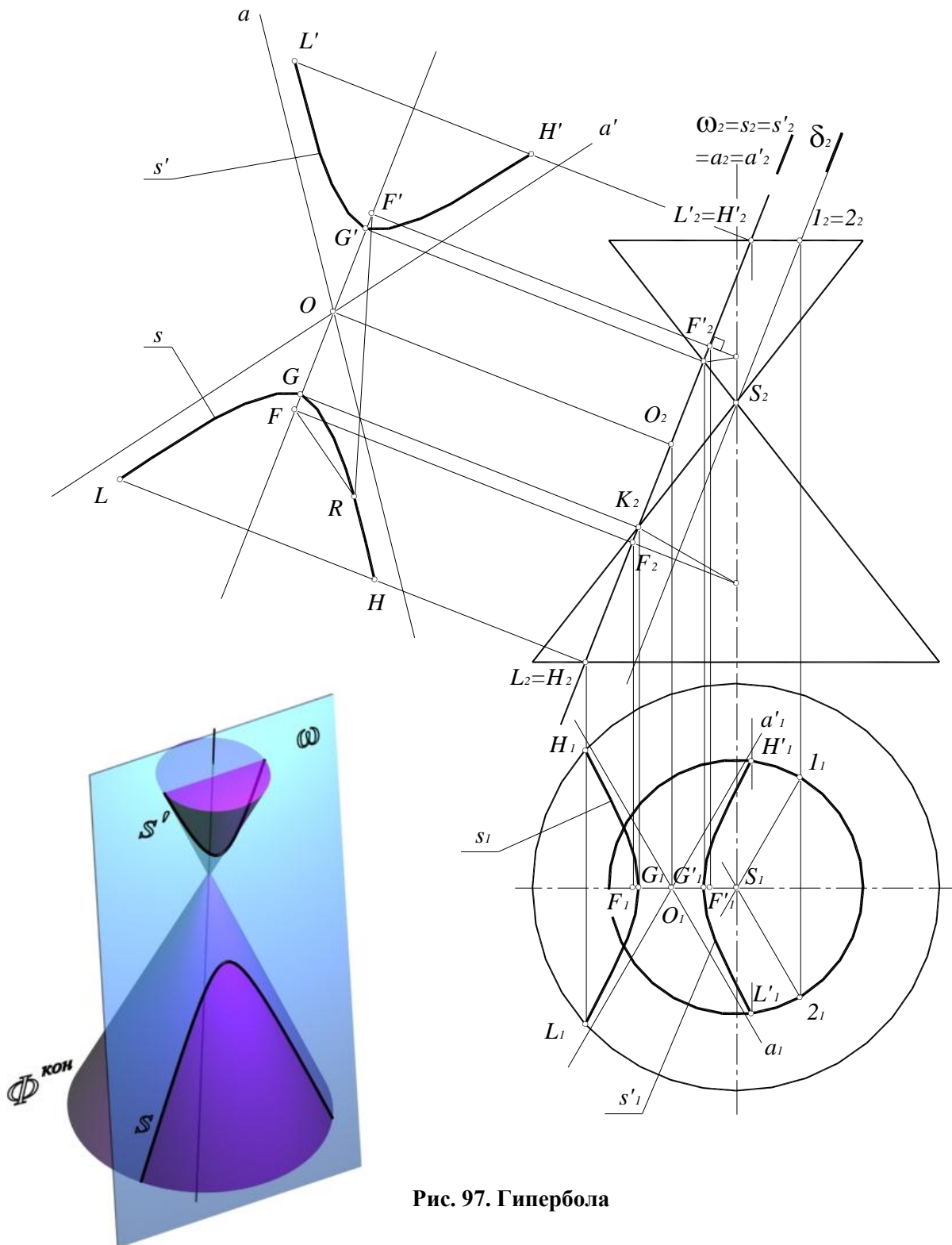
**Рис. 96. Парабола**

Точка  $K$  – вершина параболы (см. рис. 96). Точки  $N$  и  $M$  лежат на основании. Фокус параболы строится при проведении биссектрисы угла  $\angle S_2K_2M_2$  и перпендикуляра на секущую плоскость  $\lambda(\lambda_2)$ .  $F_2K_2=K_2d_2$ ,  $d$  – директриса,  $d \perp \lambda(\lambda_2)$ .

Свойство параболы: *расстояние от любой точки параболы до ее фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы  $WD=WF$ .*



**Гипербола** (рис. 97), если секущая плоскость  $\omega(\omega_2)$  пересекает обе половины поверхности конуса.



**Рис. 97. Гипербола**

При пересечении конуса образуются две части гиперболы  $s$  и  $s'$ .  $G$  и  $G'$  – вершины гиперболы,  $F(F_1, F_2)$  и  $F'(F'_1, F'_2)$  – фокусы гиперболы,  $O(O_1, O_2)$  – центр гиперболы,  $a$  и  $a'$  – асимптоты гиперболы, получающиеся как прямые, параллельные образующим конуса  $S1$  и  $S2$ , полученным при рассечении его плоскостью  $\delta(\delta_2)$ , параллельной плоскости  $\omega(\omega_2)$ .

Свойство гиперболы: *разность расстояний от любой точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная расстоянию между вершинами гиперболы  $RF - RF' = GG'$ .*

## 8.17. Пересечение прямой с поверхностью

Прямая по отношению к поверхности может занимать следующие положения:

- прямая касается поверхности (одна общая точка);
- прямая пересекает поверхность (две и более общих точек);
- прямая не пересекает и не касается поверхности (общих точек нет).

Алгоритм решения задач об определении взаимного положения поверхности и прямой аналогичен решению первой позиционной задачи (рис. 98):

1. Прямая заключается во вспомогательную плоскость частного положения.
2. Определяется линия пересечения вспомогательной плоскости и заданной поверхности, то есть, строится сечение поверхности вспомогательной плоскостью.
3. Определяется взаимное положение полученной линии (сечения) и заданной прямой. Точки пересечения являются искомыми точками пересечения прямой с поверхностью.
4. Определяется видимость прямой относительно поверхности.

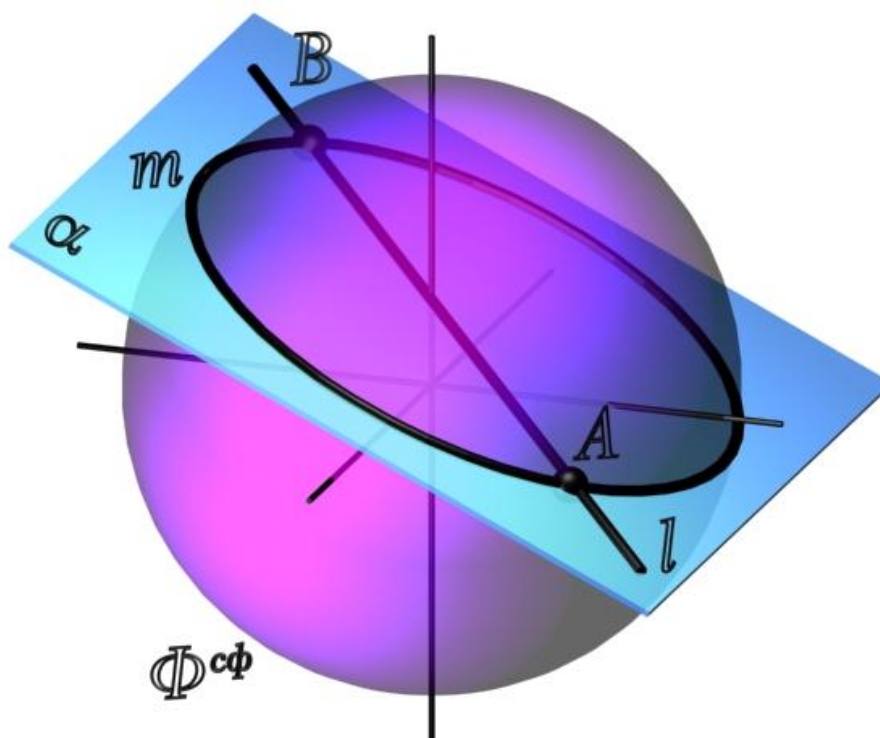


Рис. 98. Пересечение прямой с поверхностью

Для построения точки пересечения поверхности сферы с горизонталью (рис. 99), горизонталь заключают во вспомогательную горизонтальную плоскость уровня  $\gamma(\gamma_2)$ .

Сечение сферы горизонтальной плоскостью уровня представляет собой окружность  $l$  с центром в точке  $O_2$  и радиусом  $r = O_2 l_2$ , которая проецируется на  $\Pi_1$  без искажения. Затем определяются точки пересечения окружности  $l_1$  и заданной горизонтали  $h_1$ :

$$h_1 \times l_1 = A_1, B_1; A_2, B_2 \in h_2.$$

Далее следует определить видимость прямой: между точками  $A$  и  $B$  прямая невидима на обеих проекциях, поскольку находится внутри сферы, фронтальная проекция горизонтали находится выше фронтальной проекции очерковой образующей сферы, поэтому горизонталь на  $\Pi_1$  видима; точка  $A$  имеет большую глубину, чем очерковая образующая сферы, поэтому на фронтальной проекции горизонталь видима до точки  $A$ , а за точкой  $B$  – невидима.

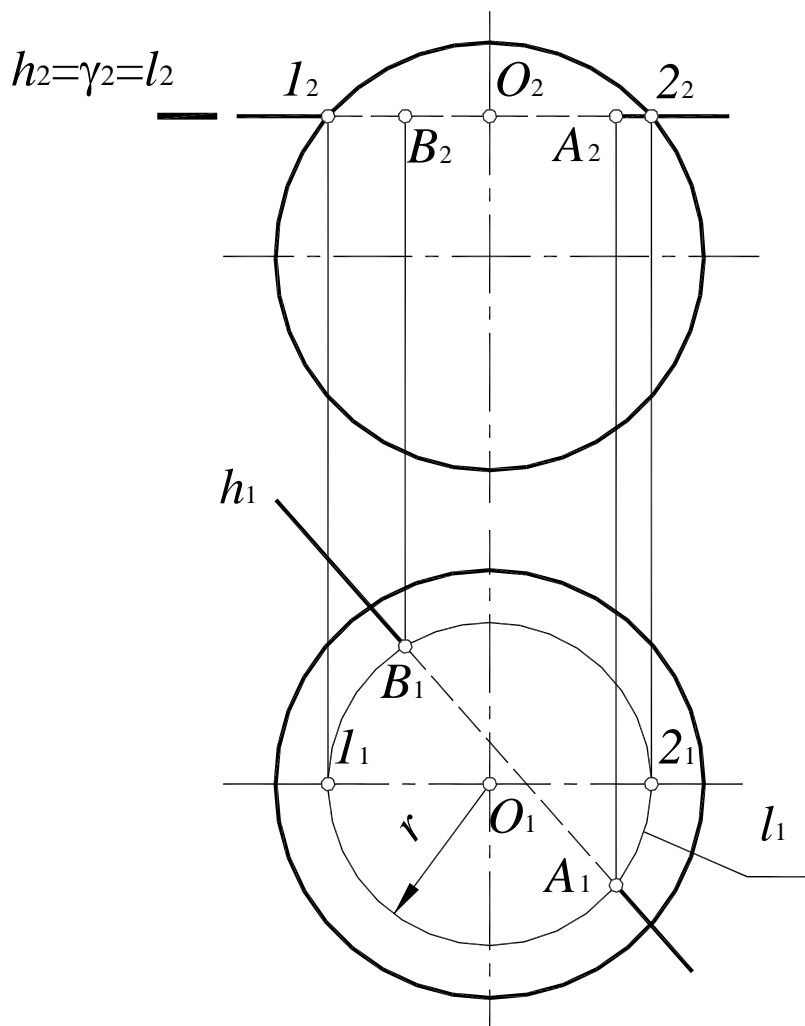


Рис. 99. Пересечение прямой с поверхностью сферы

Для построения точки пересечения поверхности закрытого тора с прямой общего положения (рис. 100), прямую заключают во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость  $\delta(\delta_2)$ . Далее строится сечение тора плоскостью  $\delta(\delta_2)$ :

Точки  $1$  и  $2$  – точки пересечения с основанием и точка  $3$  – опорные точки на очерковой образующей определяются без дополнительных построений;

Точки  $4$  и  $5$  также опорные (лежат на образующих, проекции которых совпадают с осью тора). Точки  $4$  и  $5$  определяются как точки на поверхности тора с помощью вспомогательной плоскости  $\gamma'$ .

Промежуточные точки 6,7,8,9 определяются аналогично.

Полученные точки соединяются плавной лекальной кривой  $m$ . Линия  $m$  – сечение тора плоскостью  $\delta(\delta_2)$ . Затем определяют точки  $A$  и  $B$  пересечения полученной линии  $m$  с прямой  $a$  и определяют видимость. Точки  $A$  и  $B$  – искомые точки пересечения прямой с поверхностью тора.

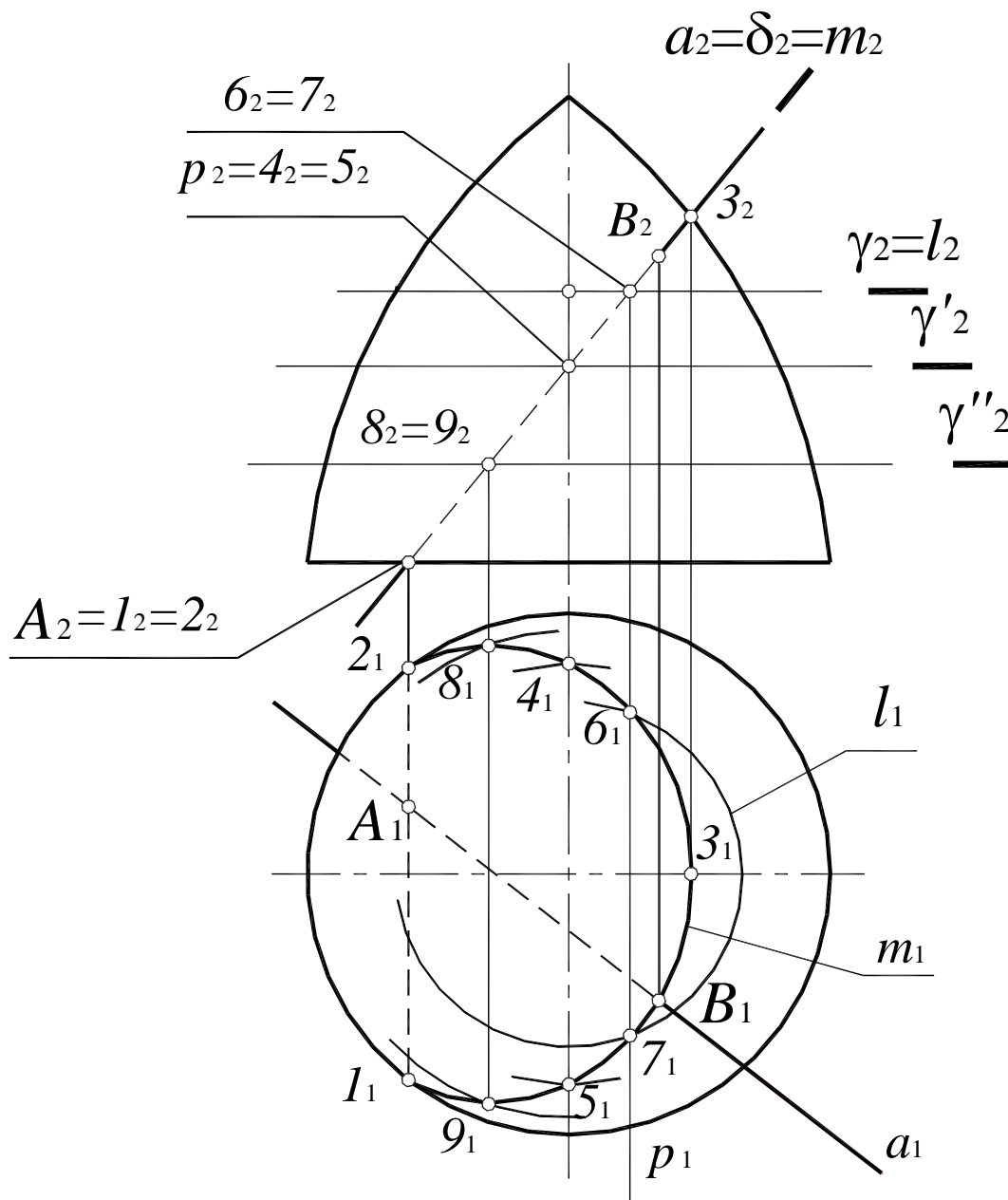


Рис. 100. Пересечение прямой общего положения с поверхностью тора

1.  $a(a_1, a_2) \in \delta(\delta_2)$ ;
2.  $m = \delta(\delta_2) \cap \Phi^m$ ;  
 $\gamma(\gamma_2)$  – вспомогательная плоскость;  
 $\gamma(\gamma_2) \cap \Phi^m = l$ ;  $l_2 = \gamma_2$ ,  $l_1$  – окружность;  
 $\gamma(\gamma_2) \cap \delta(\delta_2) = p$ ;  $p \perp \Pi_2$ ;  
 $l \times p = 6, 7$  – промежуточные точки сечения  $m$ ;  
 $m \times a = A, B$  – искомые точки пересечения прямой с поверхностью тора;
3. Определить видимость прямой относительно поверхности тора.

## 9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Алгоритм решения задач по определению линии пересечения поверхностей  $\Phi'$  и  $\Phi''$  (рис. 101) в целом аналогичен решению второй позиционной задачи и состоит в следующем:

1. Обе заданные поверхности  $\Phi'$  и  $\Phi''$  пересекают третьей, вспомогательной плоскостью или поверхностью  $P$ .
2. Определяют линии пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной:  $\Phi' \times P = l'$ ,  $\Phi'' \times P = l''$ .
3. Определяют точки пересечения полученных линий  $l' \times l'' = I$  и  $II$ . Точки  $I$  и  $II$  принадлежат обеим поверхностям.
4. Проведя несколько вспомогательных поверхностей, находят достаточное количество точек и соединяют их плавной лекальной кривой, которая и является искомой линией пересечения поверхностей.
5. Определяют видимость поверхностей и линии их пересечения.

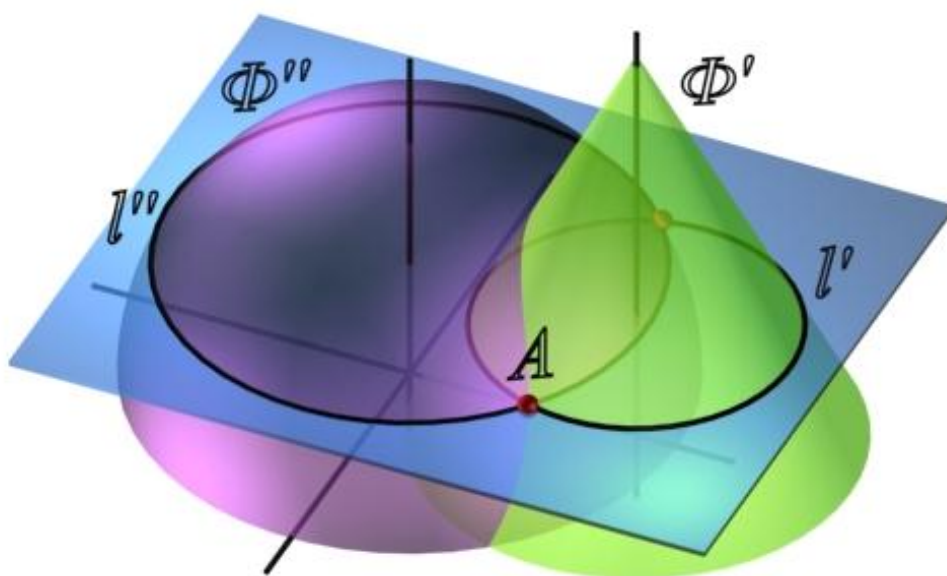


Рис. 101. Пересечение поверхностей

В качестве вспомогательных поверхностей  $P$  следует выбирать поверхности – плоскости или сферы, которые пересекают обе заданные поверхности по наиболее простым для построения линиям – прямым или окружностям. Кроме того, если в сечении поверхности получаются окружности, они должны проецироваться на одну из плоскостей проекций без искажения.

Определение точек линии пересечения поверхностей начинают с построения так называемых опорных точек. К ним относятся:

- точки пересечения очерковых образующих, если образующие лежат в одной плоскости,
- точки, лежащие на очерковых образующих поверхностей,
- точки, лежащие в общей плоскости симметрии,
- экстремальные (верхние – нижние, правые – левые) по отношению к плоскостям проекций, к центру концентрических сфер.

При соединении точек следует иметь в виду, что проекции линии пересечения не могут выходить за пределы общей площади – площади наложения – проекций пересекающихся поверхностей. Видимыми будут те участки линии пересечения, которые принадлежат видимым частям обеих поверхностей.

## 9.1. Способ вспомогательных параллельных плоскостей

Этот способ заключается в том, что обе поверхности пересекаются параллельными плоскостями уровня. Этот способ применяют лишь в тех случаях, когда вспомогательные плоскости пересекают поверхности по простым линиям – прямым или окружностям, которые проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажения.

Рассмотрим построение линии пересечения прямого кругового конуса и сферы (рис. 102).

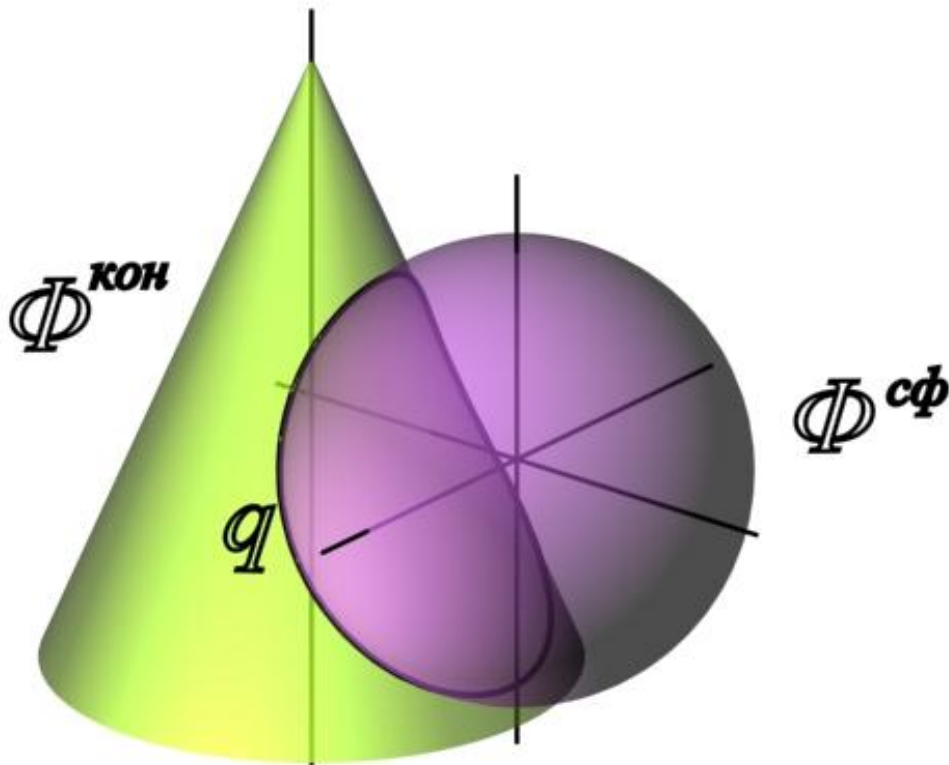


Рис. 102. Линия пересечения поверхностей прямого кругового конуса и сферы

Фронтальные плоскости уровня пересекают поверхность конуса по гиперболам, следовательно, для решения данной задачи нужно применить горизонтальные плоскости уровня, которые пересекают обе данные поверхности по окружностям.

Решение задачи начинают с построения опорных точек. Конус и сфера имеют общую плоскость симметрии  $\gamma(\gamma_1)$ , параллельную плоскости  $\Pi_2$ . Поэтому высшая точка  $A$  и низшая точка  $F$  линии пересечения получаются как результат пересечения очерковых образующих конуса и сферы (рис. 103).

Остальные точки определяются с помощью горизонтальных плоскостей уровня. Более подробно разберем построение точек  $E$  и  $E'$  (рис. 104).

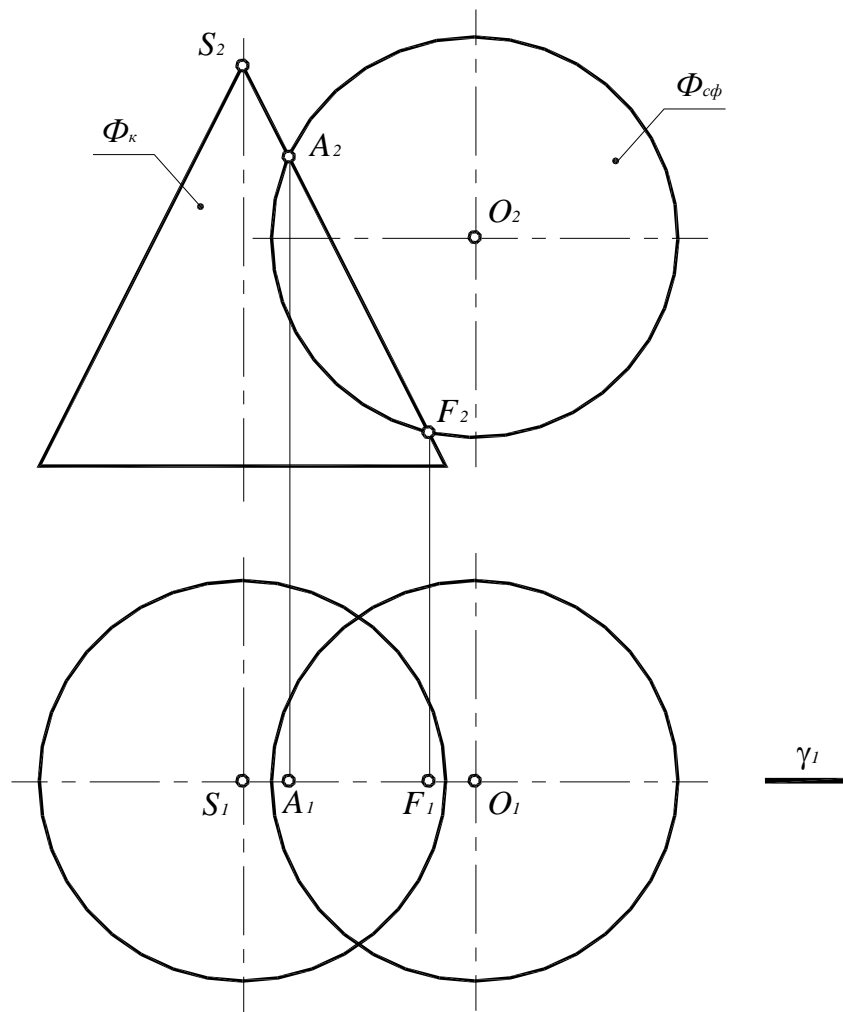
1. Пересечь обе поверхности вспомогательной горизонтальной плоскостью уровня  $\alpha(\alpha_2)$ . Плоскость  $\alpha(\alpha_2)$  пересекает сферу по окружности  $m(m_1, m_2)$ , а конус – по окружности  $q(q_1, q_2)$ :

$$\begin{aligned} m(m_1, m_2) &= \Phi^{сф} \cap \alpha(\alpha_2); \\ q(q_1, q_2) &= \Phi^к \cap \alpha(\alpha_2). \end{aligned}$$

2. Построив горизонтальные проекции окружностей  $m$  и  $q$ , определить точки их пересечения  $E$  и  $E'$ :

$$E_1 = m_1 \times q_1; \quad E_2 = E_1 E_2 \cap \alpha_2;$$

$$E'_1 = m_1 \times q_1; \quad E'_2 = E_1 E_2 \cap \alpha_2.$$



**Рис. 103. Определение опорных точек линии пересечения поверхностей**

3. Аналогичным образом определяются остальные точки, формирующие линию пересечения (рис. 105, а). Они получены с помощью горизонтальных плоскостей уровня  $\beta(\beta_2)$ ,  $\delta(\delta_2)$  и  $\mu(\mu_2)$ . Пределы этих плоскостей по высоте определяют высшая и низшая опорные точки линии пересечения поверхностей. Плоскость  $\mu(\mu_2)$  пересекает поверхность сферы по очерковой образующей  $b(b_2, b_2)$ , поэтому полученные точки  $B$  и  $B'$  являются опорными, ограничивающими линию пересечения поверхностей по ширине.

4. Последовательно соединить одноименные проекции полученных точек плавной лекальной кривой. Полученная линия не должна выходить за пределы области перекрытия проекций данных поверхностей.

5. Определить видимость линии пересечения поверхностей и их очерковых образующих.

Поверхность конуса на горизонтальной плоскости проекций полностью видима, следовательно, видимость линии пересечения определяется по поверхности сферы. Видима будет та часть сферы, которая на  $\Pi_2$  лежит выше очерковой образующей  $b_2$ . Точки  $B$  и  $B'$  на очерковой образующей сферы являются точками смены видимости линии пересечения на плоскости проекций  $\Pi_1$ .

Искомая линия пересечения поверхностей конуса и сферы  $d(d_1, d_2)$  (кривая второго порядка), полученная способом вспомогательных секущих плоскостей, приведена на рис 105, б.

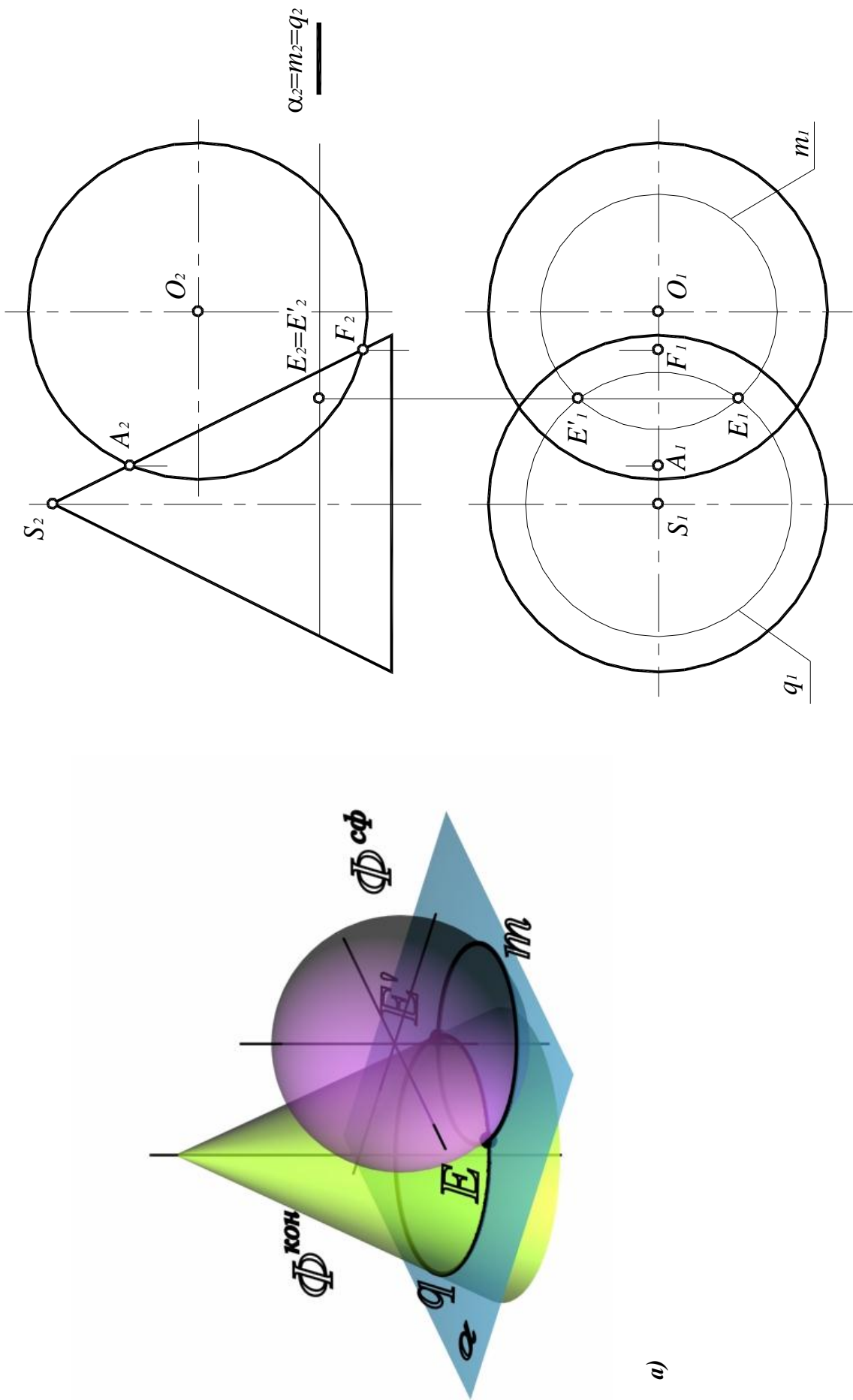


Рис. 104. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей:

*a* – наглядное изображение;

*б* – комплексный чертеж



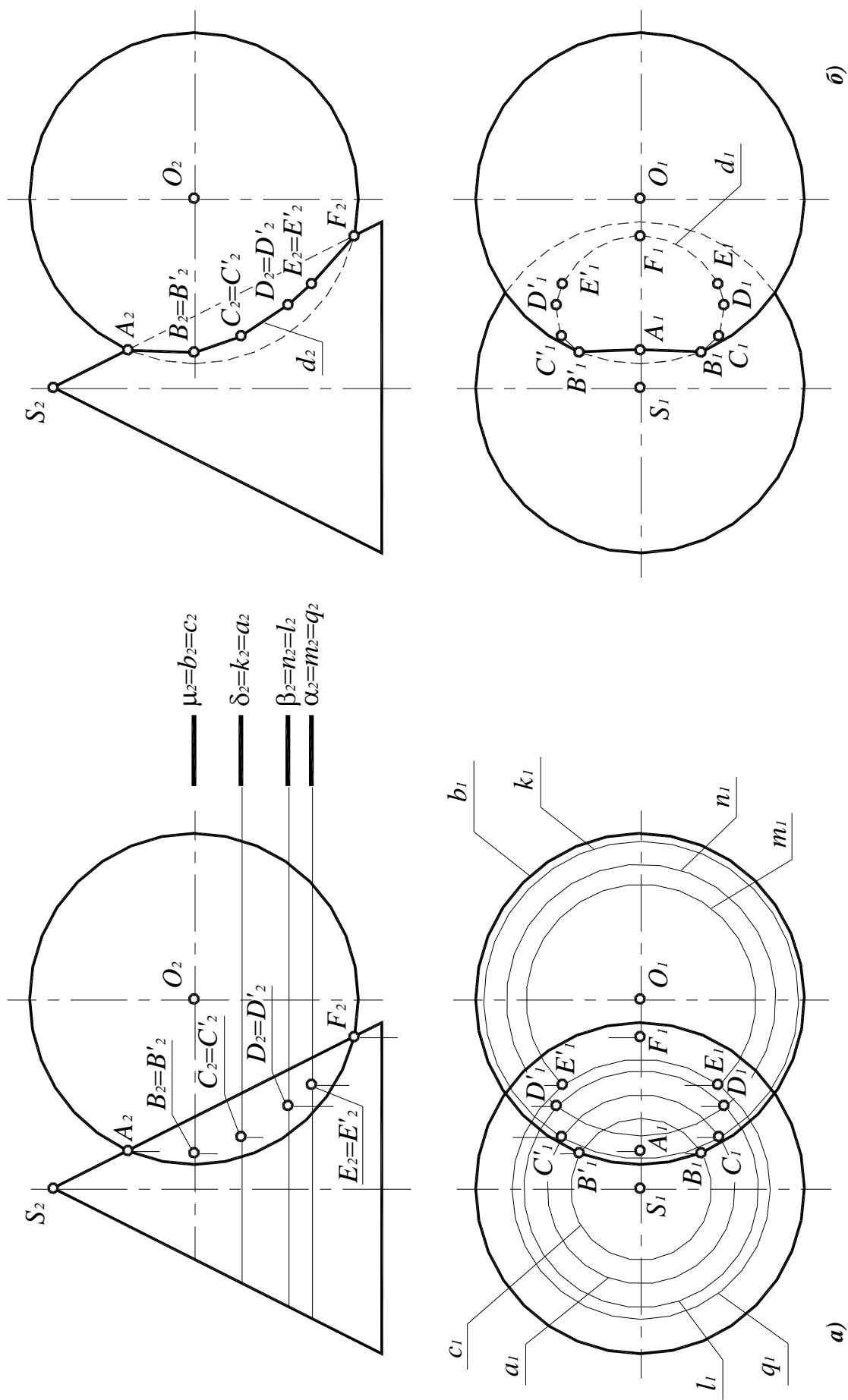


Рис. 105. Определение линии пересечения поверхностей параллельных плоскостей:

*a* – определение промежуточных точек;

*б* – искомая линия пересечения

## 9.2. Способ вспомогательных сфер

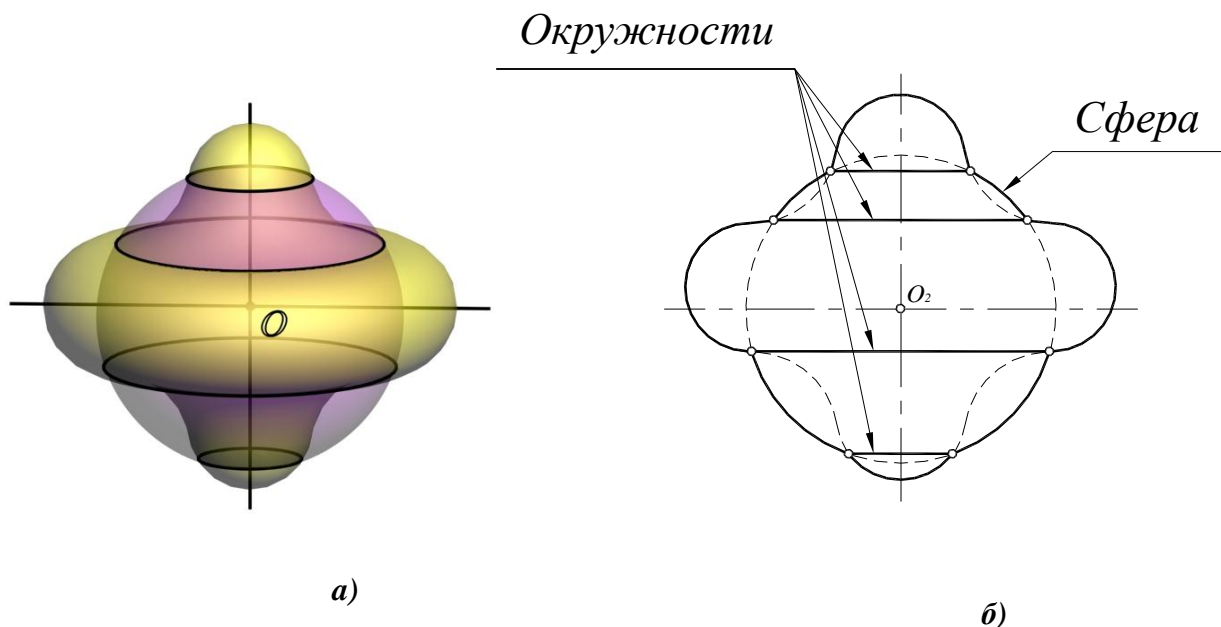
При построении линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных сфер возможны два случая. В одном из них используются сферы, проведенные из одного, общего центра (концентрические), а в другом – сферы, проведенные из разных центров (эксцентрические).

### 9.2.1. Способ концентрических сфер

Этот способ применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения произвольного вида, при условии, что оси этих поверхностей пересекаются.

В основу способа концентрических сфер положено свойство сферы с центром на оси какой-либо поверхности.

*Если центр сферы находится на оси какой-нибудь поверхности вращения, то сфера соосна с поверхностью вращения и в их пересечении получатся окружности (рис. 106).*



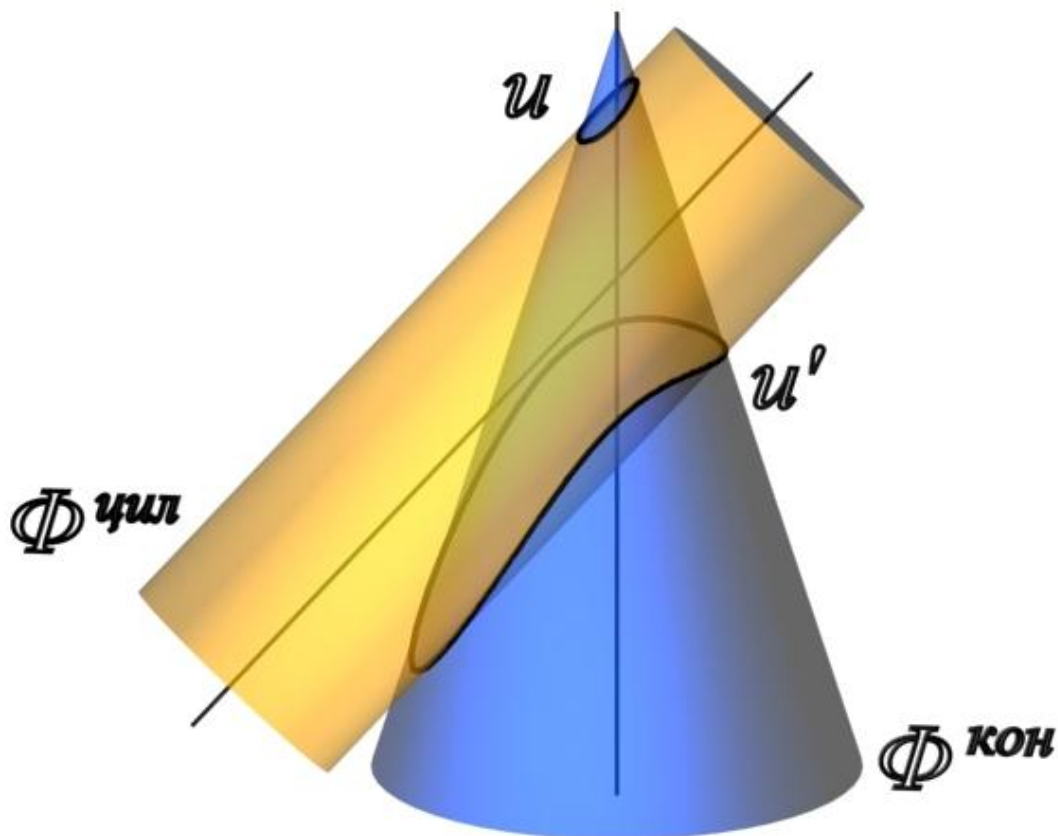
**Рис. 106. Соосные поверхности вращения:**

*a* – наглядное изображение;

*б* – на комплексном чертеже

Рассмотрим способ концентрических сфер на примере построения линии пересечения цилиндра и конуса вращения, оси которых  $i(i_1, i_2)$  и  $q(q_1, q_2)$  пересекаются и точка пересечения осей обозначена через  $O(O_1, O_2)$  (рис. 107).

Точка пересечения осей поверхностей принимается за центр вспомогательных концентрических сфер.



**Рис. 107. Линия пересечения поверхностей цилиндра и прямого кругового конуса**

Алгоритм решения задачи об определении линии пересечения поверхностей состоит в следующем:

1. Определить опорные точки (рис. 108). Так как обе данные поверхности имеют общую плоскость симметрии  $\delta(\delta_1)$ , параллельную плоскости проекций  $\Pi_2$ , то их очерковые образующие, по отношению к плоскости  $\Pi_2$ , пересекаются. Точки  $A(A_1, A_2)$ ,  $B(B_1, B_2)$ ,  $C(C_1, C_2)$  и  $D(D_1, D_2)$  пересечения этих образующих являются точками видимости линии пересечения поверхностей.

2. Определить радиусы максимальной и минимальной сфер, необходимых для определения точек линии пересечения.

Радиус максимальной сферы  $R_{\max}$  равен расстоянию от центра вспомогательных сфер до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих, в данном случае  $R_{\max} = O_2A_2$  (рис. 109).

Чтобы определить радиус минимальной сферы  $R_{\min}$ , необходимо провести через точку  $O_2$  нормали к очерковым образующим данных поверхностей. Тогда больший из отрезков этих нормалей и будет  $R_{\min}$ . В этом случае сфера минимального радиуса будет касаться одной из данных поверхностей, а со второй – пересекаться.

В данном случае сферой минимального радиуса является сфера, касающаяся цилиндрической поверхности (см. рис. 109).

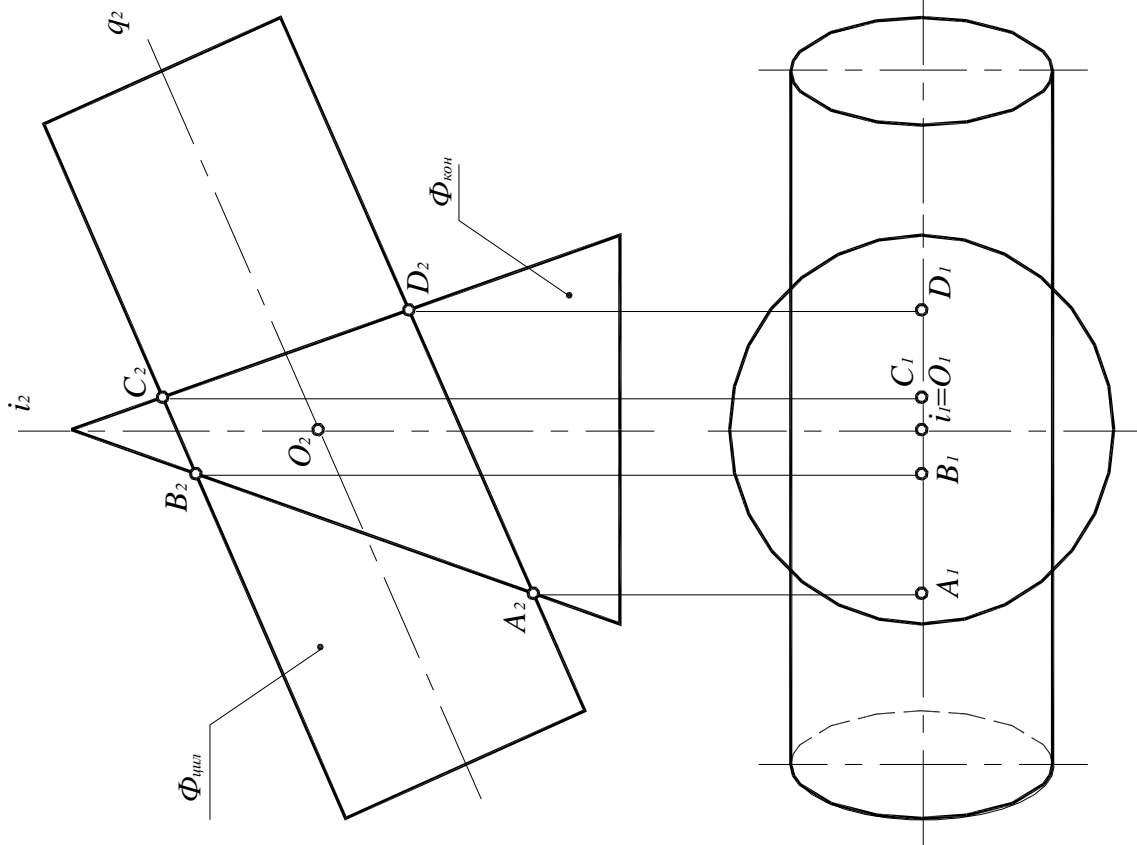


Рис. 108. Определение опорных точек линии пересечения поверхностей

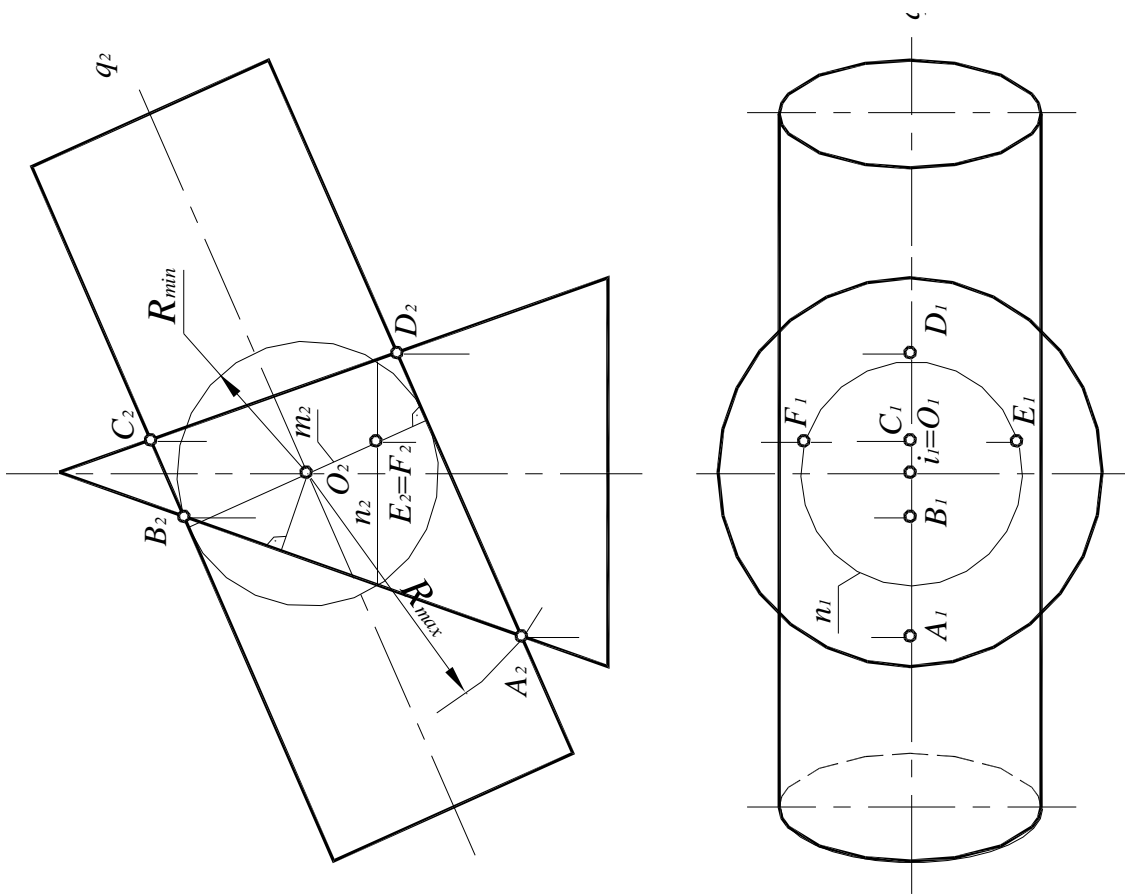


Рис. 109. Определение радиусов максимальной и минимальной сфер

Сфера радиусом  $R_{\min}$  касается цилиндрической поверхности по окружности  $m$ , которая на фронтальной проекции изображается в виде прямой  $m_2$ , перпендикулярной  $q_2$  ( $m_2 \perp q_2$ ). Эта же сфера пересекает коническую поверхность по двум окружностям. Но, в данном случае, нам интересна только окружность  $n$ , так как только она дает решение. Эта окружность  $n$  изображается на фронтальной проекции в виде прямой  $n_2$ , перпендикулярной  $i_2$  ( $n_2 \perp i_2$ ). Точки  $E$  и  $F$  пересечения этих окружностей будут принадлежать обеим поверхностям:

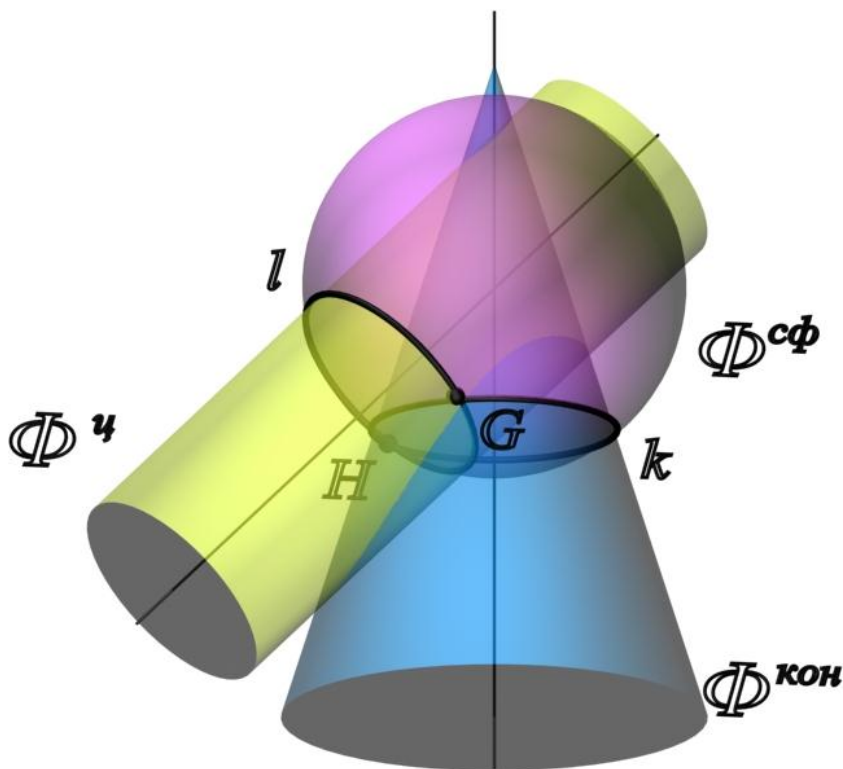
$$m_2 \times n_2 = E_2, F_2.$$

Чтобы построить горизонтальные проекции точек  $E$  и  $F$  следует воспользоваться окружностью  $n$ , содержащей данные точки, так как она не искажается на плоскости проекций  $\Pi_1$ :

$$E_1, F_1 \in n_1.$$

3. Для построения промежуточных точек линии пересечения проводят несколько концентрических сфер с центром в точке  $O$ , причем радиус  $R$  этих сфер должен изменяться в пределах  $R_{\min} < R < R_{\max}$ .

Рассмотрим определение точек линии пересечения на примере сферы радиусом  $R_1$  ( $R_{\min} < R_1 < R_{\max}$ ) (рис. 110, 111).



**Рис. 110. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей**

Сфера радиусом  $R_1$  пересекает цилиндрическую поверхность по окружности  $l$ , которая на фронтальной проекции изображается в виде прямой  $l_2$ , перпендикулярной  $q_2$  ( $l_2 \perp q_2$ ). Эта же сфера пересекает коническую поверхность по окружности  $k$ , которая изображается на фронтальной проекции в виде прямой  $k_2$ , перпендикулярной  $i_2$  ( $k_2 \perp i_2$ ). Точки  $G$  и  $H$  пересечения этих окружностей будут точками искомой линии пересечения:

$$l_2 \times k_2 = G_2, H_2.$$

Чтобы построить горизонтальные проекции точек  $G$  и  $H$ , следует воспользоваться окружностью  $k$ , содержащей данные точки, так как она не искажается на плоскости проекций  $\Pi_1: G_1 \in k_1$ .

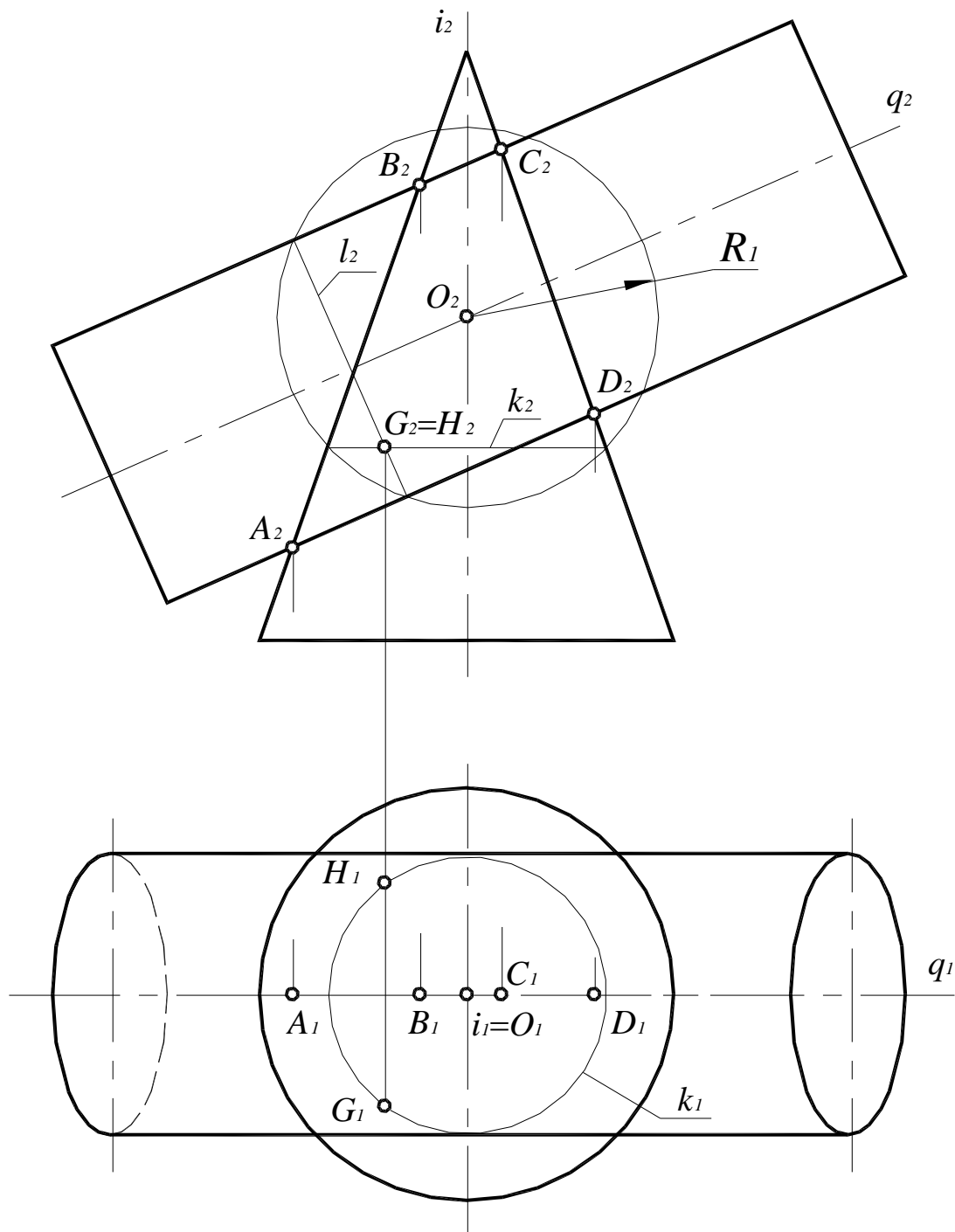


Рис. 111. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей

4. Аналогичным образом определить все остальные точки искомой линии пересечения. Последовательно соединить полученные точки плавной лекальной кривой. В данном случае линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса представляет собой две кривые второго порядка  $u(u_1, u_2)$  и  $u'(u'_1, u'_2)$  (рис. 112).

Горизонтальная проекция линии пересечения поверхностей симметрична относительно плоскости  $\delta(\delta_1)$  – общей плоскости симметрии данных поверхностей. Эта плоскость была указана ранее (см. рис. 108).

5. Определить видимость линии пересечения поверхностей и их очерковых образующих. На фронтальной плоскости проекций видимы будут те точки линии пересечения, которые лежат перед горизонтальной проекцией очерковых образующих, проекции которых совпадают с плоскостью симметрии  $\delta(\delta_1)$ , – точки  $A, M, G, E, D$  и  $B, K, P, C$ . На горизонтальной плоскости проекций линия  $u(u_1, u_2)$  видима, так как все ее точки лежат выше фронтальной проекции оси вращения цилиндра  $q(q_2)$ , а линия  $u'(u'_1, u'_2)$  будет невидима, поскольку все ее точки лежат ниже фронтальной проекции образующих, совпадающих с проекцией оси вращения цилиндра  $q(q_2)$ .

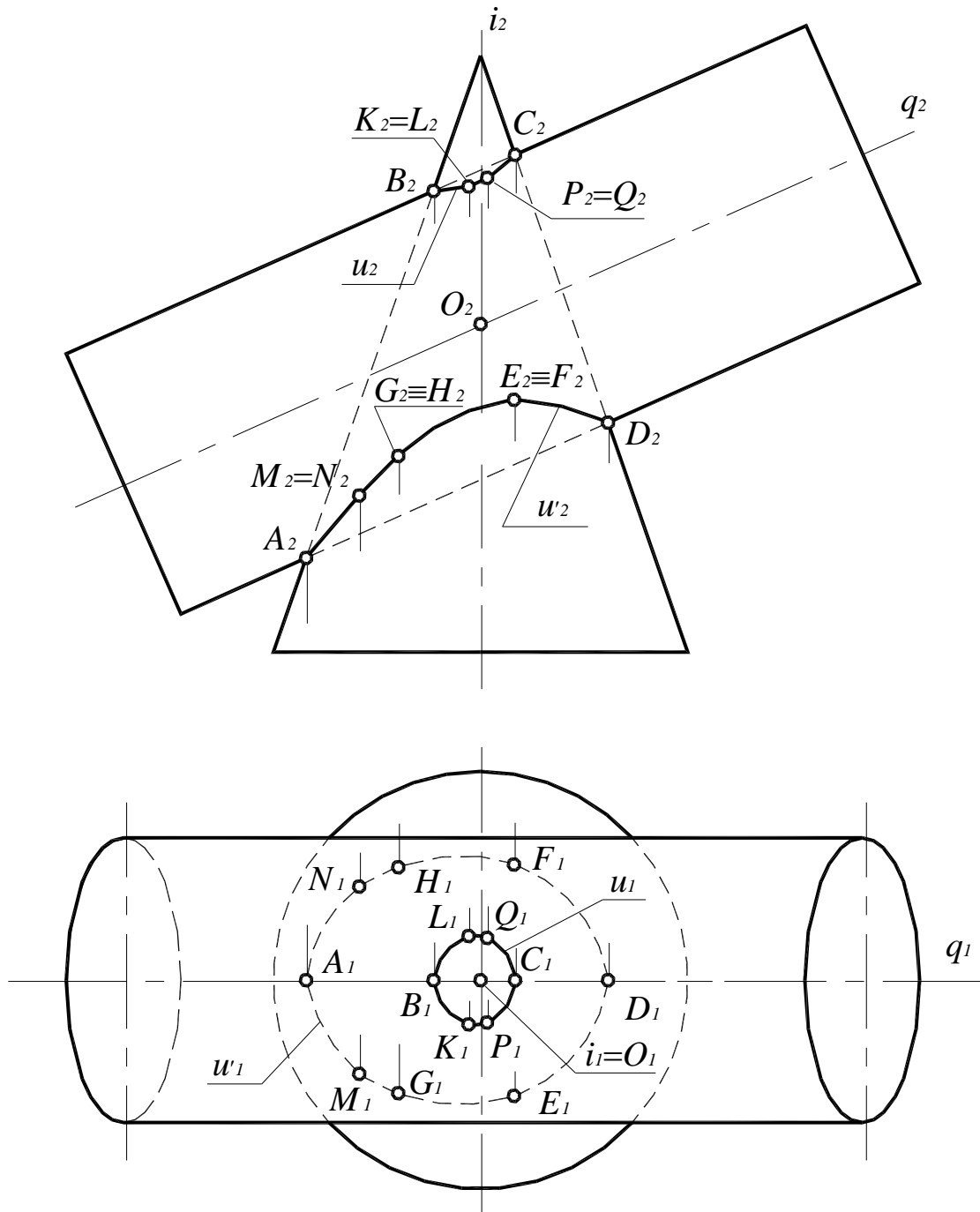


Рис. 112. Линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса

### 9.2.2. Способ эксцентрических сфер

Способ эксцентрических сфер основан на том, что около всякой окружности можно описать бесчисленное множество сфер, геометрическим местом центров которых является прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная плоскости окружности.

Этот способ применяется в следующих случаях:

- при определении линии пересечения поверхностей вращения со скрещивающимися осями;
- при определении линии пересечения поверхности вращения с поверхностью, имеющей круговые сечения.

В обоих случаях обязательным является наличие общей плоскости симметрии.

Рассмотрим способ эксцентрических сфер на примере построения линии пересечения поверхностей конуса и кольца (рис. 113). Конус и кольцо имеют общую плоскость симметрии  $\delta(\delta_1)$ , и их оси вращения  $i(i_1, i_2)$  и  $q(q_1, q_2)$  – скрещивающиеся прямые.

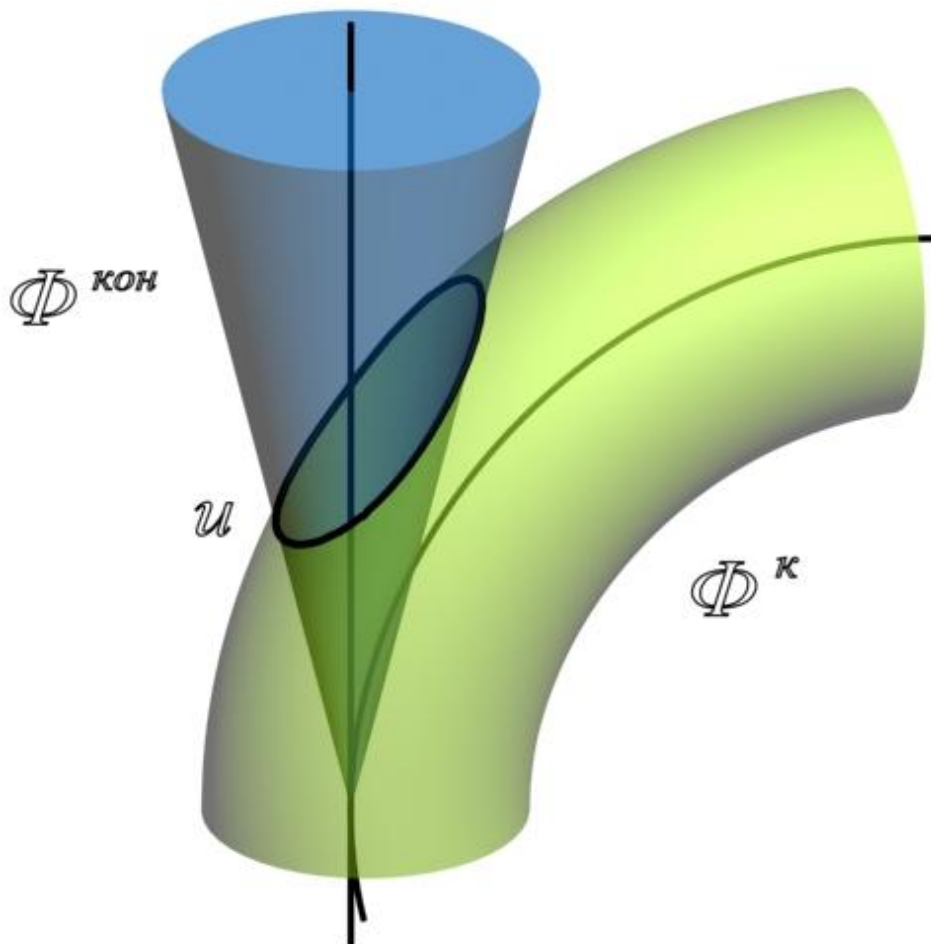


Рис. 113. Линия пересечения поверхностей конуса и кольца

1. Определить опорные точки (рис. 114). Так как обе данные поверхности имеют общую плоскость симметрии  $\delta(\delta_1)$ , параллельную плоскости проекций  $\Pi_2$ , то их очерковые образующие, по отношению к плоскости  $\Pi_2$ , пересекаются. Точки  $A(A_1, A_2)$  и  $B(B_1, B_2)$  пересечения этих образующих являются опорными точками.



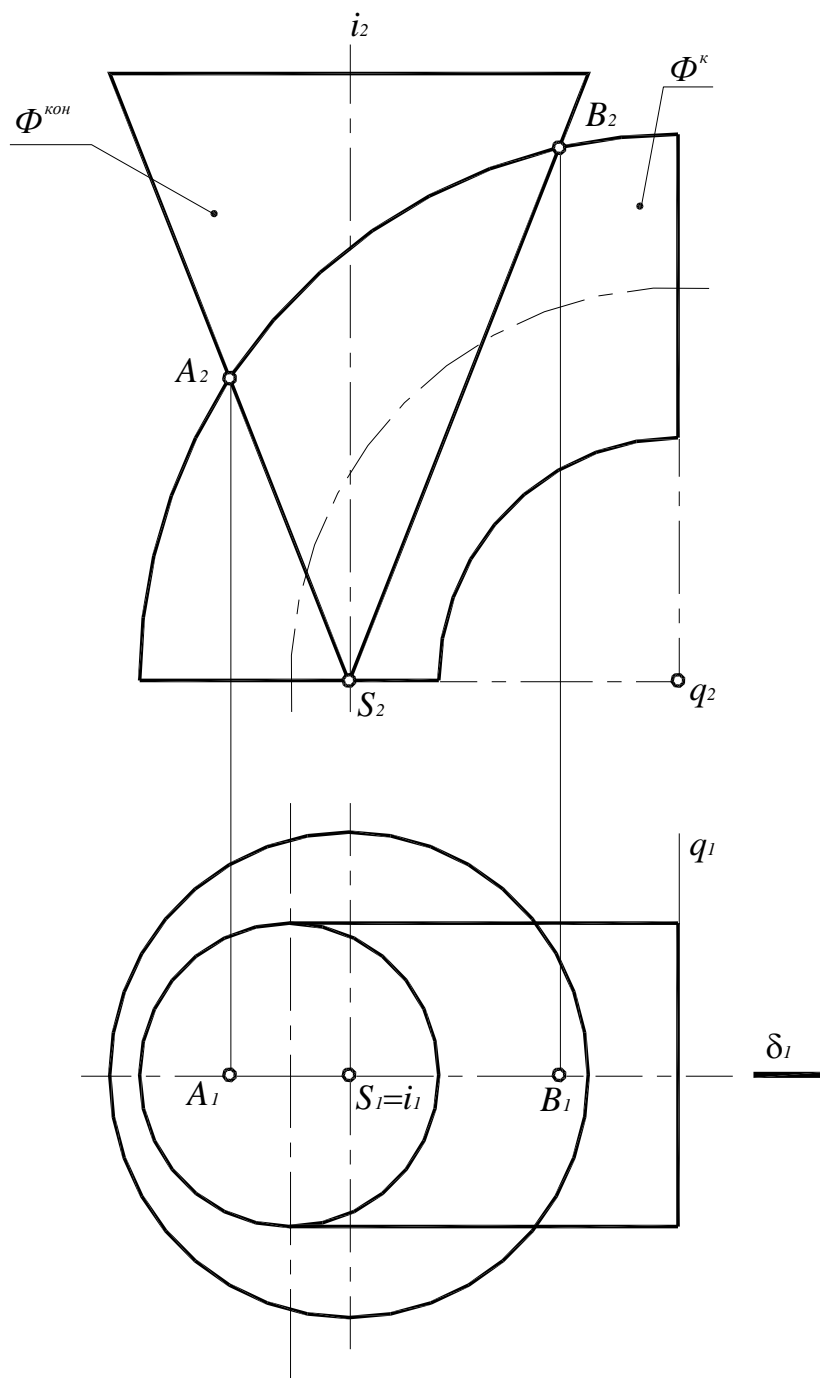
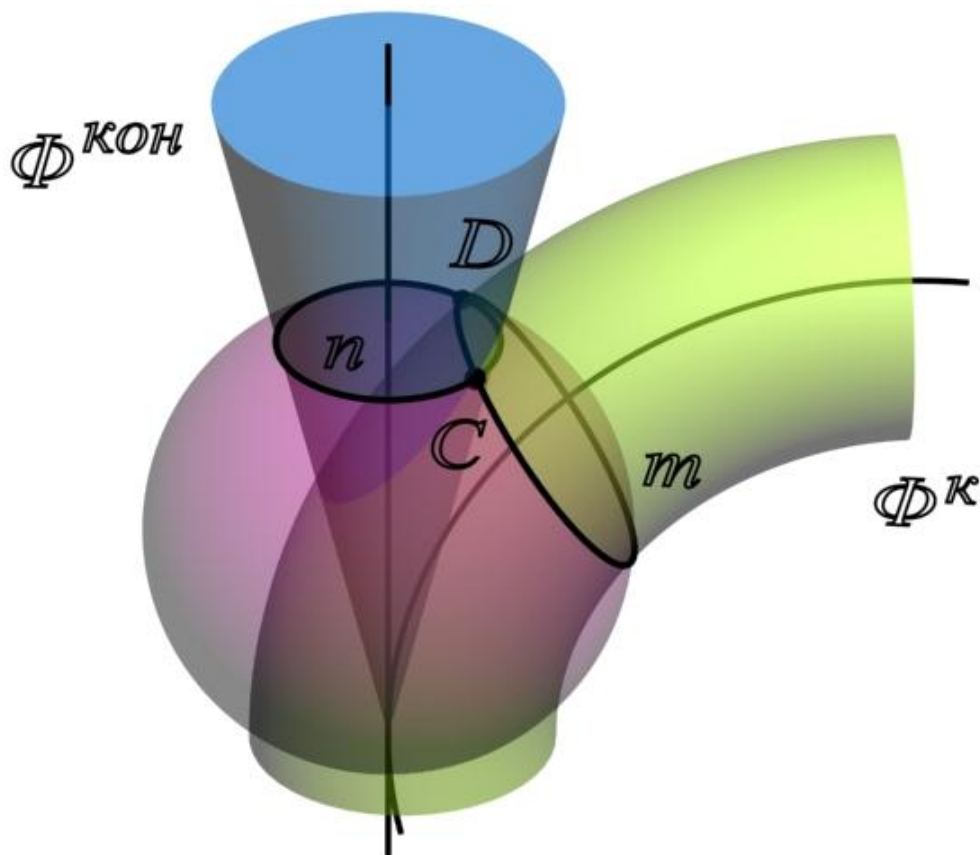


Рис. 114. Определение опорных точек линии пересечения поверхностей

2. Для определения промежуточных точек в качестве вспомогательных поверхностей выбраны эксцентрические сферы, центры которых лежат на оси конуса.

Положение центров определяется следующим образом (рис. 115, 116): через ось кольца  $q(q_1, q_2)$  проводят плоскость  $\sigma(\sigma_2) \perp \Pi_2$  и заменяют «кривой цилиндр» (кольцо) соприкасающимся с ним по окружности прямым цилиндром (фронтальная проекция этого цилиндра показана на рис. 112 штрихпунктирными линиями). Ось этого цилиндра  $c \perp \sigma$  ( $c_2 \perp \sigma_2$ ) и пересекает ось конуса в точке  $O$ :

$$O_2 = c_2 \times i_2.$$



**Рис. 115. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей способом эксцентрических сфер**

Из точки  $O(O_2)$  проведена сфера такого радиуса  $r$ , чтобы она пересекала кольцо по окружности  $m(m_2)$ .

Эта же сфера пересекает конус по окружности  $n(n_1, n_2)$ . В пересечении окружностей  $m$  и  $n$  получают точки  $C$  и  $D$ , принадлежащие искомой линии пересечения:

$$C = m \times n; \quad C_2 = m_2 \times n_2;$$

$$D = m \times n; \quad D_2 = m_2 \times n_2.$$

Чтобы построить горизонтальные проекции точек  $C$  и  $D$ , принадлежащих искомой линии пересечения, следует использовать окружность  $n(n_1, n_2)$  конической поверхности, так как она не искажается на плоскости проекций  $\Pi_1$ :

$$C_1 \in n_1.$$

3. Для определения точек  $E, F, G$  и  $H$ , принадлежащих искомой линии пересечения, проведены плоскости  $\eta(\eta_2)$  и  $\mu(\mu_2)$  (рис. 117). Центрами вспомогательных сфер являются точки  $O'(O'_2)$  и  $O''(O''_2)$  соответственно. Все остальные построения выполнены аналогичным образом.

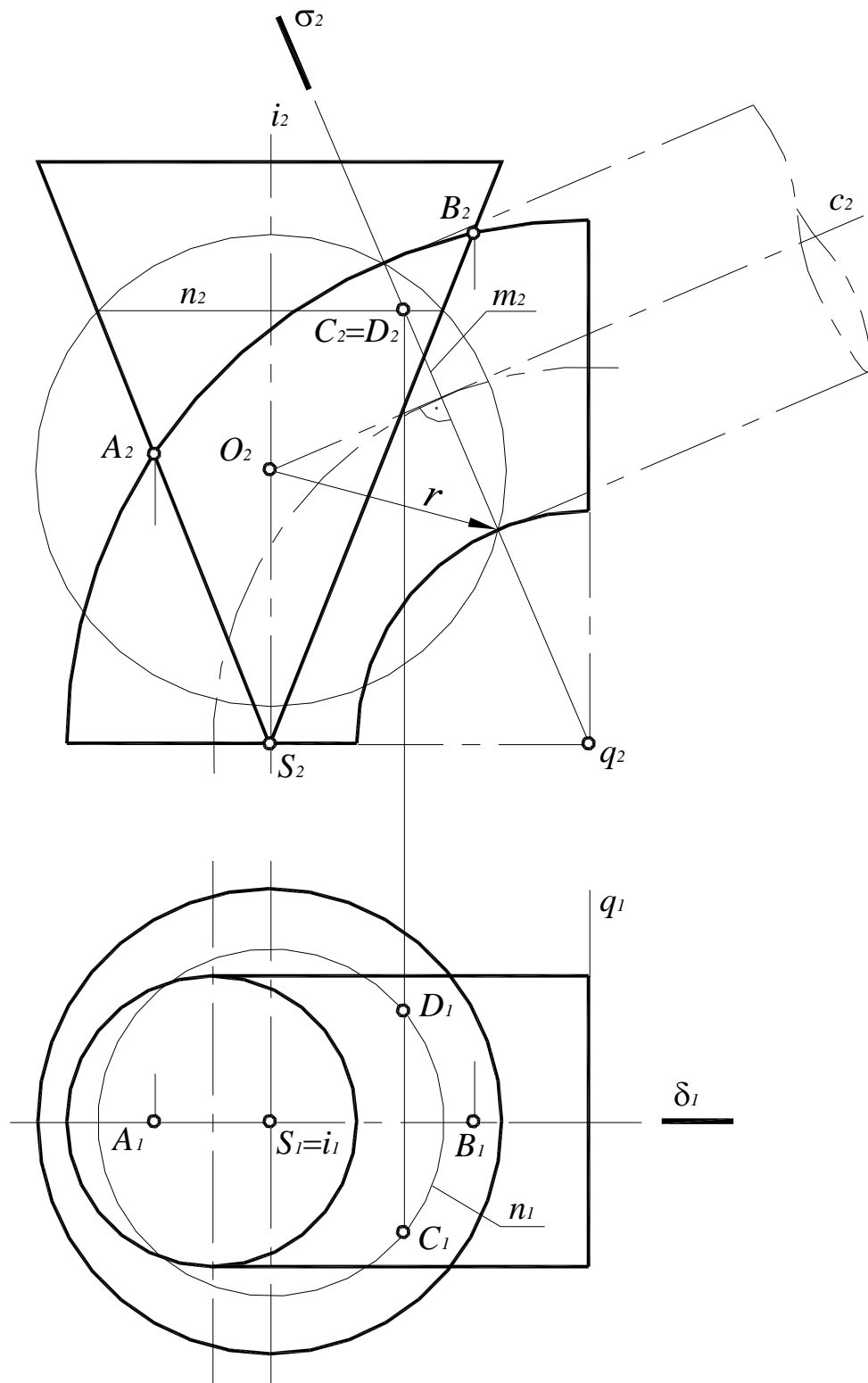


Рис. 116. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей

4. Определить видимость очерковых образующих и линии пересечения поверхностей. На фронтальной проекции видимы будут те точки линии пересечения, которые лежат перед горизонтальной проекцией плоскости симметрии  $\delta(\delta_1)$ , - точки  $A, G, C$  и  $B$ . На горизонтальной проекции поверхность конуса невидима, следовательно, невидима и вся линия пересечения. Искомая линия пересечения данных поверхностей  $u(u_1, u_2)$  приведена на рис. 117.

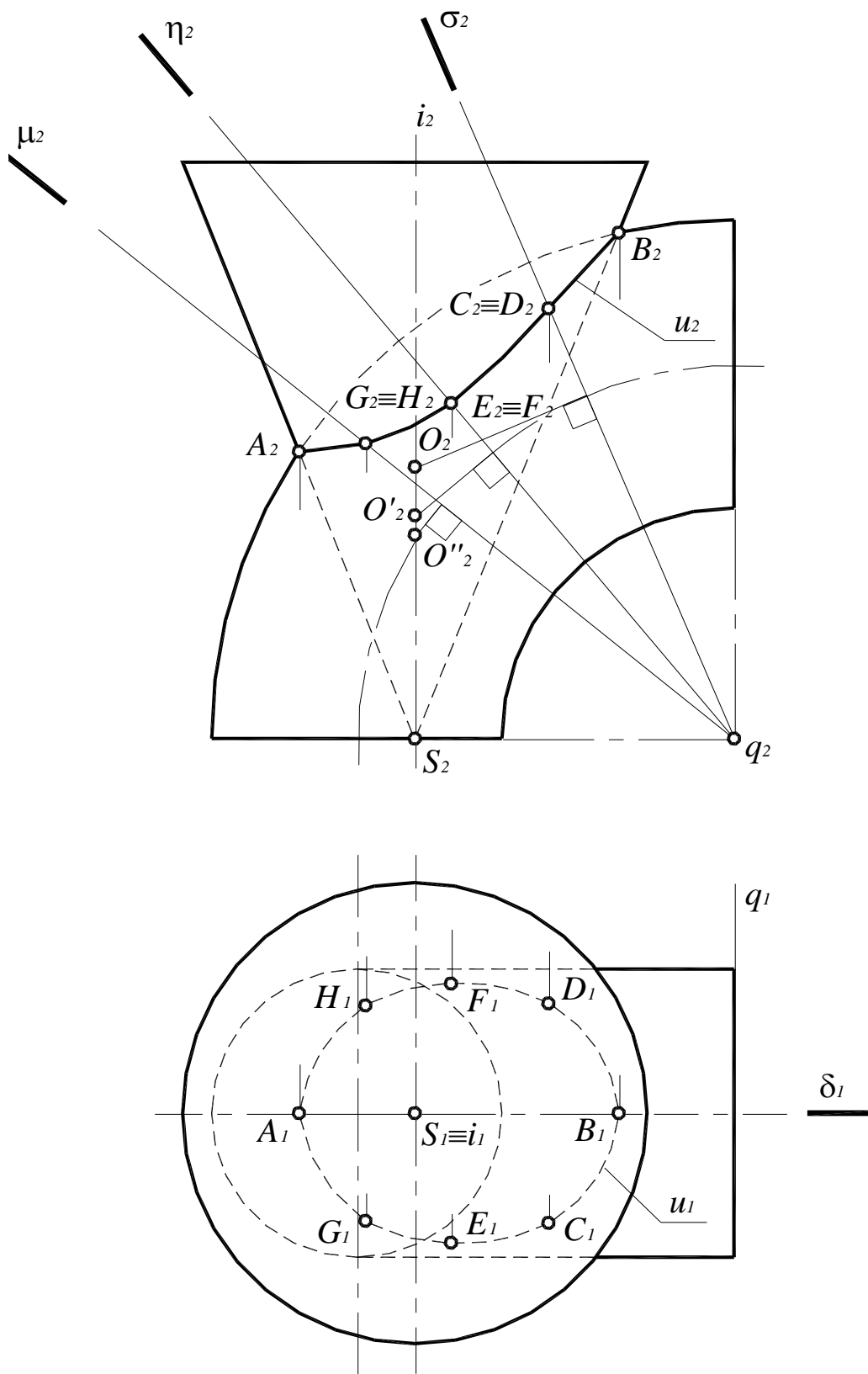
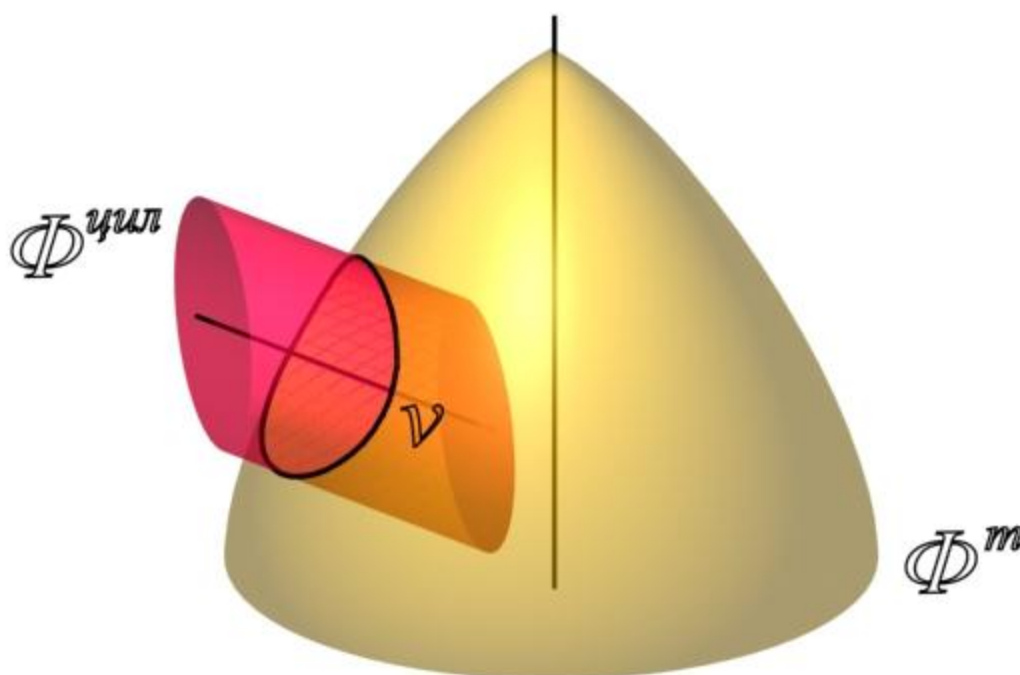


Рис. 117. Построение линии пересечения поверхностей способом эксцентрических сфер

Рассмотрим также способ эксцентрических сфер на примере построения линии пересечения поверхности тора и наклонного (эллиптического) цилиндра (рис. 118).

В этом случае можно использовать способ эксцентрических сфер, так как одна из поверхностей является поверхностью вращения (тор), а другая (наклонный цилиндр) – поверхностью, имеющей круговые сечения, параллельные основанию цилиндра. Через любое круговое сечение можно провести бесконечное число сфер с центрами на перпендикуляре, восстановленном из центра кругового сечения. В данном случае центрами вспомогательных сфер будут точки пересечения оси вращения тора с перпендикулярами, восстановленными в центре произвольно выбранного кругового сечения цилиндра.

Причем обе поверхности имеют общую плоскость симметрии  $\delta(\delta_1)$ , на которую круговые сечения поверхности цилиндра проецируются в виде отрезков прямых линий. Осями данных поверхностей являются прямые  $i(i_1, i_2)$  и  $q(q_1, q_2)$ .



**Рис. 118. Линия пересечения поверхностей тора и наклонного цилиндра**

Алгоритм решения данной задачи состоит в следующем:

1. Сначала определяются опорные точки (рис. 119). Так как очерковые образующие обеих поверхностей лежат в одной плоскости – плоскости симметрии  $\delta(\delta_1)$ , параллельной плоскости проекций  $\Pi_2$ , точки  $A(A_1, A_2)$  и  $B(B_1, B_2)$  пересечения этих образующих являются опорными.

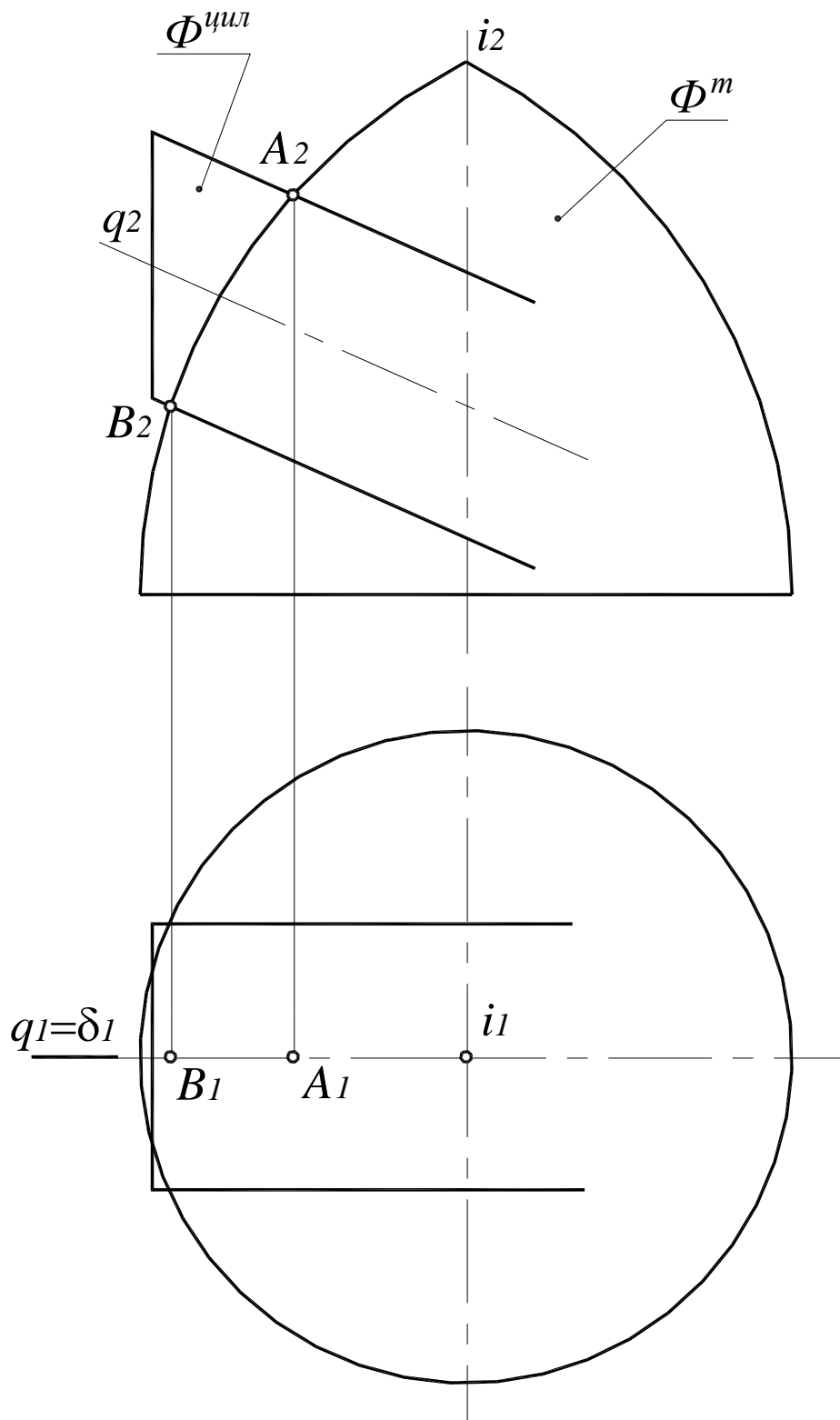


Рис. 119. Определение опорных точек линии пересечения поверхностей

2. Далее определяются промежуточные точки линии пересечения поверхностей (рис. 120). Порядок их определения сводится к следующему алгоритму:

2.1. Для определения кругового сечения поверхность цилиндра пересекается вспомогательной плоскостью  $\beta(\beta_2)$ . Окружность  $d = \beta(\beta_2) \cap \Phi^{кон}$  – круговое сечение цилиндра.

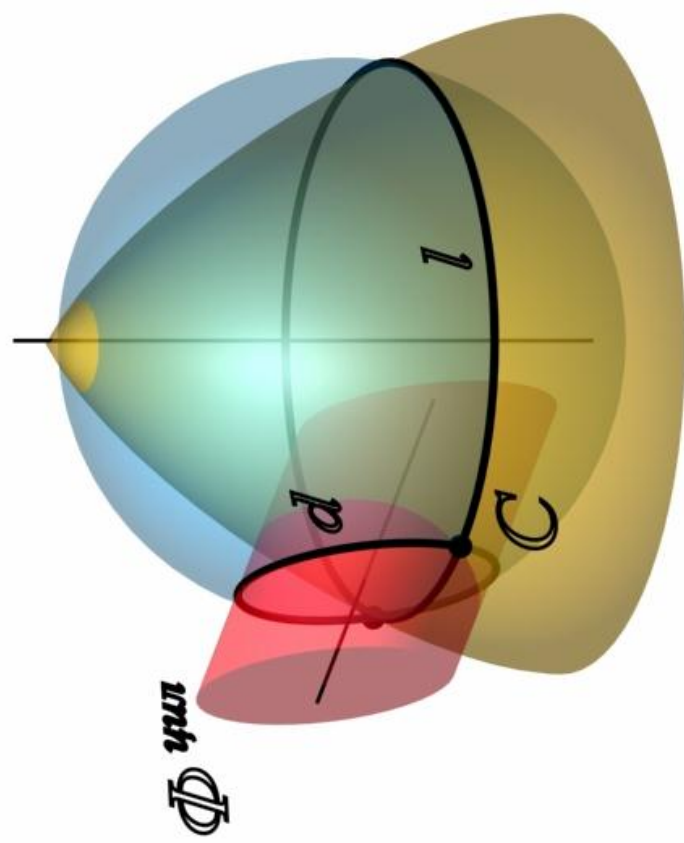
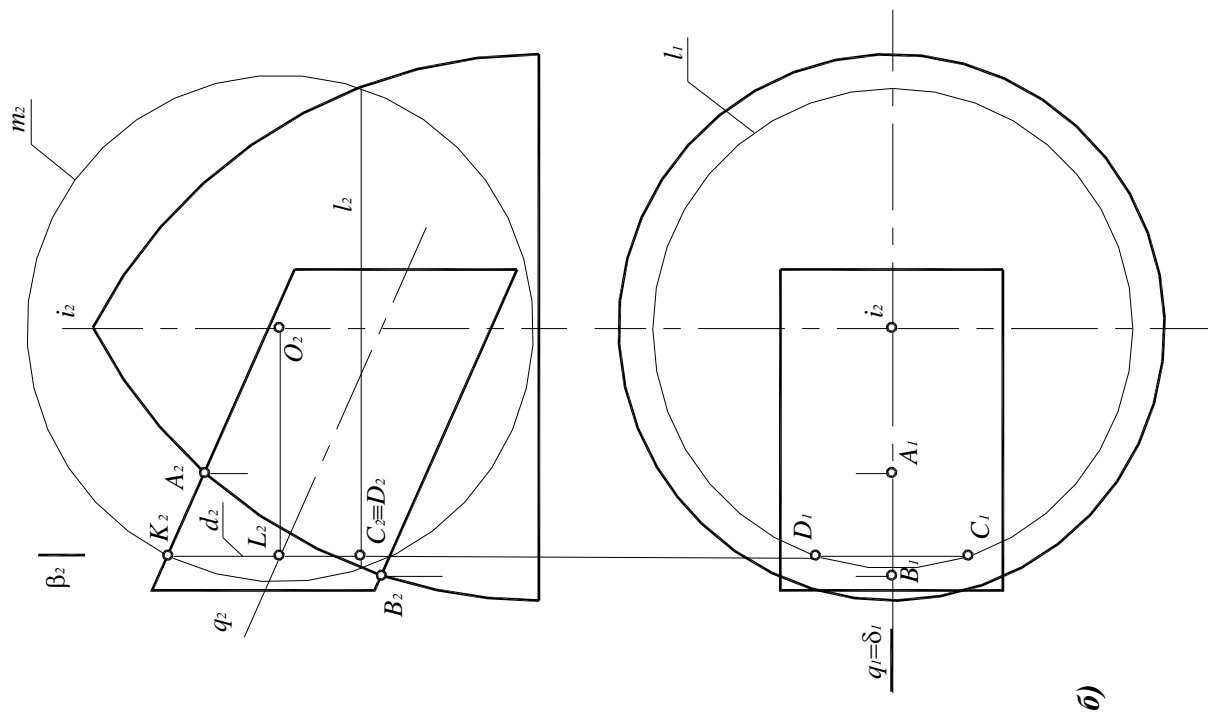


Рис. 120. Определение промежуточных точек линии пересечения:

*a* – наглядное изображение;

*б* – комплексный чертеж

2.2. Из точки  $L(L_2)=q_2 \times \beta_2$ , центра кругового сечения  $d(d_2)$ , провести перпендикуляр до пересечения с осью  $i(i_1, i_2)$  тора. Точка  $O(O_2)$  является центром вспомогательной сферы.

2.3. Из точки  $O_2$  радиусом, равным  $|O_2K_2|$ , построить окружность  $m(m_2)$  – фронтальную проекцию вспомогательной сферы. Затем определить линии пересечения вспомогательной сферы с данными поверхностями. С цилиндром сфера пересекается по окружности  $d(d_2)$ , которая является его круговым сечением, а с поверхностью тора – по окружности  $l(l_1, l_2)$ :

$$d(d_1, d_2) = \Phi^{mnl} \cap \Phi^{c\phi};$$

$$l(l_1, l_2) = \Phi^m \cap \Phi^{c\phi}.$$

2.4. В пересечении окружностей  $d$  и  $l$  получаются точки  $C$  и  $D$ , принадлежащие искомой линии пересечения:

$$C = d \times l; \quad C_2 = d_2 \times l_2;$$

$$D = d \times l; \quad D_2 = d_2 \times l_2.$$

2.5. Чтобы построить горизонтальные проекции точек  $C$  и  $D$ , принадлежащих искомой линии пересечения, следует воспользоваться окружностью  $l(l_1, l_2)$  поверхности вращения, так как она не искажается на плоскости проекций  $\Pi_1$ .

3. Аналогично определяются остальные точки линии пересечения поверхностей. Для определения точек  $E, F, G$  и  $H$ , принадлежащих искомой линии пересечения, проведены плоскости  $\gamma(\gamma_2)$  и  $\eta(\eta_2)$  (рис. 121). Пределы этих плоскостей по ширине определяют правая и левая опорные точки линии пересечения поверхностей – фронтальные проекции точек  $A$  и  $B$ .

Центрами вспомогательных сфер являются точки  $O(O'_2)$  и  $O''(O''_2)$  соответственно. Все остальные построения выполнены аналогичным образом.

4. В данном случае линия пересечения поверхностей цилиндра и тора представляет собой кривую второго порядка  $v(v_1, v_2)$  (см. рис. 121).

5. Точки  $S$  и  $P$  являются точками смены видимости. Их фронтальные проекции лежат на оси вращения цилиндра  $q(q_1, q_2)$ , а горизонтальные проекции – на очерковых образующих цилиндра.

На фронтальной плоскости проекций видимы будут те точки линии пересечения, которые лежат перед горизонтальной проекцией очерковых образующих, проекции которых совпадают с плоскостью симметрии  $\delta(\delta_1)$ , – точки  $A, G, S, E, C, B$ .

На горизонтальной плоскости проекций видимы точки  $P, H, A, G, S$ , фронтальные проекции которых лежат выше фронтальной проекции образующих, проекции которых совпадают с осью вращения цилиндра  $q(q_2)$ .



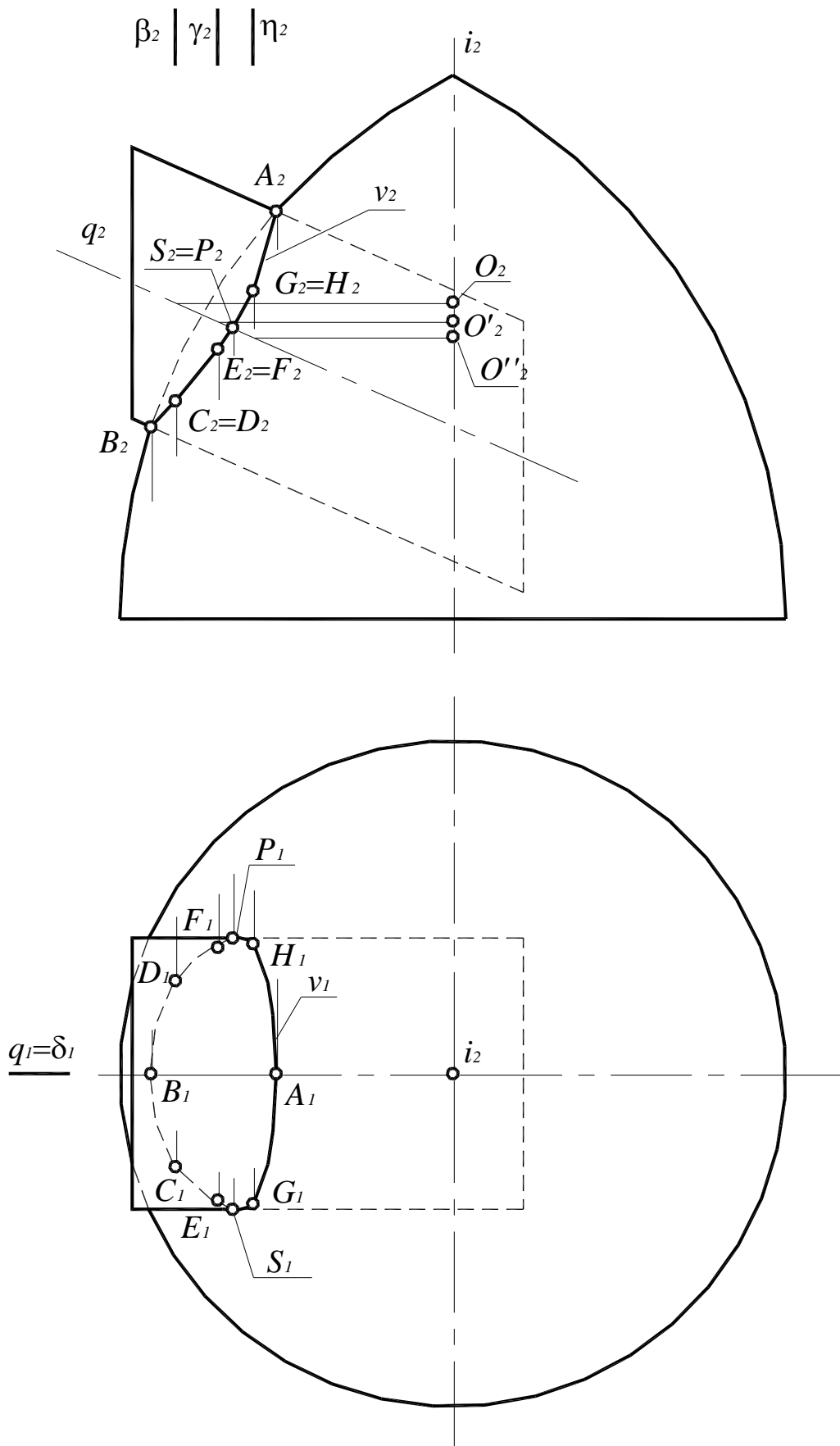


Рис. 121. Линия пересечения поверхностей наклонного цилиндра и тора

## 10. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи, в которых определяются различные геометрические величины – расстояния между объектами, длины отрезков, углы, площади и т.д. называются метрическими. Решение многих метрических задач, например задач на определение кратчайших расстояний, требует построения перпендикулярных прямых и плоскостей.

Перпендикулярность является частным случаем пересечения прямых, прямой и плоскости или двух плоскостей. Необходимо установить соотношения, по которым строятся проекции перпендикулярных прямых и плоскостей.

### 10.1. Теорема о проекциях прямого угла

*Прямой угол проецируется на плоскость без искажения, если одна из его сторон параллельна этой плоскости (рис. 122).*

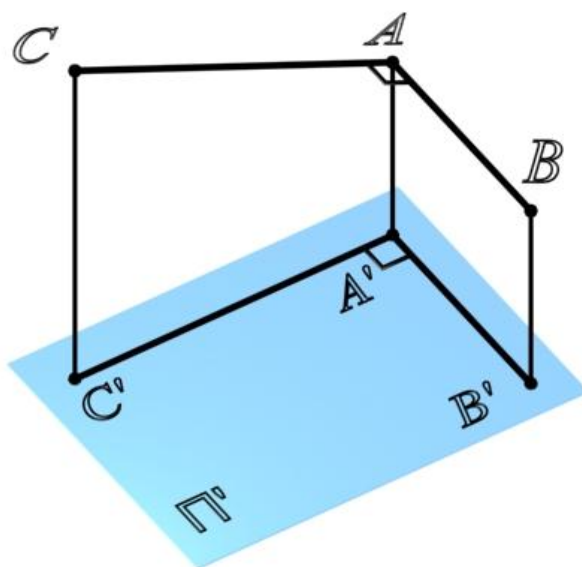


Рис. 122. Теорема о проекциях прямого угла

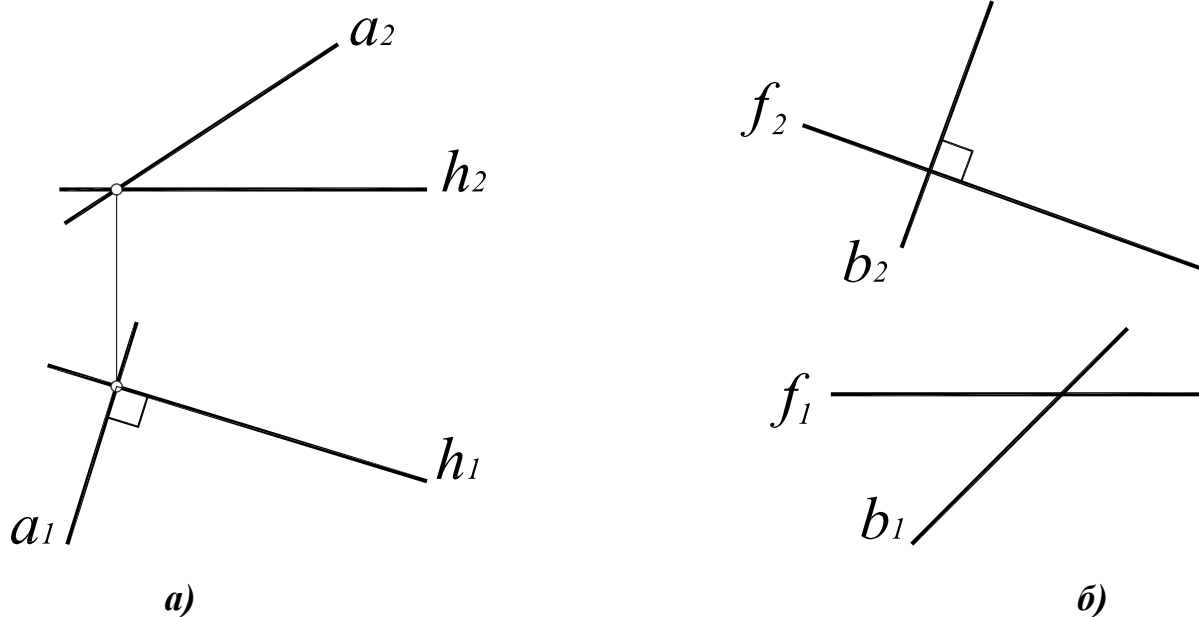
**Дано:**  $\angle BAC = 90^\circ$ ;  $AB \parallel \Pi'$

**Доказать,** что  $C'A' \perp A'B'$

**Доказательство:** если  $AB \parallel \Pi'$ , то  $A'B' \parallel AB$ , но  $AA' \perp \Pi' \Rightarrow AA' \perp A'B'$  значит  $AB \perp AA'$   $AB \perp$  плоскости  $CAA'C'$ , тогда и  $A'B' \perp CAA'C'$ . Следовательно,  $C'A' \perp A'B'$ .

На основании этой теоремы две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) проецируются на  $\Pi_1$  в виде взаимно перпендикулярных прямых, если одна из них горизонталь, на  $\Pi_2$  – если одна из них фронталь (рис. 123, а).

Условие перпендикулярности скрещивающихся прямых (рис. 123, б) сводятся к условиям перпендикулярности пересекающихся прямых, поведенных через произвольную точку и соответственно параллельных скрещивающимся прямым. Таким образом, понятие перпендикулярности можно отнести как к пересекающимся, так и к скрещивающимся прямым.



**Рис. 123. Перпендикулярные прямые:**

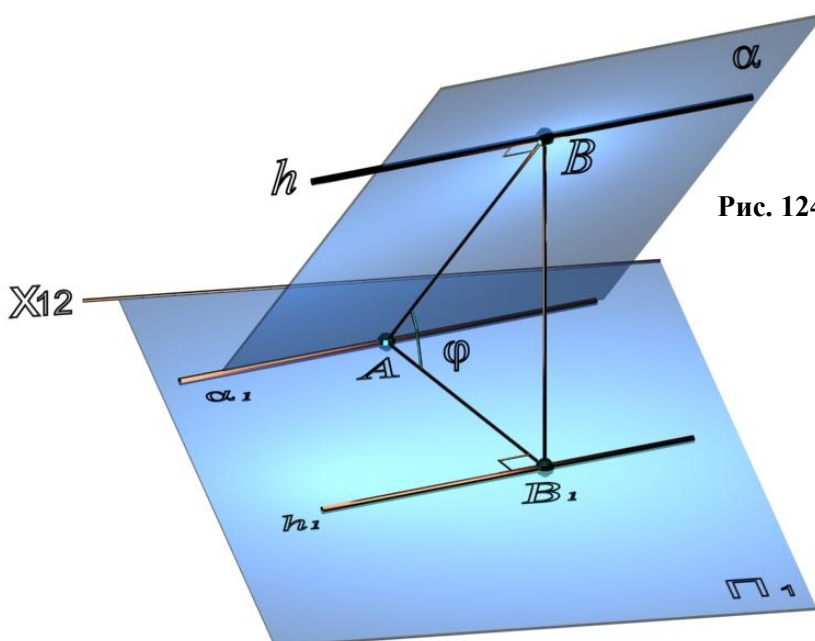
$a$  – пересекающиеся  $a_1 \perp h_1 \Rightarrow a \perp h$ ;

$b$  – скрещивающиеся  $b_2 \perp f_2 \Rightarrow b \perp f$

## 10.2. Линии наибольшего наклона плоскости

Прямые, лежащие в плоскости и перпендикулярные линиям уровня этой плоскости, называются линиями наибольшего наклона к соответствующей плоскости проекций (рис. 124). Так, прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная горизонтали плоскости, называется линией наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций, а прямая, перпендикулярная фронтالي – линией наибольшего наклона к фронтальной плоскости проекций.

Угол между линией наибольшего наклона и ее проекцией на соответствующую плоскость равен углу наклона плоскости к плоскости проекций (см. рис. 124).



**Рис. 124. Линия наибольшего наклона плоскости  $\alpha$  к  $\Pi_1$ :**

$\alpha$  – плоскость общего положения;

$h \in \alpha$  – горизонталь плоскости  $\alpha$ ;

$AB \perp h$  – линия наибольшего наклона;

$\varphi = \angle AB, AB_1$  – угол наклона плоскости  $\alpha$  к  $\Pi_1$

### 10.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. На основании теоремы о проекциях прямого угла можно получить условие перпендикулярности прямой общего положения и плоскости общего положения:

Если прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha(ABC)$ , то ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали плоскости.

Например, при построении прямой  $a$ , перпендикулярной плоскости  $\alpha(ABC)$  (рис. 125, *a*), в плоскости строятся линии уровня – горизонталь и фронталь, затем через произвольную точку в плоскости, в данном случае точку  $K(h \times f)$ , строится прямая, горизонтальная проекция которой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости  $\alpha(ABC)$ , а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали плоскости.

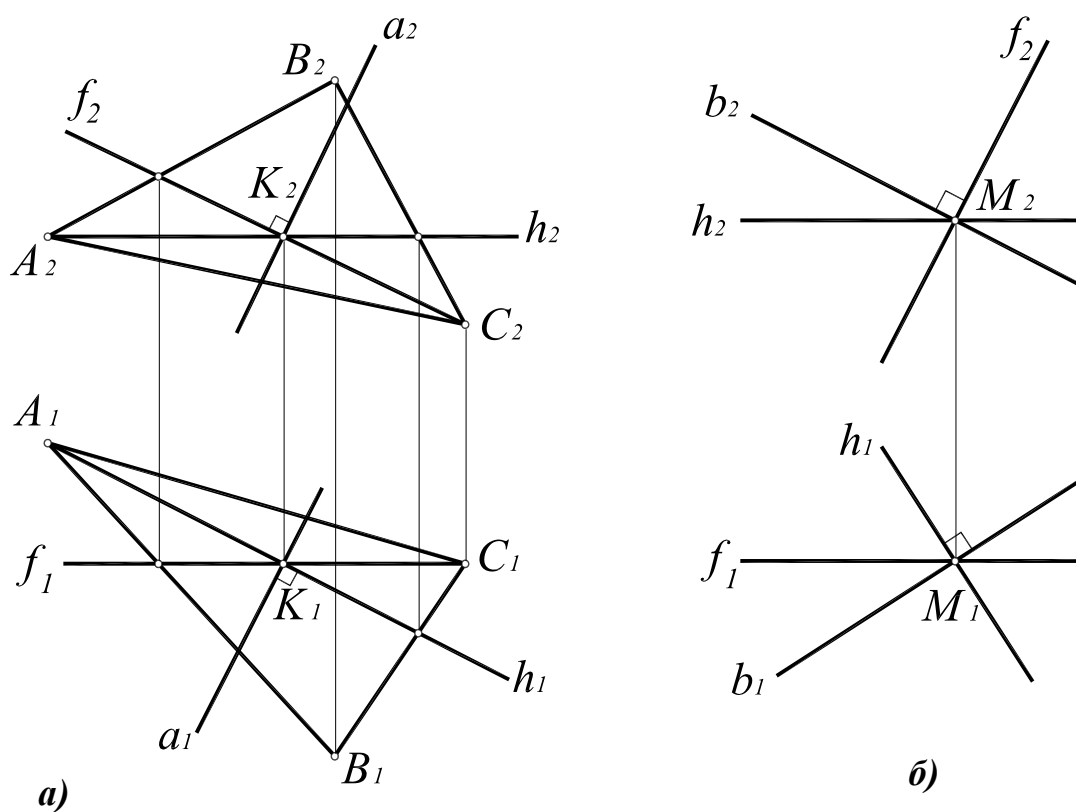


Рис. 125. Перпендикулярность прямой и плоскости:

*a* – построение прямой, перпендикулярной плоскости; *б* – построение плоскости, перпендикулярной прямой:

$\alpha(ABC)$ ;  
 $K(h \times f); K \in a$ ;  
 $a \perp \alpha(ABC) \Leftrightarrow a_1 \perp h_1, a_2 \perp f_2$

$b(b_1 \times b_2); M \in b$ ;  
 $h_1 \perp b_1; f_2 \perp b_2$ ;  
 $\delta(f \times h)$

Аналогично решается задача о построении плоскости, перпендикулярной прямой общего положения (рис. 125, *б*)

Если плоскость проецирующая, проекции линий уровня совпадают со следом плоскости, перпендикулярность устанавливается по отношению к следу плоскости. Горизонтальная проекция перпендикуляра к горизонтально-проецирующей плоскости строится перпендикулярно горизонтальному следу плоскости (рис. 126, *a*). Прямая,

перпендикулярная горизонтально-проецирующей плоскости, занимает положение горизонтальной линии уровня.

Аналогично, фронтальная проекция перпендикуляра к фронтально-проецирующей плоскости строится перпендикулярно фронтальному следу плоскости (рис. 126, б). Прямая, перпендикулярная фронтально-проецирующей плоскости, занимает положение фронтали.

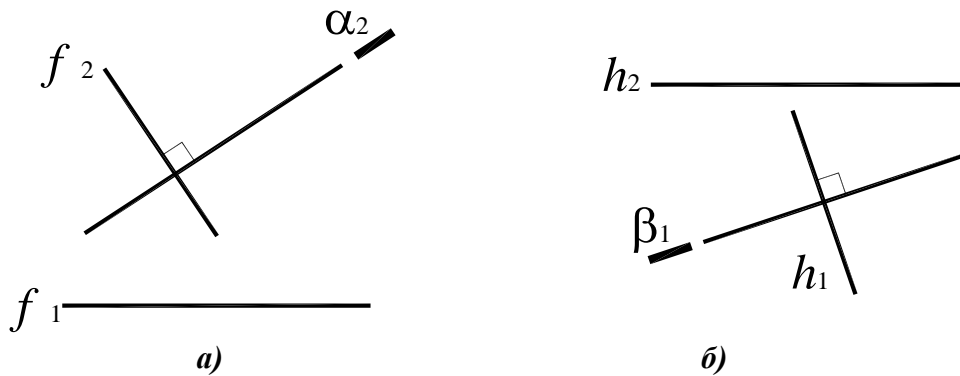
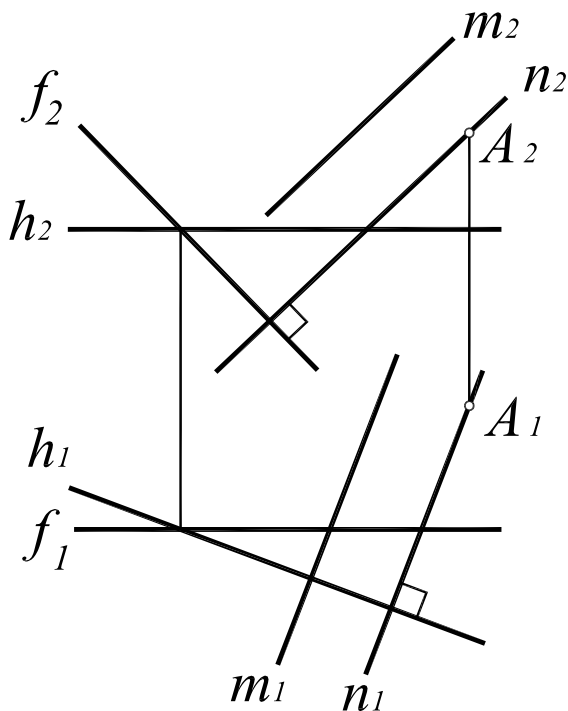


Рис. 126. Перпендикулярность прямой и проецирующей плоскости:

- а – построение прямой, перпендикулярной плоскости;
- б – построение плоскости, перпендикулярной прямой

#### 10.4. Взаимная перпендикулярность плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей сводится к построению перпендикулярных прямой и плоскости. Например, чтобы через произвольную точку  $A$  провести плоскость, перпендикулярную плоскости  $\alpha(f \times h)$  (рис. 127), достаточно построить прямую  $n$ , перпендикулярную плоскости  $\alpha(f \times h)$ :  $n_1 \perp h_1$ ;  $n_2 \perp f_2$ . Вторая прямая  $m$ , определяющая искомую плоскость, может быть задана произвольно – как пересекающая прямую  $n$  или параллельная ей.



Дано:  $\alpha(h \times f)$ ;  $A(A_1, A_2)$ .

Построить:  $A \in \beta \perp \alpha$ .

Решение:

$A \in n$ ;

$$n \perp \alpha(h \times f) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \perp h_1 \\ n_2 \perp f_2 \end{cases}$$

$m_1 \parallel n_1$ ;  $m_2 \parallel n_2$ ;

$\beta(n \times m) \perp \alpha(f \times h)$ .

Рис. 127. Перпендикулярность двух плоскостей

## 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Способы преобразования комплексного чертежа позволяют переходить от произвольных положений пространственных объектов к частным по отношению к плоскостям проекций, что упрощает решение ряда позиционных и метрических задач.

### 11.1. Способ замены плоскостей проекций

Способ замены плоскостей проекций состоит в том, что проецируемый объект остается неподвижным, а одна из плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$  заменяется новой, расположенной так, чтобы проецируемый объект по отношению к новой плоскости занял частное положение. При этом каждая новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна неизменяемой плоскости проекций. Кроме того, на новые плоскости проекций объект проецируется ортогонально. Таким образом, при решении задач способом замены плоскостей проекций необходимо выполнять следующие условия:

- каждая новая система должна представлять собой систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей;
- на новые плоскости объект проецируется ортогонально;
- расстояние от точки до неизменяемой плоскости сохраняется.

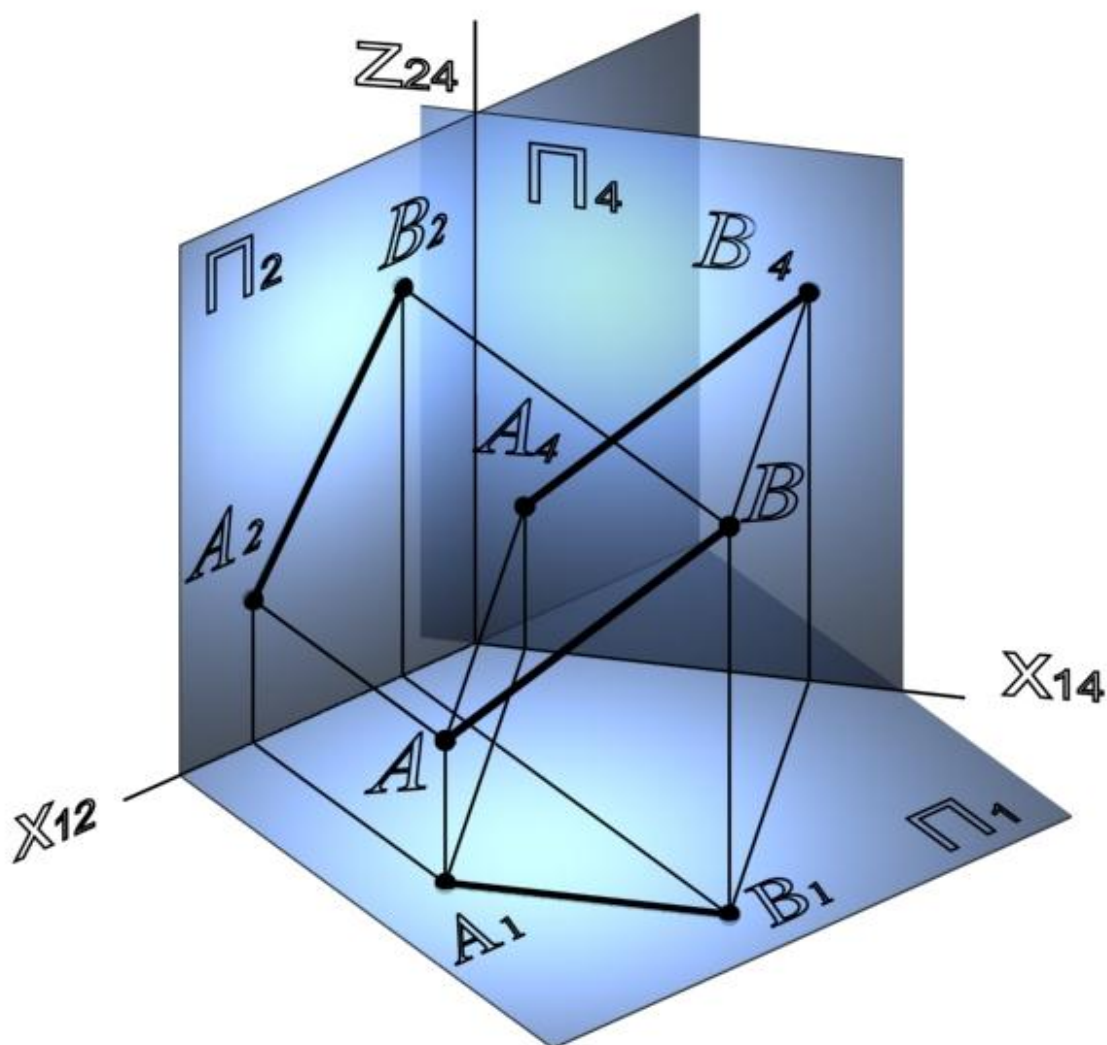
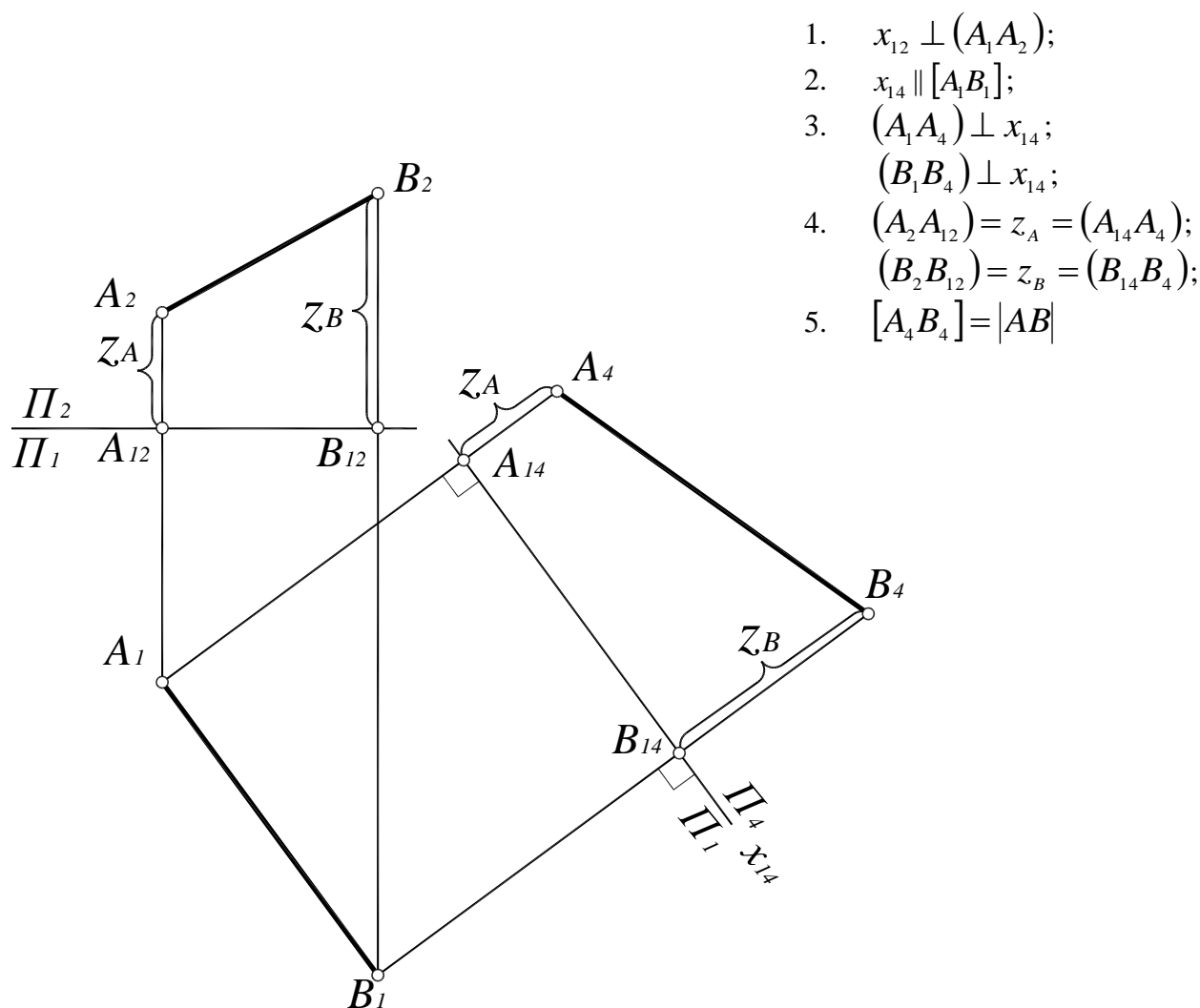


Рис. 128. Замена плоскостей проекций

Чтобы определить натуральную величину отрезка  $[AB]$  способом замены плоскостей проекций (рис. 128, 129), необходимо выбрать новую плоскость проекций таким образом, чтобы в новой системе плоскостей проекций отрезок занял положение линии уровня:

1. Зафиксировать положение системы плоскостей  $\Pi_1/\Pi_2$  с помощью оси  $x_{12} \perp A_1A_2$ .
2. Определить положение плоскости  $\Pi_4$  с помощью оси  $x_{14}$ . Чтобы отрезок в системе плоскостей  $\Pi_1/\Pi_4$  занял положение линии уровня, ось  $x_{14}$  проводится параллельно горизонтальной проекции отрезка  $[A_1B_1]$ .
3. Ортогонально спроецировать отрезок  $[AB]$  на плоскость  $\Pi_4$ . Для этого линии связи проводят перпендикулярно оси  $x_{14}$ , затем от оси  $x_{14}$  откладывают расстояние до заменяемой плоскости – координаты  $z$  точек  $A$  и  $B$ .



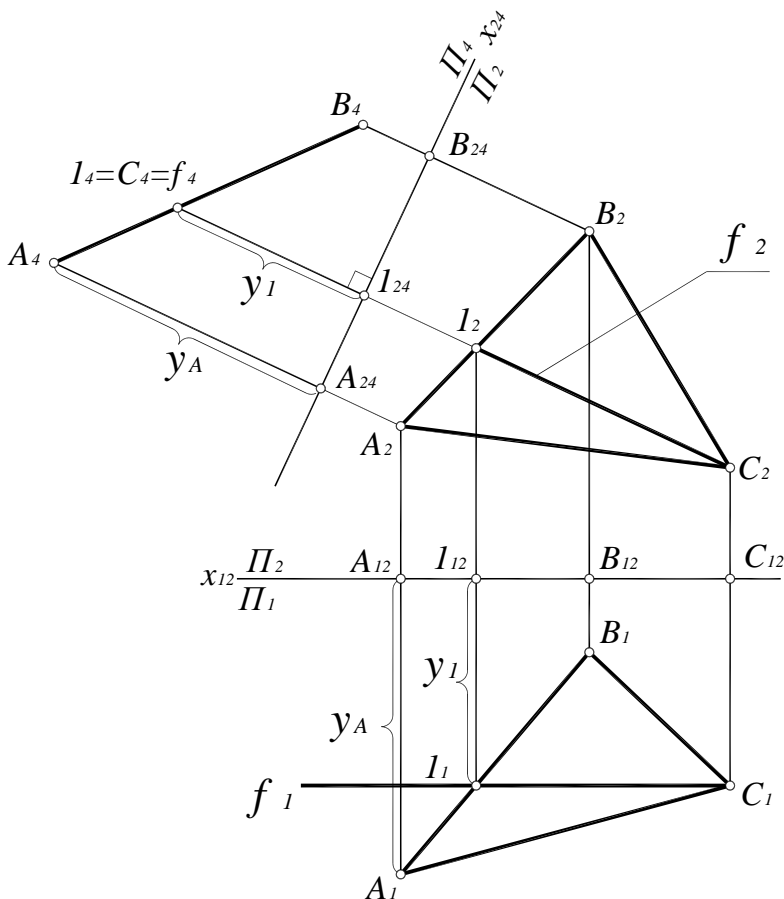
1.  $x_{12} \perp (A_1A_2)$ ;
2.  $x_{14} \parallel [A_1B_1]$ ;
3.  $(A_1A_4) \perp x_{14}$ ;  
 $(B_1B_4) \perp x_{14}$ ;
4.  $(A_2A_{12}) = z_A = (A_{14}A_4)$ ;  
 $(B_2B_{12}) = z_B = (B_{14}B_4)$ ;
5.  $[A_4B_4] = |AB|$

Рис. 129. Определение натуральной величины отрезка способом замены плоскостей проекций

Чтобы преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, новую плоскость проекций строят перпендикулярно линии уровня этой плоскости.

Рассмотрим преобразование плоскости общего положения  $\alpha(ABC)$  во фронтально-проецирующую плоскость (рис. 130). Для решения этой задачи способом замены плоскостей проекций необходимо выполнить замену плоскости  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ :

1. Зафиксировать положение системы плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  с помощью оси  $x_{12} \perp A_1A_2$ ;
2. Построить в плоскости  $\alpha(ABC)$  фронталь;
3. В соответствии с теоремой о проекциях прямого угла, построить новую ось  $x_{24} \perp f_1(C_2I_2)$ ;
4. Ортогонально спроецировать фронталь на плоскость  $\Pi_4$ . Для этого провести линию связи  $(I_2, I_4)$  перпендикулярно  $x_{24}$  и отложить от оси  $x_{24}$  расстояние до незаменяемой плоскости – координату  $y$  точек  $I$  и  $C$ . Поскольку  $y_I = y_C$ , фронталь в системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$  займет положение горизонтально-проецирующей прямой.
5. Проекция плоскости  $\alpha(ABC)$  на  $\Pi_4$  определится фронталью и точкой  $A$ . В системе плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_4$  плоскость  $\alpha(ABC)$  займет горизонтально-проецирующее положение. Проекцию точки  $B$  можно построить по координате  $y_B$  или на пересечении следа плоскости  $\alpha(ABC)$  на  $\Pi_4$  с линией связи  $(B_2, B_4)$ .



1.  $x_{12} \perp (A_1A_2)$ ;
2.  $f \in \alpha(ABC)$
3.  $x_{24} \perp f_2$ ;
4.  $(I_2I_4) \perp x_{24}$ ;  
 $(A_2A_4) \perp x_{24}$ ;
5.  $(I_1I_{12}) = y_I = (I_{24}I_4)$ ;  
 $(A_1A_{12}) = y_A = (A_{24}A_4)$ ;
6.  $\alpha(ABC) \perp \Pi_4$

Рис. 130. Преобразование плоскости  $\alpha(ABC)$  в проецирующее положение

При решении некоторых задач необходимо определить натуральную величину плоских объектов. Любой плоский объект проецируется без искажения на параллельную ему плоскость. Чтобы определить натуральную величину грани призмы способом замены плоскостей проекций, необходимо (рис. 131):



1. Зафиксировать положение системы плоскостей  $\Pi_1/\Pi_2$  с помощью оси  $x_{12}=A_2D_2 K_2$ .
2. Плоскость грани  $ABCD$  занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому выполняется замена плоскости  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4$ , параллельную грани  $ABCD$ . Новую ось  $x_{14}$  проводят параллельно  $A_1B_1C_1D_1$ .
3. Ортогонально спроецировать все вершины призмы на плоскость  $\Pi_4$ . Для этого проводят линии связи перпендикулярно оси  $x_{14}$ , затем от оси  $x_{14}$  откладывают расстояние до заменяемой плоскости – координаты  $z$  вершин призмы. Координаты  $z$  вершин нижнего основания  $A, D$  и  $K$  равны нулю, следовательно, точки  $A_4, D_4$  и  $K_4$  лежат на оси  $x_{14}$ . Координаты  $z$  вершин верхнего основания равны  $(A_2B_2)$ .
4. В системе плоскостей  $\Pi_1/\Pi_4$  грань  $ABCD$  занимает положение фронтальной плоскости уровня, следовательно, проецируется на  $\Pi_4$  в натуральную величину.

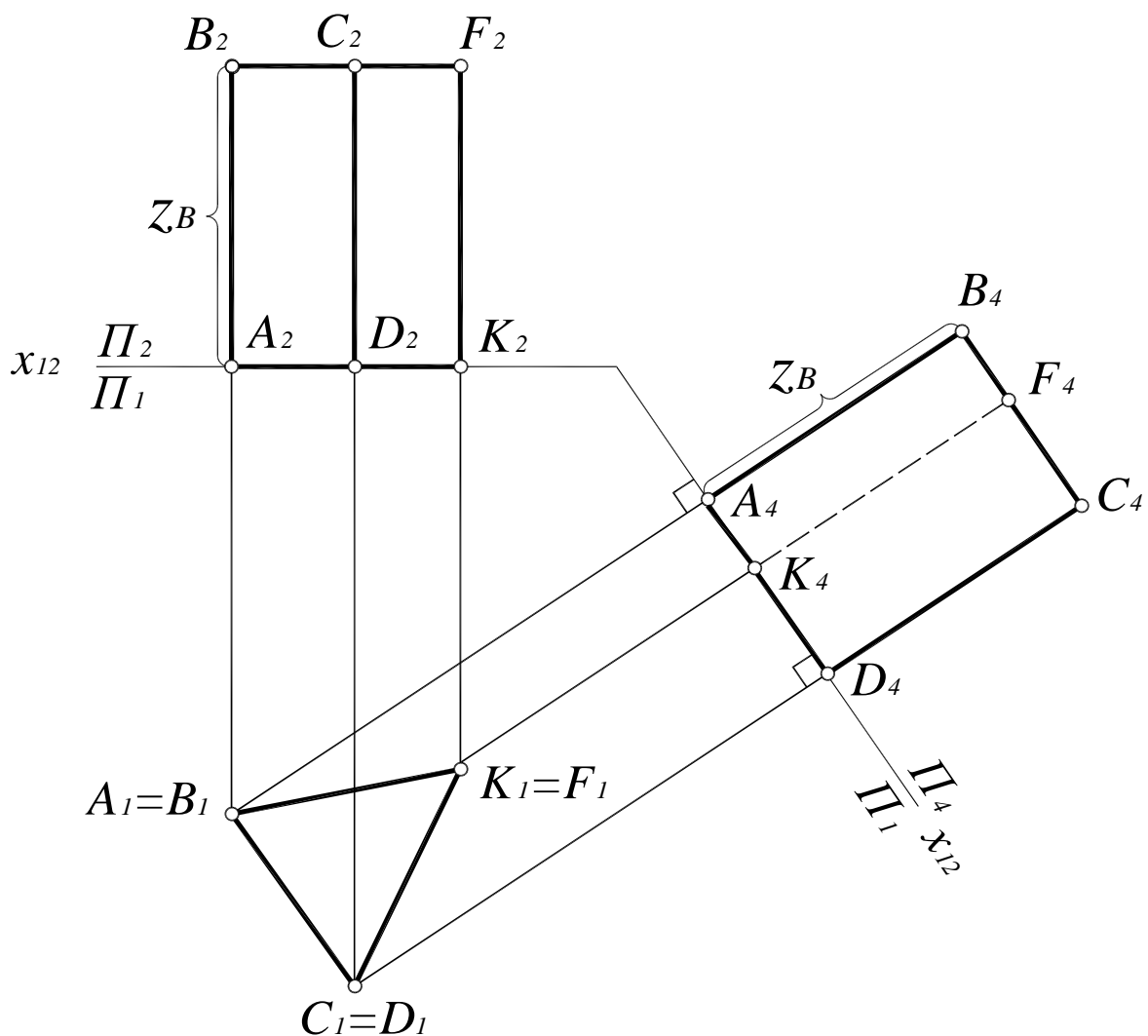


Рис. 131. Преобразование грани  $ABCD$  в положение плоскости уровня

## 11.2. Способ плоскопараллельного движения

В отличие от способа замены плоскостей проекций, когда данный объект оставался неподвижным, а плоскости проекций изменялись, можно добиться того же результата обратным путем. Оставив плоскости проекций неподвижными, можно перемещать объект в пространстве как неразрывную систему до желаемого положения.

Такое перемещение объекта в пространстве можно выполнить с помощью плоскопараллельного движения.

Плоскопараллельным движением объекта в пространстве называется такое его перемещение, при котором все точки объекта перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.

При этом совершенно безразличен вид траектории перемещения точек объекта от исходного до частного положения. Простым примером плоскопараллельного движения является вращение объекта вокруг проецирующей оси. При этом точки описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения и, следовательно, параллельных между собой.

При решении задач чаще всего применяют плоскопараллельное движение относительно одной из плоскостей проекций. При этом все точки объекта перемещаются в плоскостях уровня, то есть в плоскостях, параллельных плоскостям проекций. Отсюда следует, что при плоскопараллельном движении относительно плоскости проекций  $\Pi_1$  все точки объекта перемещаются в горизонтальных плоскостях уровня, а при плоскопараллельном движении относительно  $\Pi_2$  – во фронтальных плоскостях уровня (рис. 132).

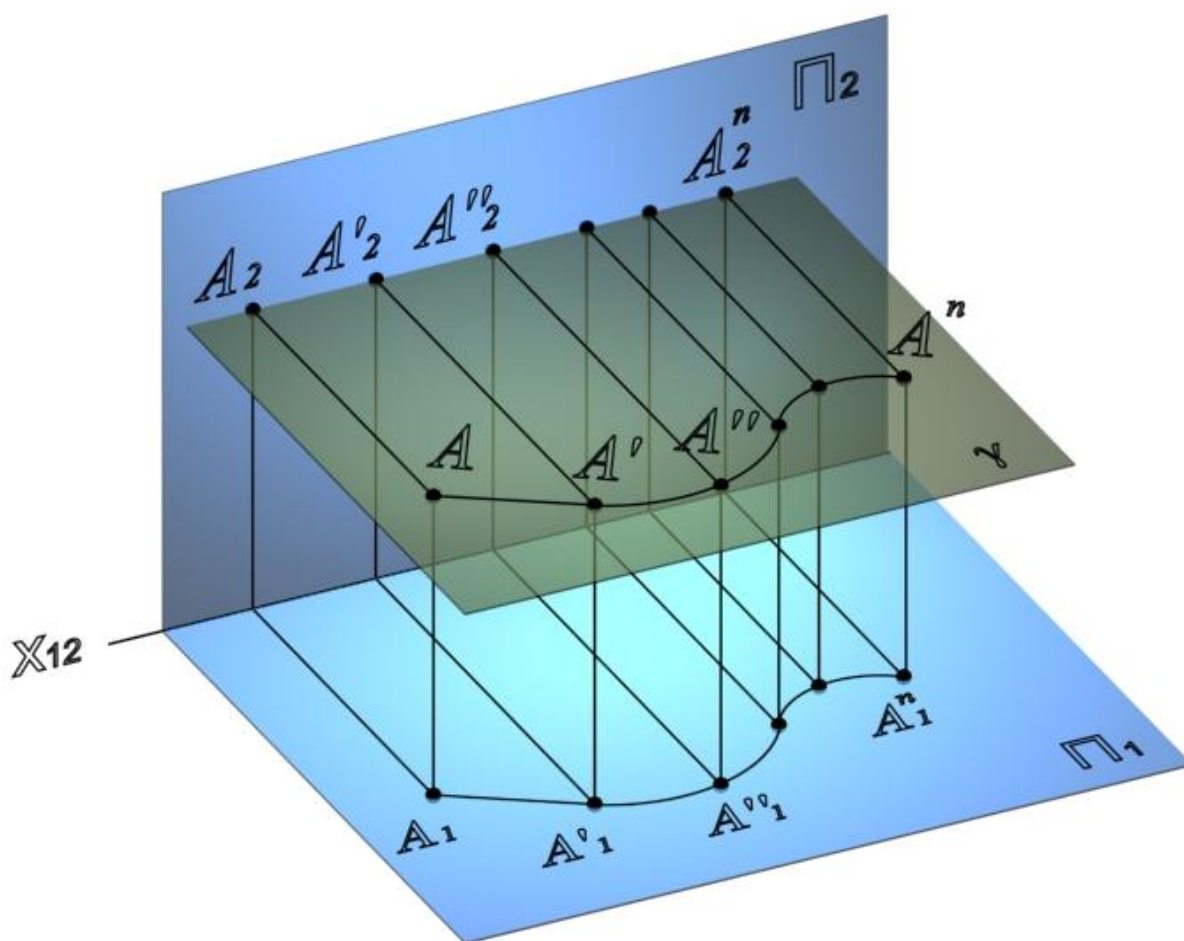


Рис. 132. Плоскопараллельное движение точки  $A$  относительно горизонтальной плоскости проекций

**Теорема.** Если объект совершает плоскопараллельное движение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ , то фронтальные проекции его точек будут двигаться по прямым, перпендикулярным к линиям связи; при этом горизонтальная проекция объекта движется по плоскости проекций, оставаясь равной самой себе.

Для доказательства теоремы рассмотрим плоскопараллельное движение отрезка  $[AB]$  ( $[A_1B_1]$ ,  $[A_2B_2]$ ) относительно плоскости  $\Pi_1$  (рис. 133).

Точка  $A$  перемещается в плоскости  $\alpha(\alpha_2) \parallel \Pi_1$ , точка  $B$  – в плоскости  $\beta(\beta_2) \parallel \Pi_1$ . Следовательно, фронтальные проекции точек  $A_2$  и  $B_2$  будут двигаться по прямым – следам плоскостей движения точек  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ :

$$A \in \alpha, A_2 \in \alpha_2, \text{ но } \alpha_2 \perp (A_1A_2), \text{ значит } (A_2A'_2) \perp (A_1A_2).$$

Но плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  являются горизонтальными плоскостями уровня и, следовательно,  $\alpha_2 \parallel \beta_2$ :

$$\beta_2 \perp (B_1B_2), \text{ значит } (B_2B'_2) \perp (B_1B_2).$$

Чем и доказывается первая часть теоремы.

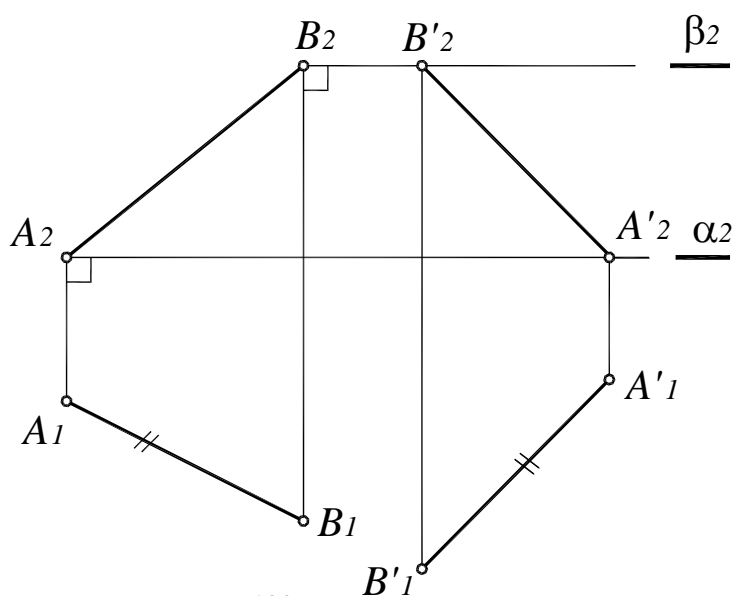
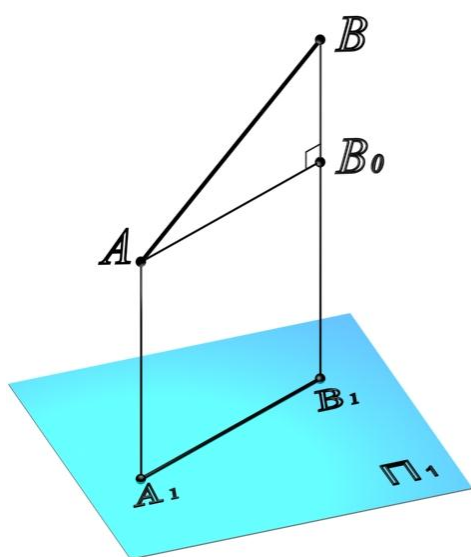


Рис. 133. Доказательство первой части теоремы



Для доказательства второй части теоремы проведем через точку  $A$  (рис. 134) прямую  $(AB_0) \parallel [A_1B_1]$ . В полученном прямоугольном треугольнике  $AB_0B$  катет  $(B_0B) = (BB_1) - (AA_1) = \text{const}$ , как разность высот точек  $A$  и  $B$  или, что то же самое, как разность высот плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . При движении отрезка  $[AB]$  величина  $(B_0B)$  остается постоянной. Также не изменится при движении отрезок  $[AB]$ , а следовательно, треугольник  $AB_0B$  остается при плоскопараллельном движении отрезка  $[AB]$ , неизменным, постоянным.

Рис. 134. Доказательство второй части теоремы

Таким образом, горизонтальная проекция  $[A_1B_1]$  отрезка  $[AB]$  при плоскопараллельном движении относительно плоскости проекций  $\Pi_1$  будет перемещаться по плоскости  $\Pi_1$ , оставаясь все время равной себе.

Аналогичным образом можно доказать справедливость этой теоремы при плоскопараллельном движении объекта относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ .

Применяя плоскопараллельное перемещение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$  как способ преобразования комплексного чертежа, на основании доказанной теоремы поступают следующим образом:

1. Горизонтальную проекцию данного геометрического объекта вычерчивают без изменения, располагая ее на чертеже так, как требуется для решения задачи.
2. Фронтальную проекцию определяют по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции.

В случае плоскопараллельного перемещения объекта относительно плоскости проекций  $\Pi_2$  горизонтальные проекции точек двигаются по прямым, перпендикулярным к линиям связи, а фронтальная проекция перемещается по плоскости проекций, оставаясь равной самой себе.

Применяя плоскопараллельное перемещение относительно плоскости проекций  $\Pi_2$  как способ преобразования комплексного чертежа, поступают следующим образом:

1. Фронтальную проекцию данного геометрического объекта вычерчивают без изменения, располагая ее на чертеже желательным образом, так, как требуется для решения задачи.
2. Горизонтальную проекцию определяют по линиям связи на основании новой фронтальной проекции.

Рассмотрим преобразование отрезка  $[AB]$  общего положения в положение фронтальной линии уровня, а затем в положение горизонтально–проецирующей прямой способом плоскопараллельного движения (рис. 135, 136).

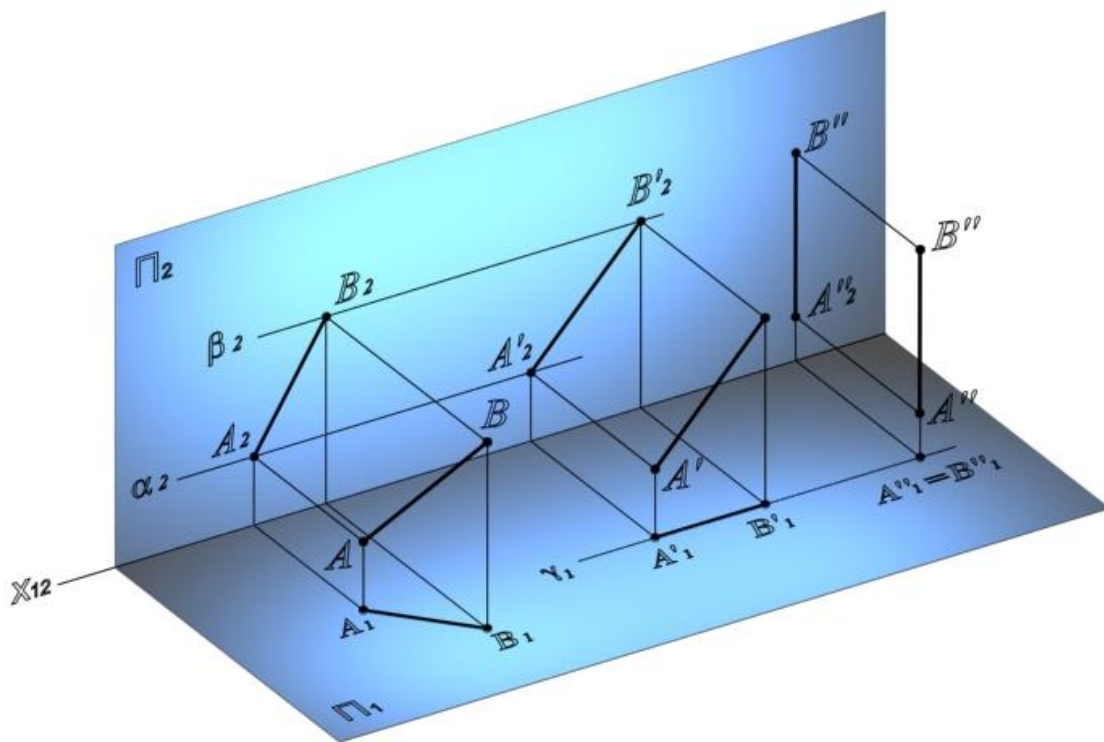
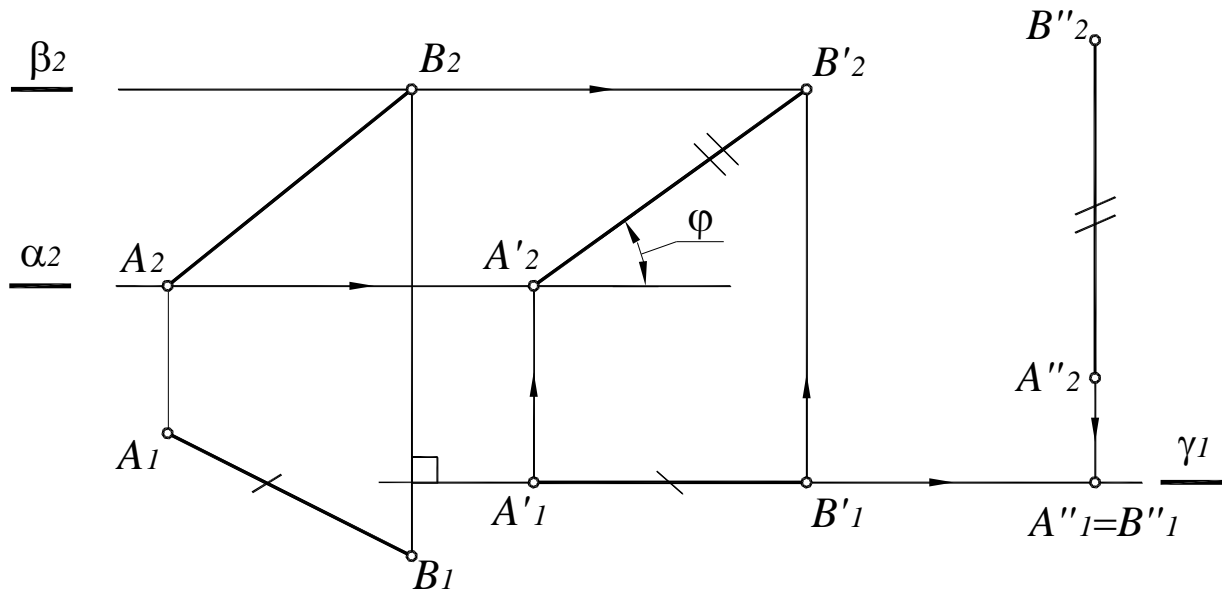


Рис. 135. Плоскопараллельное движение отрезка  $AB$  общего положения

Сначала производится плоскопараллельное движение отрезка  $[AB]$  относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ . Для этого новую горизонтальную проекцию отрезка  $[A_1'B_1']=[A_1B_1]$  нужно разместить так, как требуется для решения задачи, а именно  $[A_1'B_1'] \perp (B_1 B_2)$ .



**Рис. 136. Преобразование отрезка  $AB$  общего положения в положение проецирующей прямой способом плоскопараллельного движения на комплексном чертеже**

Фронтальные проекции точек  $A_2$  и  $B_2$  перемещаются по прямым – следам плоскостей движения точек  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ :

$$\alpha_2 \parallel \beta_2 \parallel \Pi_1,$$

и определяются по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции отрезка  $[A_1'B_1']$ .

В результате отрезок  $[AB]$  переведен в положение фронтальной линии уровня и определены его натуральная величина  $[A_2'B_2']=[AB]$  и угол наклона  $\varphi$  к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ .

Далее производится плоскопараллельное движение отрезка  $AB$  относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ . В этом случае фронтальная проекция отрезка располагается так, как требуется для решения задачи, а именно:

$$[A_2''B_2'']=(A_1A_2); [A_2''B_2'']=[A_2'B_2'].$$

Горизонтальная проекция перемещается в плоскости  $\gamma(\gamma_1)$ ,  $\gamma \parallel \Pi_2$  и определяется по линиям связи в соответствии с новой фронтальной проекцией  $[A_2''B_2'']$ . Тогда горизонтальной проекцией отрезка будет точка  $A''_1=B''_1$ , а сам отрезок займет горизонтально-проецирующее положение, что и требовалось в данной задаче.

Рассмотрим определение натуральной величины треугольника  $ABC$  способом плоскопараллельного движения (рис. 137).

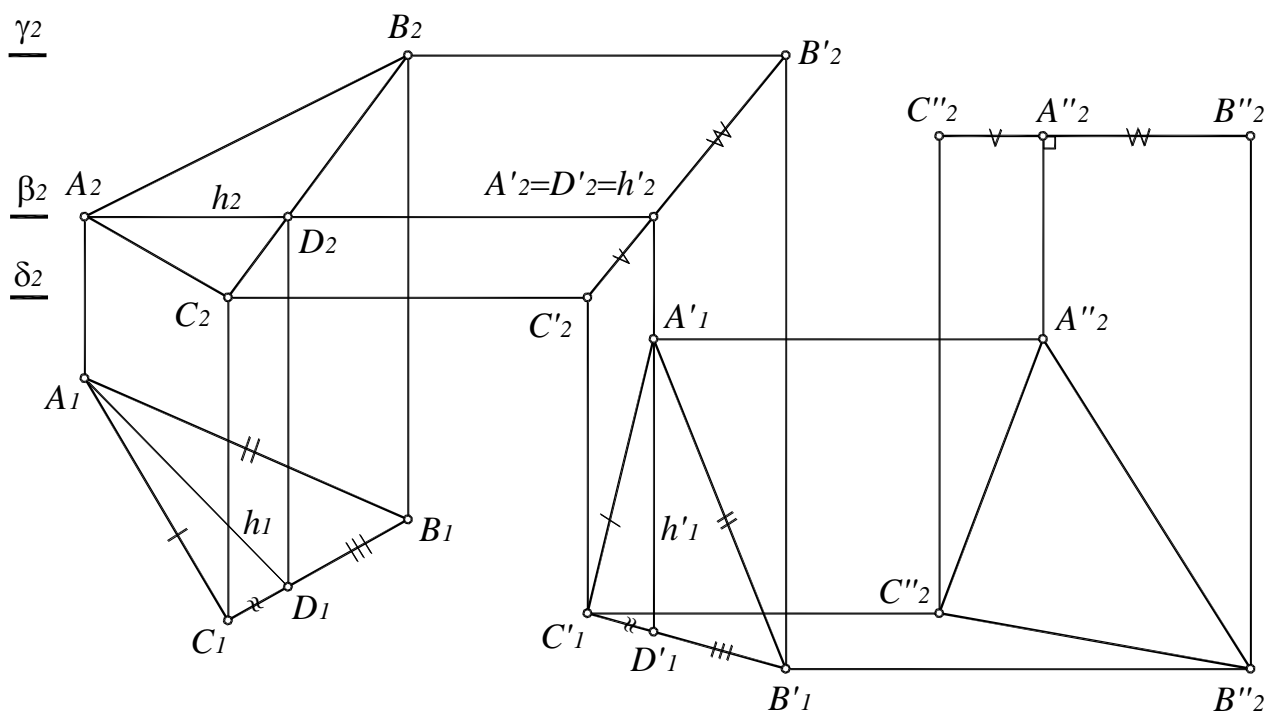


Рис. 137. Преобразование плоскости  $\alpha(ABC)$  общего положения в плоскость уровня способом плоскопараллельного движения

Данная задача решается в два этапа: сначала плоскость переводится из общего положения в проецирующее, а затем – в положение плоскости уровня.

Сначала производится плоскопараллельное движение плоскости  $\alpha(ABC)$  относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ . Для этого в плоскости  $\alpha(ABC)$  проводится горизонталь  $h(h_1, h_2)$  и строится новая горизонтальная проекция плоскости  $\alpha'(A'B'C')$ , конгруэнтная проекции  $\alpha(ABC)$ , так, чтобы горизонталь  $h'(h'_1, h'_2)$  стала проецирующей прямой, то есть  $h'_1 \perp (A_1 A_2)$ . Тогда фронтальные проекции точек  $A_2, B_2, C_2$  будут перемещаться по прямым – следам плоскостей движения точек  $\delta_2, \beta_2$  и  $\gamma_2$ :

$$\delta_2 \parallel \beta_2 \parallel \gamma_2; \quad \beta_2 \perp B_1 B_2;$$

и определяются по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции плоскости  $\alpha'(A'_1 B'_1 C'_1)$ . Новая фронтальная проекция плоскости  $\alpha'_2(A'_2 B'_2 C'_2)$  представляет собой отрезок прямой.

Вторым плоскопараллельным движением, но уже относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ , плоскость  $\alpha(ABC)$  преобразуется в горизонтальную плоскость уровня. Для этого строится новая фронтальная проекция плоскости  $\alpha''_2(A''_2 B''_2 C''_2)$  в виде горизонтального отрезка, для которого  $[C''_2 A''_2] = [C'_2 A'_2]$  и  $[A''_2 B''_2] = [A'_2 B'_2]$ . Новая горизонтальная проекция плоскости  $\alpha''_1(A''_1 B''_1 C''_1)$  определяется по линиям связи на основании новой фронтальной проекции плоскости  $\alpha''_2(A''_2 B''_2 C''_2)$ .

Полученная горизонтальная проекция плоскости  $\alpha''_1(A''_1 B''_1 C''_1)$  определяет ее натуральную величину:  $\Delta A''_1 B''_1 C''_1 = |\Delta ABC|$ .

## 11.3. Вращение

Вращение – это движение по окружности вокруг некоторой оси. При преобразовании комплексного чертежа способом вращения плоскости проекций остаются неизменными, а проецируемый объект перемещается таким образом, чтобы он занял какое-либо частное положение.

### *Элементы вращения:*

- **Ось вращения** – прямая, вокруг которой осуществляется вращение.
- **Плоскость вращения** – плоскость, проходящая через вращаемую точку и перпендикулярная оси вращения (плоскость окружности, которую описывает точка при вращении).
- **Центр вращения** – точка пересечения оси вращения и плоскости вращения.
- **Радиус вращения** – кратчайшее расстояние от вращаемой точки до центра (оси) вращения. Радиус всегда перпендикулярен оси вращения.
- **Угол поворота** – угол между начальным и конечным положением радиуса вращения.

При вращении системы точек вокруг одной оси все точки вращаются в плоскостях, параллельных между собой, поворачиваются на один и тот же угол в одном и том же направлении, поэтому вращение является частным случаем плоскопараллельного перемещения. Точки, находящиеся на оси вращения остаются неподвижными.

### *11.3.1. Вращение вокруг проецирующей прямой*

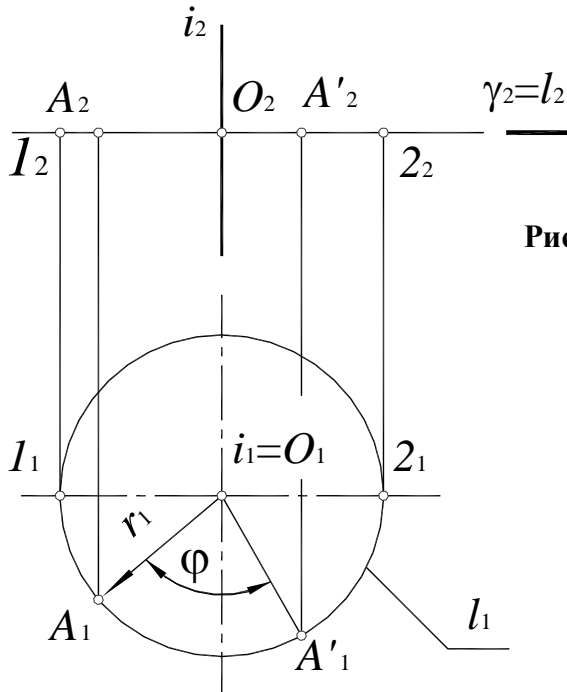
При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций, ее фронтальная проекция перемещается перпендикулярно линиям связи, а горизонтальная – по окружности, центром которой является горизонтальная проекция оси вращения.

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, ее горизонтальная проекция перемещается перпендикулярно линиям связи, а фронтальная – по окружности, центром которой является фронтальная проекция оси вращения (рис. 138).

Рассмотрим вращение точки  $A(A_1, A_2)$  вокруг горизонтально-проецирующей прямой  $i(i_1, i_1)$ .

При вращении точка описывает окружность, плоскость которой  $\gamma(\gamma_2)$  перпендикулярна оси  $i(i_1, i_1)$ . Поскольку  $i \perp \Pi_1$  а  $\gamma(\gamma_2) \perp i$ ,  $\gamma(\gamma_2) \parallel \Pi_1$  и угол поворота  $\varphi$  проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину.

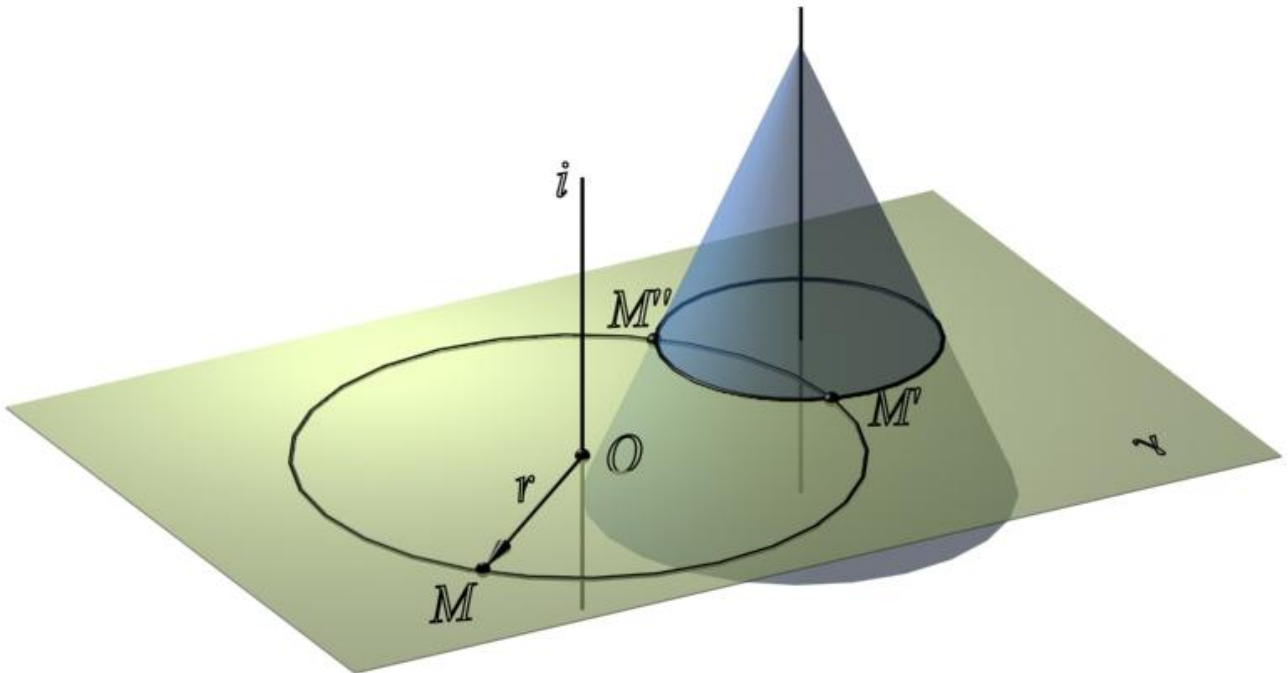
Таким образом, при вращении вокруг горизонтально-проецирующей прямой  $i(i_1, i_2)$   $A_1$  перемещается по окружности  $l_1$  с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $r=r_1=|O_1A_1|$ ,  $A_2$  перемещается по фронтальному следу плоскости  $\gamma_2$  в пределах отрезка  $[1_2, 2_2]$ .



**Рис. 138. Вращение точки вокруг горизонтально-проецирующей прямой:**

$i(i_1i_2) \perp \Pi_1$  – ось вращения;  
 $\gamma(\gamma_2) \perp i(i_1i_2)$  – плоскость вращения;  
 $O = \gamma(\gamma_2) \times i(i_1i_2)$  – центр вращения;  
 $r = r_1 = |O_1A_1|$  – радиус вращения;  
 $l$  – траектория перемещения точки  $A$ ;  
 $\varphi$  – угол поворота точки  $A$

Способом вращения вокруг проецирующей прямой можно совместить точку с плоскостью или поверхностью. Рассмотрим совмещение точки  $M$  с поверхностью прямого кругового конуса, поставленного основанием на плоскость  $\Pi_1$  (рис. 139).



**Рис. 139. Совмещение точки с поверхностью конуса**

Точка  $M$ , вращаясь вокруг горизонтально-проецирующей оси  $i(i_1i_2)$ , описывает окружность  $l$ , лежащую в горизонтальной плоскости уровня  $\gamma(\gamma_2)$  (рис. 140). Точка  $M$  должна также принадлежать поверхности конуса, следовательно, необходимо определить линию пересечения  $n$  поверхности конуса с плоскостью вращения  $\gamma(\gamma_2)$ . Затем определяются точки пересечения полученной линии  $n$  и окружности  $l$  – траектории перемещения точки  $M$ . Полученные точки  $M'$  и  $M''$  являются точками совмещения точки  $M$  с поверхностью конуса.



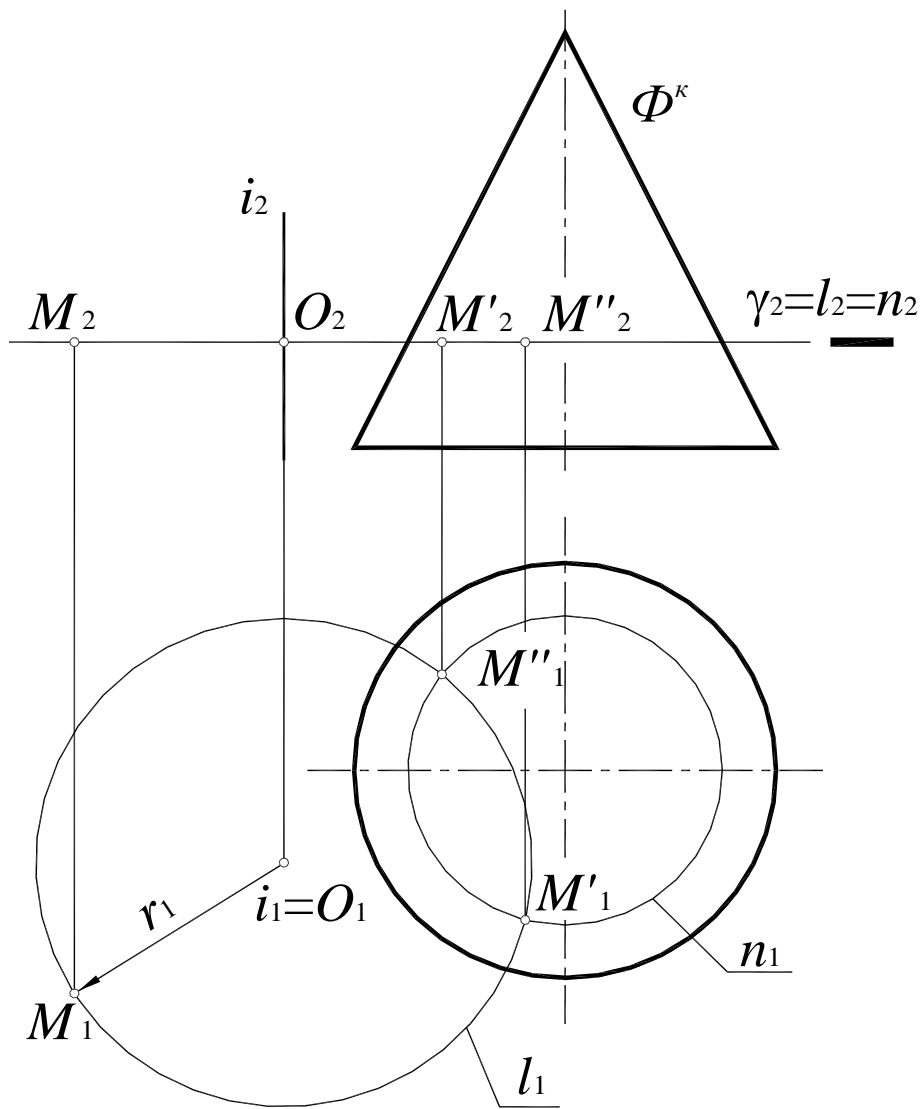


Рис. 140. Совмещение точки с поверхностью конуса на комплексном чертеже

**Дано:**  $\Phi^k$  – поверхность конуса,  
 $M(M_1M_2)$ ,  
 $i(i_1i_2) \perp \Pi_1$ .

**Совместить**  $M(M_1M_2)$  с  $\Phi^k$ .

**Решение:**

1.  $M(M_1M_2) \in \gamma(\gamma_2) \perp i(i_1i_2)$ ;  
 $O_2 = \gamma_2 \times i_2$ ;  $O_1 = i_1$ ;  $r = |O_1M_1|$ ;  $l_1$  – окружность радиуса  $r_1$ ;  $l_2 = \gamma_2$ ;
2.  $n = \Phi^k \cap \gamma(\gamma_2)$ ;
3.  $l \times n = M', M''$  – точки совмещения  $M(M_1, M_2)$  с поверхностью конуса  $\Phi^k$ .

### 11.3.2. Вращение вокруг линии уровня (совмещение)

При решении метрических задач способом вращения вокруг линии уровня отрезок прямой, плоскость, плоскую фигуру и т. д. совмещают с плоскостью уровня. Заданный объект проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения. На этом способе основано построение разверток цилиндрических и призматических поверхностей способом раскатки.

Рассмотрим способ вращения точки  $B$  вокруг горизонтали (рис. 141).

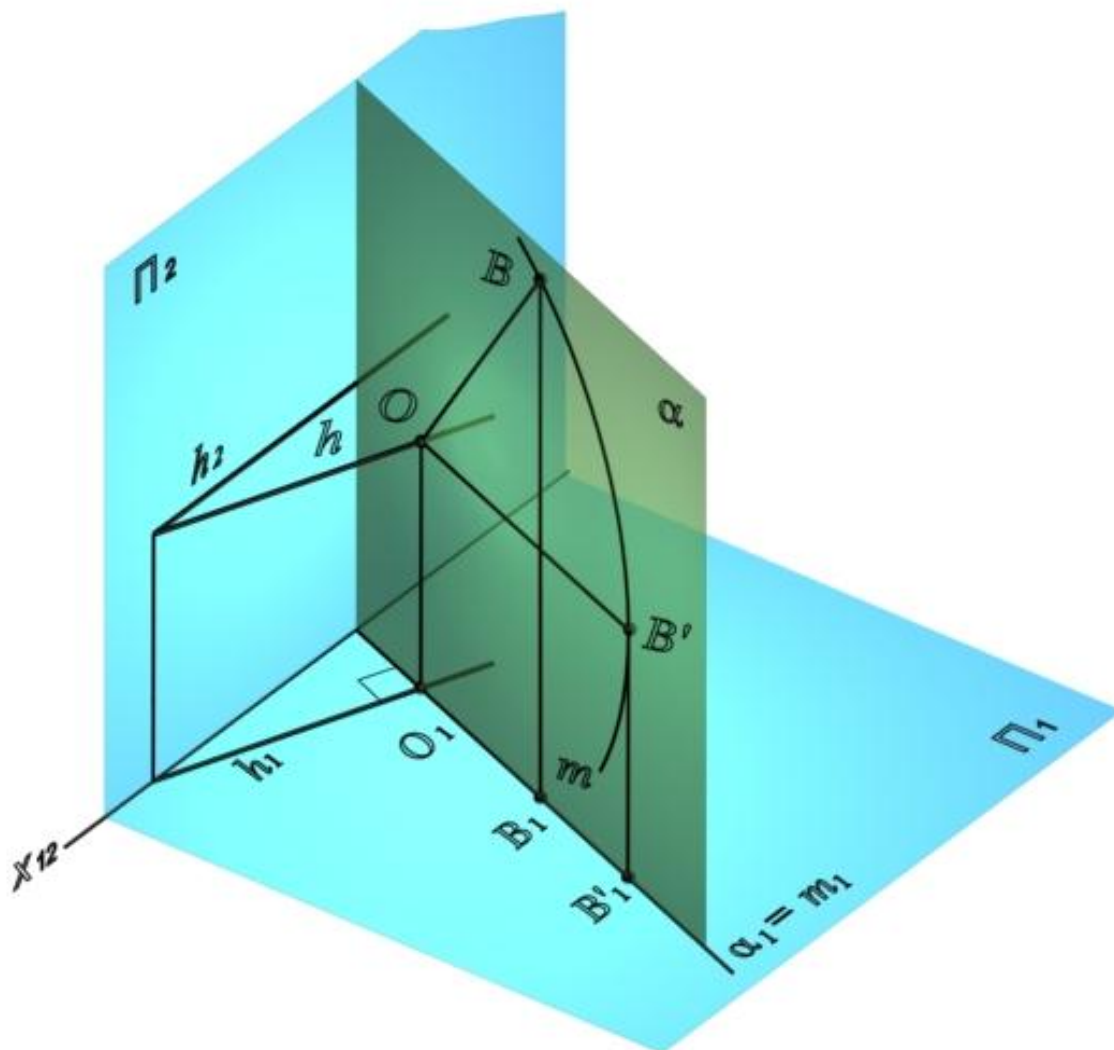


Рис. 141. Вращение точки вокруг горизонтали

Точка  $B$ , вращаясь вокруг горизонтали  $h(h_1h_2)$ , перемещается в плоскости вращения  $\alpha$ , описывая дугу окружности  $m$ . Эта плоскость перпендикулярна оси вращения, и, следовательно, является горизонтально-проецирующей, поэтому горизонтальная проекция дуги окружности, описываемой точкой  $B$ , представляет собой отрезок, перпендикулярный горизонтальной проекции горизонтали. Таким образом, при вращении вокруг горизонтали горизонтальная проекция точки  $B$  перемещается по горизонтальному следу плоскости вращения  $\alpha_1$ .

Если радиус  $[OB]$  займет положение, параллельное плоскости  $\Pi_1$ , то проекция  $[OB']$  окажется равной натуральной величине отрезка  $[OB]$ .

Рассмотрим вращение точки  $B$  вокруг горизонтали на комплексном чертеже (рис. 142):

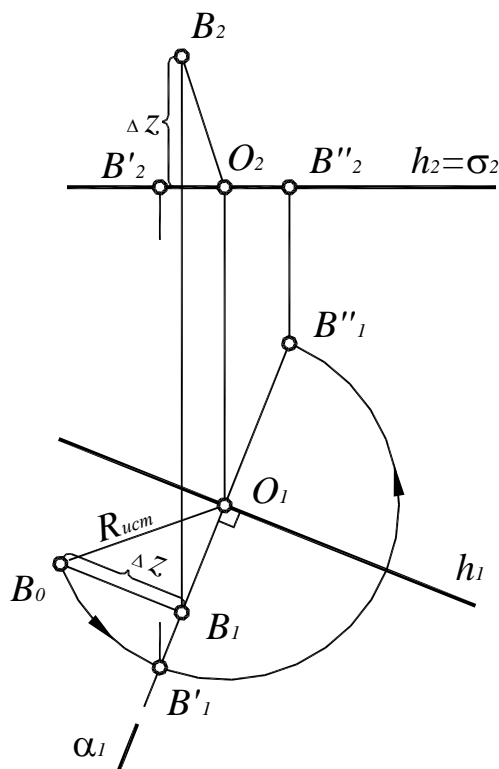


Рис. 142. Вращение точки вокруг горизонтали

**Дано:**  $B(B_1B_2)$ ,

$\sigma(\sigma_2)$ ,

$h(h_1h_2)$ ,  $h \in \sigma$ .

**Совместить:**  $B(B_1B_2)$  с плоскостью  $\sigma // \Pi_1$ .

**Решение:**

1. Элементы вращения:  $h(h_1h_2)$  – ось вращения;

$\alpha(\alpha_1) \perp h(h_1h_2) \Rightarrow \alpha(\alpha_1) \perp \Pi_1$  и  $\alpha_1 \perp h_1$  – плоскость вращения;

$O = \alpha \cap h$  – центр вращения;

$R = [OB]$  – радиус вращения.

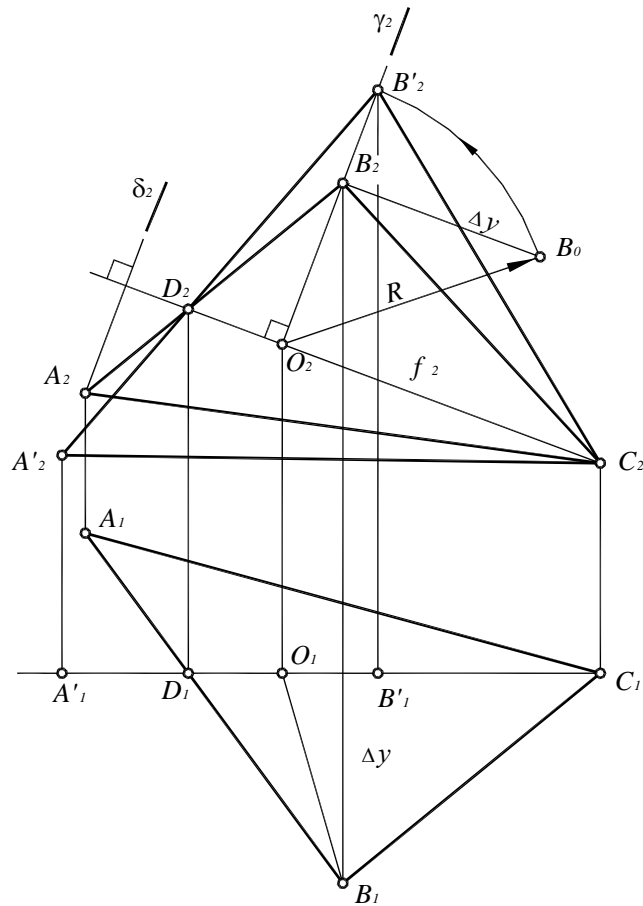
2. Определить натуральную величину радиуса вращения  $OB$  способом треугольника (см. п. 4.4):  $O_1B_1$  – один катет,  $B_0B_1 = \Delta z$  – второй катет, гипотенуза  $B_0O_1 = [OB]$ .

3. Горизонтальные проекции искоемых точек совмещения  $B'_1$  и  $B''_1$ , получаются, если отложить на горизонтальной проекции плоскости вращения  $\alpha_1$  натуральную величину радиуса вращения  $R = [OB]$  в обе стороны. Фронтальные проекции этих точек принадлежат фронтальной проекции плоскости вращения.

Рассмотрим определение натуральной величины треугольника  $ABC$  вращением вокруг фронтали до совмещения с фронтальной плоскостью уровня (рис. 143):

1. В плоскости треугольника  $ABC$  –  $\beta(\Delta ABC)$  провести фронталь  $f(CD)$ .

2. При вращении вокруг фронтали  $f(CD)$  точка  $C$  остается неподвижной, поскольку находится на оси вращения, поэтому достаточно повернуть точки  $A$  и  $B$ .



**Рис.143. Определение натуральной величины треугольника  $ABC$  способом вращения вокруг фронтали  $f(AD)$**

Элементы вращения точки  $B$ :  $f(CD) \parallel \Pi_2$  – ось вращения;

$\gamma(\gamma_2) \perp f(CD) \Rightarrow \gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2$  – плоскость вращения;

$O = \gamma \cap f$  – центр вращения;

$R = [O_2B_2]$  – радиус вращения.

3. Определить натуральную величину радиуса вращения  $OB$  способом треугольника (см. п. 5.6):  $O_2B_2$  – один катет,  $O_2B_0 = \Delta y$  – второй катет, гипотенуза  $O_2B_0 = [OB]$ .

4. Отложить натуральную величину радиуса вращения на фронтальной проекции плоскости вращения  $\gamma_2$ . Горизонтальная проекция точки  $B'$  совпадает с горизонтальной проекцией фронтали  $f(AD)$ . Полученная точка  $B'$  – новое положение точки  $B$ , совмещенной с фронтальной плоскостью уровня.

5. Для получения нового положения точки  $A$  строится фронтальный след ее плоскости вращения  $A_2 \in \delta_2 \parallel \gamma_2$ . Фронтальная проекция совмещенного положения точки  $A$  – точка  $A'_2$  определяется как точка пересечения следа плоскости вращения и прямой  $B'_2D_2$ :  $A'_2 = B'_2D_2 \times \delta_2$ . Горизонтальная проекция точки  $A'$  определяется по линии связи на горизонтальной проекции фронтали  $f(AD)$ .

6. Треугольник  $A'B'C$  совмещен с фронтальной плоскостью уровня  $\beta(\beta)_1$ , следовательно,  $A'_2B'_2C_2$  – натуральная величина треугольника  $ABC$ .

## 12. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Разверткой называется фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью.

Представляя поверхность в виде гибкой, но нерастяжимой пленки, можно говорить о таком преобразовании поверхности, при котором поверхность совмещается с плоскостью без складок и разрывов.

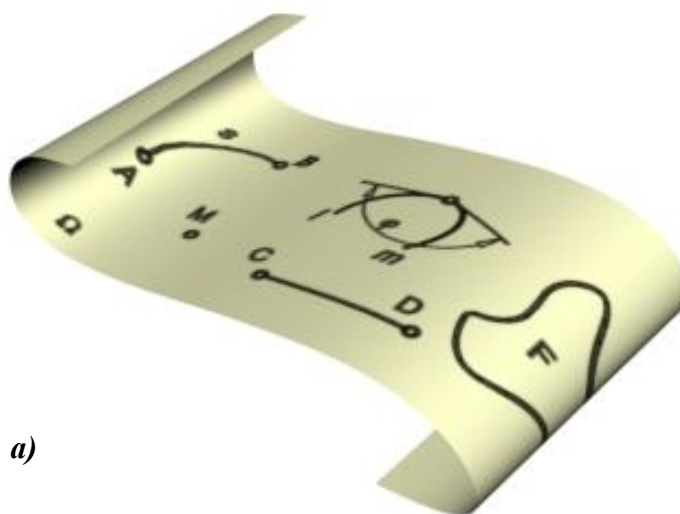
Поверхности, которые допускают такое преобразование, называются развертываемыми.

Поверхности, которые не могут быть наложены на плоскость без складок и разрывов, называются неразвертываемыми.

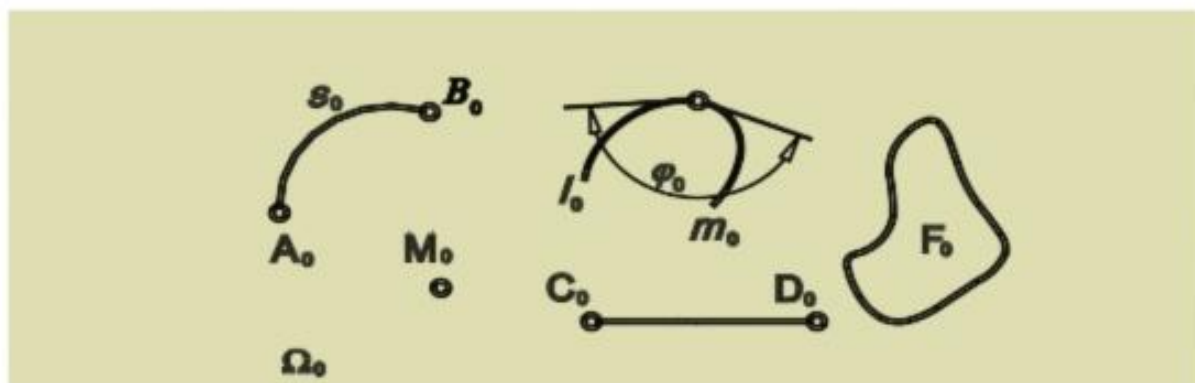
Построение разверток поверхностей представляет собой важную техническую задачу и имеет большое практическое значение при конструировании различных изделий из листового материала, так как в промышленности применяется много конструкций в виде сосудов и трубопроводов, выполненных из листового материала способом изгибания. Одним из важных этапов в проектировании таких конструкций является построение разверток.

При этом необходимо отметить, что часто приходится изготавливать из листового материала не только развертываемые поверхности, но и неразвертываемые поверхности. В этом случае неразвертываемую поверхность разбивают на части, которые можно заменить развертываемыми поверхностями, а затем строят развертки этих частей.

Если рассматривать поверхность и ее развертку как точечные множества, то между этими двумя множествами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Значит, каждой точке на поверхности соответствует единственная точка развертки, каждой линии соответствует линия на развертке и наоборот.



a)



б)

Рис. 144. Получение развертки поверхности:

*a* – поверхность; *б* – развертка поверхности

Указанное взаимно однозначное соответствие обладает рядом весьма важных свойств, которые заключаются в следующем:

- длины двух соответствующих линий развертки и поверхности равны между собой;
- углы, образованные линиями на развертке, и углы между соответствующими линиями на поверхности равны;
- замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

Эти свойства коротко можно выразить следующим образом: поверхность  $\Omega$  называется развертывающейся на плоскость  $\Omega_0$ , если между их точками  $M$  и  $M_0$  (рис. 144) можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняются длины линий, расположенных на поверхности, величины углов между линиями и площади фигур, ограниченных замкнутыми линиями.

Таким образом, длина  $s$  дуги  $AB$  равна длине  $s_0$  дуги  $A_0B_0$ , угол  $\varphi$  равен углу  $\varphi_0$  и площадь  $F$  равна площади  $F_0$ .

После этого развертку можно определить как такое геометрическое преобразование поверхности в плоскую фигуру, которое является взаимно однозначным и обладает указанными ранее свойствами.

Также необходимо отметить еще два важных свойства:

- прямая линия на поверхности переходит в прямую на развертке;
- параллельные прямые переходят тоже в параллельные прямые.

Рассмотрим простой пример, на котором можно легко видеть указанные основные свойства.

На рис 145 изображены конус вращения и его развертка, имеющая вид кругового сектора. Прямолинейная образующая ( $SA$ ) на конусе переходит в соответствующую ей прямую ( $S_0A_0$ ). Положение точки  $S_0$  выбирается произвольно. Длина кривой  $q$  равна длине соответствующей ей кривой  $q_0$  на развертке. Угол между ( $SA$ ) и касательной  $t$  в точке  $A$  и являющийся прямым, переходит в равновеликий угол между ( $S_0A_0$ ) и касательной  $t_0$ . Наконец, площадь поверхности конуса и площадь кругового сектора развертки равны между собой.

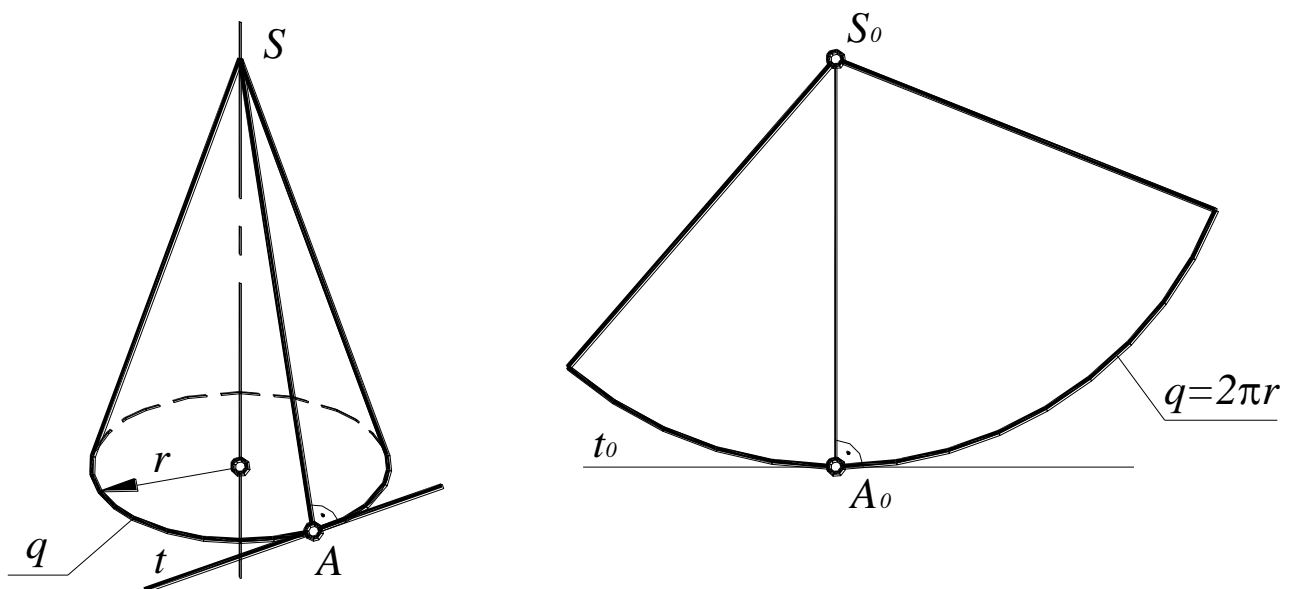


Рис. 145. Поверхность конуса и его развертка

Однако не все поверхности можно постепенно деформировать и совместить с плоскостью так, что при этом не будет ни разрывов, ни складок.

Признак развертываемости поверхности можно определить следующим образом: поверхность будет развертывающейся, если касательная плоскость во всех точках одной и той же ее прямолинейной образующей постоянна (рис. 146).

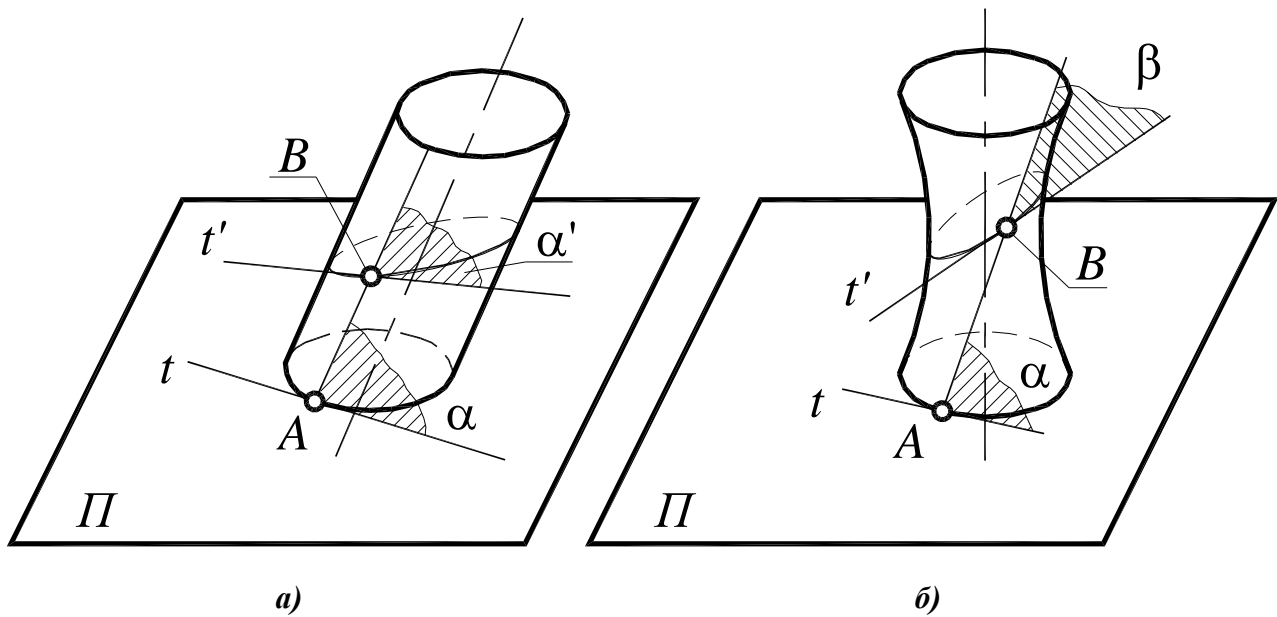


Рис. 146. Поверхности: *a* – развертываемая; *б* – неразвертываемая

К развертываемым поверхностям относятся все многогранные поверхности. Разверткой многогранной поверхности является плоская фигура, полученная последовательным совмещением с одной и той же плоскостью всех ее граней (рис. 147).

Поэтому построение развертки многогранной поверхности сводится к определению натуральной величины отдельных ее граней.

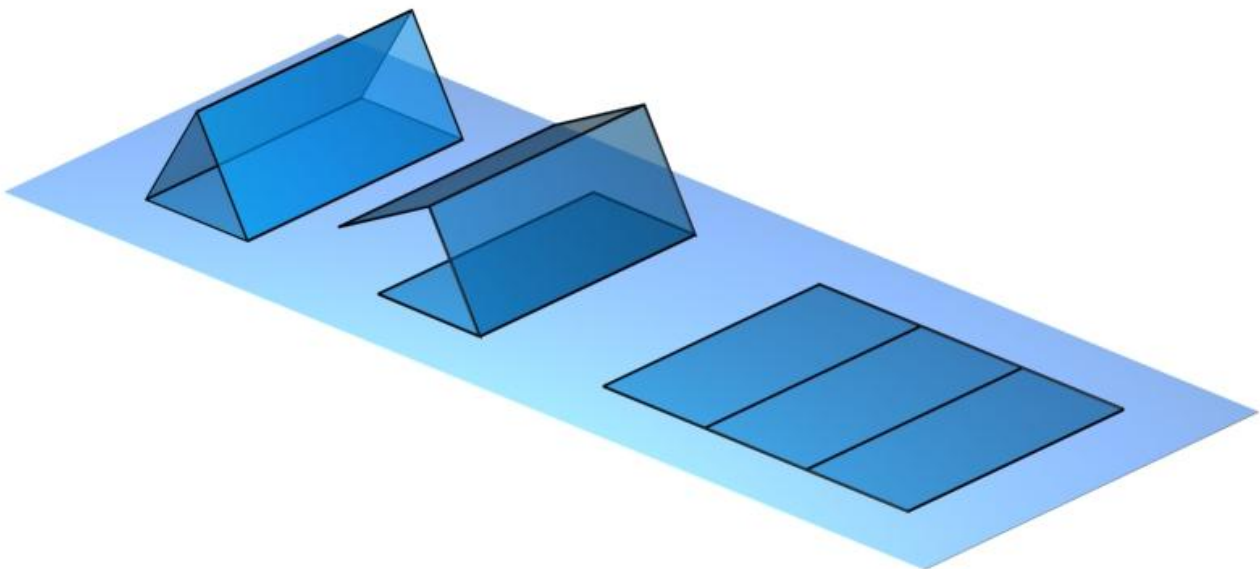
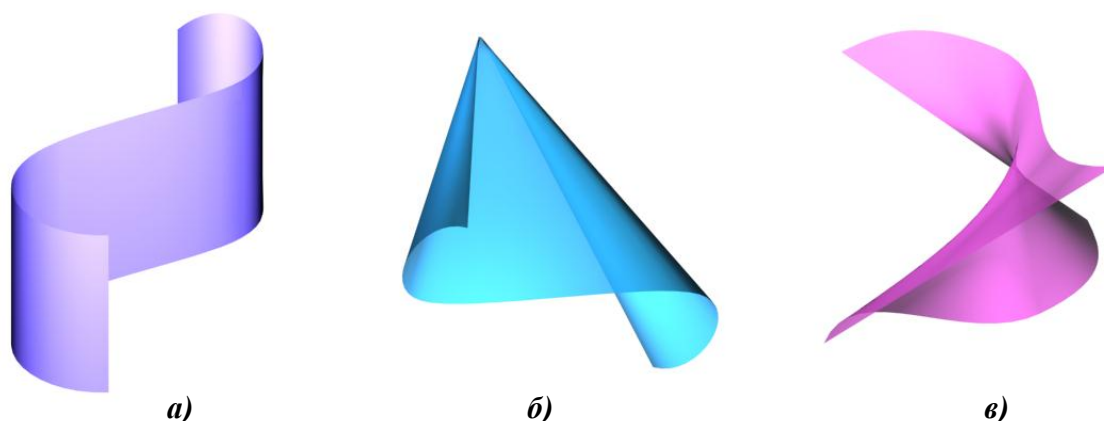


Рис. 147. Развертка многогранной поверхности

Из класса линейчатых поверхностей развертывающимися будут только цилиндрические, конические и поверхности с ребром возврата (торсы) (рис. 148).



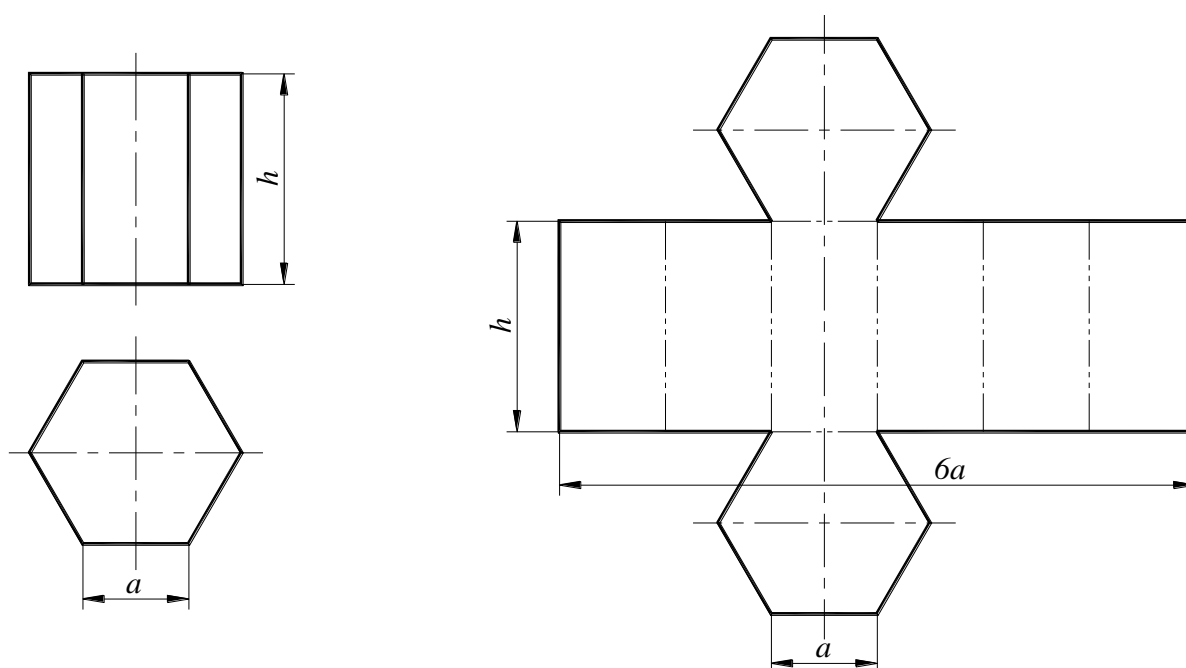
**Рис. 148. Развертывающиеся линейчатые поверхности:**  
*a* – цилиндрическая; *б* – коническая; *в* – торс

Все криволинейные поверхности являются неразвертывающимися, так как на них вообще нельзя провести прямой линии.

При построении разверток ее размеры могут быть вычислены с любой степенью точности. Чертеж развертки, выполненный на основе размеров, полученных вычислением, называют точным. Однако на практике чаще всего строят развертки по чертежу поверхности, используя определенные графические приемы. Чертеж развертки, выполненный с помощью графических приемов, называют приближенным. Чертеж развертки неразвертывающихся поверхностей называют условным.

### 12.1. Развертка поверхности прямой призмы

Развертка поверхности прямой призмы представляет собой плоскую фигуру, составленную из боковых граней – прямоугольников и двух равных между собой многоугольников оснований. Рассмотрим построение развертки прямой шестигранной призмы (рис. 149).



**Рис. 149. Развертка прямой призмы**



## 12.2. Развертка поверхности правильной пирамиды

Развертка поверхности правильной пирамиды представляет собой плоскую фигуру, составленную из боковых граней – равнобедренных или равносторонних треугольников и правильного многоугольника основания. Для примера взята правильная четырехугольная пирамида.

Чертеж развертки правильной пирамиды выполняется следующим образом (рис. 150):

1. Из произвольной точки  $S_0$ , как из центра, проводят дугу окружности радиуса  $L$ , равного длине бокового ребра пирамиды, так как в данном примере ребра пирамиды являются линиями уровня.
2. По этой дуге откладывают четыре отрезка, равных стороне основания пирамиды, которое на ортогональном чертеже спроецировано в натуральную величину, так как тоже является линией уровня.
3. Найденные точки соединяют прямыми линиями с точкой  $S_0$ .
4. Получив, таким образом, развертку боковой поверхности, к основанию одного из треугольников пристраивают квадрат, равный основанию пирамиды.

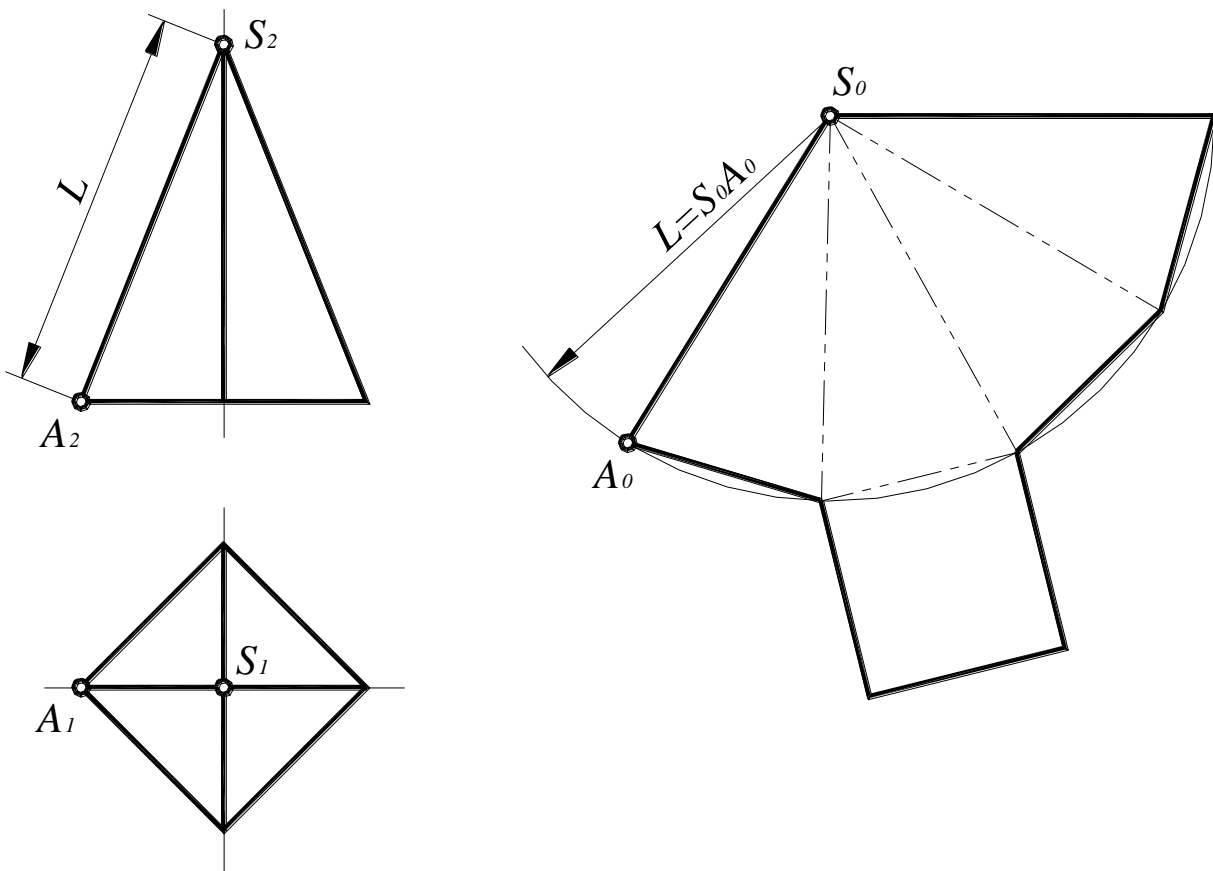


Рис. 150. Развертка пирамиды

### 12.3. Развертка поверхности прямого кругового конуса

Развертка поверхности прямого кругового конуса представляет собой плоскую фигуру, состоящую из кругового сектора и круга.

Чертеж развертки прямого кругового конуса выполняется следующим образом (рис. 151):

1. Провести осевую линию и из точки  $S_0$ , взятой на ней, как из центра, проводят дугу окружности радиусом  $L$ , равным образующей конуса.
2. Рассчитать угол сектора по формуле:  $\alpha = \frac{360^\circ \times R}{L}$ , где  $R$  – радиус окружности основания конуса,  $L$  – длина образующей конуса.
3. Полученный угол расположить симметрично относительно осевой линии с вершиной в точке  $S_0$ .
4. К полученному сектору пристроить круг с центром на осевой линии и диаметром, равным диаметру основания конуса.

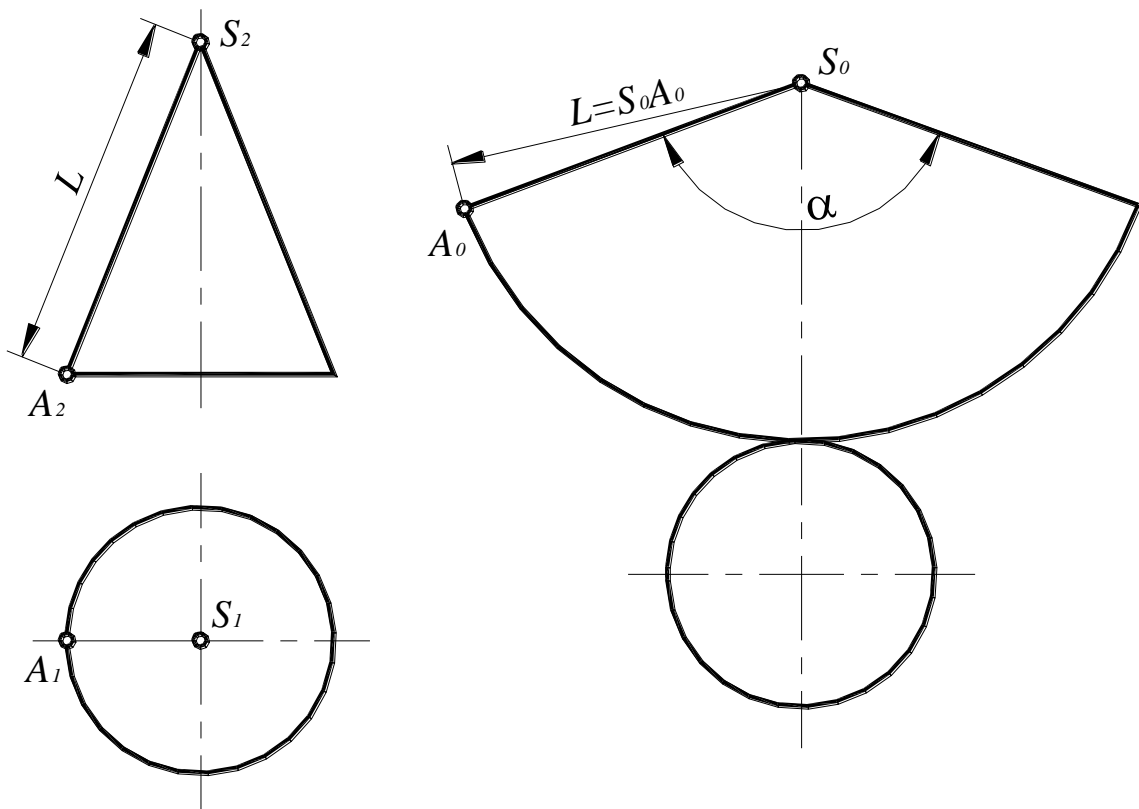


Рис. 151. Развертка прямого кругового конуса

## 12.4. Развертка поверхности прямого кругового цилиндра

Развертка поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой плоскую фигуру, состоящую из прямоугольника и двух кругов (рис. 152). Одна сторона прямоугольника равна высоте цилиндра, другая – длине окружности основания. Длину окружности можно определить по формуле  $C=\pi D$ , где  $D$  – диаметр окружности основания.

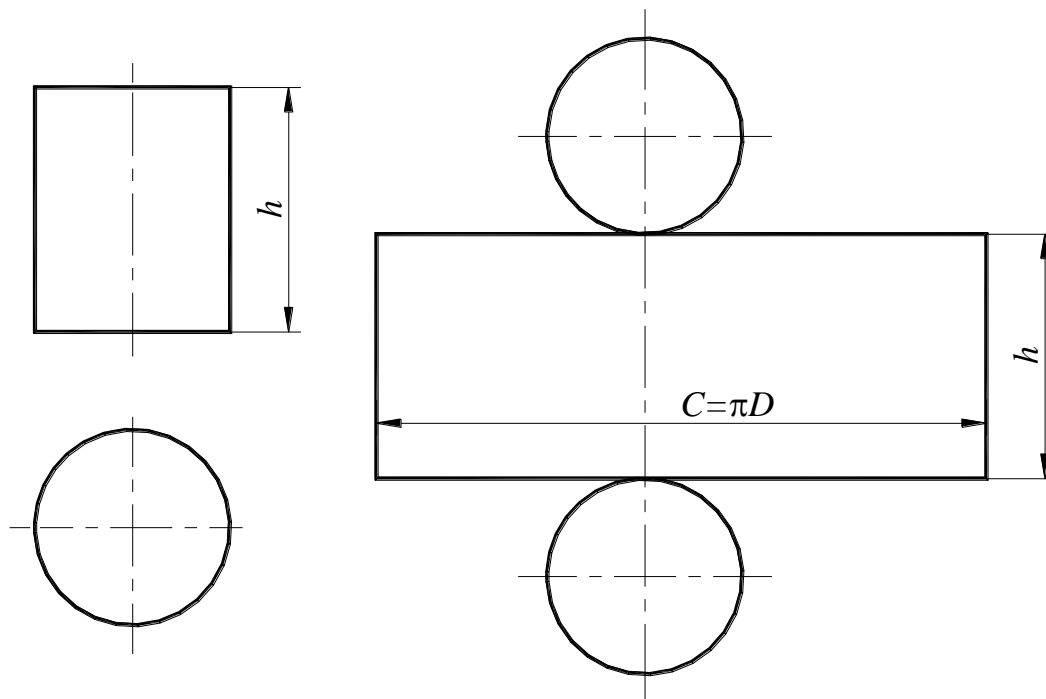


Рис. 152. Развертка прямого кругового цилиндра

## 12.5. Развертки цилиндрических и призматических поверхностей

Способы построения чертежей разверток цилиндрических и призматических поверхностей идентичны, так как цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай призматической.

Обычно используют один из двух способов построения: способ раскатки или способ нормального сечения.

### 12.5.1. Способ раскатки

При построении разверток данным способом поверхность цилиндра или призмы разрезается по одной из образующих или по одному ребру и совмещается вращением вокруг образующей или вокруг ребра с некоторой плоскостью.

Данный способ обычно применяется в случае, когда образующие цилиндра или ребра призмы являются линиями уровня. Если образующие цилиндра или ребра призмы не являются линиями уровня, то предварительно одним из способов преобразования комплексного чертежа их надо привести в положение линий уровня.

Рассмотрим построение чертежа развертки поверхности призмы, ребра которой являются фронтальными линиями уровня, а нижнее основание является горизонтальной плоскостью уровня (рис. 153).

Призма разрезана по ребру  $a(a_1, a_2)$  и это ребро принято за ось вращения  $i(i_1, i_2)$ ;  $i=a$ . При вращении граней призмы вокруг этой оси любая точка будет перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси вращения, например, точка  $B$  будет перемещаться в плоскости

$$\delta(\delta_2) \perp i(\delta_2 \perp i_2).$$

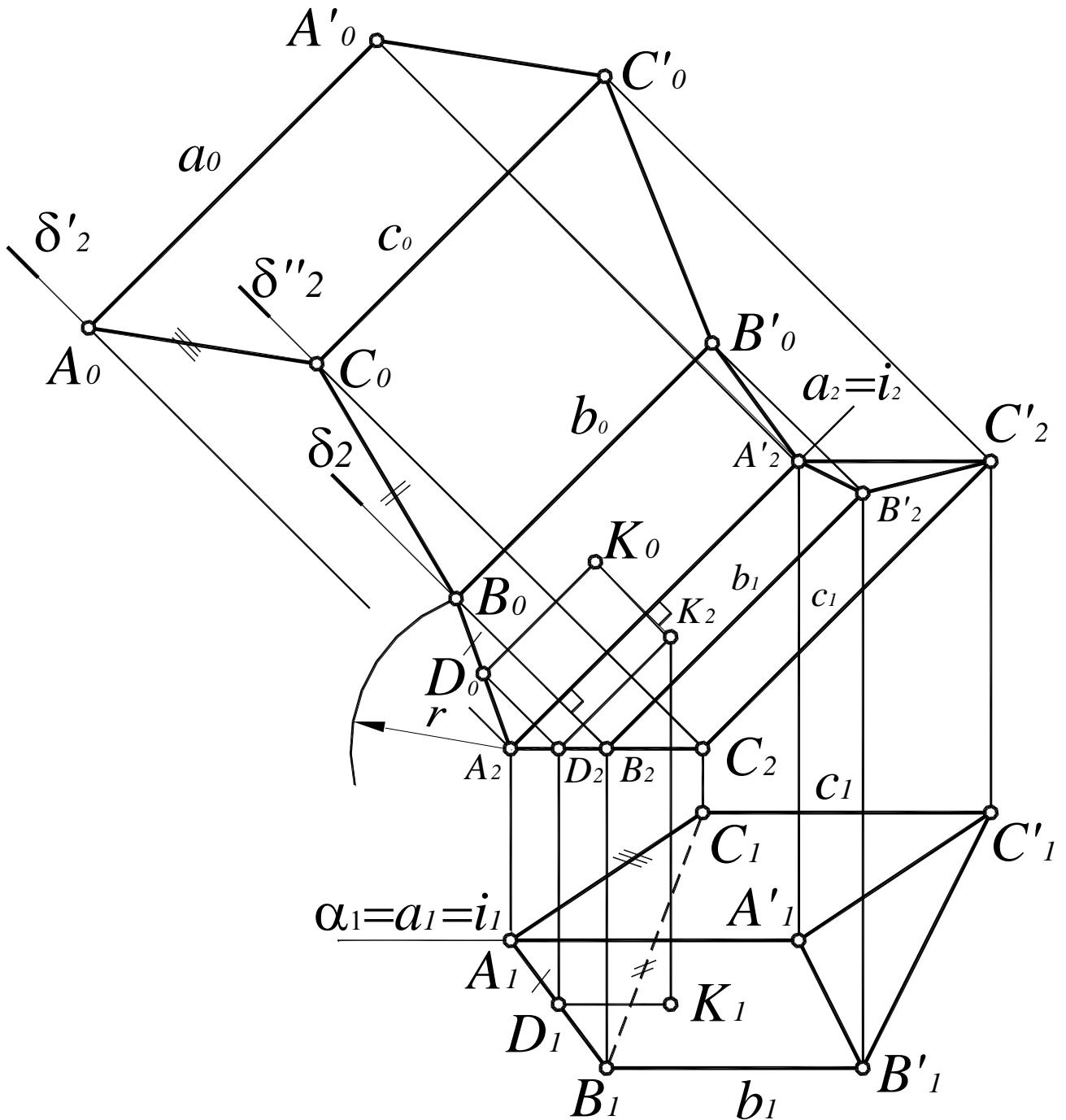


Рис. 153. Построение развертки боковой поверхности призмы способом раскатки

Грань  $ABB'A$  поворачивают до совмещения ее с плоскостью уровня  $\alpha(\alpha_1)$ , проходящей через ребро  $a$ . Для этого достаточно совместить точку  $B$  с плоскостью  $\alpha$ . Зная расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  ( $|AB|=|A_1B_1|$ ) и зная, что точка  $B$  перемещается во фронтально-проецирующей плоскости  $\delta(\delta_2)$ , из точки  $A_2$ , как из центра, проводится дуга окружности

радиусом  $r = |A_1B_1|$  и на  $\delta_2$  получается точка  $B_0$ . Точка  $B_0$  – совмещенное с плоскостью  $\alpha$  положение точки  $B$ . Соединив точки  $A_2$  и  $B_0$ , получим совмещенное положение грани с плоскостью  $\alpha$ .

Для того чтобы совместить грань  $ABB'A'$  с плоскостью  $\alpha$ , из точки  $B_0$  строится прямая  $b_0$  ( $b_0$  – совмещенное положение ребра  $b$  с плоскостью  $\alpha$ ) параллельно  $a_2$ . Аналогичным образом построены совмещенные положения остальных граней призмы с плоскостью  $\alpha$  (равенство соответствующих отрезков обозначено на рис 153 специальными значками).

Вершины  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  верхнего основания также вращаются в соответствующих фронтально-проецирующих плоскостях, перпендикулярных ребрам призмы. Поэтому совмещенные с плоскостью  $\alpha$  проекции вершин верхнего основания  $A'_0$ ,  $B'_0$  и  $C'_0$  определяются как точки пересечения прямых  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  с соответствующими фронтально-проецирующими плоскостями.

Соединив последовательно совмещенные вершины ломаными линиями, получают развертку боковой поверхности призмы.

Чтобы получить полную развертку поверхности призмы, к развертке боковой поверхности присоединяют натуральные величины обоих оснований.

На рис 146 показано построение на чертеже развертки точки  $K(K_1, K_2)$ , принадлежащей грани  $ABB'A'$ .

Для этого через точку  $K$  проведена прямая  $(KD)$ , параллельная ребрам призмы. Затем она построена на чертеже развертки:

$$\begin{aligned} D_2D_0 \perp i_2; \quad D_0 = D_2D_0 \times A_2B_0; \quad D_0K_0 \parallel a_2; \\ K_2K_0 \perp i_2; \quad K_0 = K_2K_0 \times D_0K_0, \end{aligned}$$

где  $K_0$  – точка развертки, соответствующая точке  $K$  поверхности.

Рассмотрим построение чертежа развертки поверхности наклонного цилиндра, образующие которого являются фронтальными линиями уровня, а основание – окружностью (рис. 154).

Для построения развертки цилиндр разрезается по образующей  $AA'$ , а основание цилиндра разбивается на произвольное число равных частей, что соответствует замене цилиндрической поверхности поверхностью многогранной призмы. Следует иметь в виду, что чем больше число сегментов, тем точнее развертка поверхности.

В данном примере основание разбито на шесть равных частей точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Эти точки совмещены с плоскостью  $\gamma(\gamma_1)$  вращением вокруг оси  $i(i_1, i_2)$ , которая совпадает с образующей цилиндра  $AA'$ .

При вращении граней вписанной призмы вокруг оси  $i$ , любая точка будет перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси вращения, например, точка  $B$  будет вращаться в плоскости  $\delta(\delta_2) \perp i(\delta_2 \perp i_2)$ . Зная расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  ( $AB = A_1B_1$ ) и зная, что точка  $B$  перемещается во фронтально – проецирующей плоскости  $\delta(\delta_2)$ , можно провести дугу окружности из точки  $A_2$ , как из центра, радиусом  $r = A_1B_1$  и получить на  $\delta_2$  точку  $B_0$ . Точка  $B_0$  – совмещенное с плоскостью  $\gamma$  положение точки  $B$ .

Аналогичным образом построены совмещенные положения остальных точек основания цилиндра. Образующие цилиндра на развертке параллельны своим фронтальным проекциям.

Оставшуюся неподвижной точку  $A$  и полученные точки,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $E_0$ ,  $F_0$  и  $A_0$  нужно соединить плавной кривой. Эта кривая представляет собой развертку окружности, лежащей в основании цилиндра.

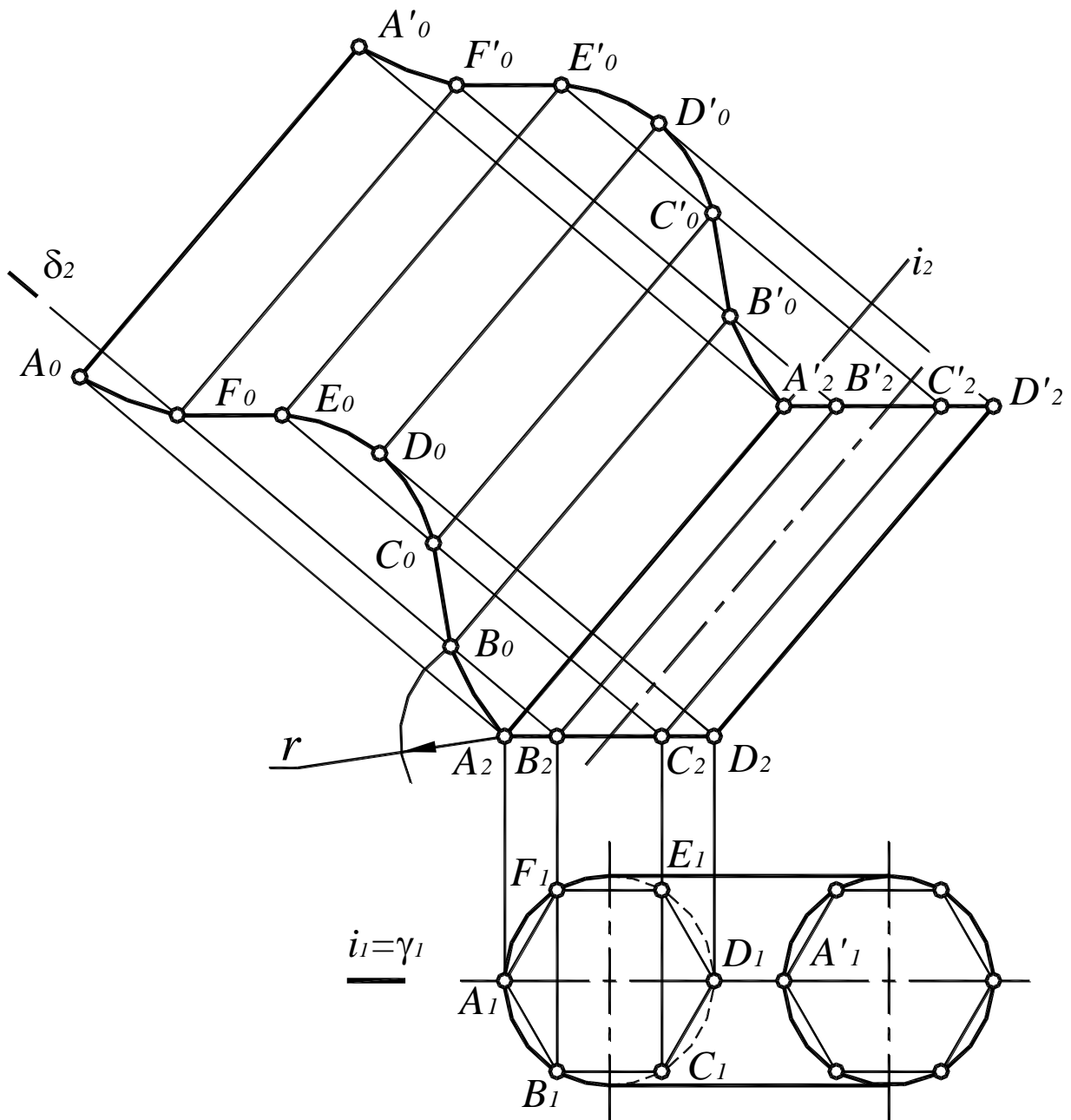


Рис. 154. Построение развертки поверхности наклонного цилиндра способом раскатки

### 12.5.2. Способ нормального сечения

Способ нормального сечения заключается в том, что цилиндр или призма пересекаются плоскостью, перпендикулярной образующим цилиндра или ребрам призмы.

Способ нормального сечения применяется в том случае, если основание призмы не является плоскостью уровня, а основание цилиндра – окружностью.

Строится сечение цилиндра или призмы этой плоскостью и определяется его натуральная величина. Затем сечение спрямляется, и перпендикулярно спрямленному нормальному сечению проводятся прямые, соответствующие образующим цилиндра или ребрам призмы, и на этих прямых откладываются натуральные величины образующих или ребер.

Соединив концы образующих или ребер плавной кривой или ломаной линией, получают развертку боковой поверхности цилиндра или призмы.

Рассмотрим применение этого способа для призматических поверхностей на примере треугольной призмы, ребра которой являются фронтальными линиями уровня (рис. 155).

Так как боковые ребра призмы являются фронтальными линиями уровня, они проецируются на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину. Тогда фронтально – проецирующая плоскость  $\delta(\delta_2)$ , перпендикулярная к боковым ребрам, определит нормальное сечение I–II–III призмы. Способом плоскопараллельного движения определена его натуральная величина  $I'_1-II'_1-III'_1$ .

Для построения развертки призмы строится спрямленное нормальное сечение  $I_0-II_0-III_0$ . Для этого нужно отложить на произвольной прямой натуральные величины сторон нормального сечения, а затем через точки  $I_0$ ,  $II_0$  и  $III_0$  нужно провести прямые, перпендикулярные к этой прямой. На этих прямых откладываются натуральные величины ребер:

$$A_0A'_0=A_2A'_2=AA'; B_0B'_0=B_2B'_2=BB'; C_0C'_0=C_2C'_2=CC';$$

$$I_0A'_0=I_2A'_2; I_0A_0=I_2A_2.$$

Затем точки  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $A_0$  и точки  $A'_0$ ,  $B'_0$ ,  $C'_0$ ,  $A'_0$  соединяются прямыми линиями. К полученной развертке боковой поверхности призмы пристраиваются натуральные величины двух ее оснований:

$$\Delta A_0B_0C_0 \text{ и } \Delta A'_0B'_0C'_0.$$

Если боковые ребра данной призмы занимают произвольное расположение относительно плоскостей проекций, то нужно предварительно преобразовать их в линии уровня.

Рассмотрим построение разверток цилиндрических поверхностей на примере построения развертки боковой поверхности кругового цилиндра, ось  $i$  которого является фронтальной линией уровня (рис. 156).

Так же, как и в случае призмы, построено нормальное сечение цилиндра фронтально – проецирующей плоскостью  $\alpha(\alpha_2)$ , перпендикулярной оси цилиндра и определена его натуральная величина – окружность радиусом  $r$ . Эта окружность разбита на шесть равных частей точками I, II, III, IV, V и VI. Далее строится спрямленное нормальное сечение  $I_0-II_0-III_0-IV_0-V_0-VI_0-I_0$ , длина которого равна  $2\pi r$ . Через точки  $I_0, II_0, III_0, IV_0, V_0, VI_0$  и  $I_0$  проводятся прямые, перпендикулярные спрямленному нормальному сечению, и на них откладываются натуральные величины образующих цилиндра:

$$A_0A'_0=A_2A'_2=AA'; B_0B'_0=B_2B'_2=BB'; C_0C'_0=C_2C'_2=CC';$$

$$I_0A'_0=I_2A'_2; I_0A_0=I_2A_2.$$

Точки  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ...и точки  $A'_0$ ,  $B'_0$ ,  $C'_0$ ...соединяются плавными кривыми линиями, которые будут развертками верхнего и нижнего оснований цилиндра.

Если образующие цилиндра являются прямыми общего положения, то следует преобразовать их так, чтобы они стали линиями уровня.

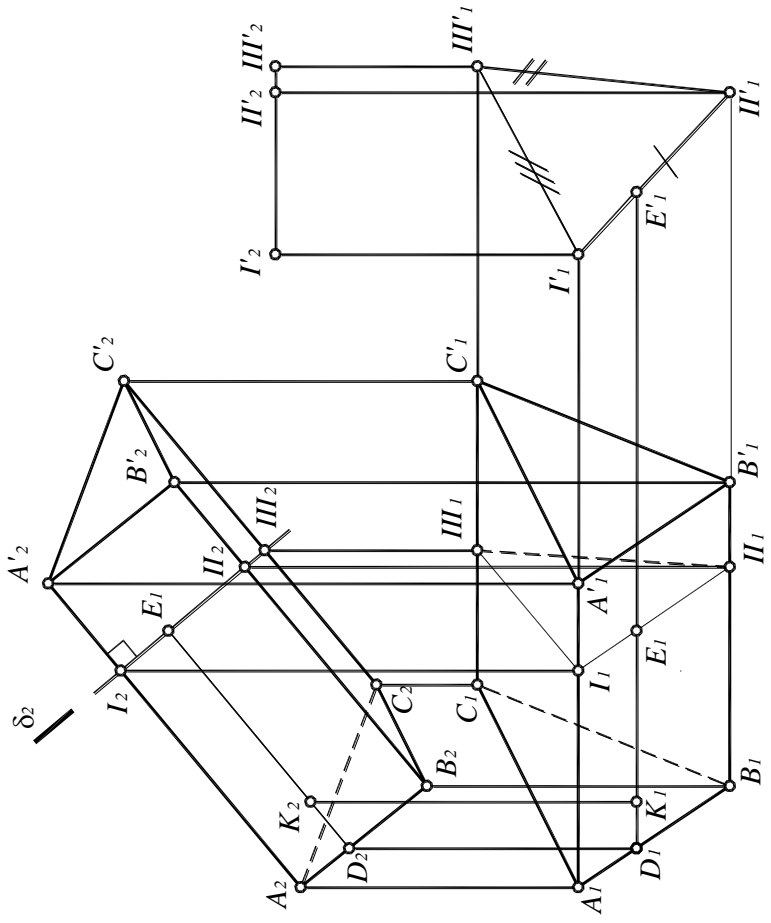
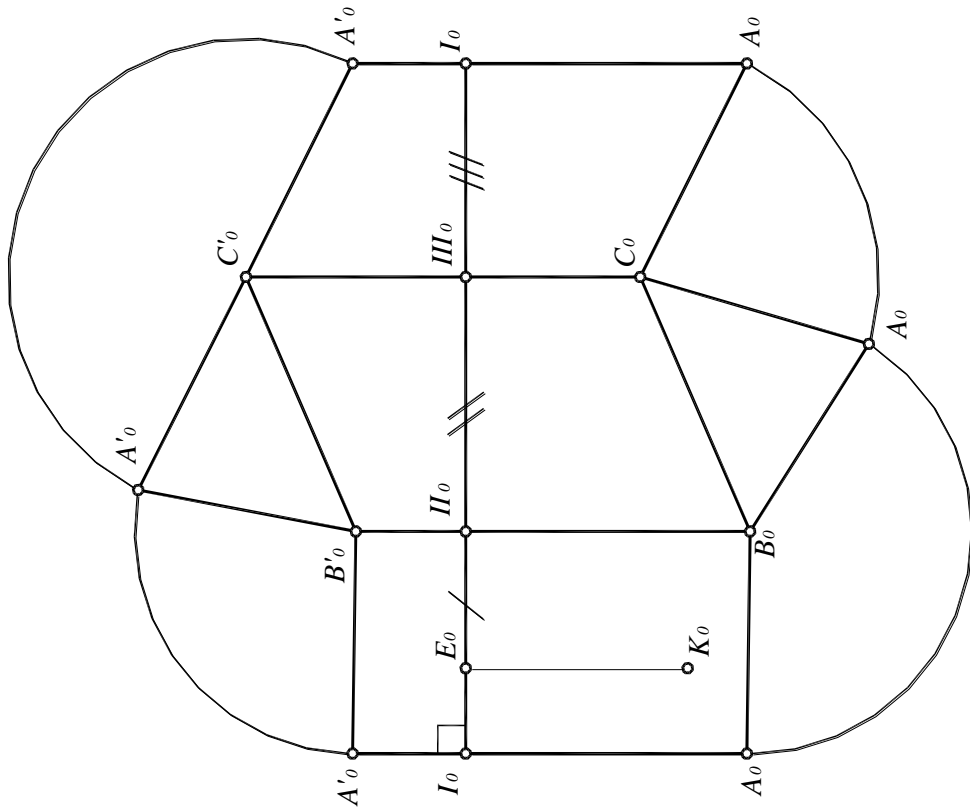


Рис. 155. Построение развертки треугольной наклонной призмы способом нормального сечения



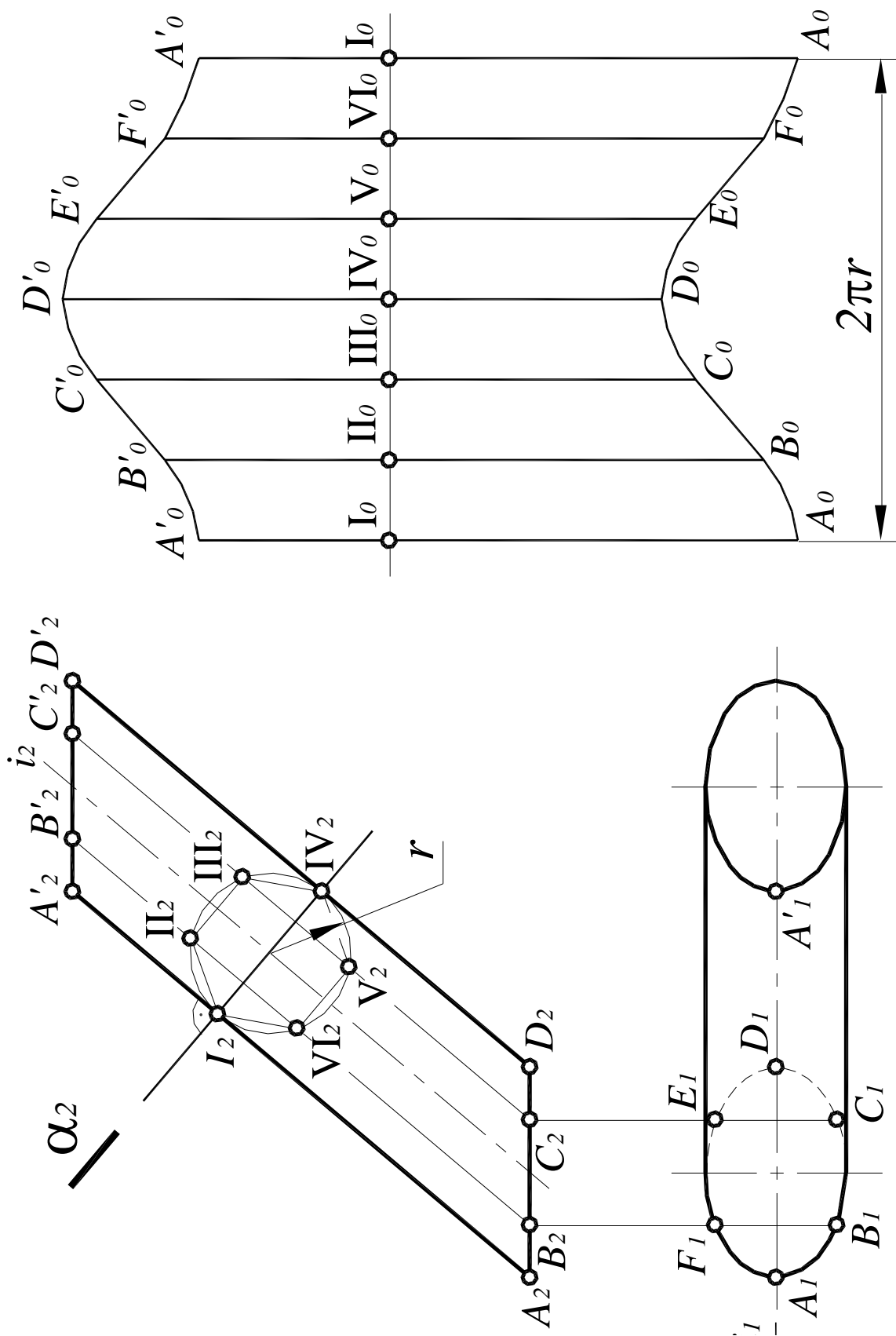


Рис. 156. Построение развертки боковой поверхности кругового цилиндра способом нормального сечения

## 12.6. Развертки линейчатых поверхностей

Развертки конических, пирамидальных и других линейчатых поверхностей, за исключением цилиндрических, поверхностей строятся способом триангуляции (способом треугольников). Для построения разверток цилиндрических поверхностей данный способ хотя и применим, но не удобен.

Способ заключается в следующем: данная поверхность заменяется вписанной или описанной многогранной поверхностью с треугольными гранями и строится развертка этой многогранной поверхности.

Другими словами, построение разверток указанных поверхностей сводится к многократному построению натурального вида треугольников. Чем на большее количество треугольников разбита данная поверхность, тем точнее ее развертка.

Рассмотрим применение этого способа для построения разверток пирамидальных поверхностей на примере наклонной пирамиды (рис. 157)

Грани пирамиды являются треугольниками, поэтому для построения ее развертки достаточно определить натуральные величины этих треугольников.

Для этого способом вращения вокруг горизонтально – проецирующей оси  $i(i_1, i_2)$  определены натуральные величины ребер:

$$SA=S_2A'_2; SB=S_2B'_2; SC=S_2C'_2.$$

Натуральная величина основания пирамиды определена способом замены плоскостей проекций:

$$\Delta ABC=\Delta A_4B_4C_4.$$

После этого строится развертка боковой поверхности пирамиды и к ней пристраивается треугольник основания для получения полной развертки поверхности наклонной пирамиды. Положение точки  $S_0$  выбирается произвольно:

$$S_0A_0=S_2A'_2; S_0C_0=S_2C'_2; A_0C_0= A_4C_4.$$

Также на рис. 157 показано построение с помощью прямой  $SD$  точки  $K$ , лежащей в грани  $SAB$ .

Рассмотрим построение разверток конических поверхностей. Для построения развертки способом триангуляции коническую поверхность заменяют вписанной в нее поверхностью пирамиды.

Подробнее рассмотрим применение этого способа для построения разверток конических поверхностей на примере эллиптического конуса с круговым основанием (рис. 158).

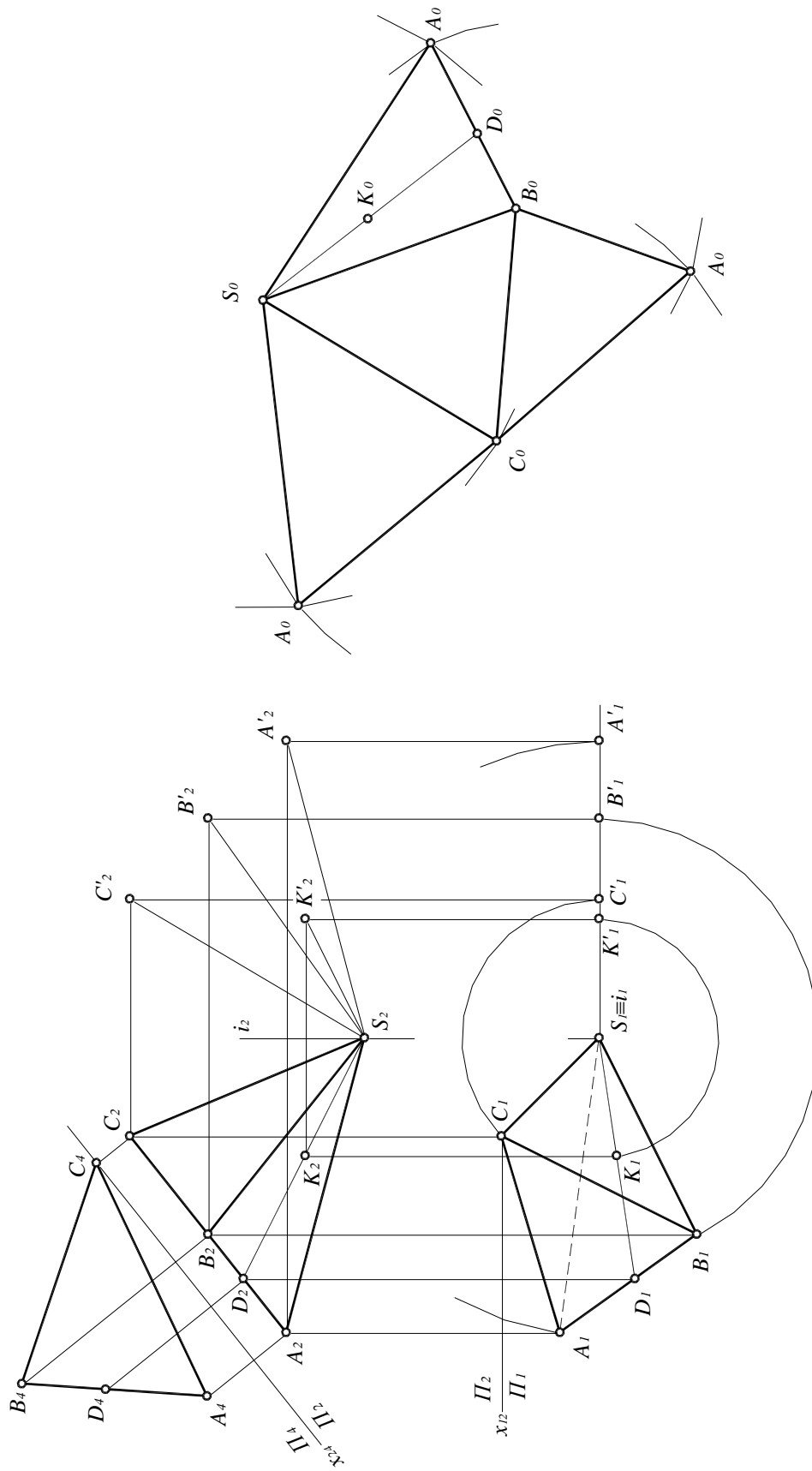


Рис. 157. Построение развертки наклонной пирамиды способом триангуляции

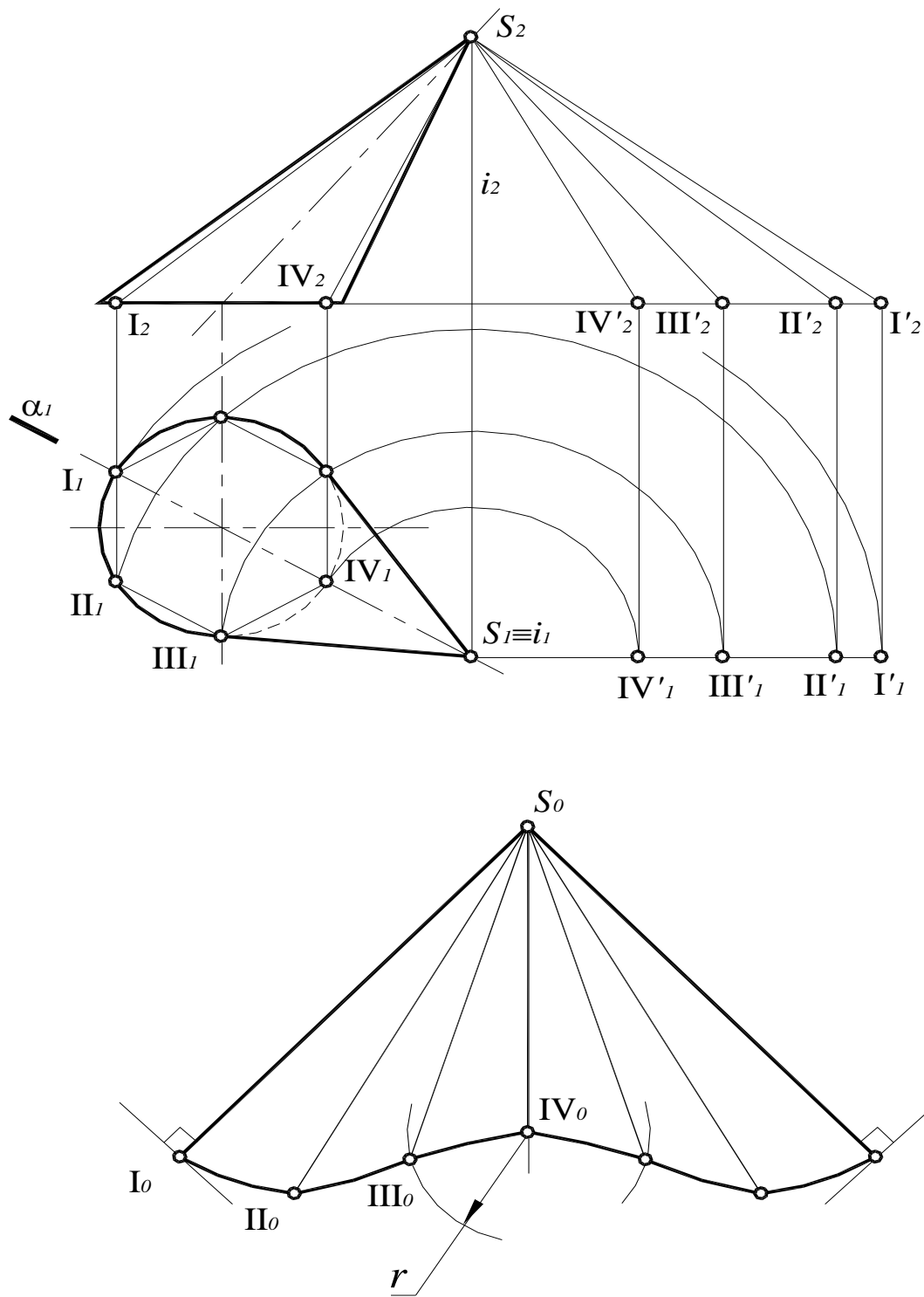


Рис. 158. Построение развертки наклонного конуса способом триангуляции

Коническая поверхность заменяется поверхностью вписанной шестиугольной пирамиды. Основание конуса точками I, II, III... разбито на шесть частей. Так как коническая поверхность имеет плоскость симметрии  $\alpha(\alpha_1) \perp \Pi_1$ , то можно построить развертку только одной половины поверхности. Таким образом, поверхность разбита на ряд примыкающих один к другому треугольников с общей вершиной S:  $\Delta S-I-II$ ,  $\Delta S-II-III$ ,  $\Delta S-$

III-IV, ... Каждый из этих треугольников строится по трем сторонам, при этом две стороны равны натуральным величинам образующих, а третья – хорде, стягивающей дугу окружности основания между соседними точками деления. Для определения натуральных величин этих треугольников способом вращения вокруг оси  $i(i_1, i_2)$  построены натуральные величины их сторон – образующих конуса:

$$SI = S_2I'_2; \quad SII = S_2II'_2; \quad SIII = S_2III'_2; \quad SIV = S_2IV'_2.$$

Стороны I-II, II-III, III-IV, ... изображаются на  $\Pi_1$  в натуральную величину, так как основание конуса лежит в горизонтальной плоскости уровня.

Для построения развертки положение точки  $S_0$  выбирается произвольно, а каждый треугольник строится по трем сторонам:

$$\begin{aligned} S_0I_0 = S_2I'_2; \quad I_0II_0 = I_1II_1; \quad S_0II_0 = S_2II'_2; \quad II_0III_0 = II_1III_1; \\ S_0III_0 = S_2III'_2; \quad III_0IV_0 = III_1IV_1; \quad S_0IV_0 = S_2IV'_2. \end{aligned}$$

После этого построена развертка боковой поверхности конуса – фигура  $S_0-I_0-II_0-...-I_0$ , при этом точки  $I_0, II_0, ... I_0$  соединены плавной кривой линией, являющейся разверткой окружности основания.

## 12.7. Развертки неразвертывающихся поверхностей

Все поверхности вращения, за исключением конуса и цилиндра вращения, являются неразвертывающимися поверхностями, поэтому могут быть построены лишь их условные развертки.

Общий прием построения условных разверток поверхностей вращения заключается в следующем: поверхность разбивают, обычно плоскостями, на ряд частей. Каждую часть заменяют приближающейся к ней наилучшим образом развертывающейся поверхностью, обычно цилиндрической или конической.

На этом основаны два способа построения условных разверток поверхностей вращения: способ цилиндров и способ конусов.

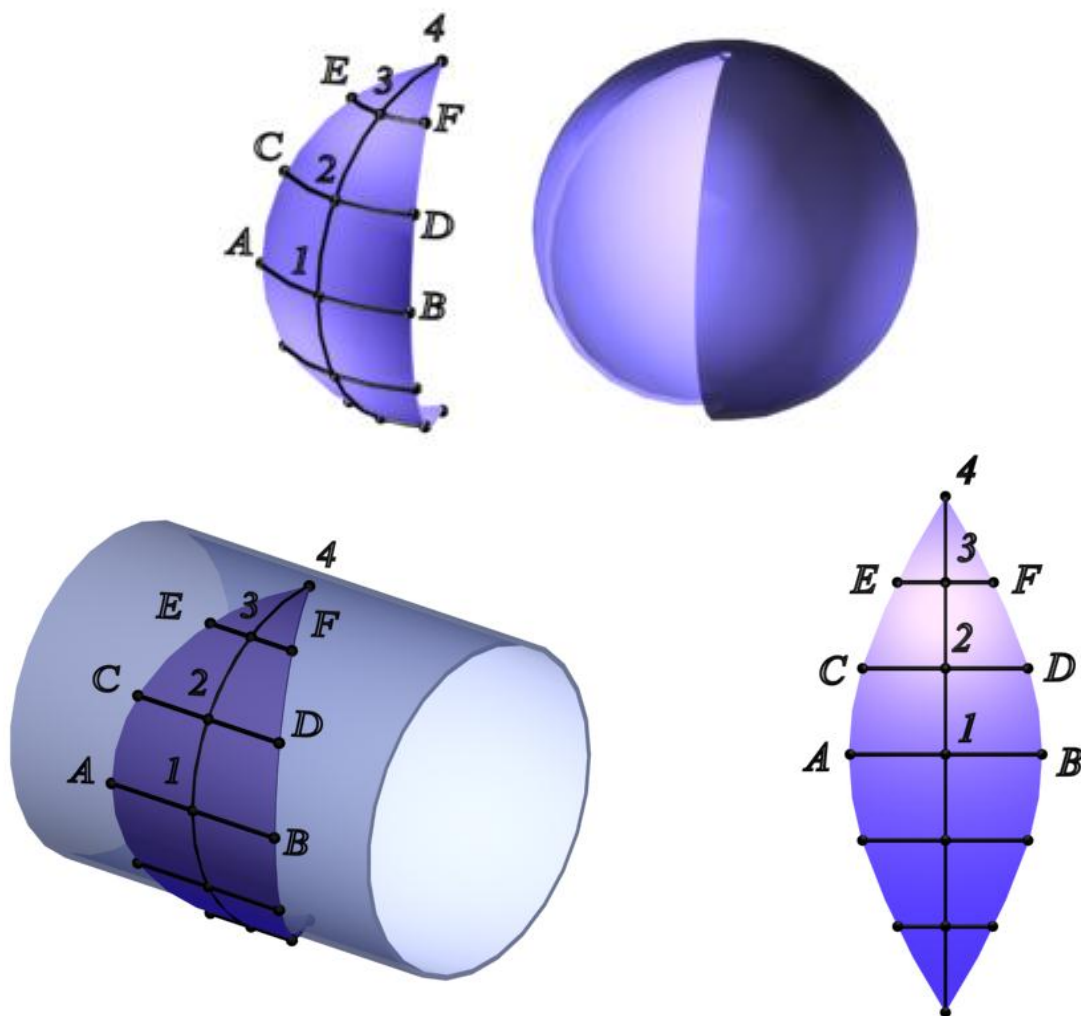
### 12.7.1. Способ цилиндров

Способ цилиндров состоит в том, что данную поверхность вращения разбивают с помощью меридианов на сравнительно узкие, равные между собой доли, затем каждую такую долю заменяют описанной цилиндрической поверхностью, которая касается данной поверхности в точках среднего меридиана доли (рис. 159). Границами цилиндрической поверхности будут плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемую долю.

Рассмотрим применение этого способа для построения развертки поверхности сферы.

Разбить сферу при помощи меридианов на шесть равных частей (рис. 160). Каждая из образовавшихся частей проецируется на  $\Pi_1$  в виде сектора  $I_1-A_1-II_1$ . Рассмотрим построение условной развертки одной части сферы, средним меридианом которой является главный меридиан  $l$ . Прежде всего, эту часть сферы заменяют цилиндрической поверхностью  $\Phi(\Phi_1, \Phi_2)$ , описанной около нее.

Образующие цилиндрической поверхности, ось которой  $q(q_1, q_2) \perp \Pi_2$ , являются фронтально-проецирующими прямыми. Горизонтальной проекцией этого цилиндрического элемента является треугольник  $\Delta A_1B_1O_1$ , а фронтальной проекцией – контур сферы. На рис 159 показано наглядное изображение цилиндра, заменяющего часть сферы.



**Рис. 159. Способ цилиндров**

Для построения развертки этой цилиндрической поверхности (лепестка) фронтальную проекцию  $l_2$  главного меридиана нужно разделить на шесть равных частей точками 1, 2, 3, 4... и провести через точки деления горизонтальные проекции образующих цилиндрической поверхности. Затем меридиан нужно «выпрямить», то есть дуги 1-2, 2-3, 3-4 заменить хордами  $1_2-2_2$ ,  $2_2-3_2$ ,  $3_2-4_2$ . Для этого на плоскости  $\Pi_1$  через точки 1, 2, 3, 4 провести дуги в пределах одной доли и заменить длину каждой дуги соответствующей касательной  $A_1B_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $E_1F_1$ .

Для построения развертки одной из шести долей в произвольном месте провести вертикальную ось симметрии и отложить на ней отрезки  $1_2-2_2$ ,  $2_2-3_2$ ,  $3_2-4_2$  с плоскости  $\Pi_2$ , то есть длину очерковой образующей, замененную хордами:

$$1_02_0=1_22_2; \quad 2_03_0=2_23_2; \quad 3_04_0=3_24_2.$$

Через точки  $1_0$ ,  $2_0$ ,  $3_0$ ,  $4_0$  провести горизонтальные линии и отложить на них следующие отрезки:

$$A_0B_0=A_1B_1; \quad C_0D_0=C_1D_1; \quad E_0F_0=E_1F_1.$$

Соединив полученные точки плавной кривой линией, получают развертку одной доли данной сферы, равной  $1/6$  ее части. Развертки остальных долей являются повторением первой.

Обычно сферу, как и любую другую поверхность вращения, разбивают на двенадцать и более частей для получения более точной развертки.

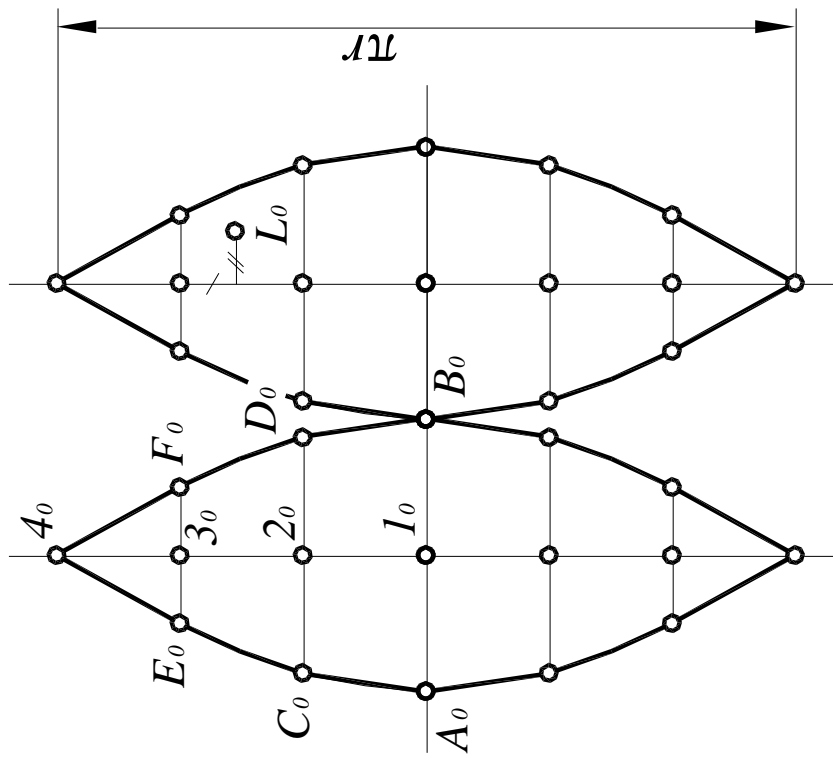
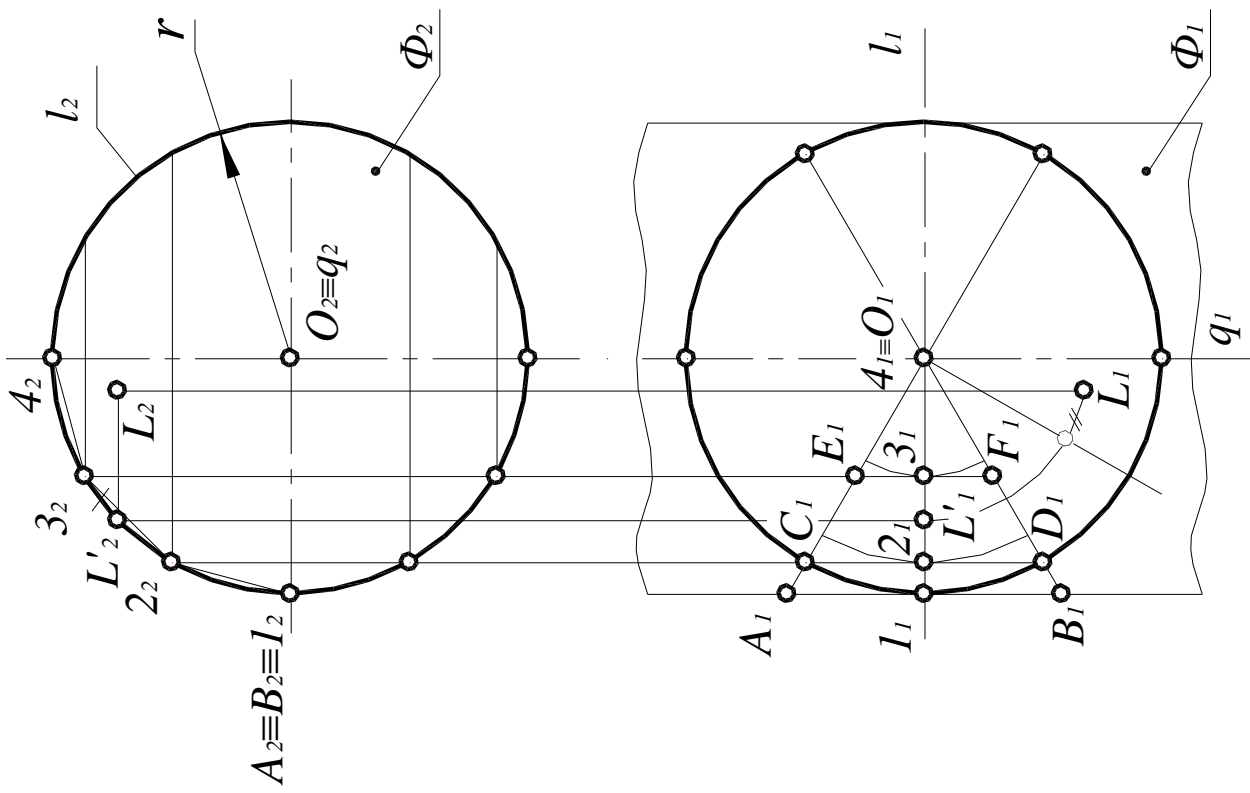


Рис. 160. Построение развёртки сферы способом цилиндров

Чтобы нанести на развертку точку  $L$  (см. рис. 160), принадлежащую сфере, нужно предварительно повернуть ее до совмещения с главным меридианом  $l$ , получив  $L'(L'_1, L'_2)$ . Затем измерить на  $\Pi_2$  расстояние от повернутого положения точки  $L$  ( $L'_2$ ) до ближайшего деления меридиана (в данном случае это расстояние  $L'_23_2$ ), а на  $\Pi_1$  измерить расстояние от точки  $L$  до проекции среднего меридиана доли, на которой находится точка  $L$ .

При помощи этих двух расстояний строится на развертке нужной доли точка  $L_0$ , соответствующая данной точке  $L$  (равенство соответствующих отрезков обозначено специальными значками).

Рассмотрим построение развертки способом цилиндров на примере поверхности тора (1/4 кольца) (рис. 161):

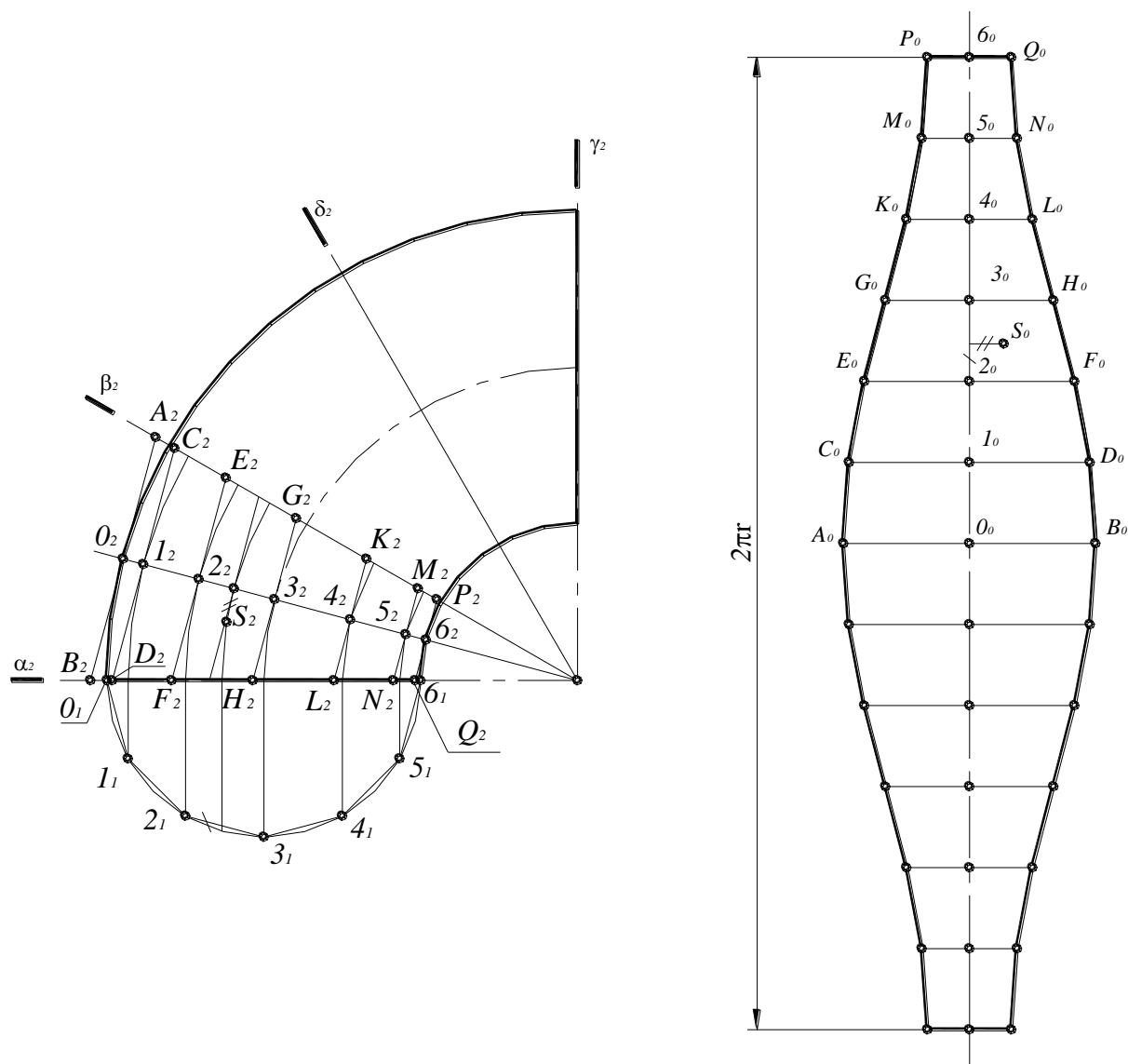


Рис. 161. Построение развертки кольца способом цилиндров

1. Поверхность кольца разделить фронтально-проецирующими плоскостями  $\beta(\beta_2), \delta(\delta_2) \dots$  на равные части. В итоге вся поверхность кольца разбивается на двенадцать равных частей, из которых на рис 161 показаны только три.

Каждая из частей заменяется поверхностью прямого кругового цилиндра, диаметр которого равен диаметру сечения кольца.



2. Построить окружность – натуральную величину нормального сечения и разделить ее на шесть равных частей точками  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Перенести эти точки на плоскость (торец) тора и провести через них дуги окружности в пределах одной доли (части). Заменить длины дуг длинами их касательных:  $AB(A_2B_2)$ ,  $CD(C_2D_2)$ ,  $EF(E_2F_2)$ ,  $GH(G_2H_2)$ ,  $KL(K_2L_2)$ ,  $MN(M_2N_2)$  и  $PQ(P_2Q_2)$ . Таким образом, ширина развертки приравняется к сумме длин касательных.

3. На произвольной вертикальной (или горизонтальной) линии отложить длины хорд  $0_1-1_1=0_01_0$ ,  $1_1-2_1=1_02_0$ ,  $2_1-3_1=2_03_0$ ,  $3_1-4_1=3_04_0$ ,  $4_1-5_1=4_05_0$ ,  $5_1-6_1=5_06_0$ , то есть ширина развертки приравняется к сумме длин касательных.

4. Через эти точки деления  $0_0, 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, 5_0, 6_0$  провести перпендикуляры, на которых отложить следующие отрезки:

$$A_0B_0=A_2B_2; \quad C_0D_0=C_2D_2; \quad E_0F_0=E_2F_2; \\ G_0H_0=G_2H_2; \quad K_0L_0=K_2L_2; \quad M_0N_0=M_2N_2; \quad P_0Q_0=P_2Q_2.$$

5. Соединить полученные точки, для построения развертки одной доли кольца.

Нанесение на развертке поверхности кольца произвольных точек производится точно так же, как и в случае нанесения точек на развертке сферы.

На рис 161 показано построение на развертке точки  $S$ , принадлежащей поверхности кольца (равенство соответствующих отрезков обозначено специальными значками).

### 12.7.2. Способ конусов

Способ конусов заключается в замене поверхности вращения другой поверхностью, состоящей из конусов, вписанных в данную поверхность. Таким образом, поверхность вращения оказывается разделенной на несколько частей (поясов), каждая из которых заменена конусом.

Рассмотрим построение развертки способом конусов на примере поверхности вращения произвольного вида (рис. 162., 163).

Данную поверхность разделить плоскостями  $\alpha(\alpha_2)$  и  $\alpha'(\alpha'_2)$ , перпендикулярными оси поверхности, на три части – I, II, III. Заменить каждую из них прямым конусом: I – конусом с вершиной в точке  $S(S_2)$ , II – усеченным конусом с вершиной в точке  $O(O_2)$ , III – усеченным конусом с вершиной в точке  $O'(O'_2)$ . Таким образом, построение развертки сводится к построению разверток трех конусов.

Для построения развертки точка  $S_0$  выбирается произвольно. Очевидно, что длины дуг, имеющих радиусы  $R_4$  и  $R_3$  и радиусы  $R_2$  и  $R_1$  равны. Точки  $O_0$  и  $O'_0$  выбирают так, чтобы развертки конусов касались друг друга.

После того, как отдельные конусы свернуты и сложены, окружности, в которые переходят дуги, должны попарно совпадать и являться окружностями на заданной поверхности.

Следовательно, можно сделать вывод, что некоторые окружности на поверхности оказались линиями разрывов на ее развертке, и, таким образом, в данном случае, нарушено одно из основных свойств развертки. Это можно видеть на развертках всех неразвертывающихся поверхностей.

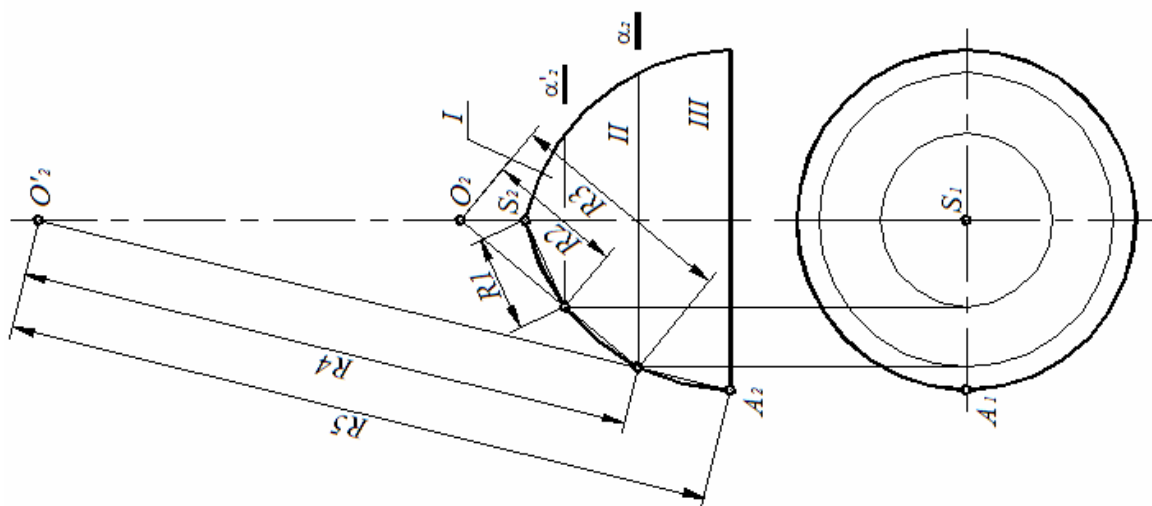


Рис. 162. Разбиение поверхности вращения произвольного вида на конусы

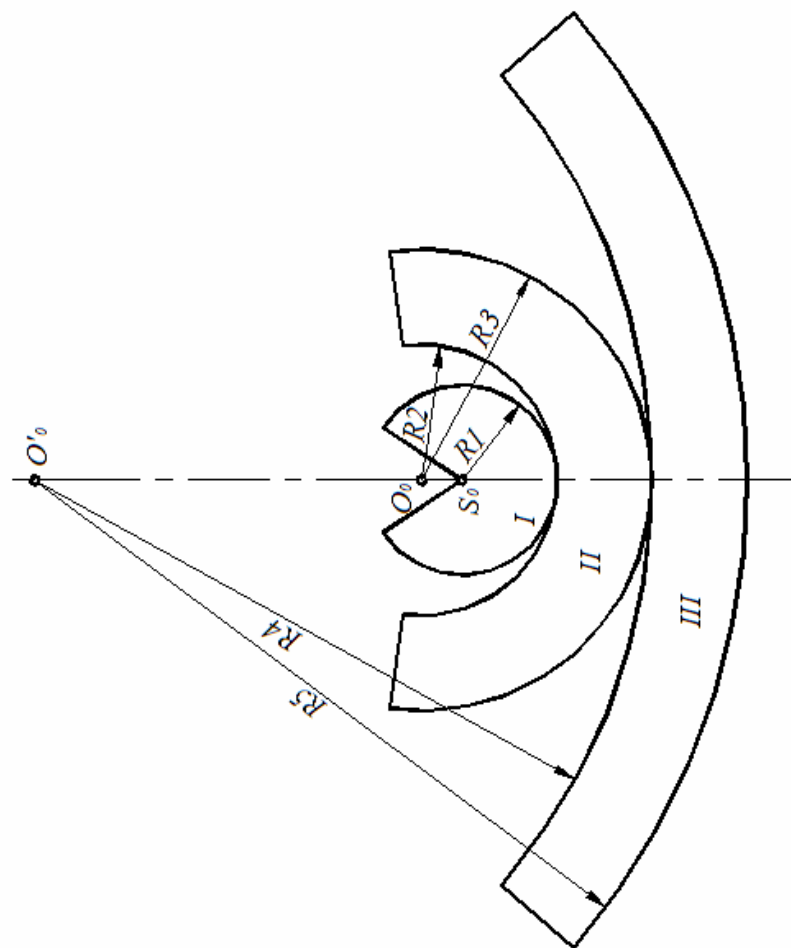


Рис. 163. Построение развертки кольца способом конусов

### 13. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

При выполнении технических чертежей наряду с изображением предметов в прямоугольных проекциях часто строят и их аксонометрические изображения. Аксонометрия – греческое слово, составленное из двух слов: *аксон* – осью и *метрео* – измеряю, что означает измерение по осям.

При построении прямоугольных проекций проецируемый предмет располагают относительно плоскостей проекций так, чтобы направления основных его измерений (длины, высоты и ширины) были параллельны осям проекций. В результате на каждой плоскости проекций изображаются в натуральную величину два измерения, а третье вырождается в точку. Полученные изображения удобны для нанесения на чертеже размеров, но мало наглядны.

Если предмет расположить в пространстве так, чтобы ни одно из его измерений не было параллельно какой-либо оси проекций, то при параллельном проецировании на некоторую плоскость все три измерения предмета спроецируются на нее с некоторым искажением. Полученное изображение будет не слишком удобным для нанесения размеров, но весьма наглядным.

Сущность рассматриваемого метода аксонометрического проецирования и заключается в том, что предмет жестко связанный с осями прямоугольных координат параллельно проецируется на некоторую плоскость – плоскость аксонометрических проекций (рис. 164).

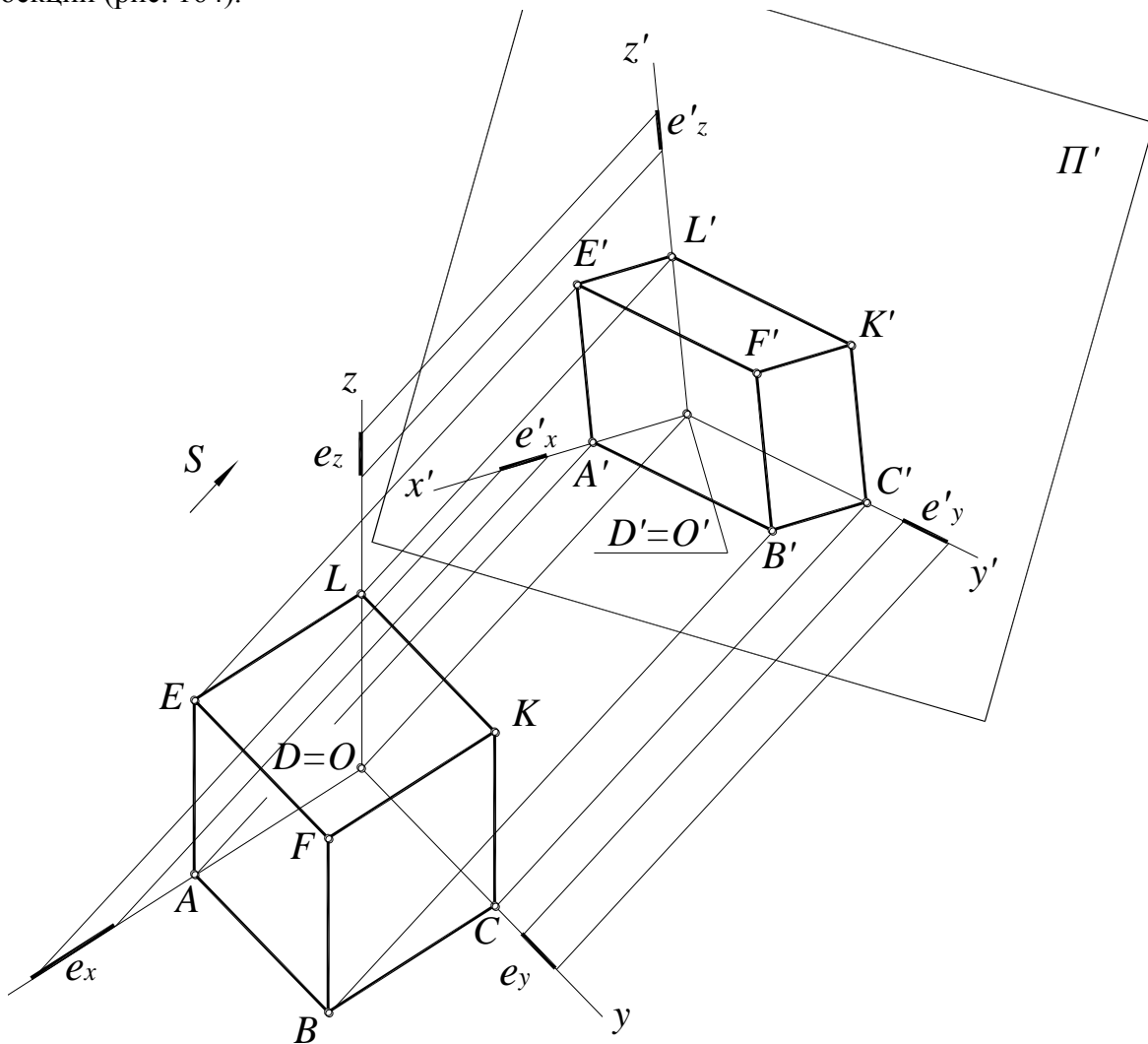


Рис. 164. Проецирование предмета и связанных с ним осей координат на плоскость  $\Pi'$

Направление проецирования не должно совпадать ни с одной из координатных осей.

Различным положениям натуральной системы координат по отношению к аксонометрической плоскости проекций и различным направлениям проецирования соответствуют различные положения аксонометрических осей.

Параллелепипед (см. рис. 164) связан с прямоугольной системой координат  $OXYZ$  и спроецирован вместе с ней и натуральными масштабными отрезками по направлению  $S$  на плоскость  $\Pi'$ .

$S$  – направление проецирования;

$\Pi'$  – плоскость аксонометрических проекций;

$x, y, z$  – натуральные оси ( $x \perp y \perp z$ );

$ex, ey, ez$  – натуральные масштабные отрезки (единица измерения общая для всех трех координатных осей  $ex=ey=ez$ );

$x', y', z'$  – аксонометрические оси;

$ex', ey', ez'$  – аксонометрические масштабы.

$A'$  – аксонометрическая проекция точки  $A$ ,  $A'B'$  – прямой  $AB$ .

Натуральным масштабным отрезкам  $ex, ey, ez$  соответствуют аксонометрические масштабные отрезки  $ex', ey', ez'$ .

В общем случае прямоугольная система координат  $Oxyz$  наклонена под произвольным углом к аксонометрической плоскости проекций. При этом натуральные масштабные отрезки спроецируются на картинную плоскость с различными искажениями.

Показателем искажения называют отношение аксонометрического масштаба к соответствующему натуральному:

по оси  $x$ :  $u=ex'/ex$ ;

по оси  $y$ :  $v=ey'/ey$ ;

по оси  $z$ :  $w=ez'/ez$ .

### 13.1. Виды аксонометрических проекций

В зависимости от соотношения показателей искажения различают три вида аксонометрических проекций:

1. Изометрия - все три показателя искажения равны между собой:

$$u=v=w;$$

2. Диметрия - два показателя искажения одинаковы:

$$u=w \neq v;$$

3. Триметрия - все три показателя искажения различны:

$$u \neq w \neq v.$$

В зависимости от направления проецирования аксонометрические проекции разделяются на прямоугольные и косоугольные.

Если направление проецирования  $S$  перпендикулярно  $\Pi'$ , то такая проекция называется прямоугольной или ортогональной аксонометрической проекцией, в остальных случаях – косоугольной аксонометрической проекцией.

## 13.2. Прямоугольные (ортогональные) аксонометрические проекции

Наибольшее распространение в технической практике получили именно ортогональные аксонометрические проекции.

Треугольник  $X'Y'Z'$ , по которому плоскость аксонометрических проекций пересекает координатные плоскости натуральной системы координат, называется треугольником следов (рис. 165).

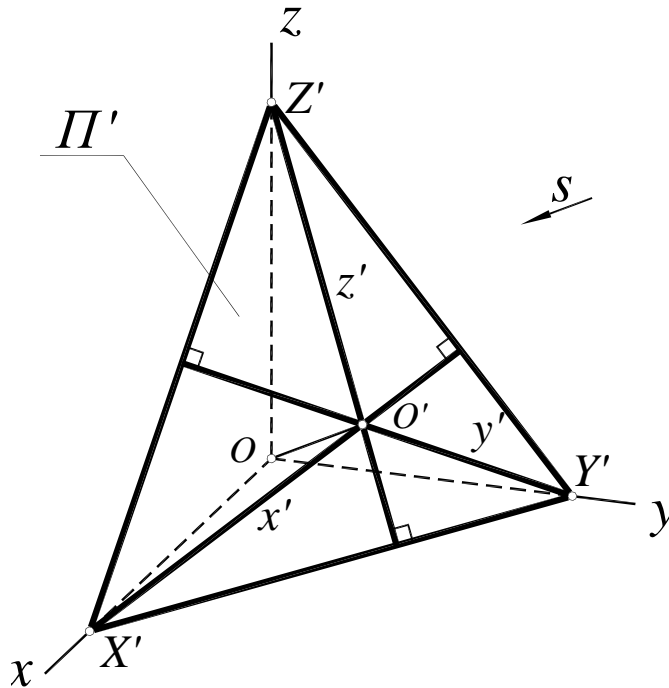


Рис. 165. Треугольник следов:

- $\Pi'$  – аксонометрическая плоскость проекций;
- $Ox, Oy, Oz$  – натуральные координатные оси;
- $S \perp \Pi'$  – направление проецирования,  $OO' \parallel S$ ;
- $X'Y'Z'$  – треугольник следов;
- $O'x', O'y', O'z'$  – аксонометрические оси

В ортогональной аксонометрии треугольник следов всегда остроугольный, а аксонометрические оси являются его высотами.

Показатели искажения в ортогональной аксонометрии связаны соотношением:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2.$$

Показатели искажения в прямоугольной аксонометрии равны косинусам углов наклона натуральных осей к аксонометрической плоскости проекций:

по оси  $x$ :  $u = O'X'/OX' = \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона оси  $x$  к плоскости  $\Pi'$ ;

по оси  $y$ :  $v = O'Y'/OY' = \cos \beta$ , где  $\beta$  – угол наклона оси  $y$  к плоскости  $\Pi'$ ;

по оси  $z$ :  $w = O'Z'/Oz' = \cos \gamma$ , где  $\gamma$  – угол наклона оси  $z$  к плоскости  $\Pi'$ .

Таким образом, в прямоугольной аксонометрии значения всех трех показателей искажения ограничены крайними значениями от 0 до 1.

### 13.3. Прямоугольная изометрическая и диметрическая проекции

Поскольку в изометрии все три показателя искажения одинаковы, то из соотношения  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$  получается, что  $u = v = w = 0,82$ . Треугольник следов в этом случае равносторонний, поэтому аксонометрические оси как высоты равностороннего треугольника образуют углы  $120^\circ$ .

На практике пользуются приведенными показателями: т.е. принимают  $U=V=W=1$ . Построение приведенной изометрии значительно проще, нежели построение точной, так как аксонометрические координаты равны соответствующим натуральным. При использовании приведенных показателей искажения изображения получаются увеличенными в  $\frac{1}{0,82} = 1,22$  раза.

В прямоугольной диметрии два показателя искажения равны  $u = w$ , а третий принимают равным  $u/2$ , тогда из соотношения  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$  следует, что  $u = w \approx 0,94$ , а  $v \approx 0,47$ . Треугольник следов в этом случае равнобедренный. Если аксонометрическую ось  $O'z'$  расположить на чертеже вертикально, то аксонометрическая ось  $O'x'$  образует с горизонтальной линией угол  $7^\circ 10'$ , а ось  $O'y'$  - угол  $41^\circ 25'$ , тангенсы этих углов равны  $1/8$  и  $1/7$  соответственно.

Показатели искажения по аксонометрическим осям  $O'x'$  и  $O'z'$  равны  $U=V=1$ , а  $V=0,5$ . Изображения в этом случае увеличиваются в  $\frac{1}{0,94} = 1,06$ .

На рис. 166 углы между аксонометрическими осями показаны на примере треугольников осей в соответствии с ГОСТ 2.317-68. На чертеже аксонометрические оси наносят штрихпунктирной линией в соответствии с ГОСТ 2.303-68. Треугольники осей всегда изображают рядом с соответствующей аксонометрической проекцией.

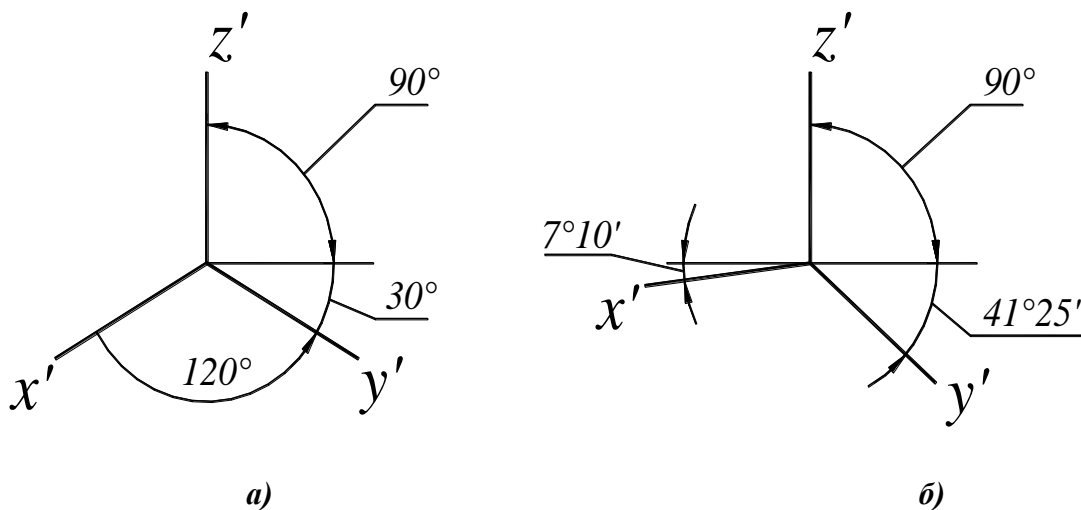
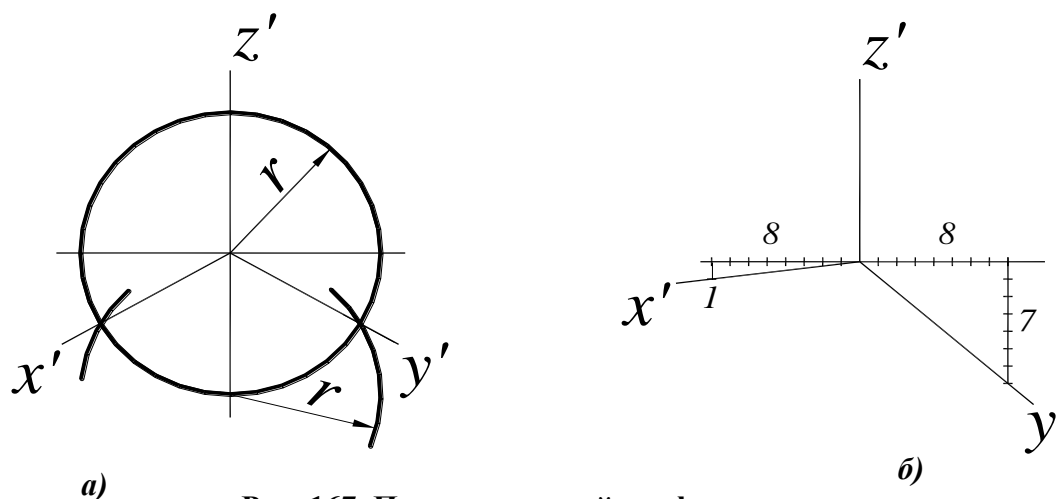


Рис. 166. Углы между аксонометрическими осями в прямоугольной: а – изометрии; б – диметрии

Для построения осей прямоугольной изометрии (рис. 167, а) строят окружность произвольного радиуса  $r$ , затем из нижней точки пересечения ее с вертикальной осью строят дугу того же радиуса. Через центр окружности и полученные точки пересечения проводят оси  $x$  и  $y$ .

Углы между аксонометрическими осями в прямоугольной диметрии можно построить следующим образом (рис.167, б): для построения оси  $O'x'$  откладывают от начала координат

$O'$  по линии горизонта восемь отрезков и на конце последнего отрезка перпендикулярно к нему – один такой отрезок. Для проведения оси  $O'y'$  – по линии горизонта восемь равных отрезков и от конца последнего отрезка перпендикулярно ему семь таких отрезков.



**Рис. 167. Построение осей графически:**

*a* – прямоугольной изометрии;

*б* – прямоугольной диметрии

### **Пример построения приведенной прямоугольной изометрической и диметрической проекций пирамиды и точек на ее поверхности**

Данная пирамида связывается с натуральной прямоугольной системой координат  $Oxyz$ , для чего на комплексном чертеже наносятся проекции координатных осей (рис. 168).

#### **Построение приведенной прямоугольной изометрии пирамиды:**

1. Построить изометрические оси.

2. Построить изометрические проекции вершин пирамиды:

Точка  $A$  лежит на оси  $Ox$ , поэтому для построения ее проекции достаточно отложить натуральную координату  $x_A = O_2A_2 = O_1A_1$  в положительном направлении изометрической оси  $x$ . Для точки  $C$  сначала строят вспомогательную точку  $I$  на оси  $x$ , причем расстояние  $O_1I_1 = O'I'$  откладывается в отрицательном направлении оси  $x$ , затем в положительном направлении оси  $y$  откладывают натуральную координату  $y_C = I_1C_1$ . Остальные вершины строятся аналогично.

3. Соединить построенные вершины и определить видимость ребер пирамиды.

4. Точка  $M$  лежит в грани  $ASB$ , следовательно, принадлежит прямой  $l$ , проходящей через вершину  $S$  и пересекающей ребро основания  $BC$  в точке  $2$ . Для получения изометрической проекции точки  $M$  достаточно построить проекцию прямой  $l'$  и по координате  $z_M$  построить  $M' \in l'$ .

5. Прямоугольная приведенная диметрия строится аналогично, с учетом коэффициента искажения по оси  $y$  0,5.

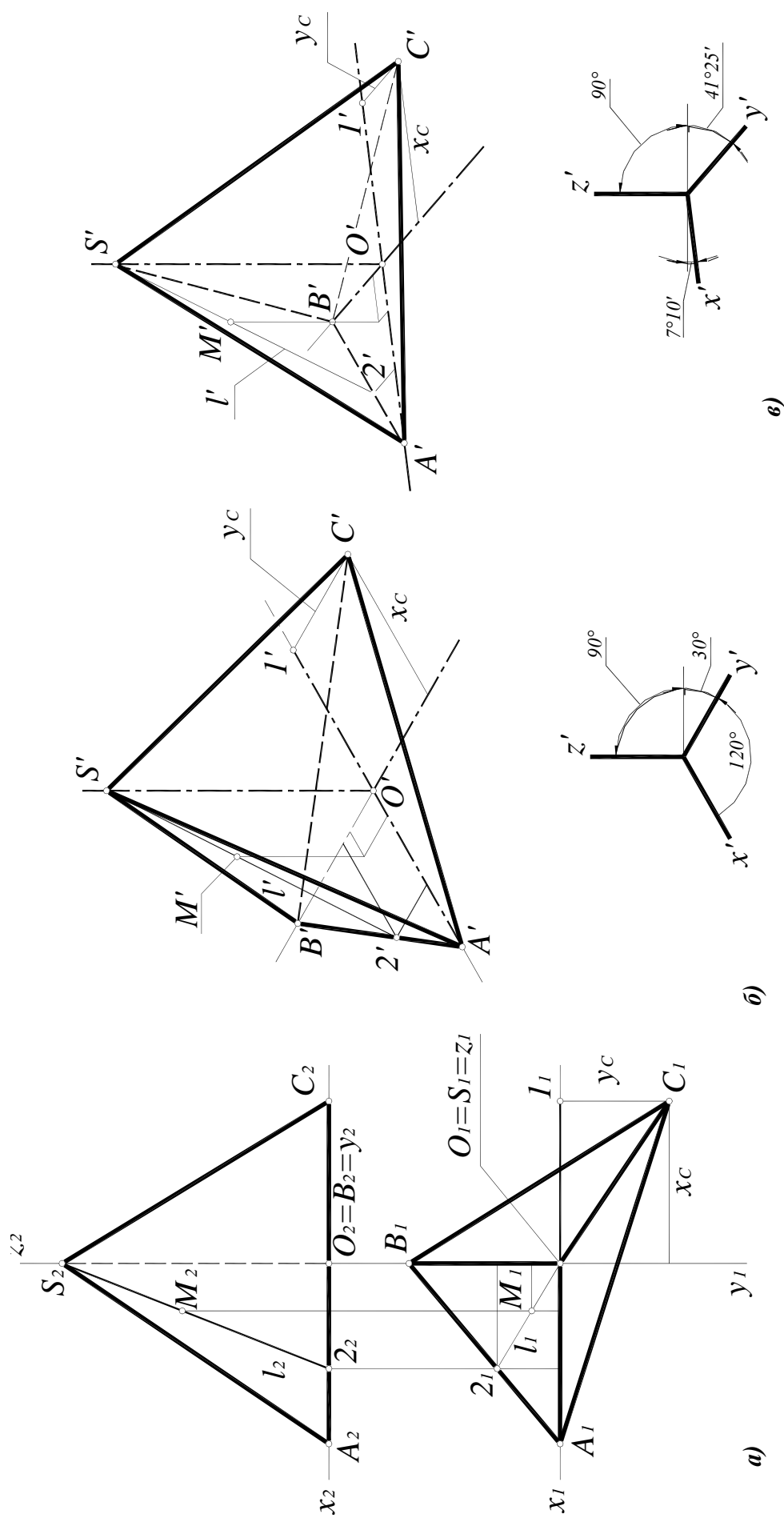


Рис. 168. Аксонометрические проекции пирамиды:

- a* – ортогональный чертеж;
- б* – прямоугольная изометрия;
- в* – прямоугольная диметрия



### 13.4. Аксонометрические проекции окружности

В общем случае окружность проецируется на аксонометрическую плоскость проекций в виде эллипса, большая ось (БОЭ) которого, в точной аксонометрии, равна диаметру окружности  $d$ , а малая (МОЭ) –  $d \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона плоскости окружности к аксонометрической плоскости проекций.

Если окружность лежит в координатной плоскости или параллельна ей, то на аксонометрическом чертеже большая ось эллипса, изображающего окружность, располагается перпендикулярно той аксонометрической оси, которая отсутствует в наименовании плоскости окружности (рис. 169).

Например, если окружность расположена в плоскости  $\Pi_1(xOy)$ , в аксонометрии большая ось эллипса перпендикулярна оси  $z$ .

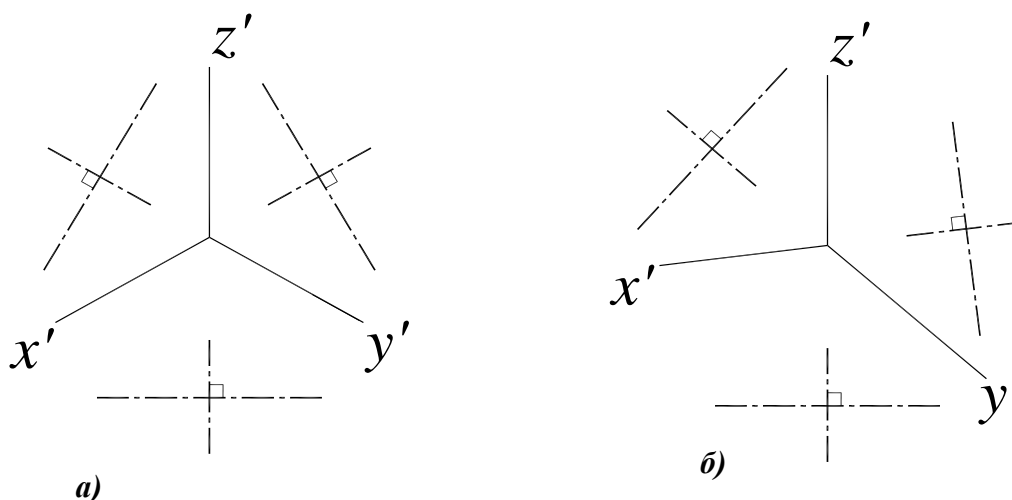


Рис. 169. Схема расположения осей эллипсов:

*a* – прямоугольная изометрия;

*б* – прямоугольная диметрия

Размеры осей эллипса в прямоугольных приведенных изометрии и диметрии даны в табл. 1 ( $d$  – диаметр окружности).

Таблица 1

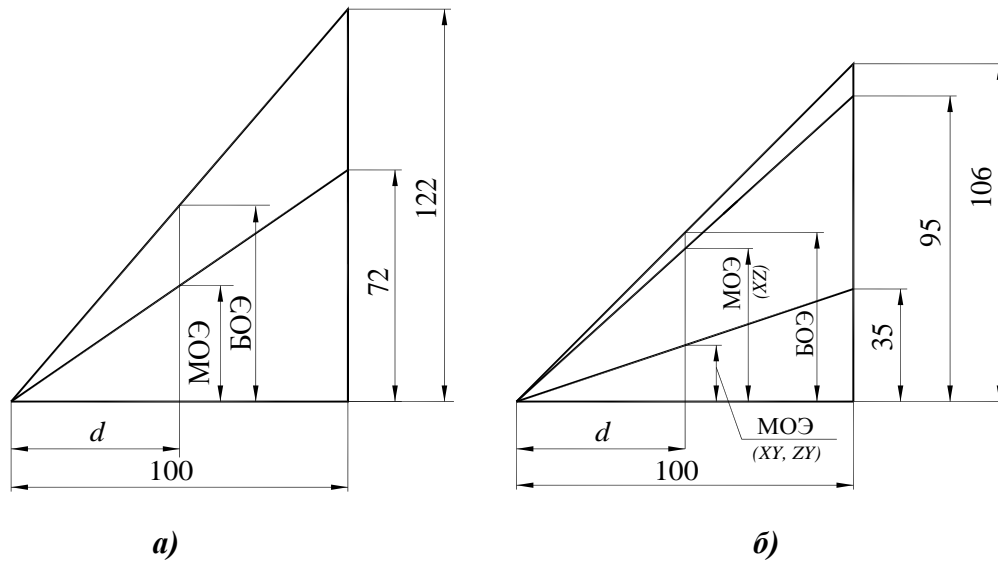
Изометрия		Диметрия			
во всех плоскостях		в плоскостях $\Pi_1$ и $\Pi_3$		в плоскости $\Pi_2$	
БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ
$1.22d$	$0.72d$	$1.06d$	$0.35d$	$1.06d$	$0.95d$

Определить размеры осей эллипса можно графически, пользуясь следующими треугольниками:

**Изометрия:** Строятся два прямоугольных треугольника с общим катетом 100мм и катетами 72мм и 122мм (рис. 170, *a*). На большем (горизонтальном) катете треугольника откладывается значение диаметра (радиуса) окружности и строится подобный треугольник.

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 122 определяет большую ось эллипса.

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 72 определяет малую ось эллипса.



**Рис. 170. Треугольники для определения размеров осей эллипсов:**

*a* – прямоугольная изометрия;

*б* – прямоугольная диметрия

**Диметрия:** Строятся три прямоугольных треугольника с общим катетом 100мм, на котором откладывается значение диаметра (радиуса) окружности (рис. 170, б).

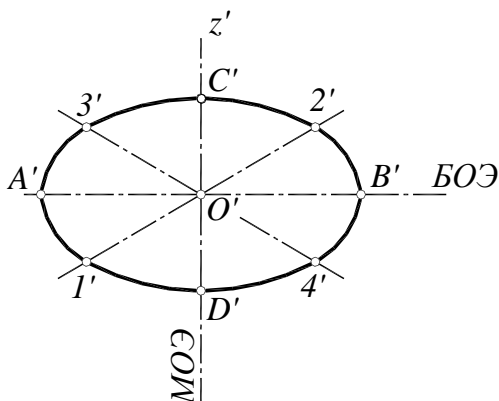
Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 106 определяет большую ось эллипса для всех аксонометрических плоскостей.

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 94 определяет малую ось эллипса для плоскости  $\Pi_2(xOz)$ .

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 35 определяет малую ось эллипса для плоскости  $\Pi_1(xOy)$  и  $\Pi_3(zOy)$ .

### 13.4.1. Построение эллипсов по восьми точкам

Построение эллипса как аксонометрической проекции окружности начинается с определения положения центра и направления большой и малой осей эллипса. Размеры большой и малой осей рассчитывают или определяют графически и откладывают на чертеже  $A'B'$  – большая ось,  $C'D'$  – малая. Затем через центр эллипса проводят вспомогательные прямые в направлении аксонометрических осей. В изометрии в направлении осей откладывается натуральный диаметр окружности  $1-2$  и  $3-4$ . Полученные восемь точек соединяют плавной лекальной кривой. Построение изометрического эллипса по восьми точкам показано на рис. 171.



**Рис. 171. Построение изометрического эллипса по восьми точкам:**

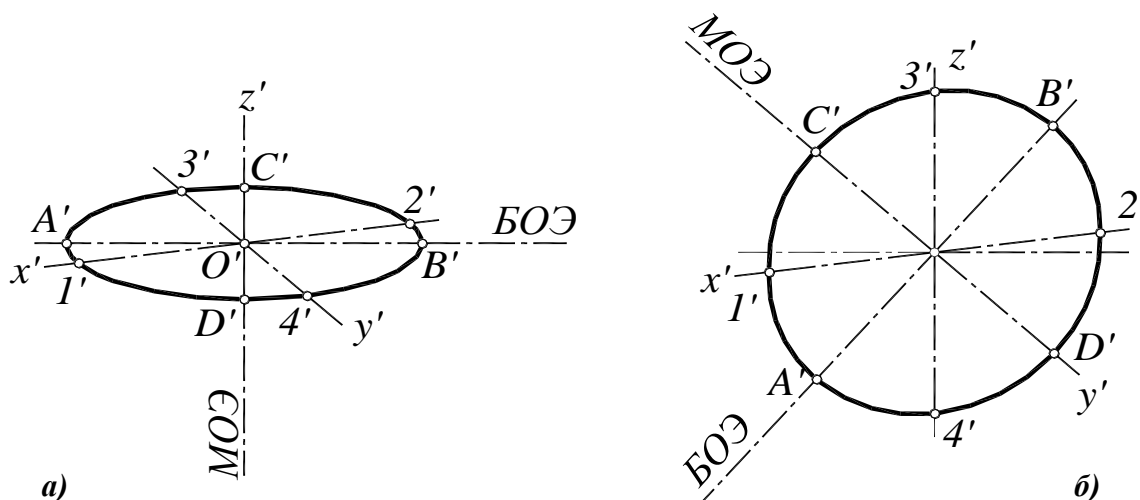
$A'B' = 1,22d$  – большая ось эллипса;

$C'D' = 0,7d$  – малая ось эллипса;

$1'-2'$  – размер по оси  $x$ , равный диаметру окружности  $d$ ;

$3'-4'$  – размер по оси  $y$ , равный диаметру окружности  $d$

При построении диметрических эллипсов учитывается коэффициент искажения 0,5 направлении оси  $y$ . Построение диметрических эллипсов по восьми точкам показано на рис. 172.



**Рис. 172. Построение диметрического эллипса по восьми точкам:**

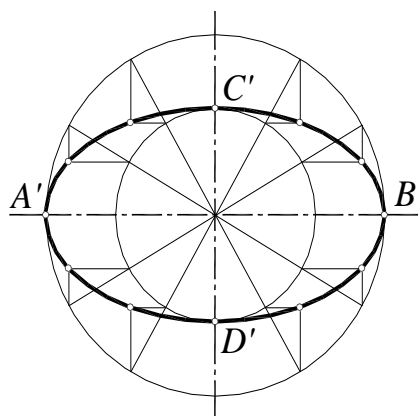
*a* – для окружностей в плоскостях  $\Pi_1(xOy)$  и  $\Pi_3(zOy)$ :

БОЭ =  $1,06d$  – большая ось эллипса;  
 МОЭ =  $0,35d$  – малая ось эллипса;  
 $1'-2'=d$  – размер по оси  $x$ ;  
 $3'-4'=0,5d$  – размер по оси  $y$ ;

*б* – для окружностей в плоскости  $\Pi_2(xOz)$ :

БОЭ =  $1,06d$  – большая ось эллипса;  
 МОЭ =  $0,94d$  – малая ось эллипса;  
 $1'-2'=d$  – размер по оси  $x$ ;  
 $3'-4'=d$  – размер по оси  $z$

Если восьми точек недостаточно, эллипс можно построить по двум осям (рис. 173). Этот способ можно применять и для построения эллипсов с произвольными размерами осей, например, для построения проекций окружности, лежащей в проецирующей плоскости.



**Рис. 173. Построение эллипса по двум осям:**

$A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса

Строят две окружности с диаметрами, равными большой и малой оси эллипса, и делят их радиальными отрезками на  $n$  частей. Затем из каждой точки пересечения большой окружности проводят вертикальные отрезки в сторону большой оси, а из точек пересечения с малой окружностью – горизонтальные отрезки в сторону от малой оси. Точки пересечения отрезков и являются точками эллипса. Полученные точки соединяют плавной лекальной кривой.

### 13.4.2. Построение овалов

Построение эллипсов требует применения лекал. На практике обычно вместо эллипсов вычерчивают четырехцентровые овалы.

Существует два способа построения четырехцентровых изометрических овалов. Для построения четырехцентрового овала по двум осям (рис. 174, а) из центра овала строят две окружности диаметрами равным и большой и малой осям эллипса. Точка пересечения большой окружности с направлением малой оси – центр большой дуги  $O'$ , радиус большой дуги  $R=O'D'$ . Точка  $I'$  – центр малой дуги, радиус малой дуги –  $r=I'A'$ . Точки  $3'4'$  – точки сопряжения. Затем строят дуги радиусов  $R$  и  $r$  между точками сопряжения.

Можно построить четырехцентровый овал используя только диаметр проецируемой окружности (рис. 174, б). Из центра овала строят направления большой и малой осей и окружность диаметром, равным диаметру проецируемой окружности. Из точки  $O'$  пересечения окружности с направлением малой оси делят окружность на шесть частей.  $O'$  – центр большой дуги овала. Отрезок  $O'I'=O'4'=R$  – радиус большой дуги, Точка  $O''$  пересечения отрезка  $O'4'$  с направлением большой оси – центр малой дуги, отрезок  $O''4'=r$  – радиус малой дуги. Точки  $I'2'3'4'$  точки сопряжения. Затем строят дуги соответствующих радиусов между точками сопряжения.

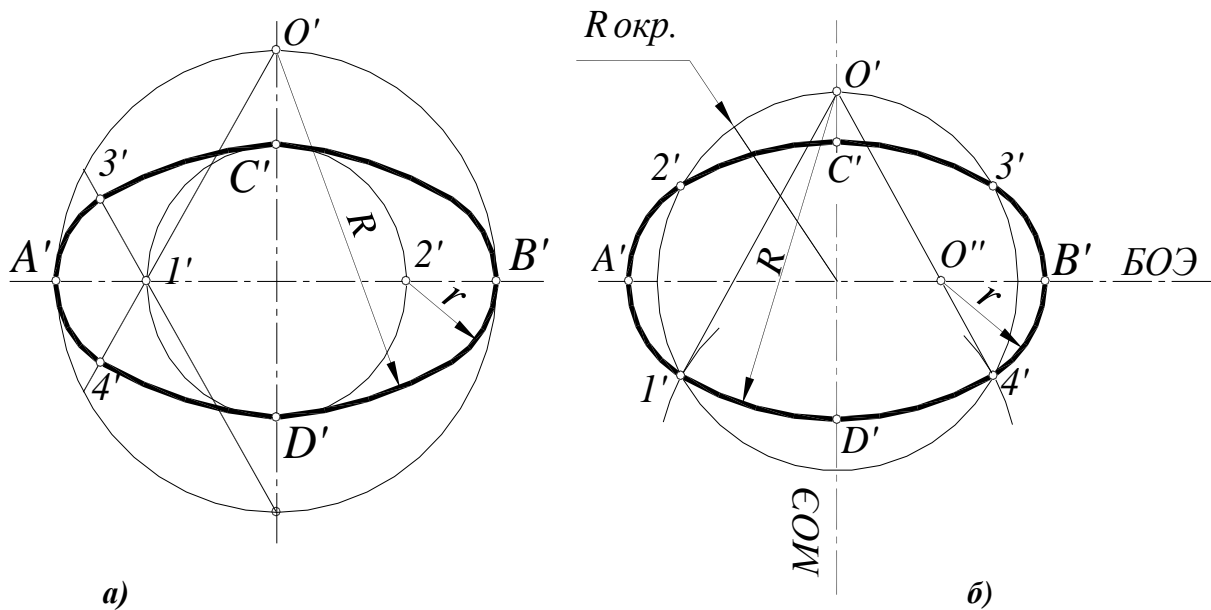


Рис. 174. Построение четырехцентровых овалов в изометрии:

а – по двум осям:

$A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса;  
 $O'$  – центр большой дуги;  
 $O''$  – центр малой дуги

б – по диаметру окружности:

$A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса;  
 $O'$  – центр большой дуги;  
 $I'$  – центр малой дуги;

Диметрические эллипсы также можно заменить четырехцентровыми овалами. Построение диметрических овалов для окружностей в плоскостях, параллельных  $xOy$  и  $zOy$  показано на рис. 175.

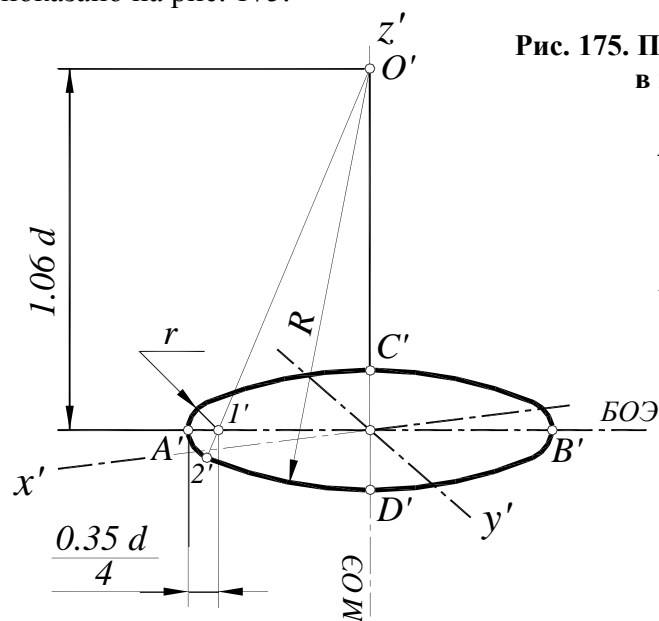


Рис. 175. Построение диметрического овала в плоскости  $xOy$ :

$A'B'$  - большая ось эллипса;  
 $C'D'$  - малая ось эллипса;  
 $O'$  - центр большой дуги;  
 $I'$  - центр малой дуги;  
 $R=O'D'$  - радиус большой дуги;  
 $r=I'A'$  - радиус малой дуги;  
 $2'$  - точка сопряжения

Для построения овала, изображающего окружность в плоскостях, параллельных  $xOz$ , строят большую и малую оси и вспомогательную окружность, диаметром  $0,2d$  (рис. 176). Точка  $4'$  - центр большой дуги,  $R=O'D'$  - радиус большой дуги. Точка  $I'$  - центр малой дуги,  $r=I'A'$  - радиус малой дуги. Затем строят дуги радиусов  $R$  и  $r$  между точками сопряжения  $5'6'7'8'$ .

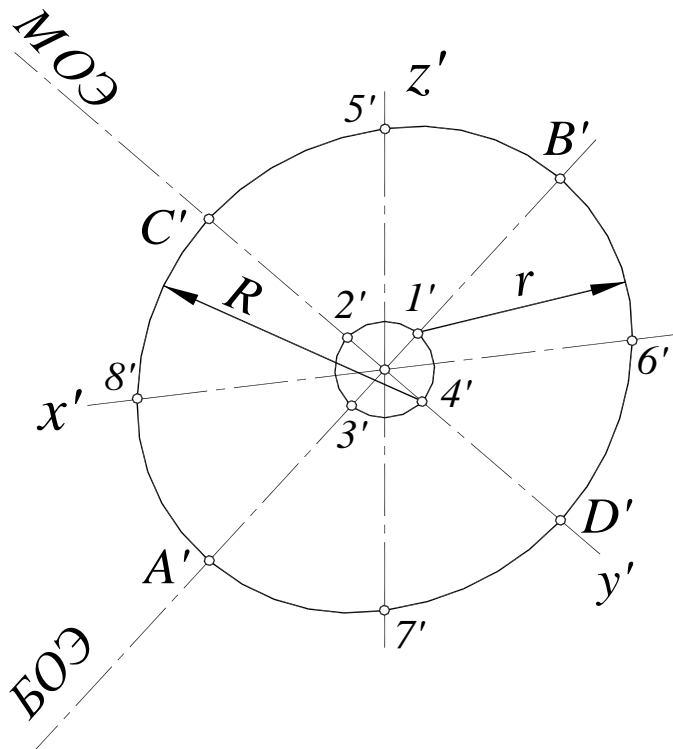


Рис. 176. Построение диметрического овала в плоскости  $xOz$ :

$A'B'$  - большая ось эллипса;  
 $C'D'$  - малая ось эллипса

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Гордон, В.О.** Курс начертательной геометрии: учебное пособие / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огневский; под ред. Ю.Б. Иванова. – 23-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 272с.
- 2. Бубенников, А.В.** Начертательная геометрия: учебник для втузов / А.В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1985. – 288с.
- 3. Бубенников, А.В.** Начертательная геометрия: учебник для вузов / А.В. Бубенников, М.Я. Громов.– 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1973. – 416с.
- 4. Виницкий, И.Г.** Начертательная геометрия: учебник для вузов / И.Г. Виницкий.– М.:Высшая школа, 1975. – 280с.
- 5. Капустина, О.А.** Начертательная геометрия (конспект лекций): учебное пособие / О.А. Капустина, Л.М. Колосунина, С.С. Станков. ГПИ им. А.А. Жданова – Горький, 1970.
- 6. Лагерь, А.И.,** Инженерная графика: учебник для инж. техн спецвузов / А.И. Лагерь, Э.А. Колесникова. – М.: Высшая школа, 1985. – 176с.
- 7. Локтев, О.В.** Краткий курс начертательной геометрии: учебник для втузов / О.В. Локтев. – 2-е изд., перераб. и доп., – М.: Высшая школа, 1985. – 136с.
- 8. Посвянский, А.Д.** Краткий курс начертательной геометрии: учебник для всех специальностей втузов, кроме строит. и архитект / А.Д. Посвянский. – 3-е изд., – М.: Высшая школа, 1970. – 240 с.
- 9. Фролов, С.А.** Начертательная геометрия: учебник для втузов / С.А. Фролов. – 2-е изд., перераб. и доп., – М.: Машиностроение, 1983. – 240с.
- 10. Четверухин, Н.Ф.** и др. Курс начертательной геометрии: учебник для всех специальностей технических вузов / Н.Ф. Четверухин и др. – М.: Гос. из-во тех.-теор. лит, 1956. – 436с.

**Скобелева Ирина Юрьевна  
Ширшова Ирина Александровна  
Мухина Милена Львовна**

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Редактор Е.В. Комарова  
Технический редактор Т.П. Новикова  
Компьютерная верстка И.Ю. Скобелева**

**Дизайн обложки В.В. Коваль**

Подписано в печать 28.12.2006. Формат 60×84 1/8.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,0.  
Уч. изд. л. 15,0. Тираж 1500. Заказ 980

---

Нижегородский государственный технический университет.  
Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:  
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.