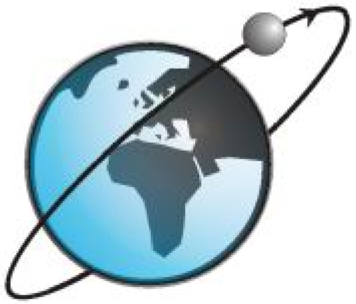
Министерство образования Российской Федерации

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Часть 1
Механика, молекулярная физика, теплота



Нижний Новгород 2004

Составители: А.Б. Федотов, И. А. Вдовиченко, Г.Д.Павлова, Г.И.Шишков
УДК 681.383; 621.384

Сборник задач по физике, Ч. 1: Механика, молекулярная физика, теплота для студентов всех специальностей / НГТУ; Сост.: А.Б. Федотов, И.А Вдовиченко и др. Н.Новгород, 2004, 118 с.

Ответственный редактор А.Б. Федотов

Рецензент А.И.Кононов

Редактор И.И. Морозова

Подп.к печ. Формат $60 \times 84\ 1/16$. Бумага Печать офсетная.
Печ. л. 7,5. Уч.– изд. л. 5,5. Тираж 2000 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет. Типография НГТУ. 603600, Н.Новгород, ул. Минина, 24

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник задач предназначен для студентов первого курса всех специальностей. Задачи распределены по четырем главам: «Кинематика», «Динамика материальной точки», «Динамика твердого тела» и «Молекулярная физика и теплота». В соответствии со сложившейся практикой распределения нагрузки, объем задачника рассчитан на 36 часов аудиторных занятий и соответствующее количество часов внеаудиторной работы. Поэтому в сборнике не представлены некоторые темы из числа тех, которые обычно фигурируют в рабочих программах для студентов первого курса технических вузов. В частности, отсутствуют задачи по темам: «Статика», «Теория упругости» и ряду других тем. Задачи на тему «Всемирное тяготение» вошли как составная часть в п. 2.1 «Законы Ньютона. Силы», а также, в п. 2.2 «Работа. Энергия. Закон сохранения энергии». Задачи на темы «Момент импульса» и «Момент силы» включены отдельным параграфом в главу «Динамика твердого тела».

При составлении этого сборника мы, наряду с оригинальными задачами, широко использовали материалы таких известных сборников, как, например: Иродов И.Е. Задачи по общей физике; Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике; Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике и ряд других.

Для обозначения векторов момента силы, момента импульса и ускорения были использованы символы $\vec{M}$, $\vec{L}$ и $\vec{a}$ соответственно. Момент инерции обозначается символом J. В остальном мы придерживались системы обозначений, принятой в учебнике Савельева И.В. Курс общей физики. Т.1.

Номера задач повышенной сложности отмечены «звездочками» (например, 1.11*). В конце каждой главы имеется раздел «Примеры решения задач». Номера задач, подробное решение которых представлено в этом разделе, отмечены буквой «П» (например, 2.22*П).

Выражаем искреннюю признательность доценту А.И.Кононову за ряд ценных замечаний и предложений, а также лаборанту Н.С.Рыбкиной за помощь в оформлении макета.

Краткий список астрономических величин и физических констант

Астрономические величины	**Значения**	**Физические константы**	**Значения**
Радиус Земли $R_З$	$6{,}37\cdot10^{6}$м	Гравитационная постоянная G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2
Масса Земли $M_З$	$5{,}98\cdot10^{24}$кг	Стандартное ускорение свободного падения g	$9{,}807$м/с^2
Масса Солнца $M_с$	$1{,}99\cdot10^{30}$кг	Постоянная Авогадро $N_А$	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$

Среднее расстояние от Земли до Солнца $r_с$	$1{,}495\cdot10^{11}$м	Постоянная Больцмана $k_Б$	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Средний радиус лунной орбиты $r_л$	$3{,}84\cdot10^{8}$м	Молярная газовая постоянная R	8,31 Дж/(моль·К)
Масса Луны $M_л$	$7{,}35\cdot10^{22}$кг	Стандартный объём моля газа V_0	22,4 л/моль

1. КИНЕМАТИКА

1.1.Кинематика материальной точки

Основные определения

✓ Уравнение движения материальной точки

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y+z(t)\vec{e}_z, \tag{1.1а}$$

где $\vec{r}(t)$ – ее радиус-вектор, x, y, z – проекции радиус-вектора на декартовы оси координат. Единичные векторы этих осей (орты) обозначены как $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$.

✓ Средние векторы скорости и ускорения материальной точки соответственно:

$$\langle\vec{V}\rangle=\Delta\vec{r}/\Delta t, \tag{1.1б}$$

$$\langle\vec{a}\rangle=\Delta\vec{V}/\Delta t, \tag{1.1в}$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение (приращение радиус-вектора).

✓ Скорость и ускорение материальной точки:

$$\vec{V}(t)=d\vec{r}/dt, \tag{1.1г}$$

$$\vec{a}(t)=d\vec{V}/dt. \tag{1.1д}$$

✓ Проекции ускорения на касательную и нормаль к траектории:

$$a_\tau=dV/dt, \tag{1.1е}$$

$$a_n=V^2/\rho, \tag{1.1ж}$$

где $V=\left|\vec{V}\right|$ – модуль скорости точки, ρ – радиус кривизны траектории.

✓ Путь, пройденный точкой (длина траектории),

$$s_{12}=\int_1^2 Vdt. \tag{1.1з}$$

✓ Если $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – скорости двух точек, то скорость второй точки относительно первой

$$\vec{V}_{21}=\vec{V}_2-\vec{V}_1. \tag{1.1и}$$

1.1. Вектор $\vec{A}$ изменил своё направление на обратное. Найти $\Delta\vec{A}, \left|\Delta\vec{A}\right|, \Delta A$.

1.2. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, для того чтобы выполнялись соотношения:
а) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=0$; б) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=A$; в) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{A^2+B^2}$;
г) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{A^2-B^2}$; д) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=A+B$; е) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=A-B$?

1.3. Задан вектор $\vec{A}=4\vec{e}_x+7\vec{e}_y$. Найти его проекцию на ось l, лежащую в плоскости (x,y). Известно, что направление этой оси образует угол $\alpha=30^O$ с осью x.

1.4. Написать выражение для косинуса угла α между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$ с компонентами A_x, A_y, A_z и B_x, B_y, B_z.

1.5. Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы, движущейся в плоскости xy. Что можно сказать о ее траектории, если: а) $\vec{r}$ меняется только по модулю, не меняя направление на противоположное; б) $\vec{r}$ меняется только по модулю и может менять направление на противоположное; в) $\vec{r}$ меняется только по направлению; г) меняется только проекция $\vec{r}$ на ось x?

1.6. Частица 1 движется со скоростью $\vec{V}_1=A\vec{e}_x$, частица 2 – со скоростью $\vec{V}_2=B\vec{e}_y$ (A и B – константы). Найти скорость второй частицы относительно первой $\vec{V}_{2,1}$ и модуль этой скорости.

1.7. Скорость пловца относительно воды равна 2 м/с и он держит курс перпендикулярно берегам. Найти: а) величину скорости пловца относительно берега; б) угол между линией берега и вектором этой скорости; в) расстояние вдоль берега, на которое течение снесёт пловца, переплывающего реку. Скорость течения воды в реке 1,5 м/с. Ширина реки 60 м.

1.8. Моторная лодка развивает относительно воды скорость V = 5 м/с. Вода течет с одинаковой по всей ширине реки скоростью U = 0,5 м/с. Ширина реки АБ, как и расстояние между сваями В и Г равны l =1 км (рис.1.1). а) Под каким углом α относительно отрезка АБ лодка должна держать курс, чтобы двигаться вдоль этого отрезка? б) Какое время будет затрачено на прохождение пути от т.А до т.Б и обратно? в) То же для пути от т.В до т.Г и обратно

1.9. Начальная скорость частицы $\vec{V}_1 = 1\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$ (м/с), конечная $\vec{V}_2 = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$ (м/с). Найти: а) приращение скорости; б) модуль приращения скорости; в) приращение модуля скорости.

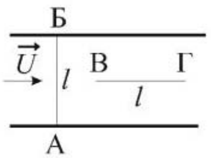


Рис. 1.1

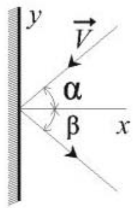


Рис. 1.2

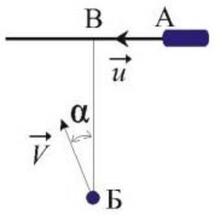


Рис. 1.3

1.10. Частица ударяется о стенку и упруго отражается от нее так, что угол падения α равен углу отражения β (рис. 1.2). Найти $|\Delta\vec{V}|$, ΔV, ΔV_x и ΔV_y, если $\vec{V}$ – это скорость частицы перед ударом.

1.11. Уравнение движения частицы, находящейся на оси x, имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где A=1 м, B = 4 м/с, C = − 0,5 м/с^3. Найти: а) проекцию мгновенной скорости частицы $\vec{V}$ и ее ускорения $\vec{a}$ на ось x в момент времени t = 2с; б) проекцию перемещения; в) среднее значение проекций скорости и г) ускорения за время $t \in [0-2\text{с}]$.

1.12. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\vec{r} = 3t^2\vec{e}_x + 4t^2\vec{e}_y + 7\vec{e}_z$ (м). Вычислить: а) путь S, пройденный частицей за время $t \in [0-10\text{с}]$, б) модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$.

1.13П. Радиус-вектор частицы, движущейся в плоскости xy, определяется выражением $\vec{r} = t^2\vec{e}_x - 3t\vec{e}_y$ (м). Определить для момента времени t =2с значения физических величин: а) скорости частицы $\vec{V}$ и модуля скорости $|\vec{V}| = V$, б) ускорения $\vec{a}$ и модуля ускорения $|\vec{a}| = a$, в) угла α между векторами $\vec{V}$ и $\vec{a}$, г) тангенциального a_τ и нормального a_n ускорения, д) радиуса кривизны траектории.

1.14. Радиус-вектор частицы, движущейся в плоскости xy, определяется выражением: $\vec{r} = 3\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\vec{e}_x + 3\left(1+\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\vec{e}_y$. Определить: а) уравнение траектории частицы и изобразить траекторию на плоскости xy, б) скорость $\vec{V}$ частицы и ее модуль в произвольный момент времени, в) ускорение $\vec{a}$ и модуль ускорения в произвольный момент времени.

1.15. Двигаясь равномерно со скоростью V_0, частица прошла половину окружности радиусом R. Определить: а) модуль средней скорости частицы $|\langle\vec{V}\rangle|$, б) модуль ее среднего ускорения $|\langle\vec{a}\rangle|$, в) средний модуль ускорения $\langle a\rangle$.

1.16. Частица движется равномерно по окружности радиусом R, делая за время τ один оборот. Найти величину средней скорости точки за промежуток времени: а) от 0 до τ/4, б) от 0 до τ/2, в) от 0 до 3τ/4.

1.17.* Первоначально покоившаяся частица прошла за $\tau = 10$ с полторы окружности радиусом R =5м с постоянным тангенциальным ускорением. Вычислить: а) средний модуль скорости, б) модуль средней скорости, в) модуль среднего ускорения.

1.18*П. Автобус (А) движется по шоссе со скоростью u (рис.1.3). Под каким углом α к направлению БВ следует бежать человеку (точка Б), находящемуся на расстоянии L от шоссе, чтобы выбежать на дорогу впереди автобуса как можно дальше от него? При каком минимальном расстоянии АВ человек успеет сделать это? Скорость человека $V < u$.

1.19. С башни высотой H =25 м горизонтально брошен камень со скоростью V_0=15 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) время полета t; б) расстояние s места падения камня от подножия башни; в) величину скорости камня V; г) угол α между вектором скорости и горизонтом в конце полета.

1.20. Найти нормальное и тангенциальное ускорения камня из предыдущей задачи через одну секунду после начала полета.

1.21.* Тело брошено со скоростью V_0 под углом θ к горизонту. Чему равен радиус кривизны траектории тела: а) в начале движения; б) в верхней точке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.22. Под каким углом к горизонту следует бросить тело, чтобы дальность его полета равнялась максимальной высоте траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.23*П. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое – под углом $\theta = 60^0$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $V_0 = 25{,}0$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами через t =1,70 с.

1.24.* Две частицы движутся в поле тяжести Земли. В начальный момент частицы находились в одной точке и имели скорости $V_1 = 3{,}00$ м/с и $V_2 = 4{,}00$ м/с, направленные горизонтально и в противоположные стороны. Найти расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей взаимно перпендикулярны. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.25.* Футболист забивает гол с расстояния L = 11 м от ворот, высота которых H =2,5 м. Какую минимальную скорость $V_{мин}$ необходимо сообщить мячу, чтобы он попал точно под перекладину? Под каким углом α к горизонту должен быть направлен вектор этой скорости? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.26.* Между целью и минометом, находящимися на одной высоте, расположена стена высотой H . Расстояние от миномета до стены равно l, а от стены до цели L . Определить минимальную величину начальной скорости мины $V_{мин}$, необходимую для поражения цели. Под каким углом α к горизонту следует стрелять? Проанализировать зависимость решения от значения высоты стены.

1.2. Кинематика твердого тела

Основные определения

- ✓ Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела

$$\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt , \qquad (1.2а)$$

$$\vec{\beta} = d\vec{\omega}/dt , \qquad (1.2б)$$

где $\vec{\varphi}$ – векторная координата угла поворота относительно неподвижной оси. Направление этого вектора совпадает с направлением оси вращения и определяется правилом правого винта.

- ✓ Зависимость $\varphi = \varphi(t)$ – уравнение плоского вращения.
- ✓ Связь между линейными и угловыми величинами

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{r}], \quad a_n = \omega^2 r, \quad a_\tau = \beta_z r , \qquad (1.2в)$$

где β_z – проекция углового ускорения на ось вращения, r – расстояние от этой оси.

1.27. Найти угловые скорости: а) суточного вращения Земли; б) часовой стрелки; в) минутной стрелки; г) искусственного спутника Земли, вращающегося по круговой орбите с периодом обращения T = 88 мин; д) линейную скорость движения этого спутника, если его орбита расположена на расстоянии 200 км от поверхности Земли.

1.28. Найти линейную скорость вращения точек земной поверхности на широте Пулковской обсерватории (60˚ северной широты).

1.29. Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость V_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости V_2 точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса.

1.30. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости ω =20 рад/с через N = 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса.

1.31. Вал вращается равнозамедленно с угловым ускорением 3,0 рад/с^2. В начале торможения частота его вращения равнялась 180 оборотов в минуту. Найти: а) время остановки вала, б) число оборотов вала с начала торможения до остановки.

1.32П. Угол поворота колеса вокруг закрепленной оси, проходящей через его центр, как функция времени имеет вид $\varphi(t) = 2t + t^3$ (рад). Радиус колеса R = 0,1 м. Для точек, лежащих на его ободе, найти через 2 секунды после начала движения следующие величины: а) угловую скорость; б) линейную скорость; в) угловое ускорение; г) тангенциальное ускорение; д) нормальное ускорение.

1.33. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi = At - Bt^3$, где A = 6,0 рад/с, B = 2,0 рад/с^3. Найти: а) средние значения проекций угловой скорости и углового ускорения на ось z за промежуток времени от t = 0 до остановки; б) проекцию углового ускорения в момент остановки.

1.34. Цилиндр радиусом R катится без скольжения со скоростью V (рис 1.4). Найти: а) скорости точек 1, 2, 3, 4, расположенных на поверхности цилиндра, выразив их через орты координатных осей $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$; б) ускорения этих точек.

1.35.* Написать уравнения движения точки 1 из предыдущей задачи в параметрическом виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$. В момент времени $t = 0$

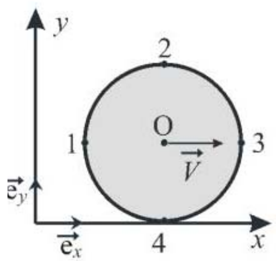


Рис. 1.4

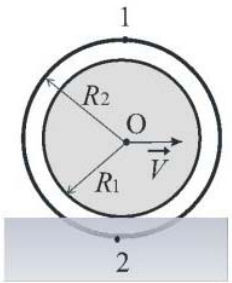


Рис. 1.5

точка 1 находилась в начале координат. Изобразить на плоскости xy траекторию этой точки. Чему равен радиус кривизны этой траектории в тех ее точках, где координата y принимает максимальное значение?

1.36. Железнодорожное колесо, радиус которого равен R_1, а реборда R_2 (рис 1.5), катится без скольжения со скоростью V. Найти: а) угловую скорость колеса; б) проекцию скоростей точек 1 и 2 колеса на направление движения поезда.

1.37П. Диск радиуса r катится а) по внутренней; б) по внешней стороне цилиндрической поверхности радиуса R без проскальзывания. Чему равна угловая скорость диска Ω, если угловая скорость вращения его оси равна ω?

1.38. Внутренняя обойма роликового подшипника вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_1 = \omega$, а внешняя обойма – с угловой скоростью $\omega_2 = 4\omega$. Чему равна угловая скорость роликов подшипника, если радиус внутренней обоймы равен r, а радиус внешней обоймы $R = 1{,}5r$ (рис.1.6)?

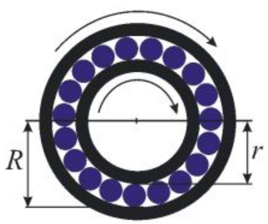


Рис. 1.6

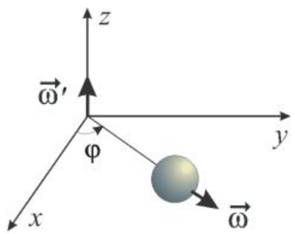


Рис. 1.7

1.39*П. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}(t) = At\vec{e}_x + Bt^2\vec{e}_y$, где A = 0,5 рад/с^2, B = 0,06 рад/с^3. Найти модули: а) угловой скорости ω; б) углового ускорения β; в) угол α между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ в момент времени t = 10 с.

1.40. Тело участвует в двух вращениях, происходящих со скоростями $\vec{\omega}_1 = At^2\vec{e}_x$ и $\vec{\omega}_2 = 2At^2\vec{e}_y$ (A = 1,00 рад/с^3). На какой угол φ повернется тело за первые 3,00 с? Вокруг какой оси произойдёт этот поворот?

1.41. Шар вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, которая поворачивается в плоскости x,y с угловой скоростью $\vec{\omega}' = \omega'\vec{e}_я$ (рис. 1.7). Найти: а) угловую скорость $\vec{\Omega}$ и угловое ускорение $\vec{\beta}$ шара, а также модули этих векторов, б) угол α между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\omega}$, в) угол γ между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\beta}$. Считать, что в начальный момент вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси x.

1.3. Примеры решения задач

Задача 1.13

Вся информация о движении частицы содержится в уравнении ее движения. Оно приведено в условии задачи; с другой стороны, по определению (1.1а) $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что зависимость координат частицы от времени

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = -3t, \quad z(t) = 0. \qquad (*)$$

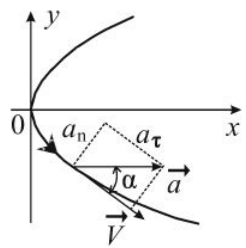


Рис.1.8

1. Исключив из системы уравнений (*) параметр t, получим уравнение траектории частицы $x(y) = y^2/9$. Частица движется по параболической траектории в плоскости $z = 0$ в направлении, указанном стрелкой (рис.1.8).

2. Зависимость скорости частицы от времени может быть найдена с помощью формулы (1.1г) как производная по времени от уравнения движения $\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = 2t\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Путем сравнения этого выражения с формулой, определяющей вектор скорости через его проекции

$\vec{V} = V_X\vec{e}_X + V_Y\vec{e}_Y + V_Z\vec{e}_Z$, можно установить, что $V_x = 2t$ м/с; V_y = -3 м/с; $V_z = 0$. В момент времени t = 2с скорость $\vec{V} = 4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Величина скорости может быть выражена через ее проекции как $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$; при $t = 2$ с получаем $V = 5$ м/с.

3. Аналогично можно найти ускорение частицы: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{V}}(t) = 2\vec{e}_x$ (м/с^2). Это постоянный вектор, направленный параллельно оси x; его модуль $a = 2$ м/с^2 (рис.1.8).

4. Для нахождения угла α между векторами $\vec{V}$ и $\vec{a}$ воспользуемся известной формулой для скалярного произведения векторов: $\vec{A}\vec{B} = AB\cos\alpha$. Из нее, в частности, следует, что скалярное произведение $\vec{e}_x\vec{e}_x = 1$, а скалярное произведение $\vec{e}_x\vec{e}_y = 0$. Таким образом, $\vec{V}\vec{a} = (2t\vec{e}_X - 3\vec{e}_Y)2\vec{e}_X = 4t$. С другой стороны, $\vec{V}\vec{a} = Va\cos\alpha$, поэтому $\cos\alpha = \frac{\vec{V}\vec{a}}{Va} = \frac{4t}{Va}$, в момент времени t = 2с $\cos\alpha = \frac{4\cdot 2}{5\cdot 2} = 0{,}8$. Соответственно $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 0{,}6$.

5. Наконец, найдем a_τ и a_n как проекции вектора $\vec{a}$ на касательное и перпендикулярное к траектории направление: $a_\tau = a\cos\alpha = 1{,}6$ м/с^2, $a_n = a\sin\alpha = 1{,}2$ м/с^2 (рис. 1.8). Радиус кривизны траектории в заданной точке, в соответствии с формулой (1.1ж), выражается через скорость и нормальное ускорение частицы:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} \approx 20{,}8 \text{ м.}$$

Задача 1.18

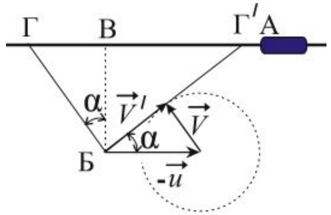


Рис. 1.9

Если бы у человека была цель выбежать на шоссе как можно раньше, ему следовало избрать кратчайшую траекторию БВ (рис.1.9). Однако это не оптимальная стратегия для того, чтобы обеспечить максимальное расстояние между ним и автобусом. Оказывается, целесообразно выбрать курс с таким значением угла α ≠ 0 (отрезок БГ), чтобы некоторая потеря времени с лихвой компенсировалась дополнительным запасом ВГ пути для автобуса. Покажем это, перейдя в систему отсчета, связанную с автобусом. В этой системе отсчета автобус неподвижен, а человек бежит со скоростью $\vec{V}' = \vec{V} - \vec{u}$. Направление этой скорости зависит от того, какое направление $\vec{V}$ выберет для себя человек из всех возможных, отмеченных на рис.1.9 пунктирной окружностью. Для того, чтобы расстояние Г′А было максимальным, скорость человека относительно автобуса $\vec{V}'$ должна быть направлена по касательной к этой окружности, как показано на рис.1.9. Следовательно, скорость $\vec{V}'$ перпендикулярна вектору $\vec{V}$, а также траектории человека (отрезку БГ). Таким образом, треугольник БГВ геометрически подобен треугольнику скоростей $\vec{V}, \vec{V}', -\vec{u}$; поэтому искомый угол α определяется равенством $\sin\alpha = V/u$.

Рисунок 1.9 позволяет ответить и на второй вопрос задачи. Для того, чтобы человек мог выбежать на шоссе перед автобусом, необходимо выполнение условия

$$\text{АВ} \geq \text{Г}'\text{В}. \quad (*)$$

С другой стороны, поскольку треугольник БГ′В тоже подобен вышеупомянутому треугольнику скоростей и угол при его вершине Г′ равен α, для стороны Г′В имеем $\text{Г}'\text{В} = \text{БВ}\,\text{ctg}\alpha = L\,\text{ctg}\alpha = L\frac{V'}{V} = L\frac{\sqrt{u^2 - V^2}}{V}$. После подстановки этого выражения в неравенство (*) окончательно получим: $\text{АВ} \geq L\frac{\sqrt{u^2 - V^2}}{V}$.

Задача 1.23

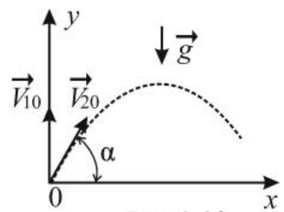


Рис.1.10

Движение тел описывается уравнениями:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{V}_{01}t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \text{ и } \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \vec{V}_{02}t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

где $\vec{V}_{01}$ и $\vec{V}_{02}$ − их начальные скорости, $\vec{g}$ − ускорение свободного падения. По условию задачи $V_{01} = V_{02} = V_0$. Выберем начало координат в точке старта так, чтобы $\vec{r}_0 = 0$ (рис.1.10). Тогда в проекциях на оси координат уравнения движения тел имеют вид

$$x_1 = 0,\ y_1 = V_0t - \frac{gt^2}{2}, \quad (*)$$

$$x_2 = V_0 t\cos\alpha\,,\ y_2 = V_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\,. \qquad (**)$$

Вычислим разности координат Δx и Δy двух тел: $\Delta x = x_2 - x_1 = V_0 t\cos\alpha$, $\Delta y = y_2 - y_1 = V_0 t(\sin\alpha - 1)$; поскольку расстояние между телами, по определению, равно $l = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, после несложных преобразований получаем $l = V_0 t\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$. В момент времени t =1,70 с расстояние $l =$ 22,0 м.

Задача 1.32

По определению (1.2а), проекция угловой скорости на ось вращения $\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = 2 + 3t^2$; она одинакова для всех материальных точек, составляющих твердое тело. Линейная скорость той или иной точки пропорциональна ее расстоянию r от неподвижной оси вращения: $V = \omega r$. Для точек, расположенных на ободе колеса, $V(t) = (2+3t^2)R$; их нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = (2+3t^2)^2 R$.

Аналогично, с помощью формулы (1.2б) вычислим угловое ускорение всех точек твердого тела: $\beta(t) = \dot{\omega}(t) = 6t$. Соответственно тангенциальное ускорение для точек, расположенных на ободе, $a_\tau = \beta R = 6tR$.

После подстановки в полученные выражения численных значений t = 2 с и R = 0,1 м получим: а) $\omega(2)$ =14 рад/с; б) $V(2) = 1{,}4$ м/с; в) $\beta(2) = 12$ рад/с^2; г) $a_\tau = 1{,}2$ м/с^2; д) $a_n = 19{,}6$ м/с^2.

Задача 1.37

Рисунок 1.11 иллюстрирует случай «а», когда диск катится по внутренней стороне цилиндрической поверхности. По условию задачи, точка А, принадлежащая оси диска, вращается вокруг оси цилиндра (точка О) с угловой скоростью ω. Поскольку расстояние от точки А до оси цилиндра равно R - r, ее линейная скорость по определению (см. выше решение задачи 1.32)

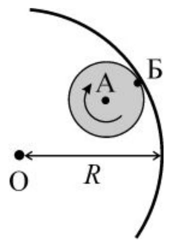


Рис.1.11

$$V_A = \omega(R - r). \qquad (*)$$

По условию задачи диск катится без проскальзывания. Это значит, что та его точка, которая в данный момент соприкасается с неподвижной поверхностью (точка Б), также неподвижна. Следовательно, движение диска можно рассматривать, как вращение вокруг неподвижной в данный момент времени оси, проходящей через точку Б. Таким образом, уже вычисленную линейную скорость точки А можно вычислить еще одним способом – через угловую скорость диска Ω и расстояние r от точки Б до точки А:

$$V_A = \Omega r\,. \qquad (**)$$

Сравнение выражений (*) и (**) приводит к следующему результату: $\Omega = \omega\dfrac{R-r}{r}$.

В случае «б» задача решается аналогично: расстояние от точки А до оси цилиндра, очевидно, равно $R + r$; поэтому $\Omega = \omega\dfrac{R+r}{r}$.

Задача 1.39

Движение тела можно рассматривать как сложное движение – вращение вокруг оси x с угловой скоростью $\omega_x = At$ и, одновременно, вокруг оси y с угловой скоростью $\omega_y = Bt^2$. Эти проекции определяют направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}(t) = At\vec{e}_x + Bt^2\vec{e}_y$ (и, соответственно, мгновенной оси вращения) в произвольный момент времени. Модуль угловой скорости $\omega(t) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = t\sqrt{A^2 + B^2t^2}$.

Вектор углового ускорения $\vec{\beta}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) = A\vec{e}_x + 2Bt\vec{e}_y$. Его направление в пространстве тоже изменяется, поскольку одна из его проекций (β_y) зависит от времени: $\beta_x = A$, $\beta_y(t) = 2Bt$. Модуль углового ускорения $\beta(t) = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} = \sqrt{A^2 + 4B^2t^2}$.

Угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ найдем с помощью формулы скалярного произведения: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{\omega}\vec{\beta}}{\omega\beta} = \dfrac{A^2 + 2B^2t^2}{\sqrt{(A^2 + B^2t^2)(A^2 + 4B^2t^2)}}$.

Подстановка численных значений параметров A и B при t = 10 с дает: ω =7,8 рад/с, β = 1,3 рад/с^2, cosα = 0,96.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Законы Ньютона. Силы

Основные определения

- ✓ Система отсчета инерциальна, если тела, на которые не действуют силы, движутся относительно нее равномерно и прямолинейно.
- ✓ Уравнение динамики для частицы постоянной массы m

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\,, \qquad (2.1а)$$

где $\vec{F} = \sum \vec{F}_j$ – векторная сумма (равнодействующая) всех сил, приложенных к точке.

- ✓ Импульс материальной точки $\vec{P} = m\vec{V}$; изменение импульса равно импульсу силы

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}_{ср}\Delta t\,, \qquad (2.1б)$$

где $\vec{F}_{ср}$ - среднее значение силы, приложенной к точке за время Δt .

- ✓ Силы взаимодействия двух материальных точек

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,. \qquad (2.1в)$$

- ✓ Сила гравитационного притяжения двух точечных масс (закон всемирного тяготения)

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}{}^3}\,, \qquad (2.1г)$$

где $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, проведенный из точки 1 в точку 2, а $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на частицу m_1 .

- ✓ Если смещение незакрепленного конца пружины жесткостью k от положения равновесия равно x , то проекция силы упругой деформации на направление x:

$$F_x = -kx\,. \qquad (2.1д)$$

- ✓ Проекция силы сухого трения на направление относительного скольжения двух тел

$$F_{тр} = -\mu N, \qquad (2.1е)$$

где μ – коэффициент трения между телами, N – величина силы их нормального упругого взаимодействия.

- ✓ В неинерциальной системе отсчета, ускорение которой $\vec{a}$, на покоящуюся материальную точку массы m действует псевдосила инерции

$$\vec{F}_{инерции} = -m\vec{a}\,. \qquad (2.1ж)$$

- ✓ Обозначим радиус-вектор и скорость частицы массы m в системе отсчета, вращающейся вокруг начала координат с угловой скоростью $\vec{\omega}$, как $\vec{r}$ и $\vec{V}'$ соответственно. В этой неинерциальной системе отсчета на частицу действуют две псевдосилы:

$$\vec{F}_{инерции} = m\left[\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\right]\times\vec{\omega}\right] \text{ и } \vec{F}_{Кориолиса} = 2m\left[\vec{V}'\times\vec{\omega}\right]. \qquad (2.1з)$$

2.1. Две шайбы массами m_1 и m_2 , скользившие по гладкой горизонтальной поверхности, столкнулись друг с другом. Среднее ускорение первой шайбы за время столкновения равно $\vec{a}_1$. Найти среднее ускорение $\vec{a}_2$ второй шайбы за то же время.

2.2. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти значение проекции этой силы на ось x в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 5$ с. В какой момент времени сила равна нулю?

2.3. На дне лифта лежит тело массой m. Чему равна сила нормальной упругой реакции $\vec{N}$, с которой лифт действует на тело, если он: а) равномерно движется вниз со скоростью $\vec{V}$; б) свободно падает; в) движется вверх с ускорением $\vec{a}$. Ускорение свободного падения $\vec{g}$ считать известным.

2.4. Аэростат массой $m = 250$ кг начал опускаться с постоянным ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Определить массу балласта $m_Б$, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.5. Грузы массами m_1 и m_2 соединены невесомой и нерастяжимой нитью через невесомый блок (рис. 2.1), который может вращаться вокруг неподвижной оси без трения. Найти величины: а) ускорений грузов; б) импульса системы $P = P(t)$, если начальная скорость грузов равнялась нулю; в) силы реакции F в оси блока.

2.6. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2. Кабина начинает подниматься с ускорением $\vec{a}_0$. Пренебрегая массами нити, блока, а также трением, найти: а) ускорение груза m_1 относительно кабины; б) силу, с которой блок действует на потолок кабины.

2.7. В системе, изображенной на рис. 2.2, массы тел равны m_0, m_1 и m_2, трения нет, массы блоков и нитей пренебрежимо малы, нити нерастяжимы. Найти ускорение a_1 тела m_1.

2.8. Найти ускорения грузов массами m_1 и m_2 в системе, изображенной на рис. 2.3. Блоки и нити невесомы, нити нерастяжимы.

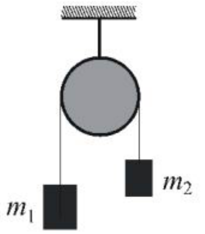


Рис. 2.1

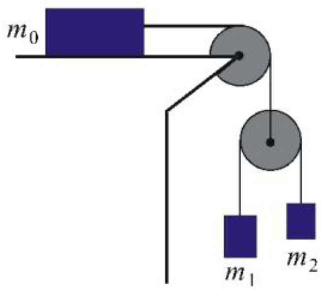


Рис.2.2

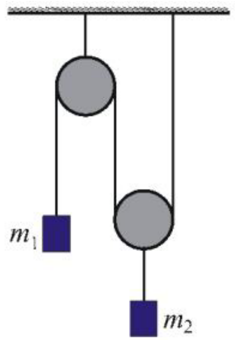


Рис. 2.3

2.9. К однородному стержню длиной L приложена сила $\vec{F}$, как показано на рис. 2.4. Определить силу механического напряжения (натяжения) T, приложенную к поперечному сечению стержня на расстоянии x от правого торца.

2.10. Ракета, масса которой M = 6 т, поднимается вертикально вверх. Двигатель ракеты развивает силу тяги F = 500кН. Определить силу натяжения $F_{\text{Н}}$ троса, свободно свисающего с ракеты, на расстоянии от точки прикрепления, равном $1/4$ его длины. Масса троса m равна 10 кг.

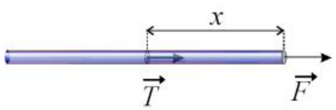


Рис.2.4

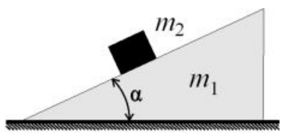


Рис. 2.5

2.11. Чему равна средняя сила взаимодействия пули массой m = 9 г и мишени, если время остановки пули $\Delta t = 0{,}001$ с? Скорость пули непосредственно перед ударом V = 800 м/с.

2.12. После удара ракеткой направление скорости теннисного мяча массой m изменилось на 90˚, а величина удвоилась по сравнению с первоначальным значением V. Как вычислить время соударения, если известно, что средняя сила взаимодействия мяча и ракетки была равна F?

2.13*П. Пушка массой M начинает свободно скользить вниз по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, был произведен выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\vec{P}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда по сравнению с массой пушки, найти продолжительность выстрела.

2.14.* На горизонтальной поверхности находится призма массой m_1 с углом при основании α и на ней брусок массой m_2 (рис. 2.5). Пренебрегая трением, найти: а) ускорение призмы a_1; б) под каким углом β к горизонту направлено ускорение бруска $\vec{a}_2$?

2.15.* Частица массой m движется равномерно по окружности радиусом R со скоростью V. Найти: а) среднюю силу $\langle \vec{F} \rangle$, действующую на частицу на пути, равном половине окружности и показать направление этой силы на рисунке; б) средний модуль этой силы $\langle |\vec{F}| \rangle$.

2.16. Частица массой m прошла $1/4$ окружности радиусом R, двигаясь с постоянным по модулю тангенциальным ускорением a_τ и нулевой начальной скоростью. Определить среднюю силу $\langle \vec{F} \rangle$, действующую на частицу, и показать ее на рисунке.

2.17. Уравнение движения частицы имеет вид $\vec{r} = 4\left(\cos 20\pi t \vec{e}_x + \sin 20\pi t \vec{e}_y\right)$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу, и описать характер ее движения. Масса частицы m =50 мг.

2.18. Решить предыдущую задачу, если уравнение движения частицы имеет вид $\vec{r} = -20t^2\vec{e}_x + 8t\vec{e}_y$.

2.19. Груз массой m с прикрепленной к нему пружиной жесткостью k может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. Другой конец пружины прикреплен к вертикальной оси. Будучи раскручен до угловой скорости ω, груз движется вокруг этой оси по окружности радиусом R. Какова длина недеформированной пружины?

2.20. Груз массой m, подвешенный на нити длиной l, привели во вращение так, что нить подвеса описывает в пространстве конус с углом при вершине 2α. Такая система называется «конический маятник». Найти: а) угловую скорость вращения данного конического маятника; б) величину силы натяжения нити T.

2.21.* Муфта массой m может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиусом R (рис.2.6). Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO'. Найти значение угла α, соответствующее <u>устойчивому равновесию</u> муфты.

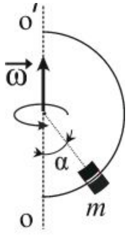


Рис.2.6

2.22.* В системе, изображенной на рис. 2.7, муфта массой m может скользить без трения вдоль стержня Г - образной формы, расположенного в горизонтальной плоскости. Муфта и угол стержня (точка Б) соединены пружиной жесткостью k. Система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку О. Найти относительное удлинение пружины x/l. Как изменится результат, если направление вращения изменить на противоположное?

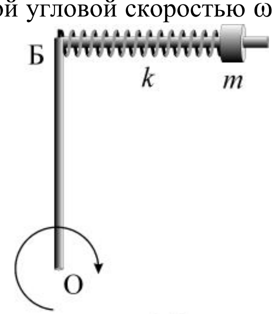


Рис. 2.7

2.23. Масса планеты равна $5{,}98\cdot10^{24}$кг; ее радиус $6{,}37\cdot10^{6}$м. Чему равно ускорение свободного падения: а) вблизи ее поверхности; б) на высоте h = 200 км?

2.24. Чему равно ускорение свободного падения g' вблизи поверхности шарообразного астероида, если средняя плотность его вещества равна средней плотности Земли, а его радиус в 1000 раз меньше радиуса Земли?

2.25. Некоторая планета массой M движется по окружности вокруг Солнца со скоростью V = 34,9 км/с относительно него. Найти период обращения этой планеты вокруг Солнца.

2.26. Чему равен марсианский год $T_{\text{м}}$ (в земных сутках), если земной год $T_{\text{з}} = 365{,}21$ суток, а радиус околосолнечной орбиты Марса ($r_{\text{м}}$) в 1,4 раза больше радиуса орбиты Земли ($r_{\text{з}}$)?

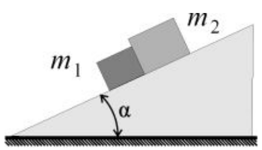


Рис.2.8

2.27. Тело покоится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между телом и поверхностью μ = 0,4. К телу приложили горизонтальную силу F =3 Н. Чему равна сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая на тело, если масса тела равна: а) 1 кг; б) 100 г? Принять значение g =10 м/с^2.

2.28. Автомобиль массой m движется с постоянной скоростью вверх по склону, угол при основании которого равен α. Найти модуль и направление силы трения $F_{\text{тр}}$, действующей на автомобиль. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.29. Брусок массой m лежит на доске. Если поднимать один конец доски, то при угле наклона α = 30° брусок начнет скользить. За какое время он соскользнет с доски длиной 1 м, если она образует с горизонтом угол β = 45°?

2.30. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска (рис.2.8). Массы брусков m_1 и m_2, коэффициенты трения μ_1 и μ_2, $\mu_1 > \mu_2$. Найти: а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения; б) значения угла α, при которых не будет скольжения.

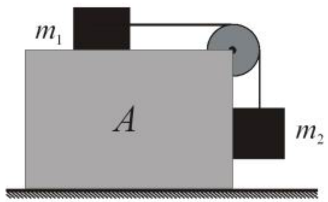


Рис. 2.9

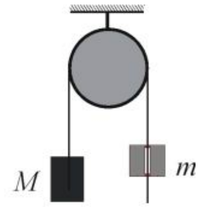


Рис. 2.10

2.31.* Небольшому телу сообщили скорость, направленную вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α = 15° с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела в η = 2 раза меньше, чем время спуска.

2.32.* С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A (рис.2.9), чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

2.33.* Нить перекинута через невесомый, вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплен груз массой M, а по другой свисающей части нити скользит муфта массой m с постоянным ускорением a' относительно нити (рис.2.10). Найти величину силы трения F, действующей на муфту со стороны нити.

2.34*П. Брусок массой m тянут за нить, как показано на рис. 2.11. При этом он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ. Найти: а) угол α, при котором сила натяжения нити минимальна; б) чему она равна.

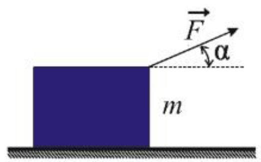


Рис.2.11

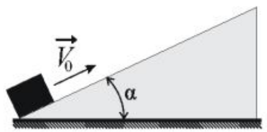


Рис. 2.12

2.35.* Небольшому телу, находящемуся у основания наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, сообщили начальную скорость V_0, направленную вверх вдоль плоскости (рис. 2.12). При каком значении угла α время движения тела до остановки будет наименьшим?

2.36.* На гладком горизонтальном столе находятся бруски массами M = 2 кг и m = 1 кг, соединенные невесомой и нерастяжимой нитью через невесомый блок (рис. 2.13). Какую силу нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он двигался с постоянным ускорением a = 5 м/с^2? Коэффициент трения между брусками μ = 0,5.

2.37.* Два тела массами m_1 и m_2, соединенные невесомой недеформированной пружиной жесткостью k, удерживаются на наклонной плоскости с углом при основании α (рис. 2.14). Коэффициенты трения тел о плоскость равны μ_1 и μ_2 соответственно, причем $\mu_1 < \text{tg}\alpha$, $\mu_2 > \text{tg}\alpha$. Найти установившееся изменение длины пружины, если тела отпустить. Рассмотреть случаи: а) $\text{tg}\alpha < \text{tg}\alpha_{\text{кр}} = \dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}$

и б) $\text{tg}\alpha > \text{tg}\alpha_{\text{кр}} = \dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}$ (см. решение задачи 2.30).

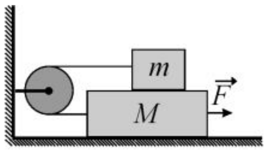


Рис. 2.13

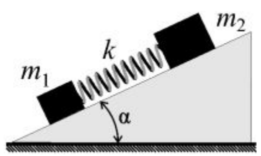


Рис. 2.14

2.38.* В установке, изображенной на рис. 2.15, массы блока и нитей пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Найти: а) ускорение, с которым опускается тело m_0; б) силу натяжения нити, связывающей тела m_1 и m_2, если коэффициент трения между этими телами и горизонтальной поверхностью равен μ.

2.39*П. В установке (рис.2.16) известны: угол α, коэффициент трения μ между телом m_1 и плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет, начальная скорость $V_0 = 0$. Найти значения отношения m_2/m_1, при которых: а) груз m_2 опускается; б) поднимается.

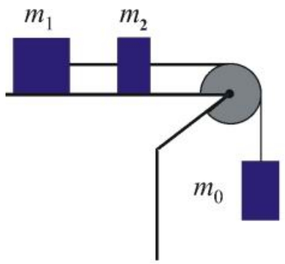


Рис. 2.15

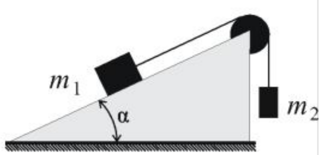


Рис.2.16

2.40.* На тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени $F = kt$, где k – положительная постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту.

2.41.* На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой M, а на ней – брусок массой m. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся во времени t по закону $F = kt$, где k – положительная постоянная. Найти: а) момент времени t_0, когда брусок начнет скользить относительно доски; б) зависимость от t ускорения доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ. Изобразить эти зависимости графически.

2.42.* На покоившуюся частицу массой m в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, τ – время, в течение которого действует данная сила. Найти: а) скорость частицы после окончания действия силы; б) путь, пройденный частицей за время действия силы.

2.43*П. Из вертолета, неподвижно висящего на некоторой высоте над поверхностью Земли, выпадает груз массой m = 100 кг. Считая, что сила сопротивления воздуха изменяется пропорционально скорости $\vec{F} = -k\vec{V}$, определить, через какой промежуток времени ускорение груза будет равно половине ускорения свободного падения. Коэффициент сопротивления равен k = 10 кг/с.

2.44.* Снаряд массой m = 10 кг выпущен из зенитного орудия вертикально вверх со скоростью V_0 = 800 м/с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости $\vec{F} = -k\vec{V}$, определить время подъема снаряда до высшей точки. Коэффициент сопротивления k = 0,25 кг/с.

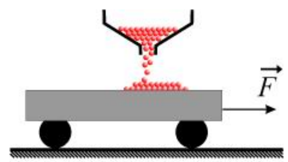


Рис. 2.17

2.45.* Платформа массой m_0 начинает двигаться вправо под действием постоянной силы $\vec{F}$ (рис. 2.17). Из неподвижного бункера в нее высыпается песок, скорость погрузки которого постоянна и равна μ кг/с. Найти зависимость от времени: а) скорости и б) ускорения платформы в процессе погрузки. Трением качения колес платформы пренебречь.

2.46.* Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящейся точно в северном направлении и выстрелили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти на сколько и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен на широте 60˚. Скорость пули 900 м/с и расстояние от мишени 1 км.

2.47.* Горизонтальный диск вращают с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров движется тело массой m с постоянной скоростью V' относительно диска. Найти силу, с которой диск действует на это тело в момент, когда оно находится на расстоянии r от оси вращения.

2.2. Работа. Энергия. Закон сохранения энергии

Основные определения

✓ Если перемещение частицы равно $d\vec{r}$, то работа силы $\vec{F}$, приложенной к частице, определяется как скалярное произведение $dA = \vec{F}d\vec{r}$. При перемещении частицы из точки 1 траектории в точку 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}\text{; мощность силы } N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{V}. \qquad (2.2а)$$

✓ Работа консервативной силы определяется только положением частицы в начале и в конце траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2), \qquad (2.2б)$$

где $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия частицы.

✓ На частицу, находящуюся в поле потенциальной энергии $U(x,y,z)$, действует консервативная сила

$$\vec{F}(x,y,z) = -\operatorname{grad}U(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right) \qquad (2.2в)$$

✓ Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тела массы m с телом массы M

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}, \qquad (2.2г)$$

где r – расстояние между центрами масс тел.

✓ Потенциальная энергия деформированной пружины

$$U(x) = k\left(x^2/2\right). \qquad (2.2д)$$

Здесь x − абсолютная деформация (растяжение или сжатие) пружины, а k − ее жесткость.

✓ Полная работа всех диссипативных сил, действующих в механической системе, отрицательна:

$$A' < 0. \qquad (2.2е)$$

✓ Кинетическая энергия системы, состоящей из N частиц,

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i^2}{2m_i}. \qquad (2.2ж)$$

✓ Изменение кинетической энергии системы частиц равно работе всех сил, действующих в системе и на систему:

$$T_2 - T_1 = \sum A_j. \qquad (2.2з)$$

✓ Собственной механической энергией системы частиц называется алгебраическая сумма кинетической и потенциальной энергии парного взаимодействия между частицами системы:

$$E = T + 0{,}5\sum_{i \neq j} U_{i,j}. \qquad (2.2и)$$

✓ Изменение собственной механической энергии системы частиц

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{внешн}} + A', \qquad (2.2к)$$

где $A_{\text{внешн}}$ – работа всех внешних по отношению к системе сил, A' – работа внутренних диссипативных сил.

✓ Для замкнутой системы

$$\Delta E = A'; \qquad (2.2л)$$

если диссипативные силы в замкнутой системе отсутствуют, механическая энергия системы сохраняется ($\Delta E \equiv 0$).

2.48. Брусок массой m тянут за нить с постоянной силой $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту, как показано на рис. 2.18. При

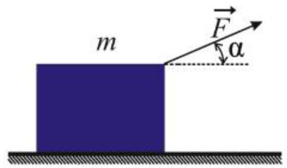


Рис. 2.18

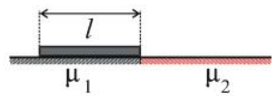


Рис.2.19

этом брусок перемещается по горизонтальной плоскости. Чему равна работа: а) силы F; б) силы трения; в) силы тяжести на прямолинейном участке пути S? Коэффициент трения μ считать известным.

2.49.* Тело массой m и длиной l лежит на стыке двух поверхностей с коэффициентами трения μ_1 и μ_2 (рис.2.19). Какую минимальную работу надо совершить при помощи горизонтальной силы, чтобы протащить волоком тело с первой поверхности на вторую?

2.50. Чему равна мощность силы натяжения нити T и силы тяжести, действующих на груз массой m в задаче 2.20 о коническом маятнике?

2.51. Зависимость скорости частицы массой m от времени имеет вид: $\vec{V} = At^2\vec{e}_x + Bt\vec{e}_y + C\vec{e}_z$, где A , B и C − постоянные. Найти мощность силы, действующей на частицу, как функцию времени.

2.52. Материальная точка массой $m = 2$ кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 10$ м, $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2,$D = -0{,}2$ м/с^3. Найти мощность N, затрачиваемую на движение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с.

2.53. Частицу массой m перемещают по замкнутой траектории, представляющей собой прямоугольник высотой a и шириной b . Чему равна работа силы тяжести на этом пути? Консервативна ли эта сила?

2.54. Траекторией шайбы массой m, перемещаемой по горизонтальной поверхности, является окружность радиусом R. Чему равна работа силы трения на этом пути, если коэффициент трения между шайбой и поверхностью равен μ? Является ли сила трения консервативной? В процессе перемещения шайбы к ней прикладывают силу, которая всегда направлена параллельно поверхности скольжения.

2.55. Доказать, что сила упругой деформации пружины (2.1д) является консервативной. Чему равна потенциальная энергия деформированной пружины?

2.56. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = B(x/y - y/x)$, где B – постоянная величина. Найти: а) силу $\vec{F}(x, y, z)$, действующую на частицу; б) работу A_F, совершаемую над частицей силами поля при перемещении частицы из точки с координатами (1,1,1) в точку с координатами (2,2,3).

2.57*П Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^3 - b/r^2$, где a и b положительные константы, r длина радиус-вектора частицы. Найти: а) силу $\vec{F}(r)$, действующую на частицу; б) значение $r = r_0$, соответствующее положению устойчивого равновесия частицы.

2.58*. То же для случая, когда поле имеет вид $U = a/r^2 - b/r$.

2.59. Скорость частицы массой m изменилась от начального значения V_1 до конечного $V_2 = 0$. Чему равна работа всех сил, действующих на частицу?

2.60. Пуля массой m, летевшая горизонтально со скоростью V_1, пробивает тонкую доску. На вылете из доски скорость пули равна $V_2 = 0{,}5V_1$. Найти работу силы трения между пулей и доской.

2.61.* Локомотив массой m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $V = \alpha\sqrt{S}$, где α – положительная постоянная, S – путь, проделанный локомотивом с начала движения. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

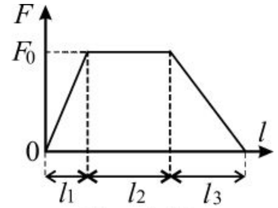


Рис. 2.20

2.62. Сила, действующая на снаряд массой m в стволе орудия, зависит от пройденного снарядом пути l, как показано на рис. 2.20. Какова скорость вылета снаряда из ствола?

2.63. Тело массой $m = 1$ кг брошено вверх с начальной скоростью $V_1 = 10$ м/с. Высота подъема тела оказалась равной 4м. Чему равна работа силы сопротивления воздуха? Принять значение параметра $g = 10$ м/с^2.

2.64.* Какую минимальную скорость необходимо сообщить снаряду, чтобы он мог, преодолев земное притяжение, удалиться на бесконечно большое расстояние от Земли?

2.65.* В системе отсчета, связанной с Землей кинетическая энергия спутника Земли, находящегося на круговой орбите, равна 5 ГДж. Чему равна его: а) потенциальная; б) полная механическая энергия?

2.66.* После очередной корректировки орбиты космической станции, она находилась на высоте $h = 200$ км от поверхности Земли. Через некоторое время, когда количество витков, совершенных станцией достигло значения $N = 1000$, радиус ее орбиты уменьшился на Δh =100м. Чему была равна средняя сила сопротивления остаточной атмосферы на этих высотах? Масса станции $m = 10^5$ кг. При расчете учесть неравенство $\Delta h << h$.

2.67.* Чему равно относительное изменение скорости станции $\frac{\Delta V}{V}$ в предыдущей задаче?

2.68.* Под действием очень легкого толчка тело, первоначально покоившееся на наклонной плоскости, сползает с нее с постоянной скоростью. Начальная высота тела над основанием плоскости равна h.

Определить: а) работу силы трения за время спуска тела; б) работу результирующей всех сил, приложенных к телу, за это время; в) какую работу A необходимо совершить, чтобы так же медленно втащить тело на прежнюю высоту?

2.69*П. Небольшое тело массой m медленно втащили на горку, действуя силой $\vec{F}$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории. Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания l и коэффициент трения μ.

2.70. Груз массой m медленно втаскивают по наклонной плоскости на высоту h, затратив на это работу A. На этой высоте груз срывается и скользит обратно. Какую скорость он будет иметь у основания?

2.71.* Два бруска с массами m_1 и m_2, соединенные недеформируемой легкой пружиной, лежат на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между каждым бруском и поверхностью равен μ. Какую минимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску массой m_1, чтобы другой брусок сдвинулся с места?

2.72. От груза, висящего на пружине жесткостью k, отрывается часть массой m. На какую максимальную высоту h поднимется после этого оставшаяся часть груза?

2.73.* Небольшой шарик массой m, подвешенный на нити, отвели в сторону так, чтобы нить образовала прямой угол с вертикалью, и затем отпустили. Найти: а) модуль полного ускорения шарика a, б) си-

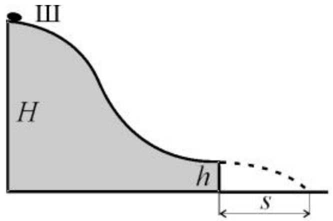


Рис.2.21

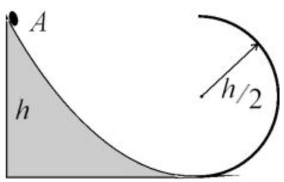


Рис.2.22

лу натяжения нити F в зависимости от θ – угла отклонения нити от вертикали; в) силу натяжения нити F_1 в момент, когда вертикальная составляющая скорости шарика максимальна; г) угол θ между нитью и вертикалью в момент, когда вектор полного ускорения шарика направлен горизонтально.

2.74*П. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол θ отклонения нити в крайнем положении.

2.75.* Небольшая шайба Ш соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (рис.2.21). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние S? Чему оно равно?

2.76.* Небольшое тело A начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$ (рис.2.22). Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей

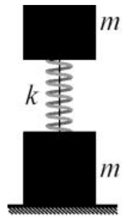


Рис.2.23

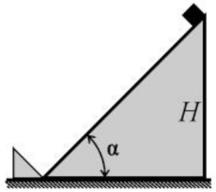


Рис. 2.24

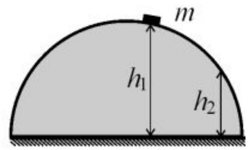


Рис. 2.25

точке его траектории (после отрыва от желоба).

2.77.* Система состоит из двух одинаковых кубиков, каждый массой m, между которыми находится сжатая невесомая пружина жесткостью k (рис.2.23). Кубики связаны нитью, которую в некоторый момент пережигают. При каких значениях начальной деформации пружины x нижний кубик оторвется от стола после пережигания нити?

2.78. По плоскости с углом наклона $\alpha = 45°$ соскальзывает шайба и в конце спуска абсолютно упруго ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис.2.24). Определить, на какую высоту h поднимется шайба по плоскости после отражения от стенки, если первоначально шайба была на высоте $H = 6$ м? Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0{,}2$.

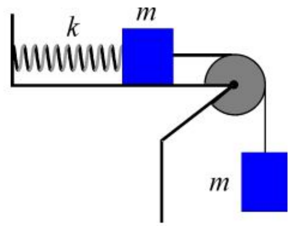


Рис. 2.26

2.79.* Небольшая шайба массой $m = 5$ г начинает скользить, если ее положить на шероховатую поверхность полусферы на высоте $h_1 = 60$ см от горизонтального основания полусферы (рис.2.25). Продолжая скользить, шайба отрывается от полусферы на высоте $h_2 = 25$ см. Найти работу сил трения, действующих на шайбу при ее соскальзывании.

2.80. * Шайба массой m скользит без начальной скорости с вершины гладкой полусферы радиусом R. На какой высоте от горизонтального основания полусферы она оторвется от поверхности? Каков ответ, если начальная скорость шайбы $V_0 = \sqrt{\dfrac{Rg}{3}}$?

2.81.* В системе (рис.2.26) масса каждого бруска $m = 0.5$ кг, жесткость пружины $k = 40$ Н/м, коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}2$. Массы блока и пружины пренебрежимо малы. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Найти максимальную скорость брусков.

2.82*П. В системе, изображенной на рис. 2.27, величина начальной деформация пружины x_0 = 10 см. После освобождения пружины груз совершает затухающие колебания. Определить: а) число $N_{\text{макс}}$ полуколебаний груза до остановки; б) деформацию пружины после прекращения колебаний. Масса груза m = 50 г, жесткость пружины k = 30 Н/м, коэффициент трения между грузом и горизонтальной поверхностью $\mu = 2/7$. Ускорение свободного падения g =9,8 м/с^2.

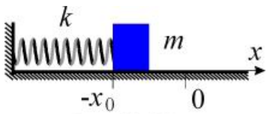


Рис.2.27

2.83.* В установке, изображенной на рис. 2.27, масса груза m = 100 г, жесткость пружины k =30 Н/м, коэффициент трения между грузом и горизонтальной поверхностью μ =0,5. Вначале пружина не деформирована. С какой скоростью V нужно толкнуть груз в направлении оси x, чтобы груз, совершив N = 4 полуколебания, вернулся в исходное положение? Принять значение g =10,0 м/с^2.

2.84.* Тонкую цепочку длиной l с очень мелкими гладкими звеньями удерживают за левый край (точка A) в гладкой горизонтальной трубе так, что часть ее длины h свободно свешивается, касаясь поверхности стола (рис. 2.28). В некоторый момент цепочку отпустили. С какой скоростью точка A выскочит из трубы? Считать цепочку однородной по длине.

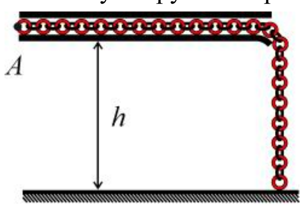


Рис.2.28

2.85.* Тонкая гладкая цепочка, имеющая длину l =1 м и массу m =10 г, лежит на шероховатом горизонтальном столе. Цепочка вытянута в прямую линию, перпендикулярную к краю стола. Конец цепочки свешивается с края стола. Когда длина свешивающейся части составляет η = 0,275 длины l, цепочка начинает соскальзывать со стола вниз. Считая цепочку однородной по длине, найти: а) коэффициент трения μ между цепочкой и столом; б) работу A сил трения между цепочкой и столом за время соскальзывания; в) скорость V цепочки в конце соскальзывания.

2.3. Импульс. Закон сохранения импульса

Основные определения

- ✓ Радиус-вектор центра масс системы n материальных точек массами $m_1, m_2, \cdots m_n$:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{M}, \tag{2.3а}$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-векторы материальных точек, M – масса системы.

- ✓ Скорость и ускорение центра масс:

$$\vec{V}_C = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i}{M}, \tag{2.3б}$$

$$\vec{a}_C = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i}{M} = \frac{\sum \vec{F}_j}{M}, \tag{2.3в}$$

где $\vec{F}_j$ – внешние силы.

- ✓ Импульс системы материальных точек

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i = M\vec{V}_C. \tag{2.3г}$$

- ✓ Если $\sum \vec{F}_j = 0$ (система замкнута), то импульс системы остается постоянным:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i = M\vec{V}_C = \text{const}. \tag{2.3д}$$

- ✓ Уравнение движения тела переменной массы

$$m\vec{a} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}, \tag{2.3е}$$

где $\vec{F} = \sum \vec{F}_j$, $\vec{u}$ – скорость присоединяемого (отделяемого) вещества относительно тела.

2.86. Уравнение движения частицы массой m = 2 кг, находящейся на оси x, имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где A = 1 м, B = 4 м/с, C= − 2м/с^2. Определить: а) зависимость проекции импульса частицы от времени $P_x(t)$ на ось x; б) изменение проекции импульса ΔP_x за первые 2 секунды движения.

2.87. Частица массой m ударяется о стенку со скоростью $\vec{V}$ и упруго отражается от нее так, что угол падения α равен углу отражения β (рис. 2.29). Найти $\left|\Delta\vec{P}\right|$, ΔP, ΔP_x, ΔP_y.

2.88. Частица массой m движется равномерно по окружности радиусом R, делая за время τ один оборот. Найти модуль изменения импульса частицы $\left|\Delta\vec{P}\right|$ за время:

а) $\frac{\tau}{4}$; б) $\frac{\tau}{2}$.

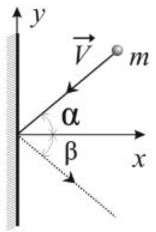


Рис.2.29

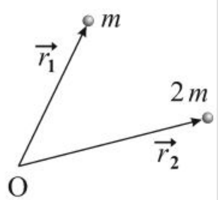


Рис. 2.30

2.89. Найти радиус-вектор центра масс системы двух частиц, изображенной на рис. 2.30.

2.90. Чему равна величина скорости центра масс V_C системы частиц из предыдущей задачи, если: а) $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = 4\vec{e}_x$ м/с; б) $\vec{V}_1 = 4\vec{e}_x$ м/с, $\vec{V}_2 = 1{,}5\vec{e}_y$ м/с; в) $\vec{V}_1 = 4\vec{e}_x$ м/с, $\vec{V}_2 = -2\vec{e}_x$ м/с.

2.91. Граната, летевшая со скоростью V = 12,0 м/с, разорвалась на две части с массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}0$ кг. Скорость большего осколка V_2 = 68,0 м/с и направлена так же, как скорость гранаты до взрыва. Найти направление и величину скорости меньшего осколка.

2.92. Решить предыдущую задачу в предположении, что скорость большего осколка перпендикулярна скорости гранаты до взрыва.

2.93.* На частицу массой m = 10 г действует сила, величина которой зависит от времени как $F(t) = 0{,}03t^2$, Н, а направление остается неизменным. Вычислить модуль приращения скорости $\left|\Delta\vec{V}\right|$ частицы за интервал времени от t_1 =2 с до t_2 =3 с.

2.94.* Тело массой m = 100 г столкнулось с неподвижной стенкой. Скорость тела перед столкновением была равна V_1 = 5,0 м/с; она была направлена перпендикулярно стенке. Известно, что время столкновения $\Delta t = 0{,}01$ с, а зависимость силы взаимодействия тела со стенкой от времени имеет вид $F(t) = 48 \cdot 10^6\, t(0{,}01 - t)$, Н. Определить величину скорости тела V_2 после удара.

2.95. К свободному аэростату массой M привязана легкая веревочная лестница, на середине которой находится человек массой m = 0,11M. В каком направлении и с какой скоростью будет перемещаться аэростат, если человек начнет подниматься по лестнице вверх с постоянной скоростью V относительно лестницы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.96. Сани с песком общей массой M =10 кг скользят со скоростью V_1 = 1,00 м/с по горизонтальной обледенелой поверхности. Навстречу саням летит груз массой m = 3 кг со скоростью V_2 = 7,00 м/с. В каком направлении и с какой скоростью будут скользить сани после застревания груза в песке? Трением между санями и поверхностью пренебречь.

2.97.* Можно ли использовать закон сохранения импульса в предыдущей задаче, если известно, что коэффициент трения между санями и поверхностью μ = 0,5? Время t застревания груза в песке равно: а) 0,01 с; б) 0,1 с.

2.98*П. Две лодки идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями V. Когда лодки поравнялись, с каждой из них на встречную были одновременно переброшены одинаковые грузы массами m. а) Чему равна скорость лодок U после этой операции, если масса каждой лодки без груза M? б) Каким будет ответ, если грузы перебрасывают не одновременно, а по очереди? Сопротивлением воды пренебречь.

2.99. Вагон массой m_1 с автоматической сцепкой, движущийся со скоростью V_1, догоняет вагон массой m_2, движущийся в том же направлении со скоростью V_2. Двигаясь дальше вместе, вагоны сцепляются с неподвижным третьим вагоном массой m_3. Пренебрегая трением, найти скорость U образовавшегося поезда.

2.100. Плот массой M с находящимся на нем человеком массой m покоится на поверхности пруда. Человек начинает движение и в течение времени перемещается относительно плота на расстояние l .Пренебрегая сопротивлением воды, найти модуль перемещения L плота относительно берега.

2.101. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью V = 3 км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием равна M =10 т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы.

Снаряд массой m =10 кг << M вылетает из ствола под углом α = 60˚ к горизонту. Определить скорость снаряда U относительно Земли, если после выстрела скорость платформы уменьшилась в два раза.

2.102.* Когда колеса пушки, находящейся на горизонтальной поверхности, закреплены, скорость снаряда сразу после выстрела $V_0 = 180{,}0$ м/с. Чему равна скорость: а) снаряда, б) пушки сразу после выстрела, если колёса пушки освобождены? Отношение массы пушки к массе снаряда $M/m = 50$. Считать, что в обоих случаях снаряд вылетает под углом α = 45˚ к горизонту.

2.103*П. Ствол пушки, установленной на железнодорожной платформе, укреплен под углом α к горизонту (рис.2.31). Под каким углом β к горизонту вылетает снаряд, если перед выстрелом платформа покоилась? Масса платформы с пушкой M, масса снаряда m.

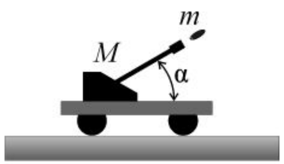


Рис. 2.31

2.104. Конькобежец массой M, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении кусок льда массой m со скоростью V относительно дорожки. На какое расстояние S откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед равен μ ?

2.105. Снаряд, вылетевший из орудия, разрывается в верхней точке траектории на расстоянии l по горизонтали от орудия на два одинаковых осколка. Один из осколков полетел в обратном направлении со скоростью движения снаряда до разрыва. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на каком расстоянии L от орудия упадет второй осколок.

2.106. Мяч, летящий над волейбольной сеткой со скоростью V_1, отбивается рукой волейболиста в противоположном направлении со скоростью $V_2 > V_1$. Найти модуль приращения импульса мяча $\left|\Delta\vec{P}\right|$, если приращение кинетической энергии составило ΔT.

2.107. Тело массой m = 3кг движется со скоростью V = 2м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

2.108. Движущееся тело массой m_1 испытывает центральное упругое соударение с покоящимся телом массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшилась в 2 раза, причем ее направление не изменилось. Чему равно отношение m_1/m_2 ?

2.109*. Частица массой m_1 испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массой $m_2 = 12m_1$. Какую относительную часть кинетической энергии $\Delta T/T$ потеряла налетающая частица, если: а) она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения; б) столкновение было центральным?

2.110*П. После упругого столкновения тела массой m_1 с покоившимся телом массой m_2 они разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения тела. Угол разлета θ = 60˚. Чему равно отношение m_1/m_2 ?

2.111*. Частица 1, имевшая скорость V = 10,00 м/с, испытала центральное столкновение с покоившейся частицей 2. Массы частиц одинаковы. В результате столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась на 1%. Найти модуль и направление скорости частицы 1 после столкновения.

2.112*. Две небольшие муфты с массами m_1 = 0,1 кг и m_2 = 0,2 кг движутся навстречу друг другу по гладкому горизонтальному проводу, изогнутому в виде окружности, с постоянными по величине нормальными ускорениями a_1 =3,0 м/с^2 и a_2 = 9,0 м/с^2 соответственно (рис.2.32). Чему равно нормальное ускорение составной муфты, образовавшейся после абсолютно неупругого столкновения?

2.113*. Частица массой m испытала столкновение с покоившейся частицей массой M, в результате чего частица m отклонилась на угол 90˚, а частица M получила скорость, направленную под углом 30˚ к первоначальному направлению скорости частицы m. На сколько процентов изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если отношение M/m = 5,0?

2.114*. Шайба 1, скользившая по шероховатой горизонтальной поверхности, испытала столкновение с покоившейся шайбой 2. В результате шайба 1 отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению и прошла до остановки путь S_1 =1,5м, а шайба 2 – путь S_2 = 4,0м, Чему была равна скорость шайбы 1 перед столкновением, если отношение масс m_2/m_1 =1,5? Коэффициент трения μ = 0,17.

2.115.* Два тела массами m_1 и m_2 подвешены на гибких, нерастяжимых и невесомых нитях длиной l каждая, как показано на рисунке 2.33. Тело m_1 отклонили на угол α и отпустили. Считая соударение тел абсолютно неупругим, а время соударения пренебрежимо малым, определить высоту h, на которую поднимутся тела после удара.

2.116.* Допустим, что в предыдущей задаче происходит абсолютно упругое соударение. Чему в этом случае равна скорость второго тела сразу после удара?

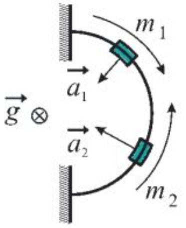


Рис.2.32

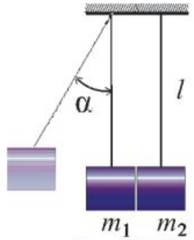


Рис. 2.33

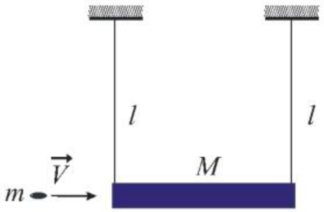


Рис. 2.34

2.117.* Пуля массой m =15 г, летящая горизонтально со скоростью V = 500 м/с, попадает в маятник массой M = 6 кг с двумя нитями подвеса и застревает в нем (рис.2.34). Длина нитей подвеса (l =1 м) достаточно велика, чтобы можно было пренебречь отклонением маятника за время застревания. Такой маятник называется баллистическим. Определить высоту h, на которую поднимется маятник, откачнувшись после удара.

2.118.* Пуля массой m =15 г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник массой M = 1,5 кг и застревает в нём. Маятник в результате этого отклонился на угол $\alpha = 30^\circ$. Определить: а) скорость пули перед ударом; б) относительную долю тепловых потерь Q/T в процессе торможения пули.

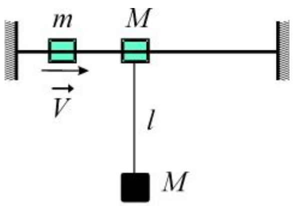


Рис.2.35

2.119.* Муфта массой m, скользящая по гладкой горизонтальной струне, сталкивается с неподвижной муфтой массой M, к которой подвешен груз такой же массы (рис. 2.35). Длина нити подвеса равна l. Определить скорость муфты m до столкновения, если известно, что максимальная высота подъема груза в последующем движении $h = l/2$. Считать столкновение муфт: а) абсолютно неупругим; б) абсолютно упругим.

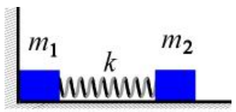


Рис. 2.36

2.120.* На гладкой горизонтальной поверхности находятся два бруска с массами m_1 и m_2, соединённые невесомой пружиной жесткостью k. Левый брусок расположен вплотную к стенке (рис. 2.36). Брусок 2 переместили влево на небольшое расстояние x и отпустили. Найти: а) скорость центра масс системы после отрыва бруска 1 от стенки; б) максимальную деформацию пружины в последующем движении.

2.121.* Бруски массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной и невесомой пружиной жесткостью k, покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. Бруску m_2 сообщили скорость $\vec{V}$ в направлении первого бруска. Найти: а) максимальную деформацию пружины; б) максимальную скорость бруска m_1 в последующем движении.

2.122.* Небольшому грузу массой m = 600 г, лежащему на длинной доске массой M = 1 кг, толчком сообщили скорость V_0 = 4 м/с, направленную вдоль доски. До этого толчка доска покоилась на гладкой горизонтальной плоскости. Найти работу сил трения между грузом и доской к моменту, когда груз перестанет скользить по доске.

2.123.* В покоящийся клин массой M попадает горизонтально летящий шарик массой m и, после абсолютно упругого удара о поверхность клина, отскакивает вертикально вверх. На какую высоту h он поднимется, если горизонтальная скорость клина после удара равна V? Трением пренебречь.

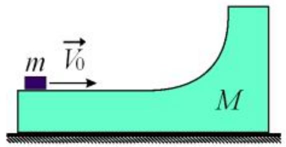


Рис. 2.37

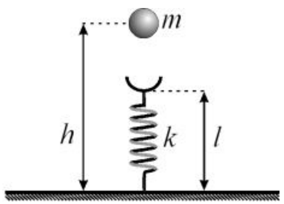


Рис. 2.38

2.124.* На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массой M и на нем небольшая шайба массой m. Шайбе сообщили в горизонтальной плоскости скорость V (рис. 2.37). На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) она поднимется после отрыва от тела M? Трения между шайбой и телом нет.

2.125.* Невесомая пружина жесткостью k и длиной l, снабженная невесомой чашкой, укреплена в вертикальном положении на столе, как показано на рис. 2.38 . Шарик m свободно падает на нее с высоты h без начальной скорости. Найти максимальный импульс шарика при его движении вниз.

2.126*П. В начальный момент ракета массой M имела скорость V_0 . В конце каждой секунды из ракеты выбрасывается порция газа массой

m. Скорость u истечения газа относительно ракеты постоянна. Пренебрегая действием силы тяжести, определить скорость ракеты через n секунд.

2.127.* Ракета движется в отсутствии внешних сил, выпуская непрерывную струю газа с постоянной относительно ракеты скоростью $\vec{u}$. Найти скорость ракеты $\vec{V}$ в момент, когда ее масса равна m, если в начальный момент она имела массу m_0 и ее начальная скорость была равна нулю.

2.128.* Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствии внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а ее масса в начальный момент равна m_0.

2.129.* Ракета поднимается без начальной скорости вертикально вверх в однородном поле сил тяжести. Начальная масса ракеты с топливом равна m_0. Скорость газовой струи относительно ракеты постоянна и равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти величину скорости ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

2.4. Примеры решения задач

Задача 2.13

1. Вычислим импульс системы пушка - снаряд непосредственно перед выстрелом (рис. 2.39,*а*). Поскольку сила трения между пушкой и горкой отсутствует, а сила нормальной упругой реакции $\vec{N}$ перпендикулярна перемещению пушки (рис. 2.39,*б*), кинетическая энергия системы к этому моменту определяется только работой силы тяжести: $MV^2/2 = Mgh = Mgl\sin\alpha$. Из этого следует, что величина импульса системы перед выстрелом: $P_1 = MV = M\sqrt{2gl\sin\alpha}$; его направление совпадает с направлением оси (рис. 2.39,*а*).

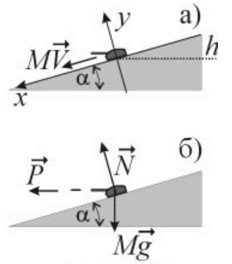


Рис.2.39

2. Так как пушка останавливается, импульс системы после выстрела $\vec{P}_2$ равен импульсу снаряда $\vec{P}$ и направлен под углом α к оси x (рис. 2.39,*б*).

3. В соответствии с определением (2.1б) на с. 17 данного издания изменение импульса системы равно импульсу внешних по отношению к системе сил:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \left(m\vec{g} + \left\langle\vec{N}\right\rangle\right)\tau$$, где τ – продолжительность взрыва.

В проекции на ось x, учитывая, что вектор $\vec{N}$ перпендикулярен этой оси, получим: $P\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha} = Mg\sin\alpha\tau$. Отсюда следует, что

$$\tau = \frac{P\cos\alpha - M\sqrt{2gL\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}.$$

Задача 2.34

Помимо силы $\vec{F}$ на тело действуют силы тяжести $\left(m\vec{g}\right)$, нормальной упругой реакции $\left(\vec{N}\right)$ и трения $\left(\vec{F}_{тр}\right)$, как это показано на рис. 2.40. Поскольку тело движется с постоянной скоростью, его ускорение равно нулю. Поэтому II закон Ньютона имеет вид $0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{тр}$. Найдем проекции этого уравнения на оси x и y:

Ox: $\qquad 0 = F\cos\alpha - F_{тр} \qquad$ (*)

Oy: $\qquad 0 = N + F\sin\alpha - mg \qquad$ (**)

Из уравнения (**) выразим силу реакции опоры N и, используя определение силы сухого трения (формула (2.1е) на с. 17), получим:

$F_{тр} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha) \qquad$ (***)

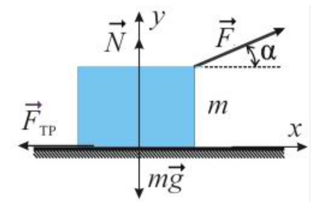


Рис.2.40

Совместное решение системы уравнений (*), (**) и (***) позволяет сделать вывод: если тело движется с постоянной скоростью, то величина силы натяжения нити в зависимости от угла α равна $F = \mu mg/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$. Для того чтобы эта сила приняла минимальное значение из всех возможных, необходимо определить значение $\alpha_м$, при котором знаменатель полученного выражения максимален. Необходимое условие для этого – равенство нулю первой производной по α:

$\dfrac{d}{d\alpha}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu\cos\alpha - \sin\alpha = 0$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha_м = \mu$.

Воспользовавшись известным тождеством $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, решение можно представить в виде

$$\cos\alpha_м = 1/\sqrt{1+\mu^2}\,;\ F_{мин} = F(\alpha_м) = \mu mg/\sqrt{1+\mu^2}.$$

Задача 2.39

Направление силы трения $\vec{F}_{тр}$ противоположно направлению скорости $\vec{V}_1$ груза m_1; в свою очередь, поскольку начальная скорость $V_0 = 0$, направления скорости грузов и их ускорений совпадают в любой момент времени $\left(\vec{V}_1 = \vec{a}_1 t\right)$. Поэтому в обоих возможных вариантах движения, изображенных на рис. 2.41,*а* и 2.41,*б* соответственно, векторы $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{a}_1$ антипараллельны.

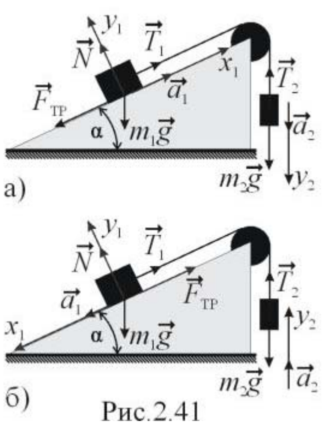


Рис.2.41

1. Рассмотрим первый случай: груз m_1 поднимается, а m_2 опускается (рис.2.41,*а*). Второй закон Ньютона для грузов m_1 и m_2 в векторной форме имеет вид соответственно

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр} \qquad \text{и} \qquad m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 . \qquad (*)$$

При записи уравнений (*) в проекции на соответствующие оси учтем нерастяжимость нити, следовательно, равновеликость ускорений $a_1 = a_2 = a$, а также невесомость нити и блока, из чего следует, что $T_1 = T_2 = T$. В результате получаем:

Ox_1: $\quad m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha - F_{тр}$;

Oy_1: $\quad N = m_1 g\cos\alpha$ (следовательно, $F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g\cos\alpha$);

Oy_2: $\quad m_2 a = m_2 g - T$.

Совместное решение полученной системы относительно a дает

$$a = g\frac{m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (**)$$

Величина ускорения должна быть неотрицательной ($a \ge 0$). Отсюда и из выражения (**) следует, что отношение масс грузов m_2/m_1, при которых груз m_2 опускается, удовлетворяет условию $m_2/m_1 \ge \sin\alpha + \mu\cos\alpha$.

2. Аналогично можно показать, что 2-й случай (груз m_2 поднимается, рис.2.41,*б*) реализуется при значениях отношения $m_2/m_1 \le \sin\alpha - \mu\cos\alpha$.

Если отношение m_2/m_1 принимает какое-либо значение в промежуточном интервале $\sin\alpha - \mu\cos\alpha \le m_2/m_1 \le \sin\alpha + \mu\cos\alpha$, грузы остаются в покое.

Задача 2.43

В этой задаче мы сталкиваемся с ситуацией, когда на тело действует сила, зависящая от скорости тела (вязкое трение). В результате как скорость V, так и ускорение тела $a = dV/dt$ являются величинами, зависящими от времени. Для определения этих зависимостей используем II закон Ньютона, который в проекции ось y (рис. 2.42) принимает вид

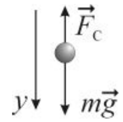


Рис.2.42

$$m\,dV/dt = mg - kV. \qquad (*)$$

Мы получили уравнение, в которое входит как величина скорости, так и ее первая производная по времени (ускорение). В соответствии с общепринятой терминологией, подобные соотношения называются дифференциальными уравнениями первого порядка. В уравнении (*) можно разделить переменные V и t: $mdV/(mg - kV) = dt$.Теперь, чтобы получить зависимость $V(t)$ в явном виде, остается проинтегрировать правую и левую части полученного уравнения: $\int \frac{mdV}{mg - kV} = \int dt$, в результате чего получить:

$$-\frac{m}{k}\ln(mg - kV) = C + t. \qquad (**)$$

Здесь C – константа интегрирования; ее следует выбрать так, чтобы в момент $t = 0$ скорость V груза была равна нулю (по условию, груз падал без начальной скорости). Подстановка $t = 0$ и $V = 0$ в (**) показывает, что $C = -\frac{m}{k}\ln mg$. С учетом этого формула (**) приводится к виду

$$V(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right). \qquad (***)$$

Зависимость ускорения тела от времени определяется как производная от функции $V(t)$ по времени: $a(t) = dV(t)/dt = g\mathrm{e}^{-kt/m}$. Как видим, это экспоненциально убывающая функция времени. В момент, когда ускорение принимает значение $g/2$, множитель $\mathrm{e}^{-kt/m} = 1/2$.

Таким образом, искомый момент времени: $t = \dfrac{m}{k}\ln 2 = 6{,}9$ с.

Анализ формулы (***) показывает, что скорость груза при наличии вязкого трения ($F_c = -kV$) не возрастает неограниченно с течением времени, а стремится к конечному пределу $V_{\text{макс}} = \lim\limits_{t\to\infty} V(t) = mg/k$.

Задача 2.57

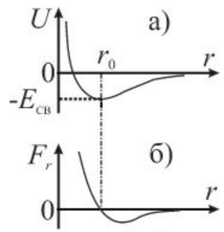


Рис.2.43

1. Если известна координатная зависимость потенциальной энергии частицы, то координатная зависимость силы $\vec{F}(x,y,z)$, действующей на частицу, определяется как $\vec{F}(x,y,z) = -\mathrm{grad}U(x,y,z)$. Эта символическая запись означает, что проекции силы на оси координат x, y, z равны соответственно $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и $F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$. Вообще, проекция консервативной силы на произвольное направление $\vec{e}_L$ вычисляется через частную производную по этому направлению:

$$F_L = -\frac{\partial U}{\partial L}. \qquad (*)$$

В нашем случае, потенциальная энергия частицы $U = U(r) = a/r^3 - b/r^2$.
Она зависит только от модуля ее радиус-вектора r (рис.2.43,*а*). Соответственно имеется проекция силы

$$F_r = -\frac{d}{dr}U = 3a/r^4 - 2b/r^3 . \qquad (**)$$

Эта зависимость изображена на рис.2.43,*б*.

2. Как и следовало ожидать, проекция $F_r(r) > 0$ в том интервале значений r, где функция $U(r)$ убывает и наоборот. Равновесное расстояние частицы от начала координат определяется условием $F_r(r_0) = 0$. Применив это условие к выражению (**), получим: $r_0 = 3a/2b$. Отметим, что на равновесном расстоянии функция $U(r)$ принимает минимальное значение (рис.2.43,*а*), следовательно, точка r_0 соответствует устойчивому положе-

нию равновесия. Величина $\left|U(r_0)\right| = \left|a/r_0^3 - b/r_0^2\right| = \dfrac{4b^3}{27a^2}$, обозначенная на рис.2.43, *а* как $E_{св}$, имеет смысл энергии связи частицы в данном силовом поле; иными словами, $E_{св}$ − это минимальная энергия, которую необходимо затратить для того, чтобы удалить частицу от равновесного положения r_0 на бесконечное расстояние.

3. Вектор силы через свою единственную ненулевую проекцию определяется как $\vec{F}(r) = F_r\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ − орт радиус- вектора.

Задача 2.69

1. Поскольку на тело действуют 4 силы (они изображены на рис. 2.44,*а* − кроме $\vec{F}$, это сила нормальной реакции $\vec{N}$, тяжести $m\vec{g}$, а также сила трения $\vec{F}_{тр}$), теорема об изменении кинетической энергии тела T принимает вид

$$\Delta T = A_N + A_F + A_{mg} + A_{тр}, \qquad (*)$$

где A_N, A_F, A_{mg} и $A_{тр}$ − работы указанных сил.

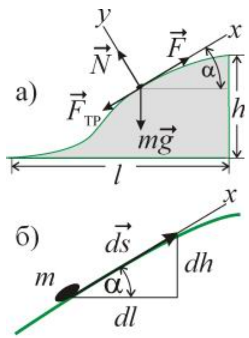


Рис.2.44

По условию задачи груз на всем пути перемещают медленно. Для нас это значит, что изменение кинетической энергии $\Delta T = 0$. Далее, сила $\vec{N}$ всегда перпендикулярна траектории тела; поэтому ее работа A_N также равна нулю. Работа силы тяжести при подъеме тела на высоту h определяется как $A_{mg} = -mgh$. Следовательно, формула (*) преобразуется к виду

$$A_F = mgh - A_{тр}, \qquad (**)$$

где A_F − искомая работа силы $\vec{F}$.

2. Ссылаясь на проделанный выше анализ задачи 2.39, примем без доказательства, что величина силы $N = m_1 g\cos\alpha$; таким образом, $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Работа силы трения на элементарном участке перемещения $d\vec{s}$ (рис.2.44,*б*) $dA_{тр} = -F_{тр}ds = -\mu mg\cos\alpha ds = -\mu mgdl$. Следовательно, работа силы трения на всем пути равна

$A_{тр} = -\int\limits_0^l \mu mgdl = -\mu mgl$. Подставив полученный результат в (**), окончательно получим $A_F = mg(h + \mu l)$.

Задача 2.74.

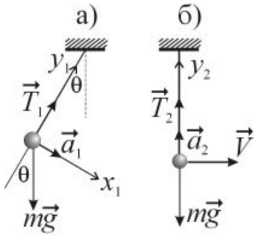


Рис.2.45

На рис. 2.45,*а* и 2.45,*б* изображена механическая система в моменты, когда груз находится в крайнем и нижнем положении.

1. В крайнем положении скорость груза равна нулю, следовательно, его ускорение ($\vec{a}_1$) в этот момент не имеет нормальной составляющей и направлено по касательной к траектории (параллельно оси x_1 на рис. 2.45,*а*). В проекции на эту ось имеем: $ma_1 = mg\sin\theta$, откуда $a_1 = g\sin\theta$.

2. В нижнем положении обе силы, действующие на груз, направлены вертикально (рис. 2.45,*б*), следовательно, ускорение груза имеет только нормальную составляющую $a_2 = a_n = V^2/l$. Так как по условию задачи $a_1 = a_2$, получаем

$$V^2/l = g\sin\theta. \qquad (*)$$

3. Поскольку сила натяжения нити $\vec{T}$ перпендикулярна траектории груза, работа этой силы на участке 1-2 равна нулю. Поэтому изменение кинетической энергии груза на указанном участке траектории определяется только работой силы тяжести:

$$mV^2/2 = mgh = mgl(1-\cos\theta). \qquad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), найдем угол отклонения, соответствующий условиям задачи:

$\theta = 2\mathrm{arctg}0{,}5$.

Задача 2.82

Обозначим исходное расстояние груза от начала координат символом $s_0 = |x_0|$. Груз начнет движение в том случае, если величина силы упругой деформации, действующая на него со стороны пружины, превышает величину силы трения скольжения: $ks_0 > \mu mg$. Это условие можно представить в виде $s_0 > \dfrac{\mu mg}{k} = \varepsilon$. Подстановка численных значений параметров показывает, что в задаче это условие выполняется: $\varepsilon \cong 0{,}47$ см., в то время как s_0=10 см.

В последующем движении сила трения совершает отрицательную работу, поскольку всегда направлена противоположно скорости груза. Таким образом, груз совершает затухающие колебания. Как и для всякого одномерного колебания, можно указать координаты $x_1, x_2, \dots x_N$ так называемых точек поворота, в которых скорость и кинетическая энергия груза равны нулю. Расстояния этих точек от начала координат $s_N = |x_N|$. В этих обозначениях число N является номером очередного полуколебания, то есть, участка пути между точками поворота с номерами $N - 1$ и N. Координаты x_{N-1} и x_N каждого полуколебания (кроме, возможно, последнего) противоположны по знаку. Поэтому длина пути груза на всех (с той же оговоркой) участках между двумя остановками равна сумме расстояний $s_{N-1} + s_N$.

Для вычисления значений s_N привлечем закон сохранения и превращения энергии в виде $\Delta E = A'$ (см. п.2.2, Основные определения, формула 2.2л). Применительно к первому полуколебанию, с учетом (2.2д) получим: $\dfrac{ks_0^2}{2} - \dfrac{ks_1^2}{2} = -A_{тр} = \mu mg(s_0 + s_1)$. После несложных преобразований, используя принятые обозначения, получаем: $s_1 = s_0 - 2\varepsilon$. Аналогично вычисляется значение $s_2 = s_1 - 2\varepsilon = s_0 - 4\varepsilon$ и так далее. Каждое очередное значение s_N меньше предыдущего на величину 2ε; следовательно, $s_N = s_0 - 2N\varepsilon$.

Колебания будут продолжаться по крайней мере до тех пор, пока $s_N = s_0 - 2N\varepsilon \ge 0$; из этого следует, что число наблюдаемых в эксперименте полуколебаний должно быть не меньшим, чем целая часть дроби $s_0/2\varepsilon$. Обозначим это число символом $\tilde{N}$. В нашем случае $\dfrac{s_0}{2\varepsilon} = \dfrac{10}{2\cdot 0{,}47} = 10{,}7$, следовательно $\tilde{N} = 10$. Для того, чтобы ответить на вопрос: является ли полученное число $\tilde{N} = 10$ искомым числом полуколебаний $N_{макс}$?, необходимо провести дополнительное исследование. Результат зависит от того, в какой интервал значений попадает величина $s_{\tilde{N}}$. Рассмотрим возможные варианты:

А) Если $0 < s_{\widetilde{N}} \le \varepsilon$, груз остается неподвижным, так как сила упругой деформации пружины в этой точке поворота уже не превышает силы трения скольжения ($ks_{\widetilde{N}} \le \mu mg$). В этом случае $N_{\text{макс}} = \widetilde{N}$, а величина остаточной деформации пружины равна $s_{\widetilde{N}}$.

Б) Если $\varepsilon < s_{\widetilde{N}} < 2\varepsilon$, состоится ещё одно полуколебание; при этом очередное значение $s_N = s_{\widetilde{N}+1} = s_{\widetilde{N}} - 2\varepsilon$ окажется отрицательным. Смысл этого результата состоит в том, что груз на пути от $x_{\widetilde{N}}$ до $x_{\widetilde{N}+1}$ не пересекает координату равновесия $x = 0$, поэтому длина пути груза на этом участке равна не сумме, а разности расстояний $s_{\widetilde{N}} - s_{\widetilde{N}+1}$. В случае реализации варианта Б $N_{\text{макс}} = \widetilde{N} + 1$, а величина остаточной деформации пружины равна $\left|s_{\widetilde{N}+1}\right|$.

В условиях задачи реализуется именно вариант Б, так как $s_{\widetilde{N}} = s_{10} = 10 - 20 \cdot 0{,}47 = 0{,}67\text{см} > \varepsilon$.

Таким образом, $N_{\text{макс}} = \widetilde{N} + 1 = 11$, а величина остаточной деформации пружины $\left|s_{11}\right| \cong 0{,}27$ см.

Задача 2.98

Анализ задачи осложняется тем обстоятельством, что грузам в процессе обмена сообщают дополнительную скорость $\vec{V}_\perp$ в направлении, перпендикулярном исходному направлению движения. В результате каждая лодка дважды получает импульс, по порядку величины равный $\vec{P}_\perp = m\vec{V}_\perp$. В первый раз это происходит, когда лодка выбрасывает «свой» груз, во второй раз − когда принимает «чужой». В итоге направление скорости лодок, например, той, что изображена на рис. 2.46,*а*, отклоняется от первоначального. Для того чтобы этим отклонением можно было пренебречь, необходимо выполнение

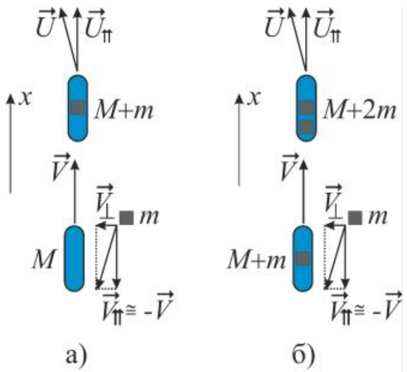


Рис.2.46

нение условия

$$2mV_\perp << MU_{\uparrow\uparrow}, \qquad (*)$$

где $U_{\uparrow\uparrow}$ − проекция скорости лодки $\vec{U}$ после обмена грузами на первоначальное направление скорости данной лодки (рис. 2.46,*а*). Далее мы будем предполагать, что вышеприведенное неравенство (*) заведомо выполняется; соответственно, величина скорости лодки $U \cong U_{\uparrow\uparrow}$.

1. Каждую из лодок вместе с грузом, брошенным к ней из «чужой» лодки, можно рассматривать как замкнутую систему (рис.2.46,*а*). Направим ось x параллельно вектору $\vec{V}$ скорости лодки, избавившейся от своего груза. Тогда скорость груза, брошенного в эту лодку, равна $-\vec{V} + \vec{V}_\perp$. Закон сохранения импульса в проекции на ось x

$$MV - mV = (M + m)U_{\uparrow\uparrow}, \qquad (**)$$

где, в соответствии с неравенством (*), $U_{\uparrow\uparrow} = U_X \cong U$. Таким образом, $U \cong U_{\uparrow\uparrow} = \dfrac{V(M - m)}{M + m}$. Разумеется, такой же результат получается и для другой лодки.

2. Рассмотрим вариант (б), когда лодки меняются грузами по очереди. В этом случае закон сохранения импульса для системы: лодка с грузом плюс «чужой» груз (рис. 2.46,*б*) принимает вид

$$(M + m)V - mV = (M + 2m)U_{\uparrow\uparrow}. \qquad (***)$$

На втором этапе обмена проекция скорости $U_{\uparrow\uparrow}$ этой лодки, очевидно, не меняется. Полагая, что неравенство (*) остается в силе, получим: $U \cong U_{\uparrow\uparrow} = \dfrac{MV}{M + 2m}$. Легко убедиться, что такой же результат получается, если в качестве замкнутой системы рассмотреть вторую (пустую) лодку вместе с грузом, получаемым ею.

Ответ: а) $U \cong U_{\uparrow\uparrow} = \dfrac{V(M - m)}{M + m}$; б) $U \cong U_{\uparrow\uparrow} = \dfrac{MV}{M + 2m}$.

Задача 2.103

1. Ствол вместе с платформой движется в сторону, противоположную направлению выстрела (рис.2.47), и благодаря этому увеличивает угол вылета снаряда. Для определения этого угла используем обозначения: V_y - вертикальная проекция скорости снаряда в момент

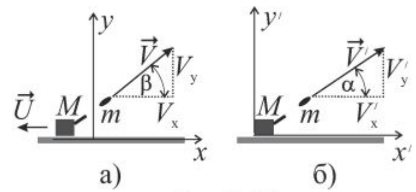


Рис.2.47

вылета из ствола, V_x и U_x – горизонтальные проекции скоростей снаряда и платформы. Тангенс искомого угла β определяется как отношение проекций скорости снаряда: $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{V_y}{V_x}$ (см. рис.2.47,*а*).

2. В системе отсчета, связанной с платформой (рис.2.47,*б*), ствол пушки неподвижен. Поэтому в этой системе, то есть, с точки зрения наблюдателя, находящегося на платформе, угол вылета снаряда равен углу наклона ствола α, а $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V'_y}{V'_x} = \dfrac{V_y}{V_x - U_x}$, где V'_x и V'_y − проекции скорости снаряда <u>относительно платформы</u>. Здесь учтено, что вертикальная проекция скорости снаряда в обеих системах отсчета имеет одинаковое значение ($V'_y = V_y$), в то время как горизонтальные проекции связаны соотношением Галилея $V'_x = V_x - U_x$. Таким образом, отношение

$$\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{V_x - U_x}{V_x}. \qquad (*)$$

С другой стороны, учитывая, что перед выстрелом платформа покоилась и что проекция импульса системы «снаряд – платформа» на ось x должна и после выстрела оставаться равной нулю, имеем: $0 = mV_x + MU_x$. С учетом этого соотношение (*) приводится к виду $\dfrac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{M+m}{M}$ или, окончательно, $\beta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{M+m}{M}\mathrm{tg}\alpha\right)$.

Задача 2.110

Выберем оси координат, как показано на рис. 2.48,*а* и 2.48,*б*. На рис. 2.48,*а* вектор $\vec{V}_0$ – скорость первого тела перед столкновением; на рис. 2.48,*б* $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – скорости первого и второго тела после столкновения. Закон сохранения импульса применительно к данной замкнутой системе тел имеет вид $m_1\vec{V}_0 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$. В проекциях на оси координат x и y получаем:

$$Ox: \qquad m_1V_0 = m_1V_1\cos\theta/2 + m_2V_2\cos\theta/2;$$

$$Oy: \qquad 0 = m_1V_1\sin\theta/2 - m_2V_2\sin\theta/2.$$

Данную пару уравнений, учитывая известные тригонометрические тождества $\sin^2\theta/2 + \cos^2\theta/2 = 1$ и $\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2 = \cos\theta$, можно привести к виду:

$$m_1^2V_0^2 = m_1^2V_1^2 + m_2^2V_2^2 + 2m_1m_2V_1V_2\cos\theta; \qquad (*)$$

$$m_1V_1 = m_2V_2. \qquad (**)$$

Поскольку столкновение тел абсолютно упругое, механическая энергия системы остается постоянной. Это дает основание дополнить систему уравнений (*), (**) законом сохранения энергии в виде

$$\frac{m_1V_0^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}. \qquad (***)$$

Путем последовательного исключения из системы уравнений неизвестных величин V_1 и V_2 получим окончательно $\dfrac{m_1}{m_2} = 1 + 2\cos\theta = 2$.

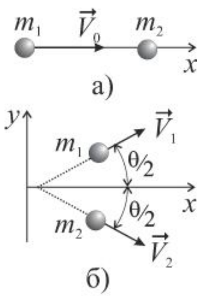


Рис.2.48

Задача 2.126

После выброса каждой порции газа скорость ракеты увеличивается. Обозначим индексом k, пробегающим значения $(0,1,\dots,n)$, номер очередного выброса (после k-й секунды). Введем, также, обозначения: V_k – скорость ракеты и $M_k = M - km$ – ее масса после k-го выброса. Для того чтобы установить соотношение между скоростью V_k и предыдущей скоростью V_{k-1}, запишем закон сохранения импульса системы «ракета – k-я порция газа» в проекции на направление движения ракеты:
$[M - (k-1)m]V_{k-1} = (M - km)V_k + m(-u + V_k)$.

Из полученного выражения следует, что $V_k = V_{k-1} + \dfrac{um}{M-(k-1)m}$. В частности, после подстановки $k=1$ получаем: $V_1 = V_0 + \dfrac{um}{M}$; аналогично $V_2 = V_1 + \dfrac{um}{M-m} = V_0 + \dfrac{um}{M} + \dfrac{um}{M-m}$ и так далее. Путем индукции для V_n получаем $V_n = V_0 + um\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{M-(k-1)m}$.

3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Момент импульса. Момент силы

Основные определения

✓ Моментом импульса частицы относительно произвольной точки О называется вектор $\vec{L} = [\,\vec{r}\vec{P}\,]$, где $\vec{P} = m\vec{V}$ − импульс частицы, а $\vec{r}$ − ее радиус-вектор, проведенный из точки О.

✓Момент импульса системы, состоящей из N частиц,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i\vec{P}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i\vec{V}_i\right]m_i \ . \qquad (3.1а)$$

✓ Момент силы $\vec{F}$ относительно точки О

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right], \qquad (3.1б)$$

где $\vec{r}$ − вектор, соединяющий точку О и точку приложения силы. Проекция M_Z момента силы на ось z, проходящую через точку О, называется моментом силы относительно оси.

✓ Момент пары сил ($\vec{F}$ и - $\vec{F}$) не зависит от выбора точки О; его модуль:

$$M = bF\ , \qquad (3.1в)$$

где b − плечо данной пары сил.

✓ Закон сохранения момента импульса: момент импульса системы частиц остается постоянным, если суммарный момент внешних сил по отношению к системе частиц равен нулю. (Здесь моменты сил и импульса вычисляются относительно одной и той же точки.)

3.1. Частица массой m движется вдоль оси x со скоростью V. Чему равен момент импульса частицы относительно точки с координатами $(0,b,0)$? Как он направлен, если $b>0$?

3.2. В тот момент, когда частица массой m = 1 г имеет координаты (2,2,0) м, ее скорость $\vec{V} = 250\vec{e}_y$, м/с. Чему равен момент импульса частицы $\vec{L}$ относительно точки с координатами: а) (0,0,0); б) (2,0,0) м;в) (2,2,2) м ?

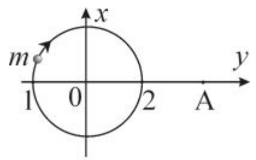


Рис.3.1

3.3. Частица массой m движется по окружности радиусом R, расположенной в плоскости (x, y), с постоянной по величине скоростью V (рис. 3.1). Чему равно изменение момента импульса $\Delta\vec{L}$ частицы относительно точки А за время перемещения частицы из точки 1 с координатами (0,-R, 0) в точку 2 с координатами (0,R,0)? Рассмотреть случаи: а) расстояние от точки А до начала координат $r > R$; б) $r < R$.

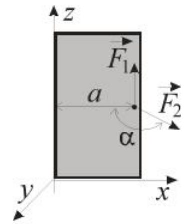


Рис.3.2

3.4. Сила, приложенная к частице, имеет вид $\vec{F} = 2{,}1\vec{e}_x + 3{,}4\vec{e}_y$, Н. Чему равен момент этой силы относительно начала координат, если точка приложения силы имеет координаты (4,2 м, 6,8 м,0)?

3.5. Чему равен момент силы притяжения Луны к Земле в геоцентрической системе отсчета (относительно центра Земли)?

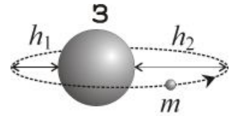


Рис.3.3

3.6. Расстояние от дверной ручки до вертикальной оси z, вокруг которой может свободно вращаться дверь (рис. 3.2), равно a. Определить момент M_z: а) силы F_1, направленной параллельно оси z (см. рис. 3.2); б) силы F_2 , перпендикулярной оси z и направленной под углом α по отношению к ней.

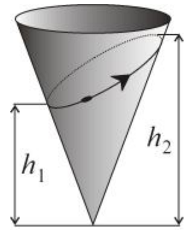


Рис.3.4

3.7. Вычислить момент импульса Луны в геоцентрической системе отсчета, считая, что ее орбита – окружность радиуса $r_л$. Вращением Луны вокруг собственной оси пренебречь.

3.8*П. Спутник массой m движется в поле тяготения Земли по эллиптической орбите (рис.3.3). Минимальное и максимальное расстояния от спутника до поверхности Земли (перигей и апогей) равны h_1 и h_2. Чему равны значения скоростей спутника в перигее (V_1) и апогее (V_2)? Считать Землю шаром радиуса $R_З$, влиянием других небесных тел и сопротивлением атмосферы пренебречь.

3.9.* Небольшая шайба скользит без трения по внутренней поверхности конуса (рис.3.4). Известны высоты h_1 и h_2 в точках наименьшего и наибольшего подъема. Найти скорости шарика V_1 и V_2 в этих точках.

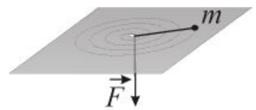


Рис.3.5

3.10.* На гладкой горизонтальной плоскости движется небольшое тело массой m, привязанное к нерастяжимой нити, другой конец которой медленно втягивают в отверстие (рис.3.5). Найти силу натяжения нити F в зависимости от расстояния r тела до отверстия, если при $r = r_0$ угловая скорость тела была равна ω_0.

3.2. Момент инерции

Основные определения

✓ Моментом инерции системы, состоящей из N частиц, относительно произвольной оси называется скалярная сумма вида

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 , \qquad (3.2а)$$

где R – расстояния частиц до оси.

✓ Момент инерции сплошного тела

$$J = \int_V r^2 dm . \qquad (3.2б)$$

Здесь r – расстояние участка тела массой dm от оси; интегрирование ведется по всему объему тела.

✓ Теорема Штейнера

$$J = J_C + Mb^2 , \qquad (3.2в)$$

где J_C - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела массы M, а J – момент инерции того же тела относительно параллельной оси, отстоящей от центра масс на расстоянии b.

✓ Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через центр масс тела:

$$J_C = J_X \cos^2\alpha + J_Y \cos^2\beta + J_Z \cos^2\gamma , \qquad (3.2г)$$

где α, β, γ – углы между данной осью и главными осями (X, Y, Z) тела; J_X, J_Y, J_Z – главные моменты инерции.

3.11. Два шарика массами m =10 г и $2m$ закреплены на тонком невесомом стержне длиной l = 40 см. Для каждого из двух вариантов закрепления, показанных на рис. 3.6, вычислить момент инерции J системы относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей через ее свободный конец. Размерами шариков пренебречь.

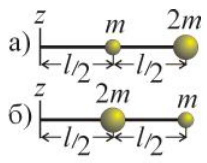


Рис.3.6

3.12. Три шарика массой m =10 г каждый закреплены в вершинах равностороннего треугольника со стороной l = 20 см. Определить момент инерции J системы относительно оси: а) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр масс; б) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через его центр масс и одну из вершин треугольника. Размерами шариков и массой соединяющих стержней пренебречь.

3.13. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной l = 30 см и массой m = 100 г относительно: а) оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр; б) оси, проходящей через его центр и составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ со стержнем; в) оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку, принадлежащую стержню и отстоящую от его края на 1/3 длины.

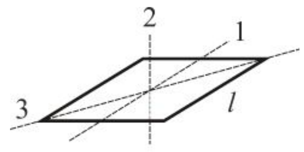


Рис.3.7

3.14П. Вычислить момент инерции J проволочного прямоугольника со сторонами a = 12 см и b = 16 см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон. Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью τ = 0,1 кг/м.

3.15. На рис. 3.7 изображена тонкая проволочная рамка квадратной формы со стороной l. Найти момент инерции J этой рамки относительно: а) оси 1, лежащей в плоскости квадрата и проходящей через его центр параллельно двум сторонам; б) оси 2, перпендикулярной плоскости рамки и проходящей через ее центр; в) оси 3, совпадающей с одной из диагоналей квадрата. Массу рамки m считать известной.

3.16. Определить момент инерции тонкой проволочной рамки массой m согнутой в форме равностороннего треугольника со стороной l относительно оси: а) совпадающей с одной из биссектрис; б) перпендикулярной плоскости рамки и проходящей через ее центр.

3.17.* Вычислить главные моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда массой m со сторонами a, b и c.

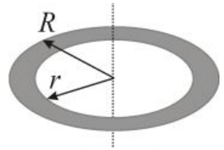


Рис.3.8

3.18.* Определить момент инерции J тонкого однородного обруча радиусом R и массой m относительно оси: а) совпадающей с одним из диаметров обруча; б) перпендикулярной плоскости обруча и касающейся одной из его точек.

3.19.* Вычислить момент инерции J: а) однородного тонкого диска массой m и радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр; б) однородного сплошного конуса массой m и радиусом основания R относительно оси, совпадающей с высотой конуса.

3.20.* Чему равен момент инерции тонкой однородной шайбы, изображенной на рис. 3.8, относительно оси, перпендикулярной плоскости шайбы и проходящей через её центр? Масса шайбы равна m, её внешний и внутренний радиусы равны R и r соответственно.

3.3. Неподвижные оси вращения

Основные определения

✓ Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, проекция момента импульса тела на ось z:

$$L_z = J\omega \qquad (3.3а)$$

Здесь J – момент инерции тела относительно оси z.

✓ В случае, когда ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции твердого тела, момент импульса тела

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \qquad (3.3б)$$

✓ Уравнение динамики твердого тела в проекции на закрепленную ось

$$M_z = \frac{dL_Z}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\beta_z, \qquad (3.3в)$$

где M_z – результирующий момент всех действующих на тело сил относительно оси z.

✓ Изменение проекции момента импульса на ось z за время Δt

$$\Delta L_z = J\Delta\omega = \langle M_z \rangle \Delta t, \qquad (3.3г)$$

где $\langle M_z \rangle$ – средний за время Δt момент сил относительно оси z.

✓ Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси,

$$T = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (3.3д)$$

✓ Работа момента силы $\vec{M}$ при повороте тела на угол φ

$$A = \int_0^{\varphi} \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \qquad (3.3е)$$

✓ Мгновенная мощность, развиваемая моментом силы

$$\vec{N} = \vec{M}\vec{\omega} = M_z\omega. \qquad (3.3ж)$$

3.21. Маховик в форме сплошного диска, момент инерции которого J = 150 кг·м^2, вращается с частотой n = 240 об/мин. Через t = 1 мин после выключения двигателя маховик останавливается. Определить: а) момент M сил торможения; б) число оборотов маховика от начала торможения до остановки.

3.22. Вентилятор вращается с частотой n = 600 об/мин. После выключения он начинает вращаться равнозамедленно и, сделав N = 50 оборотов, останавливается. Известно, что работа A сил торможения равна 31,4 Дж. Определить: а) момент M сил торможения; б) момент инерции J вращающейся части вентилятора.

3.23. Маховик в форме сплошного диска, момент инерции которого J = 1,5 кг·м^2, вращаясь равнозамедленно, за время t = 1 мин уменьшил частоту своего вращения с n_0 = 240 об/мин до n_1 = 120 об/мин. Определить: а) угловое ускорение β маховика; б) момент M сил торможения; в) работу торможения A.

3.24. Двум одинаковым маховикам, закрепленным на неподвижных осях, сообщили одинаковую угловую скорость $\omega = 20\pi$ рад/с и предоставили их самим себе. Под действием сил трения первый маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки N = 360 оборотов. У какого маховика тормозящий момент был больше и во сколько раз?

3.25. К ободу однородного сплошного диска радиусом R = 0,5 м приложена постоянная касательная сила F = 100 Н. При вращении диска вокруг неподвижной оси, на которой он закреплен, на него действует момент сил трения $M_{тр}$ =2 Н·м. Определить массу диска, если известно, что его угловое ускорение постоянно и равно 16 рад/с^2.

3.26. Блок радиусом R закреплен на неподвижной оси О; его момент инерции относительно этой оси равен J. В случае, изображенном на рис. 3.9,*а*, он приводится во вращение грузом массой m = 2 кг, а во втором случае (рис. 3.9,*б*) – постоянной силой F = 19,6 Н. Сравнить угловые ускорения блока β_1 и β_2.

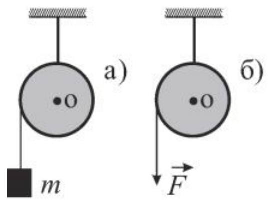


Рис.3.9

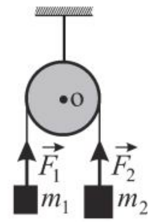


Рис.3.10

3.27. На блок радиусом R = 50 см намотан невесомый и нерастяжимый шнур, к которому привязан груз массой m = 10 кг. Найти момент инерции блока, если известно, что груз опускается с ускорением 2,8 м/с^2.

3.28. На блок радиусом R = 20 см и моментом инерции J = 0,1 кг·м^2 намотан невесомый и нерастяжимый шнур, к которому привязан груз массой m = 0,5 кг. В начале движения высота груза над полом равна h = 1 м. Найти: а) время t падения груза; б) кинетическую энергию T груза; в) момент импульса L блока относительно т.О во время удара о пол.

3.29П. Через блок цилиндрической формы массой m = 1кг перекинут шнур, к концам которого прикреплены грузы массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг (рис.3.10). Найти: а) ускорение грузов; б) силы натяжения шнура F_1 и F_2. Считать шнур невесомым и нерастяжимым. Проскальзывание шнура относительно блока и трение в оси блока отсутствуют.

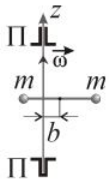


Рис.3.11

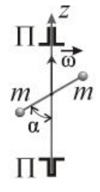


Рис.3.12

3.30. Невесомый стержень длиной l с двумя грузами, массами m каждый, закреплен на оси z так, что центр масс отстоит от этой оси на расстоянии b (рис.3.11). Чему равна суммарная величина силы реакции F в подшипниках П, если угловая скорость вращения стержня равна ω? Силой тяжести грузов пренебречь.

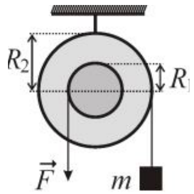


Рис.3.13

3.31. Центр масс системы, состоящей из невесомого стержня длиной l и двух грузов массами m каждый, расположен на оси вращения z. Стержень закреплен так, что угол между ним и осью вращения равен α (рис.3.12). Угловая скорость вращения стержня равна ω. Чему равна величина момента сил реакции M в подшипниках П? При каком значении α момент сил реакции в подшипниках максимален?

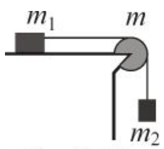


Рис.3.14

3.32. На ступенчатом блоке (рис.3.13) закреплены и намотаны в противоположном направлении две нити. Одну нить тянут с постоянной силой $\vec{F}$, а к другой нити прикреплен груз массой m. Значения R_1, R_2 и момента инерции блока J известны. Трения нет. Найти угловое ускорение блока.

3.33. В системе (рис.3.14) известны массы грузов m_1 и m_2, коэффициент трения μ между телом m_1 и столом, а также m – масса блока, который можно считать однородным диском. Скольжение нити по блоку отсутствует. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока найти перемещение Δx тела m_1 за первые t секунд после начала движения.

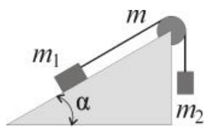


Рис.3.15

3.34. В установке, изображенной на рис. 3.15, угол наклона плоскости к горизонту равен 30˚, массы тел m_1 =1,5 кг, m_2 =1 кг. Считая блок однородным сплошным цилиндром массой m =0,5 кг, определить: а) ускорение грузов; б) силы натяжения нити F_1 и F_2. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и лежащим на ней грузом μ =0,1.

3.35. Однородный стержень длиной l может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси О, проходящей через его верхний конец (рис.3.16). Стержень отклонили на угол α_0 и отпустили. Найти скорость нижнего конца стержня как функцию угла α.

3.36.* Однородный невесомый стержень длиной l может свободно вращаться во всех направлениях относительно шарнира, прикрепленного к потолку. На стержне закреплены два одинаковых груза массой m на расстояниях $l/2$ и l от шарнира (рис.3.17). Стержень привели во вращение относительно вертикальной оси так, что он описывает в пространстве конус с углом при вершине α. Определить угловую скорость ω вращения стержня. Проанализировать полученный результат.

3.37. Уравнение движения маховика с моментом инерции J =20 кг·м^2, закрепленного на оси z, имеет вид $\varphi(t) = 3t - t^3$, рад. Чему равен момент внешних сил M_z, действующих на маховик, в момент времени t = 2 с?

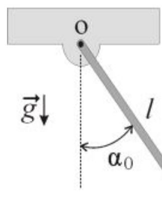


Рис.3.16

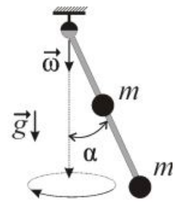


Рис.3.17

3.38.* На первоначально покоившийся маховик, момент инерции J которого равен 2 кг·м^2, начинает действовать момент сил $M_z(t) = 10\sin\dfrac{\pi t}{6}$, Н·м. Определить: а) момент импульса маховика через t = 6 секунд после начала движения; б) число N оборотов маховика за это время.

3.39.* Вертикально расположенный однородный стержень массой m_1 и длиной l может без трения вращаться вокруг своего верхнего конца в вертикальной плоскости. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой $m_2 << m_1$. В результате этого стержень отклонился на угол α. Найти: а) скорость пули перед ударом; б) приращение импульса системы «пуля – стержень». В чем состоит причина изменения этого импульса? в) На какое расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы не изменился в процессе удара?

3.40.* Человек массой m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массой m_2 и радиусом R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил полный оборот относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол поворота диска к моменту остановки человека.

3.41.* Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны J_1 и J_2, а угловые скорости − ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти: а) установившуюся угловую скорость вращения дисков; б) работу, которую совершили при этом силы трения.

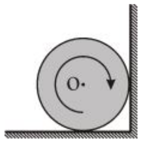


Рис.3.18

3.42.* Однородный цилиндр радиусом R раскрутили вокруг его оси О до угловой скорости ω_0 и затем поместили в угол (рис.3.18). Коэффициент трения между цилиндром и стенками равен μ. Определить: а) время t остановки цилиндра; б) число N оборотов, совершенных цилиндром до остановки.

3.4. Качение. Свободные оси вращения. Гироскопы

Основные определения

✓ Уравнения динамики твердого тела массой m:

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}, \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{3.4а}$$

где $\vec{V}_C$ − скорость центра масс тела, $\vec{L}$ − момент его импульса, а $\vec{F}$ и $\vec{M}$ − суммарная внешняя сила и суммарный момент внешних сил соответственно

✓ В случае «плоского» движения твердого тела массой m, у которого скорость центра масс $\vec{V}_C$, а угловая скорость вращения равна ω, кинетическая энергия тела

$$T = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2}. \tag{3.4б}$$

✓ Угловая скорость прецессии гироскопа $\vec{\Omega}$, его момент импульса $\vec{L}$ и момент внешних сил $\vec{M}$ связаны соотношением

$$\left[\vec{\Omega}\vec{L}\right] = \vec{M}. \tag{3.4в}$$

3.43.* Тонкий однородный стержень массой m = 1 кг движется поступательно с ускорением a = 2 м/с^2 под действием двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис.3.19). Расстояние между точками приложения этих сил b = 20 см. Кроме того, известно, что $F_2 = 5{,}0$ Н. Найти длину стержня.

3.44.* Однородный шар массой m = 4 кг движется поступательно по поверхности стола под действием постоянной силы $\vec{F}$, как показано на рис. 3.20. Угол α = 30°, коэффициент трения μ = 0,2. Найти: а) величину силы F; б) ускорение шара a.

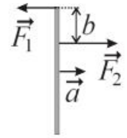


Рис.3.19

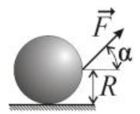


Рис.3.20

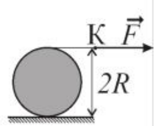


Рис.3.21

3.45.* Однородный цилиндр радиусом R и массой m лежит на гладкой горизонтальной поверхности. На боковую поверхность цилиндра плотно намотана нить, к свободному концу К которой приложили постоянную силу $\vec{F}$ (рис.3.21). После начала движения цилиндра точка К переместилась на расстояние l. Найти угловую скорость цилиндра к этому моменту.

3.46.* Катушка с плотно намотанным на нее гибким проводом движется без скольжения на горизонтальном столе (рис.3.22). Найти:

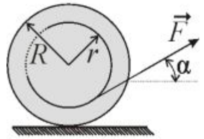


Рис.3.22

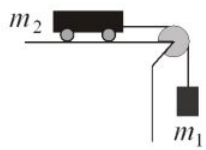


Рис.3.23

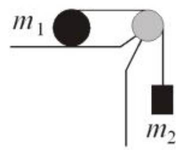


Рис.3.24

а) проекцию a_x ускорения оси катушки, если ее тянут за конец провода с силой $\vec{F}$; б) силу трения между катушкой и поверхностью стола. Исследовать зависимость полученных результатов от значения угла α. Масса катушки m, момент инерции $J = \gamma mR^2$, радиусы R и r и величина силы F заданы.

3.47.* В системе, изображенной на рис. 3.23, масса подвешенного к нити груза равна m_1 = 0,5 кг, масса тележки m_2 = 2 кг, масса каждого из ее четырех колес $m_3 = 0,4$ кг. Колеса катятся по столу без скольжения, трение качения отсутствует, массы нити и блока пренебрежимо малы. Определить ускорение тележки. Колеса считать сплошными однородными дисками.

3.48. По горизонтальному столу может катиться без скольжения сплошной однородный цилиндр массой m_1; масса подвешенного к нити груза равна m_2 (рис.3.24). Пренебрегая массами нити и блока, найти: а) ускорение a_2 груза m_2; б) величину и направление силы трения $\vec{F}_{тр}$ между цилиндром и столом.

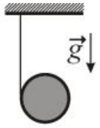


Рис.3.25

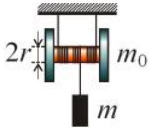


Рис.3.26

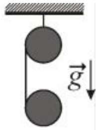


Рис.3.27

3.49. На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента (рис.3.25), массой которой по сравнению с массой цилиндра m можно пренебречь. Свободный конец ленты прикреплен к потолку. Определить линейное ускорение a оси цилиндра, если цилиндр: а) сплошной однородный; б) полый тонкостенный.

3.50.* С каким ускорением будет опускаться катушка массой m_0, изображенная на рисунке 3.26, если масса подвешенного к ней груза равна m? Момент инерции катушки относительно ее оси круговой симметрии равен J; все нити намотаны в одну сторону – так, что моменты всех сил натяжения относительно оси катушки направлены одинаково. Радиус осевого валика равен r.

3.51.* Система состоит из двух одинаковых однородных цилиндров, на которые симметрично намотаны две невесомые и нерастяжимые нити (рис.3.27). Найти ускорение оси нижнего цилиндра в процессе движения.

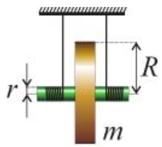


Рис.3.28

3.52. Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла (рис.3.28). Он представляет собой однородный диск радиусом R и массой m, насаженный на цилиндрическую ось радиусом r. Пренебрегая силами сопротивления и моментом инерции оси, определить:а) ускорение a поступательного движения маятника; б) силу натяжения нитей. Нити намотаны в одну сторону.

3.53П. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, скатывается без скольжения сплошной однородный цилиндр радиусом $R = 10$ см и массой $m = 300$ г. Найти: а) ускорение a центра цилиндра; б) величину силы трения сцепления цилиндра с плоскостью.

3.54. Найти ускорение a центра масс: а) однородного шара; б) обруча, скатывающихся без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом.

3.55.* На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородный стержень массой $m = 5,0$ кг и длиной $l = 90$ см. По одному из концов стержня в горизонтальном направлении, перпендикулярном стержню, произвели удар, импульс силы которого $F\Delta t = 3,0$ Н·с. Определить: а) расстояние Δx, на которое переместится центр стержня за время своего полного оборота; б) кинетическую энергию стержня после удара.

3.56.* Однородный стержень, падавший в горизонтальном положении с высоты h, упруго ударился одним концом о край массивной плиты. Найти скорость V_C центра стержня сразу после удара.

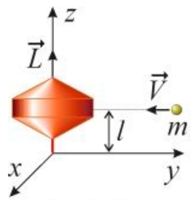


Рис.3.29

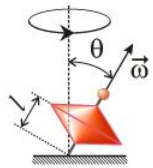


Рис.3.30

3.57.* Вертикально расположенный обруч радиусом R бросают вперед со скоростью $V_C = V$ и сообщают ему одновременно угловую скорость ω. Найти установившуюся скорость V' колеса после того, как закончится его скольжение по горизонтальной поверхности. Проанализировать полученный результат.

3.58.* С автомобиля, движущегося со скоростью V, соскочило колесо и покатилось по земле. Наблюдение показало, что колесо описало по земле окружность радиусом R. Определить угол наклона φ оси колеса к горизонту. Всю массу колеса считать сосредоточенной на ободе. Известно, что R много больше радиуса колеса.

3.59*П. Мяч массой $m = 0,2$ кг испытал упругое соударение с боковой гладкой поверхностью волчка, обладавшего моментом импульса $L = L_Z = 40$ Дж·с. Скорость мяча до удара $V = 20$ м/с; она была направлена, как показано на рис. 3.29, против оси y. Удар произошел на высоте $l = 20$ см. Какое положение приняла ось волчка после удара? Волчок не скользит по поверхности стола.

3.60.* Волчок массой $m = 0,5$ кг, ось которого наклонена под углом $\theta = 30^\circ$ к вертикали, прецессирует под действием силы тяжести (рис.3.30). Момент инерции волчка относительно его оси симметрии $J = 2$ г·м^2, угловая скорость вращения вокруг этой оси $\omega = 350$ рад/с, расстояние от точки опоры до центра масс волчка $l = 10$ см. Найти: а) угловую скорость Ω прецессии волчка; б) модуль и направление горизонтальной составляющей силы реакции $\vec{F}$, действующей на волчок в точке опоры со стороны пола.

3.61.* Гироскоп, имеющий форму однородного диска радиусом R = 5 см, закреплен на стержне длины l =10 см (рис.3.31). Другой конец стержня укреплен в шарнире. Гироскоп прецессирует с частотой n = 0,5 об/с. Пренебрегая трением и массой стержня, найти собственную угловую скорость ω вращения гироскопа.

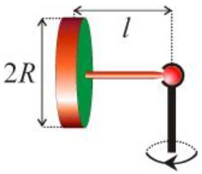


Рис.3.31

3.62.* Однородный шар массой m = 5,0 кг и радиусом R = 6,0 см вращается с угловой скоростью ω = 1250 рад/с вокруг горизонтальной оси (рис.3.32), укрепленной в подшипниках подставки. Подставку поворачивают вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω = 5,0 рад/с. Расстояние между подшипниками l =15 см. Найти модуль и направление гироскопических сил.

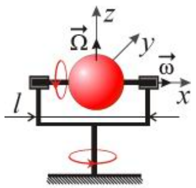


Рис.3.32

3.5. Примеры решения задач

Задача 3.8

Единственная сила, действующая на спутник, – сила притяжения Земли, направленная к ее центру. Момент этой силы относительно центра Земли равен нулю, поэтому момент импульса спутника $\vec{L} = m[\vec{r}\vec{V}]$ и его модуль остаются постоянными. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор спутника, проведенный из центра Земли; его модуль $r = R_3 + h$.

В обеих крайних точках орбиты $r_1 = R_3 + h_1$ (перигей) и $r_2 = R_3 + h_2$ (апогей) векторы $\vec{r}$ и $\vec{V}$ взаимно перпендикулярны (см. рис.3.3); следовательно, в этих точках $L = mrV \cdot \sin 90^{\circ} = mrV$. Применительно к этим точкам, в силу всего вышесказанного, закон сохранения момента импульса принимает вид

$$m(R_3 + h_1)V_1 = m(R_3 + h_2)V_2. \qquad (*)$$

Кроме того, в соответствии с условиями задачи, сохраняется механическая энергия спутника $E = T + U = \dfrac{mV^2}{2} - \dfrac{GmM_3}{r}$, где M_3 – масса Земли, G – гравитационная постоянная. Применяя закон сохранения энергии к тем же точкам орбиты (перигею и апогею), получим

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{GmM_3}{R_3 + h_1} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{GmM_3}{R_3 + h_2}. \qquad (**)$$

Совместное решение системы уравнений (*), (**) относительно V_1 и V_2 имеет вид $V_1 = \sqrt{\dfrac{2GM_3}{(2R_3 + h_1 + h_2)} \dfrac{(R_3 + h_2)}{(R_3 + h_1)}}$; $V_2 = V_1 \dfrac{R_3 + h_1}{R_3 + h_2}$.

Задача 3.14.

Положение прямоугольника относительно осей координат z и x изображено на рис. 3.33.

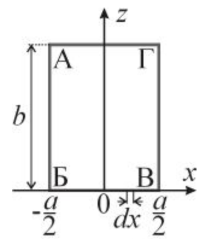


Рис.3.33

1. Общий момент инерции рамки равен сумме моментов инерции его сторон: $J = 2J_1 + 2J_2$, где J_1 - момент инерции каждой из сторон, параллельных оси z, J_2 - момент инерции каждой из сторон, перпендикулярных оси z.
2. Вычислим J_1 (сторона АБ). Поскольку все точки этой стороны отстоят на одинаковом расстоянии $a/2$ от оси z, по определению $J_1 = m_{АБ}(a/2)^2 = \tau b (a/2)^2 = \dfrac{ba^2}{4}\tau$.
3. Вычислим J_2 (сторона БВ). Для этого разобьем эту сторону на бесконечно малые отрезки dx (рис.3.33). Масса такого отрезка $dm = \tau dx$, а его вклад в момент инерции $dJ_2 = x^2 dm = \tau x^2 dx$.

Величину J_2 найдем путем интегрирования этого выражения по всей длине стороны БВ: $J_2 = \int\limits_{-a/2}^{a/2} \tau x^2 dx = \dfrac{\tau x^3}{3}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} = \dfrac{\tau a^3}{12}$.

4. Окончательно, $J = 2J_1 + 2J_2 = \dfrac{ba^2\tau}{2} + \dfrac{a^3\tau}{6} = \dfrac{a^2\tau}{2}\left(b + \dfrac{a}{3}\right)$.

Подстановка численных значений параметров дает $J = 1{,}44 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

Ответ: $J = \dfrac{a^2\tau}{2}\left(b + \dfrac{a}{3}\right) = 1{,}44 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 3.29

Выберем оси декартовых координат y и z так, как показано на рис. 3.34. Прежде чем приступать непосредственно к решению, необходимо уяснить физический смысл некоторых условий задачи.

1. <u>Условие нерастяжимости нити</u>. Поскольку нить нерастяжима, путь, пройденный грузом m_1 против оси y равен пути, пройденному грузом m_2 вдоль этой оси за тот же интервал времени t: $a_1 t^2/2 = a_2 t^2/2$. Из этого следует, что ускорения грузов одинаковы по величине: $a_1 = a_2 = a$.

2. <u>Условие невесомости нити</u>. Рассмотрим участок нити АБ между грузом m_2 и блоком (рис.3.34). Уравнение движения этого участка в проекции на ось y с учетом 3-го закона Ньютона имеет вид $m_{АБ}a = F_2 - F_2'$. Из условия невесомости нити ($m_{АБ} = 0$) следует, что $F_2' = F_2$. Аналогично доказывается, что $F_1' = F_1$.

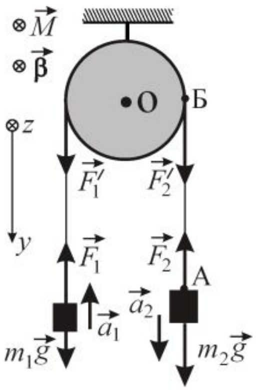


Рис.3.34

3. <u>Условие «непроскальзывания» нити</u>. Линейная скорость всех отрезков нити в произвольный момент времени t равна $V = at$. Линейная скорость точек, принадлежащих ободу блока, выражается через угловое ускорение блока β и его радиус R, как $V_{БЛ} = \beta R t$. Отсутствие скольжения означает, что в любой момент времени $V = V_{БЛ}$ или $at = \beta R t$. Из этого, в свою очередь, следует, что $\beta = a/R$.

Запишем уравнения движения обоих грузов в проекции на ось y, а уравнение движения блока в проекции на ось z:

Oy: $\quad -m_1 a_1 = m_1 g - F_1$; $\quad m_2 a_2 = m_2 g - F_2$;

Oz: $\quad J\beta = M_Z = R(F_2' - F_1')$.

Учитывая приведенное выше обсуждение условий задачи, а, также, то, что момент инерции цилиндрического блока $J = \dfrac{mR^2}{2}$, полученную систему уравнений можно привести к виду

$$-m_1 a = m_1 g - F_1;\ m_2 a = m_2 g - F_2;\ \frac{ma}{2} = F_2 - F_1. \qquad (*)$$

Решая эту систему относительно искомых величин, получим:

а) $a = g\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2} = 2{,}8$ м/с^2;

б) $F_1 = m_1(g + a) = 12{,}6$ Н; $F_2 = m_2(g - a) = 14{,}0$ Н.

Задача 3.53

Выберем начало координат так, чтобы ось z совпала с линией касания цилиндра и плоскости, а направление оси x − с направлением ускорения центра масс цилиндра (вектор $\vec{a}$ на рис.3.35). Условие отсутствия скольжения означает, что скорость именно той образующей цилиндра, которая в данный момент касается плоскости, равна нулю. Поэтому движение цилиндра можно рассматривать как его вращение вокруг неподвижной оси z. Центр масс цилиндра расположен на расстоянии, равном радиусу R цилиндра. Поэтому угловое ускорение цилиндра $\beta = a/R$. В соответствии с теоремой Штейнера, момент инерции цилиндра относительно оси z:

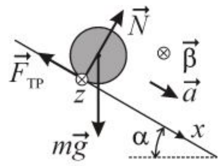


Рис.3.35

$J = J_C + mR^2 = \dfrac{3mR^2}{2}$. Моменты силы трения $\vec{F}_{тр}$ и силы нормальной упругой реакции $\vec{N}$ относительно этой оси, очевидно, равны нулю (см. рис.3.35); момент силы тяжести равен $M_z = mgR\sin\alpha$.

В силу всего вышесказанного, уравнения движения цилиндра в проекциях на оси x и z имеют вид:

Ox: $\quad ma = mg\sin\alpha - F_{тр}$; $\qquad Oz$: $\quad J\beta = \dfrac{3mR^2}{2}\dfrac{a}{R} = mgR\sin\alpha$.

Совместное решение этой системы уравнений дает:

а) $a = \dfrac{2g\sin\alpha}{3} \cong 3{,}3$ м/с^2; б) $F_{тр} = \dfrac{mg\sin\alpha}{3} = 0{,}49$ Н.

Задача 3.59

На первый взгляд может показаться, что в результате удара ось вращения волчка отклонится против оси y. Покажем, что это не так. На рис. 3.36 изображена система «мяч-волчок» в один из моментов столкновения. На мяч действует сила реакции $\vec{F}$, направленная параллельно оси y; на волчок, в соответствии с III законом Ньютона сила $\vec{F}' = -\vec{F}$ (на рисунке сила $\vec{F}'$ для наглядности перенесена

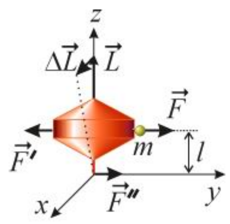


Рис.3.36

параллельно самой себе, но так, чтобы ее момент относительно острия волчка не изменился). Кроме того, на волчок действует сила $\vec{F}''$ со стороны поверхности стола, препятствующая его скольжению. Эта сила направлена так же, как сила $\vec{F}$ (рис.3.36). Таким образом, моменты обеих сил ($\vec{F}'$ и $\vec{F}''$), действующих на волчок при столкновении, по определению перпендикулярны оси y. Поэтому приращение момента импульса волчка и соответствующее отклонение оси вращения, также перпендикулярны этой оси (рис.3.36). Поскольку ускорение центра масс волчка в направлении на ось y отсутствует, $\vec{F}'' = -\vec{F}' = \vec{F}$ в любой момент времени.

1. Столкновение мяча и волчка упругое, причем волчок, как показано выше, не отклоняется в направлении удара; иными словами, мяч отскакивает от поверхности волчка, как от неподвижной упругой стенки. Величина его скорости в результате удара не изменяется, а направление изменяется на противоположное. Обозначим символом Δt время столкновения мяча и волчка. Изменение импульса мяча $\Delta\vec{P} = \langle\vec{F}\rangle\Delta t$, где $\langle\vec{F}\rangle$ – средняя сила, действующая на мяч со стороны волчка за это время. В проекции на ось y получаем: $\langle F\rangle\Delta t = mV - (-mV) = 2mV$.
2. Итак, на волчок в течение всего времени столкновения действует пара сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, расположенных в плоскости (y, z); каждая из них равна величине силы F, действующей на мяч. Плечо этой пары сил равно l Ее момент направлен параллельно оси x и равен $\vec{M} = Fl\vec{e}_x$. Уравнение динамики для волчка можно записать в виде $d\vec{L} = \vec{M}dt$. В проекции на ось x, применительно к интервалу времени Δt получаем, что приращение момента импульса волчка $\Delta L_x = \langle F\rangle l\Delta t$, или, учитывая пункт 2 данного анализа, $\Delta L_x = 2mVl = 1{,}6$ Дж·с.

Поскольку $\Delta L_x << L$, после соударения с мячом вектор $\vec{L}$, а вместе с ним и ось вращения волчка отклоняется в направлении оси x на малый угол $\varphi \cong \Delta L_x/L = 2mVl/L = 0{,}04$ рад. Этот результат позволяет пренебречь вычислением проекции ΔL_z, отклонением мяча при отскоке от направления на ось y и т.д. как величинами второго порядка малости по φ (рис.3.36). Таким образом, с точностью, не худшей чем $\Delta L/L = 4\%$, можно считать, что $\Delta L_x \cong \Delta L$.

Ответ: $\varphi \cong 0{,}04$ рад.

4. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

4.1. Равновесные распределения молекул

Основные определения

✓ Средняя квадратичная скорость N частиц

$$u_{\text{КВ}} = \sqrt{\langle\vec{u}^2\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{N}\vec{u}_i^2 \Big/ N\right)^{0,5}. \quad (4.1а)$$

✓ Масса молекулы $m_0 = M/N_{\text{А}}$, где M – молярная масса, $N_{\text{А}}$ – число Авогадро.

✓ Средняя энергия поступательного движения молекул идеального газа

$$\langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle = \frac{m_0\langle\vec{u}^2\rangle}{2} = \frac{3k_{\text{Б}}T}{2}, \quad (4.1б)$$

где T – температура газа, $k_{\text{Б}} = R/N_{\text{А}}$ – постоянная Больцмана, R – газовая постоянная.

✓ Средняя энергия теплового движения молекул (без учета колебательных степеней свободы молекул)

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{ik_{\text{Б}}T}{2}, \quad (4.1в)$$

где число степеней свободы молекул $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}}$, $i_{\text{п}} = 3$ – число поступательных, а $i_{\text{вр}}$ – число вращательных степеней свободы молекул.

✓ Частота соударений молекул газа с единицей поверхности стенки

$$\nu = \frac{n\langle u\rangle}{4}, \quad (4.1г)$$

где $\langle u\rangle$ – их средняя скорость, $n = N/V$ – концентрация молекул, занимающих объем V.

✓ Функции распределения Максвелла

$$f_1(u_x) = (m_0/2\pi k_{\text{Б}}T)^{1/2}\exp\left(-m_0u_x^2/2k_{\text{Б}}T\right); \quad (4.1д)$$

$$f_2(u) = 4\pi u^2(m_0/2\pi k_{\text{Б}}T)^{3/2}\exp\left(-m_0u^2/2k_{\text{Б}}T\right). \quad (4.1е)$$

✓ Доля молекул с проекциями скоростей $u_x \in [u_x, u_x + du_x]$: $dw = f_1 \cdot du_x$; Доля молекул с величинами скоростей $u \in [u, u + du]$: $dw = f_2 \cdot du$;

✓ Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости молекул:

$$u_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2k_Б T}{m_0}}\ ;\ \langle u \rangle = \sqrt{\frac{8k_Б T}{\pi m_0}}\ ;\ u_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3k_Б T}{m_0}}\ . \qquad (4.1ж)$$

✓ Распределение Больцмана

$$n = n_0 \exp(-U/k_Б T), \qquad (4.1з)$$

где U – потенциальная энергия молекулы.

4.1. Частицы вещества распределены по объему в среднем равномерно. Известна концентрация частиц n. Оценить среднее расстояние $\langle r \rangle$ между частицами.

4.2. Оценить среднее расстояние $\langle r \rangle$ между: а) молекулами идеального газа при нормальных условиях; б) молекулами воды. Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

4.3. Вычислить расстояние a между ближайшими ионами натрия и хлора в кристалле поваренной соли. Плотность кристаллической поваренной соли $\rho = 2{,}17$ г/см^3, элементарная ячейка поваренной соли – кубическая.

4.4. Шарик радиусом R находится в идеальном газе, масса молекул которого m_0. Вычислить число ν столкновений молекул с шариком за 1 секунду, если давление P и температура T газа известны.

4.5.* Допустим, что потенциальная энергия парного взаимодействия молекул в газе $U(r) = A/r^{12}$, где r – расстояние между центрами молекул, A – положительная постоянная. Полагая, что массы и скорости всех молекул равны по величине и считая температуру газа T известной, оценить минимальное расстояние, на которое могут сблизиться молекулы.

4.6.* Как средняя скорость относительного движения одинаковых молекул связана со средней скоростью их движения по отношению к стенкам сосуда $\langle u \rangle$?

4.7*П. Известны давление P и температура T идеального газа, а также эффективный диаметр d и масса m_0 его молекул. Определить: а) среднее время τ между двумя столкновениями какой-либо молекулы с другими молекулами газа; б) среднее расстояние λ, которое молекула преодолевает между двумя столкновениями (длину свободного пробега).

4.8. Определить: а) время τ и б) длину свободного пробега λ молекул воздуха при нормальных условиях, приняв значение эффективного диаметра молекул $d = 3{,}7\ \text{Å}$.

4.9. Вычислить при температуре $t = 17^{\circ}$ С: а) среднюю квадратичную скорость $u_{\text{кв}}$ и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы кислорода (O_2); б) то же для капельки воды диаметром $d = 0{,}10$ мкм, взвешенной в воздухе.

4.10. Газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, находится при температуре T = 300 К. Вычислить среднюю квадратичную угловую скорость молекулы, если ее главный момент инерции $J = 2{,}1 \cdot 10^{-46}$ кг·м^2.

4.11. Определить для равновесного газа: а) $\langle u_x \rangle$; б) долю Δw молекул с проекцией скорости $u_x \geq 0$.

4.12. Чему равна доля Δw тех молекул равновесного газа, чей вектор скорости расположен в пределах телесного угла $\Delta\Omega$?

4.13*П. Построить график функции распределения $f_1(u_x)$. Как с его помощью вычислить долю Δw молекул, чьи проекции скоростей принадлежат интервалу значений $[u_{x1}, u_{x2}]$?

4.14.* Построить график функции распределения $f_2(u)$. Отметить на графике значения наиболее вероятной $u_{\text{вер}}$, средней $\langle u \rangle$ и среднеквадратичной скорости молекул $u_{\text{кв}}$. Как с его помощью вычислить долю Δw молекул, чьи скорости принадлежат интервалу значений $[u_1, u_2]$? Нормирована ли функция распределения $f_2(u)$ на единицу?

4.15.* Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной не более чем на 1%?

4.16.* Написать выражение, определяющее относительную долю Δw молекул газа, обладающих скоростями, превышающими наиболее вероятную скорость $u_{\text{вер}}$.

4.17.* Азот N_2 находится в равновесном состоянии при T = 421 К. Вычислить наиболее вероятную скорость его молекул $u_{\text{вер}}$.

4.18.* Определить относительное число $\Delta N/N$ молекул азота из предыдущей задачи, скорости которых заключены в пределах: а) от 499,9 до 500,1 м/с; б) от 249,9 до 250,1 м/с; в) от 749,9 до 750,1 м/с; г) от 999,9 до 1000,1 м/с.

4.19.* Считая атмосферу изотермической (T = 293 К), а ускорение свободного падения g не зависящим от высоты, вычислить равновесное атмосферное давление: а) на высоте 5 км; б) на высоте 10 км; в) в шахте на глубине 2 км. Атмосферное давление на уровне моря $P_0 = 10^5$ Па.

4.20.* Чему равна масса пылинок, взвешенных в атмосфере, если их равновесная концентрация на высоте h = 100 м в η = 400000 раз меньше, чем вблизи поверхности Земли? Температуру на всех высотах считать одинаковой и равной T = 273 К.

4.21.* В опыте по определению постоянной Авогадро $N_{\text{А}}$ Перрен использовал взвесь шариков гуммигута в воде. Температура взвеси составляла 20^{O} С, радиус шариков r = 0,212 мкм. Плотность гуммигута и воды равны, соответственно, $\rho_1 = 1{,}254$ г/см^3 и $\rho_2 = 1{,}000$ г/см^3. При перемещении тубуса микроскопа на $\Delta h = 30$ мкм число шариков, наблюдавшихся в микроскоп, изменялось в η =2,1 раза. Исходя из этих данных, найти $N_{\text{А}}$. Глубина резкости микроскопа невелика по сравнению с Δh.

4.22.* Потенциальная энергия молекул газа в некотором центральном поле зависит от расстояния r до центра поля как $U(r) = ar^2$, где $a-$ положительная постоянная. Температура газа T, концентрация молекул в центре поля n_0. Найти: а) число молекул, находящихся в интервале расстояний $[r, r+dr]$; б) наиболее вероятное расстояние молекул от центра поля; в) относительное число всех молекул в слое $[r, r+dr]$; г) во сколько раз изменится концентрация молекул в центре поля при уменьшении температуры в η раз.

4.2. Уравнения состояния

Основные определения

✓ Уравнение состояния идеального газа, занимающего объем V (уравнение Менделеева – Клапейрона),

$$PV = \frac{m}{M}RT = \nu RT \,. \qquad (4.2а)$$

Здесь $\nu = m/M$ – число молей вещества.

✓ Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов

$$P = \sum_j P_j \,, \qquad (4.2б)$$

где P_j $(j = 1,2,\ldots)$ – парциальные давления компонентов смеси.

✓ Уравнение состояния ван-дер-ваальсовского газа:

$$\left(P + a\nu^2/V^2\right)\left(V/\nu - b\right) = RT \,, \qquad (4.2в)$$

где a и $b-$ постоянные Ван - дер Ваальса для данного газа.

✓ Оно же, выраженное через параметры критического состояния:

$$\left(\frac{P}{P_{\text{кр}}} + 3\left(\frac{\nu V_{M\,\text{кр}}}{V}\right)^2\right)\left(3\frac{V}{\nu V_{M\,\text{кр}}} - 1\right) = 8\frac{T}{T_{\text{кр}}} \,, \qquad (4.2г)$$

где $P_{\text{кр}}, T_{\text{кр}}$ и $V_{M\,\text{кр}}-$ давление, температура и объем одного моля данного газа в критической точке.

4.23. Изобразить на диаграмме (P,V): а) изохорический; б) изобарический; в) изотермический процесс идеального газа. Эти же процессы изобразить на диаграммах (V,T) и (P,T).

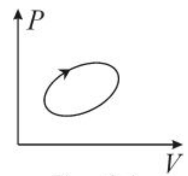


Рис.4.1

4.24. На диаграмме (P,V) (рис.4.1) изображен циклический процесс, осуществляемый с некоторым количеством идеального газа. Определить построением состояния А и Б, в которых температура газа T минимальна и максимальна. Определить участки, на которых температура растет и убывает.

4.25.* Найти максимально возможную температуру идеального газа в каждом из нижеследующих процессов: а) $P = P_0 - \alpha V^2$; б) $P = P_0 \exp(-\beta V)$, где P_0, α и β – положительные постоянные. Число ν молей газа считать известным.

4.26.* Определить наименьшее возможное давление одного моля идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные.

4.27. Вычислить плотность ρ воздуха при температуре T = 273 К и давлении $P = 10^5$ Па. Молярная масса воздуха M = 29 г/моль.

4.28. В баллоне вместимостью $V = 15$ л находится азот под давлением P_1=100 кПа при температуре $t_1 = 27^{\text{O}}$ С. После того как из баллона выпустили часть азота массой $\Delta m = 14$ г, температура газа понизилась до $t_2 = 17^{\circ}$ С. Определить соответствующее давление P_2 азота, оставшегося в баллоне.

4.29. В сосуде объемом V = 30л содержится идеальный газ при температуре $t = 0^{\circ}$ С. После того как часть газа была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на ΔP = 0,78 атм (без изменения температуры). Найти массу Δm выпущенного газа. Плотность данного газа при нормальных условиях ρ = 1,3 г/л.

4.30*П. В баллоне объемом $V = 7{,}5$ л при температуре $T = 300$ К находится смесь идеальных газов: $\nu_1 = 0{,}1$ моля кислорода, $\nu_2 = 0{,}2$ моля азота и $\nu_3 = 0{,}3$ моля углекислого газа. Считая газы идеальными, найти: а) давление смеси; б) среднюю молярную массу M смеси, которая входит в уравнение ее состояния $PV = \frac{m}{M}RT$, где m – масса смеси.

4.31. Определить плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К и давлении $P = 0{,}1$ МПа. Газы считать идеальными.

4.32. Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит смесь водорода и азота при температуре $T = 290$ К и давлении $P = 1$ МПа. определить массу m_1 водорода, если масса смеси $m = 150$ г.

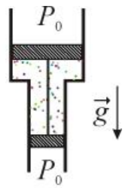


Рис.4.2

4.33.* Температура между двумя оконными рамами изменяется по линейному закону от T_1 до $T_2 > T_1$. Площадь окна равна S, расстояние между рамами l, молярная масса воздуха M. Определить массу m воздуха, заключенного между рамами при атмосферном давлении P_0.

4.34.* В гладкой открытой с обоих концов вертикальной трубе, имеющей два разных сечения (рис.4.2), находятся два поршня, соединенные нерастяжимой нитью, а между поршнями – один моль идеального газа. Площадь сечения верхнего поршня на $\Delta S = 10$ см^2 больше, чем нижнего. Общая масса поршней $m = 5$ кг. Давление наружного воздуха $P_0 =$ 1,0 атм. На сколько кельвин надо нагреть газ между поршнями, чтобы они переместились на $l = 5$ см?

4.35.* Ротационный насос захватывает за один оборот объем газа ΔV и выталкивает его в атмосферу. Сколько оборотов N должен сделать насос, чтобы понизить давление воздуха в сосуде объема V от значения P_0 до P? Равновесное давление в сосуде успевает устанавливаться за время, меньшее, чем период оборота насоса.

4.36.* Насос, подключенный к сосуду объемом V, удаляет из сосуда за время dt объем газа $dV = Cdt$. (Константу C называют скоростью откачки.) Считая, что во время откачки давление газа во всех точках сосуда одинаково, найти закон $P(t)$, по которому изменяется давление газа в сосуде. Начальное давление P_0. Газ идеальный.

4.37.* Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, определить, сколько времени τ потребуется, чтобы с помощью насоса, имеющего скорость откачки C =1,00 л/с, снизить в сосуде объемом $V = 10{,}0$ л давление от $P_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па до $P = 0{,}300$ Па.

4.38*П Какому давлению необходимо подвергнуть углекислый газ при температуре $T = 300$ К, чтобы его плотность оказалась равной $\rho = 500$ г/л? Расчет провести как для идеального газа, так и для ван-дер-ваальсовского. Значения постоянных a и b для углекислого газа: a = 0,367 Па·м^6/моль^2, $b = 43 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль.

4.39.* Выразить постоянные a и b ван-дер-ваальсовского газа через значения $P_{кр}$ и $T_{кр}$ для этого газа.

4.40.* Атмосфера Венеры почти целиком состоит из углекислого газа. На поверхности планеты плотность газа $\rho = 0{,}07$ г/см^3, его температура $T = 750$ К. Найти давление P газа. Газ считать ван-дер-ваальсовским с параметрами $P_{кр} = 73$ атм, $V_{M\,кр} = 94$ см^3/моль

4.3. Первое начало термодинамики

Основные определения

✓ Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A, \tag{4.3а}$$

где Q − тепло, полученное телом (системой), ΔU − приращение внутренней энергии тела, A − работа, произведенная телом. В адиабатическом процессе на любом этапе $dQ = 0$.

✓ Уравнение адиабатического процесса для идеального газа

$$PV^{\gamma} = \text{const}, \tag{4.3б}$$

где $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$ – адиабатическая постоянная, $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$ – полное число степеней свободы молекул газа, $i_{\text{кол}}$ – число типов колебаний (колебательных мод) атомов в молекулах.

✓ Работа, совершенная газом,

$$A = \int PdV \,. \tag{4.3в}$$

✓ Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT \,, \tag{4.3г}$$

где N и $\langle\varepsilon\rangle$ – число молекул и средняя энергия молекул соответственно.

✓ Теплоемкость тела в произвольном процессе $C = dQ/dT$; удельная теплоемкость $c = C/m$; молярная теплоемкость $C_M = C\,M/m$.

✓ Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно:

$$C_{VM} = dU/dT = \frac{i}{2}R = \frac{R}{\gamma - 1}, \qquad C_{PM} = C_{VM} + R = \gamma C_{VM} \,, \tag{4.3д}$$

✓ Молярная внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа:

$$U = C_{VM}T - a/V_M \,. \tag{4.3е}$$

4.41. Вычислить работу, совершаемую идеальным газом в каждом из процессов (а,б,в,г), изображенных на диаграмме (рис.4.3). Значения параметров P_0 и V_0 считать известными.

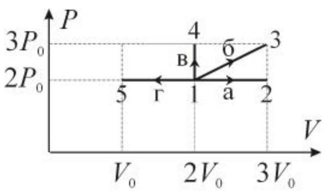


Рис.4.3

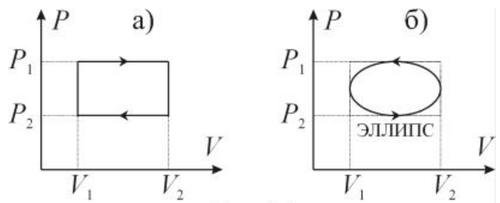


Рис.4.4

4.42. Для каждого из процессов, изображенных на рисунке 4.3, вычислить приращение внутренней энергии ΔU и теплоту Q, полученную газом. Количество газа $\nu = 1$ моль. Считать, что газ состоит из жестких двухатомных молекул ($i = 5$).

4.43. На диаграмме (P,V) (рис.4.4, а, б) изображены циклические процессы. В каждом из этих процессов вычислить теплоту, получаемую рабочим телом за один цикл.

4.44. Кислород O_2 в количестве $m = 1$ кг находится при температуре $T = 320$ К. Определить: а) внутреннюю энергию молекул газа; б) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул. Газ считать идеальным.

4.45. Кислород в количестве $m = 32$ г находится в закрытом сосуде при температуре $T_1 = 290$ К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определить: а) температуру T_2, до которой нагрели газ; б) количество теплоты Q, сообщенное газу.

4.46. Азот N_2 в количестве $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $P = 1{,}0$ МПа; при этом было затрачено $Q = 5$ кДж теплоты. Определить: а) работу расширения A; б) конечный объем газа V_2. Начальная температура азота $T_1 = 290$ К.

4.47. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T = 72$ К, сообщив ему количество тепла $Q = 1{,}6$ кДж. Найти: а) приращение его внутренней энергии ΔU ; б) величину адиабатической постоянной $\gamma = C_P/C_V$.

4.48. В закрытом сосуде находится смесь азота и кислорода, массы которых равны $m_1 = 56$ г и $m_2 = 64$ г соответственно. Определить изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на $\Delta t = 20^{\text{O}}$ С.

4.49.* Кислород массой $m = 64$ г расширяется изотермически при $T = 300$ К от объема $V_1 = 10$ л до $V_2 = 40$ л. Чему равны работа A, совершенная газом в этом процессе, и тепло Q, переданное газу?

4.50.* Некоторый газ в количестве $m = 1$ кг находится при температуре $T = 300$ К и под давлением $P_1 = 0{,}5$ МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа A, совершенная при этом внешними телами, равна 432,0 Дж. Определить молярную массу M газа.

4.51.* На диаграмме (P,V) изобразить для одного и того же количества двухатомного газа процессы: а) изотермического и б) адиабатического расширения из состояния (P_1, V_1) до состояния с объемом $V_2 = 2V_1$. Во сколько раз работа газа A_1 при изотермическом расширении больше, чем работа A_2 при адиабатическом расширении?

4.52.* В результате адиабатического расширения температура азота массой $m = 1{,}00$ кг понижается на $\Delta T = 20$ К. Определить работу A, совершаемую газом при расширении.

4.53.* Гелий He массой $m =$ 321 г, находившийся первоначально при температуре $T_1 = 293$ К и давлении $P_1 = 1.00 \cdot 10^5$ Па, сжимают адиабатически до давления $P_2 = 1.00 \cdot 10^7$ Па. Определить: а) температуру газа T_2 в конце сжатия; б) работу A, совершаемую газом при расширении; в) во сколько раз уменьшился объем газа. Адиабатическая постоянная для гелия $\gamma = 5/3$.

4.54.* Объем одного моля двухатомного идеального газа увеличивается от V_1 до $V_2 = 2V_1$; при этом давление изменяется по закону: а) $P = P_1\left(\dfrac{V_1}{V}\right)^{0,5}$; б) $P = P_1\left(\dfrac{V_1}{V}\right)^{2}$. Вычислить для каждого из этих процессов работу A газа, приращение внутренней энергии ΔU и теплоту Q, полученную газом. Параметры P_1 и V_1 считать известными.

4.55. Найти число i степеней свободы (включая колебательные) для молекул: а) He; б) N_2; в) CO_2; г) H_2O; д) CH_4.

4.56. Вычислить молярные теплоемкости C_{VM} и C_{PM} (выразить их через R) для идеального газа с а) одноатомными молекулами; б) двухатомными жесткими молекулами; в) двухатомными упругими молекулами; г) трехатомными жесткими молекулами, атомы которых не лежат на одной прямой; д) трехатомными упругими молекулами, атомы которых не лежат на одной прямой.

4.57. Из скольких атомов состоят молекулы газа, если при «замораживании» колебательных степеней свободы адиабатическая постоянная γ увеличивается в 1,2 раза?

4.58.* Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_P для газовой смеси, состоящей из $m_1 = 7{,}0$ г азота и $m_2 = 20$ г аргона. Газы идеальные. Молекулы азота – жесткие.

4.59.* Определить (выразить через R) молярную теплоемкость идеального газа, состоящего из жестких двухатомных молекул и расширяющегося по закону $P = \alpha V$, где α – произвольная положительная постоянная.

4.60*П. Получить выражение для молярной теплоемкости идеального газа, участвующего в политропическом процессе $P = \text{const} \times V^{-n}$ (n – показатель политропы). Молярную теплоемкость газа при постоянном объеме C_{VM} считать известной.

4.61.* Молярная теплоемкость идеального газа при некотором политропическом процессе равна $C_M = C_{VM} + 0{,}1R$. Определить показатель политропы этого процесса.

4.62.* Определить молярную теплоемкость идеального газа, расширяющегося в политропическом процессе с показателем $n = 1 + \dfrac{R}{2C_{VM}}$.

Здесь C_{VM} – молярная теплоемкость данного газа при постоянном объеме. Изобразить этот процесс на диаграмме (P,V); на этой же диаграмме изобразить процессы адиабатического и изотермического расширения. Провести анализ полученного результата.

4.63*П. Два моля ван-дер-ваальсовского газа изотермически расширяются от объема V_1 до объема V_2. Определить: а) работу A, совершаемую газом; б) изменение его внутренней энергии ΔU;
в) минимальное количество тепловой энергии Q, необходимое для реализации этого процесса. Температуру газа T, а также постоянные Ван-дер-Ваальса a и b считать известными.

4.64.* Получить для одного моля ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V_M и T, а также в переменных V_M и P.

4.65.* Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_{PM} - C_{VM}$. Параметры a, b, V_M, T и R считать известными.

4.66.* Вычислить разность $C_{PM} - C_{VM}$ молярных теплоемкостей: а) для азота, если его молярный объем V_M =1,00 л, а температура $t = -100^{\circ}$ С; б) для кислорода при $P = 5{,}00 \cdot 10^7$ Па и $T = 273$ К. При этих условиях моль кислорода занимает объем $V_M = 0{,}564 \cdot 10^{-4}$ м^3. Принять значения постоянной Ван-дер-Ваальса: для азота a =0,135 Па·м^6/моль^2, для кислорода a = 0,136 Па·м^6/моль^2.

4.4. Энтропия. Второе начало термодинамики

Основные определения

✓ К.п.д. тепловой машины

$$\eta = A/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1 \,, \qquad (4.4а)$$

где Q_1 − тепло, полученное телом от внешнего источника (нагревателя), Q_2 − тепло, отдаваемое телом холодильнику, A − работа, произведенная телом за один цикл.

✓ К.п.д. цикла Карно:

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1 \,, \qquad (4.4б)$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника, соответственно.

✓ Приращение энтропии системы

$$\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T} \,. \qquad (4.4в)$$

✓ В случае обратимого процесса

$$dS = \frac{dQ}{T} \;\text{ и }\; \Delta S = \int \frac{dQ}{T} \,. \qquad (4.4г)$$

✓ Приращение энтропии при плавлении и парообразовании вещества массы m

$$\Delta S_{\text{пл}} = \frac{\lambda m}{T_{\text{пл}}} \;\text{ и }\; \Delta S_{\text{пар}} = \frac{rm}{T_{\text{пар}}} \,, \qquad (4.4д)$$

где λ и r – удельные теплоты плавления и парообразования вещества.

✓ Основное уравнение термодинамики (для обратимых процессов)

$$dQ = TdS = dU + PdV \,. \qquad (4.4е)$$

✓ Статистическое определение энтропии

$$S = k_{\text{Б}} \ln \Omega \,, \qquad (4.4ж)$$

где Ω – статистический вес (термодинамическая вероятность) данного состояния.

4.67. Идеальный газ совершает цикл Карно. Изобразить качественно этот цикл на диаграммах: а) (P,V); б) (T,V); в) (T,P).

4.68. Известна работа A, совершаемая идеальной тепловой машиной за цикл, а также температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2. Определить: а) тепло Q_1, полученное рабочим телом от нагревателя; б) тепло Q_2, полученное холодильником от рабочего тела.

4.69.* Один моль идеального газа, состоящего из жестких двухатомных молекул, совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К. Найти к.п.д. цикла, если при адиабатическом сжатии над газом совершается работа $A = 2{,}00$ кДж.

4.70.* Тепловая машина работает по циклу Карно, к.п.д. которого $\eta = 0{,}25$. Чему равен холодильный коэффициент η' этой машины, когда она совершает тот же цикл в обратном направлении? Холодильным коэффициентом называется отношение количества теплоты, отнятого от охлаждаемого тела, к работе двигателя, приводящего в движение машину.

4.71.* Тепловая машина работает по обратимому циклу, изображенному на рис. 4.5. Рабочее тело – идеальный газ, число степеней свободы молекул которого $i = 7$. Определить к.п.д. этого цикла η_1 и сравнить его с к.п.д. η_2 цикла Карно, работающего в том же интервале температур.

4.72.* Идеальный газ, расширяясь изотермически при $T = 400$ К, совершает работу $A = 800$ Дж. Вычислить приращение энтропии газа.

4.73.* Энтропия моля кислорода при температуре $t = 25^{\text{O}}$ С и давлении $P = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па равна $S_1 = 204{,}8$ Дж/моль·К. В результате обратимого изотермического расширения объем, занимаемый газом, увеличился в два раза. Определить энтропию S_2 кислорода в конечном состоянии.

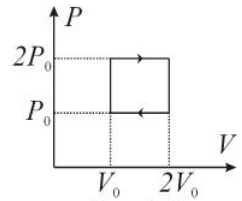


Рис.4.5

4.74.* Найти приращение энтропии ΔS моля одноатомного идеального газа при нагревании его от 0 до 273^{O} С в случае, если нагревание происходит: а) при постоянном объеме; б) при постоянном давлении.

4.75.* В ходе изотермического процесса, протекающего при температуре $T = 350$ К, тело совершает работу $A = 80$ Дж, а внутренняя энергия получает приращение $\Delta U = 7{,}5$ Дж. Вычислить приращение энтропии тела.

4.76.* Теплоемкость C идеального газа, участвующего в политропическом процессе $P = \text{const} \times V^{-n}$, как известно (см. задачу 4.60), не зависит от объема газа и является функцией показателя политропы: $C = C(n)$. Считая эту величину, а также начальную температуру газа T_0 известными, получить уравнение обратимого политропического процесса в координатах (T,S) и изобразить его на диаграмме (T,S).

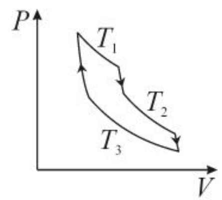


Рис.4.6

4.77*П. Идеальный газ совершает обратимый цикл, состоящий из чередующихся изотерм и адиабат (рис.4.6). Найти к.п.д. такого цикла, если при каждом изотермическом расширении объем газа увеличивается в одно и то же число раз.

4.78.* Холодильная машина работает по обратному циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27^{\text{O}}$ С и $t_2 = -3^{\text{O}}$ С. Рабочим телом служит газообразный азот $(\gamma = 1{,}4)$ массой $m = 0{,}2$ кг. Найти: а) количество теплоты Q_2, отбираемое от охлаждаемого тела и б) работу A внешних сил за один цикл, если отношение n максимального объема газа к минимальному равно 5.

4.79.* Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изобарного, адиабатного и изотермического процессов. При изобарном процессе рабочее тело – идеальный газ нагревается от температуры $T_1 = 200$ К до $T_2 = 500$ К. Определить к.п.д. этого цикла η_1 и сравнить его с к.п.д. η_2 цикла Карно, работающего в том же интервале температур.

4.80.* Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы, политропы с произвольным показателем n и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Определить к.п.д. этого цикла, если температура газа на адиабатическом участке увеличивается в τ раз.

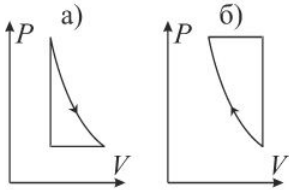


Рис.4.7

4.81.* Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из адиабаты, изобары и изохоры. Найти к.п.д. цикла, если на его адиабатическом участке объем идеального газа: а) увеличивается в τ раз (рис.4.7,*а*); б) уменьшается в τ раз (рис.4.7,*б*).

4.82.* В ограниченном интервале температур приращение энтропии некоторого вещества оказалось пропорциональным приращению температуры: $\Delta S = \alpha \Delta T$, где α – положительная постоянная. Как зависит от температуры теплоемкость C вещества в том же интервале температур?

4.83.* Один моль идеального газа с известным значением теплоемкости C_{VM} совершает процесс, при котором его энтропия S зависит от температуры T как $S = \alpha/T$, где α - положительная постоянная. В этом процессе температура газа изменилась от T_1 до T_2. Найти: а) молярную теплоемкость газа как функцию T; б) количество теплоты, сообщенное газу в процессе.

4.84.* Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает обратимый процесс, в котором давление изменяется по закону $P = P_0 - \alpha V$, где P_0 и α – положительные постоянные, V – объем газа. При каком значении объема газа $V_{\text{макс}}$ энтропия окажется максимальной?

4.85.* Найти приращение энтропии ΔS при превращении массы $m = 200$ г льда, находившегося при температуре $t_1 = -10{,}7^{\text{O}}$ С в воду при температуре $t_2 = 0{,}0^{\text{O}}$ С. Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/кг·К; удельная теплота плавления льда $\lambda = 333 \cdot 10^3$ Дж/кг.

4.86.* Найти приращение энтропии ΔS при конденсации массы $m = 1{,}00$ кг пара, находившегося при температуре $t_1 = 100^{\text{O}}$ С в воду и последующем охлаждении воды до температуры $t_2 = 20^{\text{O}}$ С. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/кг·К; удельная теплота парообразования воды $r = 2250 \cdot 10^3$ Дж/кг.

4.87.* В сосуде содержится $N = 5$ молекул. Определить: а) число вариантов распределения этих молекул между левой и правой половинами сосуда; б) статистический вес Ω_n – число вариантов такого распределения, при котором в левой половине сосуда окажется n молекул; в) вероятность w_n того, что в левой половине соберется n молекул. Построить график зависимости w_n от n.

4.88.* Макроскопическая система состоит из трех макроскопических подсистем со статистическими весами Ω_1, Ω_2 и Ω_3. Чему равен статистический вес Ω и энтропия S всей системы? Взаимодействием между подсистемами можно пренебречь. Проанализировать полученный результат.

4.89.* Статистический вес состояния некоторой массы газа равен Ω_1. Определить статистический вес Ω_2 состояния такого же газа, масса которого в η раз больше. Давление и температура обеих порций газа одинаковы.

4.90.* Некоторая термодинамическая система перешла из состояния 1 в состояние 2, статистический вес которого больше предыдущего в два раза. Чему равно приращение энтропии системы ΔS_{12}?

4.91.* Энтропию моля водорода при нормальных условиях можно считать равной $S_M = 130$ Дж/моль·К. Определить статистический вес Ω: а) одного моля; б) двух молей водорода при указанных условиях.

4.92*П. Определить, во сколько раз увеличивается статистический вес моля воды при ее переходе из жидкого в парообразное состояние при температуре T = 373 К. Удельная теплота парообразования воды $r = 2250 \cdot 10^3$ Дж/кг.

4.93.* Как изменится статистический вес одноатомного идеального газа при: а) изотермическом увеличении его объема в $\eta = 2$ раза; б) изохорическом увеличении его температуры в $\eta = 2$ раза; в) политропическом ($TV^{3/4} = \text{const}$) увеличении его объема в $\eta = 2$ раза? Число молекул в газе равно N.

4.94.* Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие. В одной половине содержится $m = 10{,}0$ г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Отверстие в перегородке открывают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение энтропии. Является ли этот процесс обратимым?

4.95.* В двух сосудах одного и того же объема находятся различные идеальные газы. Их массы равны m_1 и m_2, а молярные массы – M_1 и M_2. Давление и температура газов одинаковы. Сосуды соединяют, и начинается процесс диффузии (взаимоперемешивания молекул). Определить изменение энтропии рассматриваемой системы после того, как газы полностью перемешаются.

4.96.* Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две части так, что объем одной из них в $\tau = 2$ раза больше объема другой. В меньшей части находится $\nu_1 = 0{,}3$ моля азота, в большей части $\nu_2 = 0{,}7$ моля кислорода. Температура газов одинакова. В перегородке открыли отверстие и газы перемешались. Найти приращение энтропии системы, считая газы идеальными.

4.97.* Два одинаковых теплоизолированных сосуда, соединенные трубкой с краном, содержат по одному молю одного и того же идеального газа. Температура газа в одном сосуде T_1, в другом T_2, Молярная теплоемкость газа C_{VM} известна. После открывания крана газ пришел в новое состояние равновесия. Найти приращение энтропии газа. Проанализировать полученный результат.

4.5. Примеры решения задач

Задача 4.7

1. Рассмотрим задачу в системе отсчета, связанной с одной из молекул газа. В этой системе отсчета избранная молекула неподвижна (она помечена на рис.4.8 цифрой 1), а величина средней скорости остальных молекул $\langle u_{\text{отн}} \rangle = \langle u \rangle \sqrt{2}$, где $\langle u \rangle -$ средняя скорость молекул газа в лабораторной системе отсчета (здесь мы воспользовались результатом решения задачи 4.6).

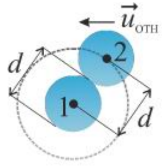


Рис.4.8

2. Будем считать, что столкновение между молекулами состоялось, если расстояние между центрами молекул достигло минимального допустимого значения, равного эффективному диаметру молекул d (рис.4.8). Налетающая молекула рассеивается (испытывает столкновение), если ее центр (точка 2 на рис. 4.8) достигает поверхности сферы радиусом d, изображенной на рисунке пунктиром. Таким образом, задача сводится к вычислению частоты ν столкновений молекул, концентрация которых n, а средняя скорость $\langle u \rangle \sqrt{2}$ с неподвижной сферой радиусом d; площадь этой сферы $S = 4\pi d^2$.

3. Из формулы (4.1г) следует: $\nu = \dfrac{n\langle u \rangle \sqrt{2}}{4} S = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle u \rangle$. Среднее время между столкновениями по определению равно $\tau = 1/\nu$. Учитывая, что газ идеальный и (в соответствии с уравнением состояния), концентрация молекул $n = P/k_Б T$, ответ можно представить в виде $\tau = \dfrac{k_Б T}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 P \langle u \rangle}$.

4. Длиной свободного пробега λ называют среднее расстояние, которое преодолевают молекулы за время τ: $\lambda = \langle u \rangle \tau$.

5. Для вычисления $\langle u \rangle$ используем формулу (4.1ж): $\langle u \rangle = \sqrt{\dfrac{8k_Б T}{\pi m_0}}$;

в результате получим окончательно:

а) $\tau = \dfrac{\sqrt{k_Б T m_0}}{4\sqrt{\pi} d^2 P}$; б) $\lambda = \tau \langle u \rangle = \dfrac{k_Б T}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$.

Задача 4.13

1. График функции $f_1(u_x) = (m_0/2\pi k_Б T)^{1/2} \exp(-m_0 u_x^2 / 2k_Б T)$ изображен на рис. 4.9. С помощью этой функции можно вычислить вероятность того, что проекция скорости молекулы, принадлежащей равновесному газу, находится в интервале значений от u_x до $u_x + du_x$. По определению эта вероятность $dw = f_1(u_x)du_x$.

2. Если рассматривать бесконечно малый интервал ($du_x \Rightarrow 0$), соответствующая вероятность dw также мала, поскольку численно приближается к площади прямоугольника со сторонами $f_1(u_x)$ и du_x.

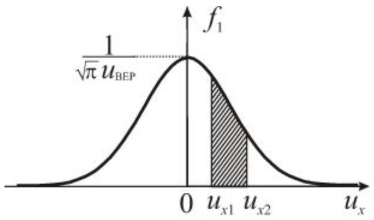


Рис.4.9

3. Вероятность того, что проекция скорости молекулы принимает значения от u_{x1} до u_{X2}, может быть вычислена путем суммирования (интегрирования) всех соответствующих бесконечно малых величин dw:

$$w_{12} = \int_{u_{X1}}^{u_{X2}} f_1(u_x)du_x. \qquad (*)$$

Численно эта вероятность равна площади заштрихованной фигуры на рис. 4.9; ее статистический смысл – доля молекул, обладающих значениями u_x, принадлежащими интервалу: $u_{x1} < u_x < u_{x2}$. Чем шире этот интервал, тем больше соответствующая доля молекул w_{12}. Для предельно допустимого (и мыслимого) интервала $-\infty < u_x < +\infty$ эта доля, очевидно, принимает свое предельно допустимое (и мыслимое) значение:

$$w_{\text{макс}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u_x)du_x = 1. \qquad (**)$$

4. Из этого утверждения следует, что площадь всей фигуры, заключенной между колоколообразной (рис.4.9) функцией распределения $f_1(u_x)$ и осью абсцисс должна быть равна единице; впрочем это легко проверяется путем вычисления интеграла (**).

Вообще, интеграл от функции распределения какой-либо величины по всему диапазону допустимых значений этой величины должен быть

равен единице* – говорят, что эта функция «нормирована на единицу». Итак, функция распределения $f_1(u_x)$ нормирована на единицу. С помощью этой функции можно вычислять средние значения физических величин, зависящих от u_x. Например, средний квадрат проекции скорости

$$\left\langle u_x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_1(u_x)du_x = \frac{k_Б T}{m_0}.$$

5. Точно так же вычисляются (через $f_1(u_y)$ и $f_1(u_z)$) средние квадраты двух других проекций скорости, поэтому

$$\left\langle u^2 \right\rangle = \left\langle u_x^2 \right\rangle + \left\langle u_y^2 \right\rangle + \left\langle u_z^2 \right\rangle = 3\left\langle u_x^2 \right\rangle = 3\frac{k_Б T}{m_0}$$ – (ср. с формулой 4.1ж).

Задача 4.30

Поскольку газы идеальные и находятся в равновесии друг с другом и со стенками сосуда, можно сделать определенные выводы о значениях параметров состояния.

1. Молекулы данного сорта, например молекулы кислорода, занимают весь баллон и не мешают делать то же самое молекулам азота и углекислого газа – ведь их можно, по определению, рассматривать, как невзаимодействующие друг с другом! Таким образом, объем каждой из компонент равен объему сосуда: $V_1 = V_2 = V_3 = V$.

2. Молекулы разных сортов, не взаимодействуя между собой, тем не менее, взаимодействуют, со стенками сосуда. Если они находятся в состояния равновесия с этими стенками, то из этого следует, что температура каждой компоненты равна температуре баллона: $T_1 = T_2 = T_3 = T$.

3. Из сказанного следует, что парциальное давление каждой компоненты смеси можно определить, записав соответствующее уравнение состояния в виде: $P_1 V = \nu_1 RT$, $P_2 V = \nu_2 RT$, $P_3 V = \nu_3 RT$,

где P_1, P_2 и P_3 – парциальные давления кислорода, азота и углекислого газа соответственно, V и T – объем и температура баллона. Сложив эти уравнения и воспользовавшись законом Дальтона (4.2б), по которому давление смеси $P = P_1 + P_2 + P_3$, получим $PV = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT$, или

$$P = \frac{RT}{V}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3). \qquad (*)$$

---

* Это верно только для систем частиц, подчиняющихся законам классической механики. Более универсальные варианты нормировки рассматриваются в дисциплине «Квантовая механика».

4. Сравнив уравнение (*) с уравнением состояния, выраженным через массу смеси m и среднюю молярную массу M :

$$P = \frac{mRT}{MV}, \qquad (**)$$

получим следующее соотношение: $m/M = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Массу смеси можно выразить через молярные массы и количество молей компонент: $m = \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3$, поэтому $M = \dfrac{M_1\nu_1 + M_2\nu_2 + M_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}$.

Ответ: а) $P = \dfrac{RT}{V}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) = 0{,}2$ МПа;

б) $M = \dfrac{M_1\nu_1 + M_2\nu_2 + M_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 36{,}7$ г/моль.

Задача 4.38

1. Если бы во всем диапазоне давлений и температур газ оставался идеальным, тогда для вычисления его давления следовало бы воспользоваться уравнением Менделеева – Клапейрона (4.2а). Будучи выражено через плотность газа $\rho = \dfrac{m}{V}$, оно принимает вид $P = P_{\text{ид}} = \dfrac{\rho RT}{M}$. Подстановка численных значений параметров дает: $P_{\text{ид}} = \dfrac{\rho RT}{M} \cong 280 \cdot 10^5$ Па.

2. В случае, если газ является ван-дер-ваальсовским, необходимо пользоваться уравнением состояния в виде (4.2в). Поскольку $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{\nu M}{V}$, выполним в (4.2в) подстановку $\dfrac{V}{\nu} = \dfrac{M}{\rho}$ и после тривиальных преобразований получим $P = P_{\text{ВдВ}} = \dfrac{\rho RT}{M - \rho b} - \dfrac{a\rho^2}{M^2} \cong 80 \cdot 10^5$ Па.

3. Столь существенное различие результатов, полученных для одной и той же величины (давления) доказывает, что газ, описанный в условии задачи, нельзя считать идеальным; расстояния между молекулами столь малы, что весьма существенными становятся размеры молекул и эффект межмолекулярного притяжения. Поэтому вкладом ван-дер-ваальсовских добавок к объему (νb) и давлению ($-\dfrac{a\rho^2}{M^2}$) пренебречь нельзя.

Задача 4.60

Будем считать процесс квазиравновесным, то есть протекающим достаточно медленно – так, что повсюду в сосуде сразу вслед за изменениями объема V успевают устанавливаться равновесные значения температуры T и давления P. Тогда основное уравнение термодинамики (4.4е) принимает вид: $dQ = dU + PdV = \nu C_{VM}\,dT + PdV$, где ν – число молей газа. (Пока, без ограничения общности, будем считать, что число молей $\nu \neq 1$.)

1. Поскольку процесс квазиравновесный, то существует однозначная связь между приращением температуры dT и работой PdV, совершаемой газом. Чтобы установить эту связь, объединим уравнение состояния $PV = \nu RT$ с уравнением процесса в виде $PV^n = \text{const}$. Получаем, что температура и объем газа в процессе связаны соотношением $TV^{n-1} = \dfrac{\text{const}}{\nu R}$.

2. Поскольку правая часть этого выражения представляет собой константу, то дифференциал его левой части равен нулю: $V^{n-1}dT + (n-1)TV^{n-2}dV = 0$, откуда $dV = \dfrac{VdT}{(1-n)T}$, а элементарная работа $PdV = \dfrac{PVdT}{(1-n)T} = \dfrac{\nu RdT}{(1-n)}$.

3. Теперь, возвращаясь к первому началу термодинамики, получим: $dQ = \nu C_{VM}\,dT + \dfrac{\nu RdT}{(1-n)}$. По определению молярная теплоемкость процесса $C_M = dQ/\nu dT$; таким образом, окончательно

$$C_M = C_{VM} + \frac{R}{1-n}. \qquad (*)$$

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Изобарный процесс $P = \text{const}$. Этому случаю, очевидно, соответствует значение показателя политропы $n = 0$. Молярная теплоемкость при этом процессе, как следует из (*), равна $C_{PM} = C_{VM} + R$.

б) Адиабатический процесс $PV^\gamma = \text{const}$. Здесь $n = \gamma = C_{PM}/C_{VM}$; подстановка в (*) дает: $C_{SM} = C_{VM} + \dfrac{RC_{VM}}{C_{VM} - C_{PM}} = C_{VM} - C_{VM} = 0$. (Теплоемкость адиабатического процесса, естественно, равна нулю.)

в) Изотермический процесс $PV = \text{const}$, следовательно, $n = 1$. Формальная подстановка этого значения показателя политропы в (*) дает

$$C_{TM} = \lim_{n\to 1}\left(C_{VM} + \frac{R}{1-n}\right) = \infty .$$

г) Изохорный процесс ($V = \text{const}$). Его можно рассматривать, как предельный вариант политропного процесса при $n \to \infty$ (или при $n \to -\infty$). Нетрудно убедиться, что молярная теплоемкость изохорного процесса $C_M = \lim\limits_{n\to\pm\infty}\left(C_{VM} + \dfrac{R}{1-n}\right) = C_{VM}$, как и следовало ожидать.

В любом случае, теплоемкость политропного процесса является только функцией показателя политропы n и остается постоянной в течение всего процесса.

Задача 4.63

1. Работа, совершаемая газом, независимо от его природы, вычисляется по формуле (4.3в). Если газ является ван-дер-ваальсовским, это значит, что его давление определяется уравнением (4.2в). Поэтому работа газа A в условиях задачи при $\nu = 2$ вычисляется как

$$A = \int_{V_1}^{V_2}\left[\frac{2RT}{V-b} - 4\frac{a}{V^2}\right]dV = 2RT\ln\frac{V_2-2b}{V_1-2b} - 4a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Первое слагаемое весьма похоже на соответствующий результат для идеального газа (см., например, задачу 4.49); более того, совпадает с ним, если размерами молекул и, соответственно, параметром b можно пренебречь по сравнению с объемом V. Второе (отрицательное) слагаемое является следствием эффекта межмолекулярного притяжения между частицами реального газа.

2. Другим следствием эффекта межмолекулярного притяжения является то, что внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа зависит не только от температуры, но и от объема газа (4.3е). Поскольку мы рассматриваем изотермический процесс, первое слагаемое в (4.3е) остается постоянным. Таким образом, изменение внутренней энергии определяется изменением второго слагаемого:

$\Delta U = 2a\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right)$. Отметим, что при изотермическом расширении ван-дер-ваальсовского газа изменение его внутренней энергии $\Delta U > 0$.

3. Остается вычислить Q, используя первое начало термодинамики в виде (4.3а): $Q = \Delta U + A = 2RT\ln\left(\dfrac{V_2-2b}{V_1-2b}\right) - 2a\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right)$.

Ответ:

а) $A = 2RT\ln\left(\dfrac{V_2-2b}{V_1-2b}\right) - 4a\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right)$;

б) $\Delta U = 2a\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right)$; в) $Q = 2RT\ln\left(\dfrac{V_2-2b}{V_1-2b}\right) - 2a\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right)$.

Задача 4.77

1. Изобразим этот цикл на диаграмме (T,S), где изотермические участки цикла $(T = \text{const})$ отображаются горизонтальными отрезками ломаной, а адиабатические участки $(S = \text{const})$ – вертикальными отрезками (рис.4.10). Для вычисления к.п.д. необходимо определить теплоты Q_1 и Q_2. Поскольку все процессы обратимы, то, с учетом (4.4г), для каждого участка цикла справедливо равенство: $dQ = TdS$. Рабочее тело получает тепло от нагревателя на тех участках, где энтропия возрастает $(dS > 0)$, и возвращает тепло холодильнику на тех участках, где энтропия убывает $(dS < 0)$.

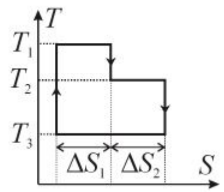


Рис.4.10

Величина полученного (либо отданного) тепла на участке dS численно равна площади прямоугольника со сторонами T и dS на диаграмме (T,S). В рассматриваемом цикле рабочее тело получает тепло на изотермических участках T_1 и T_2, а отдает – на изотермическом участке T_3. Итак, $Q_1 = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2$, $Q_2 = T_3(\Delta S_1 + \Delta S_2)$. Следовательно, к.п.д. в соответствии с определением (4.4а) равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_3(\Delta S_1 + \Delta S_2)}{T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2}.$$

2. Для определения ΔS_1 и ΔS_2 воспользуемся уравнением (4.4е). Поскольку газ – идеальный, а процесс – изотермический, это уравнение

принимает вид $TdS = PdV$. Из этого следует: $dS = P\frac{dV}{T} = \nu R\frac{dV}{V}$, где ν - число молей идеального газа, служащего рабочим телом.

3. Изменение энтропии газа на изотерме T_1 может быть вычислено путем интегрирования: $\Delta S = \int\limits_{V_1}^{V_2} dS = \nu R\int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \nu R\ln\frac{V_2}{V_1},$ где V_1 и V_2 - объемы, занимаемые газом в начале и в конце изотермического расширения. Таким образом, приращение энтропии газа в изотермическом процессе определяется отношением объемов, занимаемых газом в начале и в конце процесса. Так как, по условию, на изотерме T_2 объем газа увеличивается в такое же число раз, как и на изотерме T_1, мы можем сделать вывод, что соответствующие приращения энтропии равны между собой: $\Delta S_1 = \Delta S_2$, откуда, с учетом пункта 2, следует, что к.п.д. цикла равен $\eta = 1 - \frac{2T_3}{T_1 + T_2}$.

Задача 4.92

1. Поскольку процесс кипения по определению изотермический, уравнение (4.4г) принимает вид $\Delta S = \int\frac{dQ}{T} = \frac{\Delta Q_{\text{пар}}}{T} = \frac{rM}{T}$,

где M =18 г – масса выкипевшего моля воды.

2. С другой стороны, из определения (4.4ж) следует, что $\Delta S = S_2 - S_1 = k_Б(\ln\Omega_2 - \ln\Omega_1) = k_Б\ln\Omega_2/\Omega_1$. Таким образом, отношение статистических весов молекул воды в газообразном и жидком состояниях $\Omega_2/\Omega_1 = \exp\Delta S/k_Б = \exp rM/k_Б T = e^{\frac{2250\cdot 18}{373\cdot 1{,}38}\cdot 10^{23}} = 10^{3{,}42\cdot 10^{24}}$.

5. ОТВЕТЫ

1. Кинематика

1.1. $\Delta\vec{A} = -2\vec{A}, \left|\Delta\vec{A}\right| = 2A, \Delta A = 0.$

1.2. а) $\vec{B} = -\vec{A}$; б) построим сферу радиуса A с центром в начале вектора $\vec{A}$ – в качестве искомого вектора $\vec{B}$ можно выбрать любой вектор, проведённый из конца вектора $\vec{A}$ в произвольную точку сферы; в) векторы ортогональны друг к другу ($\vec{B}\perp\vec{A}$); г) построим сферу на векторе $\vec{A}$ как на диаметре. В качестве искомого вектора $\vec{B}$ можно выбрать любой вектор, проведенный из конца вектора $\vec{A}$ в произвольную точку сферы; д) $\vec{A}\uparrow\uparrow\vec{B}$; е) $\vec{A}\uparrow\downarrow\vec{B}$, причем $A > B$.

1.3. $A_l = A_x\cos\alpha + A_y\sin\alpha = 6{,}96$.

1.4. $\cos\alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right)}}$.

1.5. Траектория частицы представляет собой: а) луч, выходящий из начала координат; б) прямую, проходящую через начало координат; в) окружность радиуса r; г) прямую, параллельную оси Оx.

1.6. $\vec{V}_{2,1} = B\vec{e}_y - A\vec{e}_x$, $V_{2,1} = \sqrt{A^2 + B^2}$ **.**

1.7. а) V = 2,5м/с; б) $\alpha = \arcsin(4/5) \cong 53{,}1^0$; в) 45 м.

1.8. а) $\alpha \approx \frac{u}{V} = 0{,}1$ рад**;** б) $t_1 = \frac{2АБ}{\sqrt{V^2 - U^2}} \approx 402$ с;

в) $t_2 = \frac{2ВГ\cdot V}{V^2 - U^2} \approx 404$ с.

1.9. а) $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 1\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$; б) $\left|\Delta\vec{V}\right| = \sqrt{3}$ м/с;

в) $\Delta V = V_2 - V_1 = 1{,}6$ м/с.

1.10. $\left|\Delta\vec{V}\right| = 2V\cos\alpha$; $\Delta V = 0$; $\Delta V_z = 2V\cos\alpha$; $\Delta V_y = 0$.

1.11. а) $V_x = \dot{x} = B + 3Ct^2 = -2$ м/с, $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = 6Ct = -6$ м/с^2; б) $\Delta x = x_2 - x_1 = 4$ м; в) $\langle V_x\rangle = \Delta x/\Delta t = 2$ м/с; г) $\langle a_x\rangle = \Delta V/\Delta t = -3$ м/с^2.

1.12. а) $S = 500$ м, б) $\left|\Delta\vec{r}\right| = S = 500$ м. Траектория – прямая, расположенная в плоскости $z = 7$ м.

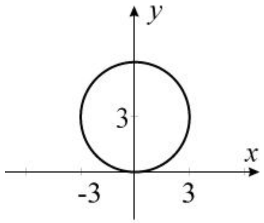


Рис. О.1

1.13. а) $\vec{V} = 2t\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$, $V = 5$м/с;

б) $\vec{a} = 2\vec{e}_x$, $a = 2$ м/с^2;

в) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}\vec{a}}{Va} = 0{,}8$;

г) $a_\tau = a\cos\alpha = 1{,}6$ м/с^2; $a_n = a\sin\alpha = 1{,}2$ м/с^2; д) $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} \approx 20{,}8$ м.

1.14. а) Уравнение траектории: $x^2 + (y-3)^2 = 9$ м^2; траектория представляет собой окружность радиусом $R = 3$ м (см. рис. О.1);

б) $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = -\dfrac{3\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi t}{5}\right)e_x + \dfrac{3\pi}{5}\cos\left(\dfrac{\pi t}{5}\right)\vec{e}_y$, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \dfrac{3\pi}{5}$ (частица равномерно движется по окружности с круговой частотой

$\omega = \dfrac{\pi}{5}$ рад/с);

в) $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} = -\dfrac{3\pi^2}{25}\cos\left(\dfrac{\pi t}{5}\right)\vec{e}_x - \dfrac{3\pi^2}{25}\sin\left(\dfrac{\pi t}{5}\right)\vec{e}_y$,

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 3\dfrac{\pi^2}{25} = \omega^2 R.$

1.15. а) $\left|\left\langle\vec{V}\right\rangle\right| = \dfrac{2V_0}{\pi}$; б) $\left|\left\langle\vec{a}\right\rangle\right| = \dfrac{2V_0^2}{\pi R}$; в) $\left\langle a\right\rangle = \dfrac{V_0^2}{R}$.

1.16. а) $\left\langle V\right\rangle = \dfrac{4\sqrt{2}}{\tau}R$; б) $\dfrac{4R}{\tau}$; в) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\tau}R$.

1.17. а) $\left\langle V\right\rangle = \dfrac{3\pi}{\tau}R \approx 4{,}7$ м/с; б) $\left|\left\langle\vec{V}\right\rangle\right| = \dfrac{2R}{\tau} = 1{,}0$ м/с;

в) $\left|\left\langle\vec{a}\right\rangle\right| = \dfrac{6\pi R}{\tau^2} \approx 0{,}94$ м/с^2.

1.18. См. рис. О.2. $\sin\alpha = \dfrac{V}{u}$, $АВ \ge L\dfrac{\sqrt{u^2 - V^2}}{V}$.

1.19. а) $t = 2{,}26$ с; б) $s = 33{,}9$ м; в) $V = 26{,}7$ м/с; г) $\alpha = 55^0 48'$.

1.20. $a_n \approx 8{,}2$ м/с^2, $a_\tau \approx 5{,}4$ м/с^2.

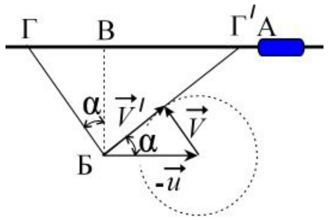


Рис. О.2

1.21. а) $\rho = \dfrac{V_0^2}{g\cos\theta}$;

б) $\rho = \dfrac{V_0^2\cos^2\theta}{g}$.

1.22. $\theta = \mathrm{arctg}4$.

1.23. $l = V_0 t\sqrt{2(1-\sin\theta)} = 22{,}0$ м.

1.24. $l = (V_1 + V_2)\dfrac{\sqrt{V_1V_2}}{g} = 2{,}47$ м.

1.25. $V_{мин} = \sqrt{g\left(H + \sqrt{L^2 + H^2}\right)} \approx 11{,}5$ м/с,

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{H + \sqrt{H^2 + L^2}}{L} = 1{,}25$, $\alpha = 51{,}34^{O}$.

1.26. Если высота стены $H \le \dfrac{lL}{l+L}$, $V_{мин} = \sqrt{g(l+L)}$. При этом $\alpha = 45^{O}$. В случае $H > \dfrac{lL}{l+L}$ минимальная скорость мины, попадающей в цель,

$V_{мин} = \sqrt{\dfrac{glL}{2H}\left[1 + \left(H\dfrac{l+L}{lL}\right)^2\right]}$; при этом $\alpha = \mathrm{arctg}\left(H\dfrac{l+L}{lL}\right) > 45^{O}$.

1.27. а) $\omega_{сут} = 7{,}27\cdot10^{-5}$ рад/с; б) $\omega_{ч} = 14{,}5\cdot10^{-5}$ рад/с; в) $\omega_{М} = 1{,}74\cdot10^{-3}$ рад/с; г) $\omega_{спутника} = 1{,}19\cdot10^{-3}$ рад/с; д) $V = 7{,}8$ км/с.

1.28. $V = 231{,}5$ м/с.

1.29. $R = 8{,}33$ см.

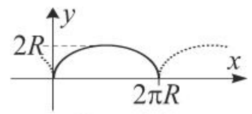


Рис. О3

1.30. $\beta = \dfrac{\omega^2}{4\pi N} = 3{,}2$ рад/с^2.

1.31. а) $t = 6{,}3$ с; б) $N = 9{,}4$ оборота.

1.32. а) $\omega = 14$ рад/с; б) $V = 1{,}4$ м/с; в) $\beta = 12$ рад/с^2; г) $a_\tau = 1{,}2$ м/с^2; д) $a_n = 19{,}6$ м/с^2.

1.33. а) $\left\langle\omega_z\right\rangle = 4$ рад/с; $\left\langle\beta_z\right\rangle = -6$ рад/с^2; б) $\beta_z = -12$ рад/с^2.

1.34. а) $\vec{V}_1 = V(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, $\vec{V}_2 = 2V\cdot\vec{e}_x$, $\vec{V}_3 = V(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$, $\vec{V}_4 = 0$;

б) $\vec{a}_1 = \dfrac{V^2}{R}\vec{e}_x$, $\vec{a}_2 = -\dfrac{V^2}{R}\vec{e}_y$, $\vec{a}_3 = -\dfrac{V^2}{R}\vec{e}_x$, $\vec{a}_4 = \dfrac{V^2}{R}\vec{e}_y$.

1.35. $x = Vt - R\sin\left(\dfrac{Vt}{R}\right)$, $y = R\left(1-\cos\left(\dfrac{Vt}{R}\right)\right)$. Траектория – циклоида (см. рис. О3). В точках этой траектории, где $y = y_{\max} = 2R$, радиус ее кривизны принимает значение $\rho = 4R$. Указание: радиус кривизны ρ вычисляется по алгоритму $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1.36. а) $\omega = V/R_1$; б) $V_{1x} = V\dfrac{R_1+R_2}{R_1}$; $V_{2x} = V\dfrac{R_1-R_2}{R_1} < 0$.

1.37. а) $\omega\dfrac{R-r}{r}$; б) $\omega\dfrac{R+r}{r}$.

1.38. $\Omega = \dfrac{\omega_2 R - \omega_1 r}{R-r} = 10\omega$.

1.39. а) $\omega(t) = t\sqrt{A^2+B^2t^2}$ =7,8 рад/с;

б) $\beta(t) = \sqrt{A^2+4B^2t^2}$ =1,3 рад/с^2;

в) $\cos\alpha = \dfrac{A^2+2B^2t^2}{\sqrt{(A^2+B^2t^2)(A^2+4B^2t^2)}} = 0{,}96$ ($\alpha \cong 17^{\circ}$).

1.40. Угол поворота $\varphi \approx 20{,}1$ рад. Тело вращается вокруг оси, лежащей в плоскости *x,y* и образующей с осью *x* угол $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \approx 63^{\circ}$. Ось вращения неподвижна, поскольку отношение $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ не зависит от времени.

1.41. а) $\vec{\Omega} = \omega\cos\omega' t\,\vec{e}_x + \omega\sin\omega' t\,\vec{e}_y + \omega'\vec{e}_z$,

$\vec{\beta} = \omega\omega'(\cos\omega' t\cdot\vec{e}_y - \sin\omega' t\cdot\vec{e}_x)$, $\Omega = \sqrt{\omega^2+\omega'^2}$, $\beta = \omega\omega'$;

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\omega'/\omega$; в) $\gamma = \pi/2$.

2. Динамика материальной точки

2.1. $\vec{a}_2 = -\vec{a}_1\dfrac{m_1}{m_2}$.

2.2. $F_{1x} = 1{,}6$ Н; $F_{2x} = -8$ Н; $t = 1{,}67$ с.

2.3. $\vec{N} =$ а) $-m\vec{g}$; б) 0; в) $-m(\vec{g}-\vec{a})$, $N = m(a+g)$.

2.4. $m_Б = 10$ кг. Указание: подъемная сила не зависит от наличия балласта.

2.5. а) $a_1 = a_2 = g\left|\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right|$; б) $P = gt\dfrac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)}$;

в) $F = \dfrac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$.

2.6. а) $\vec{a}_1 = (\vec{g}-\vec{a}_0)\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$; б) $\vec{F} = \dfrac{4m_1m_2(\vec{g}-\vec{a}_0)}{m_1+m_2}$.

2.7. $a_1 = g\dfrac{4m_1m_2 + m_0(m_1-m_2)}{4m_1m_2 + m_0(m_1+m_2)}$.

2.8. $a_1 = 2g\dfrac{|2m_1-m_2|}{4m_1+m_2}$, $a_2 = \dfrac{a_1}{2}$.

2.9. $T = F\dfrac{L-x}{L}$.

2.10. $F_Н = 624$ Н.

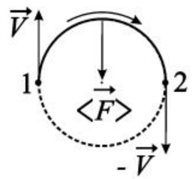


Рис.О.4

2.11. $\langle F\rangle = \dfrac{mV}{\Delta t} = 7{,}2$ кН.

2.12. $\Delta t = \dfrac{mV\sqrt{5}}{F}$.

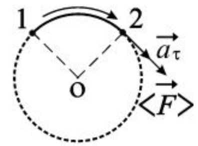


Рис.О.5

2.13. $\Delta t = \dfrac{P\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}$.

2.14. а) $a_1 = g\dfrac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_1+m_2\sin^2\alpha}$; б) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m_1+m_2}{m_1}\operatorname{tg}\alpha$.

2.15. а) $\left|\langle\vec{F}\rangle\right| = \dfrac{2mV^2}{\pi R}$ (см. рис. О.4); б) $\left\langle|\vec{F}|\right\rangle = F = \dfrac{mV^2}{R}$.

2.16. $F = \left|\left\langle \vec{F} \right\rangle\right| = ma_\tau$ (см. рис О.5).

2.17. $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \approx -800\left(\cos 20\pi t\vec{e}_x + \sin 20\pi t\vec{e}_y\right)$Н. Частица равномерно движется по окружности.

2.18. На частицу действует постоянная сила $\vec{F} = -2\vec{e}_x$ Н. Траектория частицы – парабола $x = -5/16 \cdot y^2$.

2.19. $l = R\left(1 - m\omega^2/k\right)$.

2.20. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$, $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

2.21. Если круговая частота вращения $\omega \le \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, устойчивому равновесию соответствует значение $\alpha = 0°$; если $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, это положение муфты становится неустойчивым. В этом случае устойчивое равновесие достигается при $\alpha = \arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 R}\right)$.

2.22. $\dfrac{x}{l} = \dfrac{m\omega^2}{k - m\omega^2}$. От направления вращения ответ не зависит.

2.23. а) $g = \dfrac{GM}{R^2} \approx 9{,}8$ м/с² (ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли); б) $g' = g\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 \approx 9{,}2$ м/с².

2.24. $g' = \dfrac{g}{1000} = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$ м/с².

2.25. $T = \dfrac{2\pi G M_C}{V^3} = 225$ суток.

2.26. $T_М = T_З\left(r_М/r_З\right)^{3/2} \approx 605$ земных суток.

2.27. а) $F_{тр} = 3$ Н; б) $F_{тр} = 0{,}4$ Н.

2.28. $F_{тр} = mg\sin\alpha$; сила направлена вверх по склону.

2.29. 0.83 с.

2.30. а) $F = \dfrac{gm_1m_2\left(\mu_1 - \mu_2\right)\cos\alpha}{m_1 + m_2}$;

б) $\alpha < \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\right)$.

2.31. $\mu = \left(\dfrac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\right)\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}16$.

2.32. $a = g\dfrac{1 - \mu}{1 + \mu}$.

2.33. $F = \left(2g - a'\right)\dfrac{mM}{m + M}$.

2.34. а) $\alpha = \operatorname{arctg}\mu$; б) $F_{миним} = \dfrac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

2.35. $\alpha = \operatorname{arctg}(1/\mu)$.

2.36. $F = 2\mu mg + (M + m)a = 25$ Н.

2.37. а) $\dfrac{m_1 g}{k}\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right)$; б) $\dfrac{m_1 m_2 g\cos\alpha\left(\mu_2 - \mu_1\right)}{k\left(m_1 + m_2\right)}$.

2.38. а) $a = g\dfrac{m_0 - \mu\left(m_1 + m_2\right)}{m_0 + m_1 + m_2}$; б) $T = \dfrac{m_0 m_2 g(1 + \mu)}{m_0 + m_1 + m_2}$.

2.39. а) $m_2/m_1 \ge \sin\alpha + \mu\cos\alpha$; б) $m_2/m_1 \le \sin\alpha - \mu\cos\alpha$. Если же отношение масс принимает значения в интервале $\sin\alpha + \mu\cos\alpha > m_2/m_1 > \sin\alpha - \mu\cos\alpha$, тела покоятся.

2.40. а) $V = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$; б) $S = \dfrac{m^2 g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$.

2.41. а) $t_0 = \dfrac{\mu m(m + M)g}{kM}$;

б) $a_1 = \begin{cases} \dfrac{kt}{m + M}, t \le t_0, \\ \dfrac{\mu mg}{M}, t \ge t_0; \end{cases}$; $a_2 = \begin{cases} \dfrac{kt}{m + M}, t \le t_0, \\ \dfrac{kt}{m} - \mu g, t \ge t_0. \end{cases}$ (см. рис. О.6).

2.42. а) $\vec{V} = \vec{b}\,\tau^3/6m$; б) $S = b\,\tau^4/12m$.

2.43. $t = \frac{m}{k}\ln 2 \approx 6{,}9$ с.

2.44. $t = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kV_0}{mg}\right) \approx 44$ с.

2.45. а) $V = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$; б) $a = \frac{m_0 F}{\left(m_0 + \mu t\right)^2}$.

2.46. Пуля отклонится к востоку на расстояние $l = \frac{\omega s^2\sqrt{3}}{2V} \approx 7$ см.

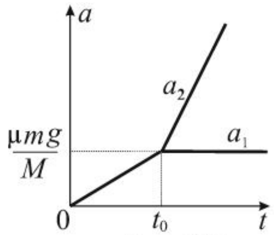


Рис. О.6

2.47. $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + \left(2\omega V'\right)^2}$

2.48. а) $FS\cos\alpha$;
б) $-\mu\left(mg - F\sin\alpha\right)S$; в) 0.

2.49. $A = mgl\frac{\left(\mu_1 + \mu_2\right)}{2}$.

2.50. Эти силы перпендикулярны скорости груза, поэтому мощность каждой из них равна нулю.

2.51. $N(t) = mt\left(2A^2t^2 + B^2\right)$.

2.52. $N_1 = 0{,}32$ Вт, $N_2 = 56$ Вт.

2.53. $A_{\text{тяжести}} = 0$. Сила тяжести консервативна.

2.54. $A_{\text{трения}} = -2\pi R\mu mg < 0$. Сила трения не является консервативной.

2.55. Работа этой силы $A_{\text{упр}} = -\int\limits_1^2 kxdx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$ зависит только от начальной и конечной координаты точки приложения силы (x_1 и x_2 соответственно). Следовательно, сила упругой деформации консервативна. Потенциальная энергия деформированной пружины $U(x) = \frac{kx^2}{2}$.

2.56. а) $\vec{F}(x,y,z) = B\left\{-\frac{1}{y}\vec{e}_x + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\vec{e}_y - \frac{y}{z^2}\vec{e}_z\right\}$;

б) $A_F = U_1 - U_2 = -\frac{B}{3}$.

2.57. а) $\vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r^4}\left(\frac{3a}{r} - 2b\right)$; б) $r_0 = \frac{3a}{2b}$.

2.58. а) $\vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r^3}\left(\frac{2a}{r} - b\right)$; б) $r_0 = \frac{2a}{b}$.

2.59. $A = m\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = -\frac{mV_1^2}{2}$.

2.60. $A = m\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = -\frac{3mV_1^2}{8}$.

2.61. $A = \int\limits_S FdS = \frac{m\alpha^4 t^2}{8}$.

2.62. $V = \sqrt{\frac{F_0}{m}\left(l_1 + 2l_2 + l_3\right)}$.

2.63. $A_{\text{сопр}} = mgh - \frac{mV^2}{2} = -10$ Дж.

2.64. $V_2 = \sqrt{2R_3 g} \cong 11{,}2\cdot 10^3$ м/с, (V_2 − вторая космическая скорость).

2.65. а) $U = -2T = -10$ ГДж; б) $E = U + T = -5$ ГДж.

2.66. $\langle F\rangle = \frac{mgR_3{}^2\Delta h}{4\pi N\left(R_3 + h\right)^3} \cong 1{,}1\cdot 10^{-3}$ Н. Указание: с помощью II закона Ньютона доказать, что механическая энергия станции $E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R_3 + h} = -\frac{GMm}{2\left(R_3 + h\right)}$.

2.67. $\frac{\Delta V}{V} \cong \frac{\Delta h}{2\left(R_3 + h\right)} \approx +7{,}6\cdot 10^{-4}$ %.

2.68. а) $A_{\text{тр}} = -mgh$; б) $A_{\text{рез}} = A_{\text{тр}} + A_{\text{тяжести}} = 0$;
в) $A = 2mgh$.

2.69. $A_F = mg\left(h + \mu l\right)$.

2.70. $V = \sqrt{4gh - \frac{2A}{m}}$.

2.71. $F = \mu g\left(m_1 + m_2/2\right)$.

2.72. $h = \dfrac{2mg}{k}$.

2.73. а) $a(\theta) = g\sqrt{1+3\cos^2\theta}$; б) $F(\theta) = 3mg\cos\theta$;
в) $F_1 = 3mg\cos\theta_1 = \sqrt{3}\cdot mg$; г) $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. У к а з а н и е: в пунктах «в» и «г» задания речь идет об одном и том же моменте времени.

2.74. $\theta = 2\mathrm{arctg}0{,}5$.

2.75. $h = H/2$, $S = H$.

2.76. $V = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$.

2.77. $x > \dfrac{3mg}{k}$.

2.78. $h = H\dfrac{1-\mu\mathrm{ctg}\alpha}{1+\mu\mathrm{ctg}\alpha} = 4$ м.

2.79. $A_{\text{ТР}} = mg\left(\dfrac{3}{2}h_2 - h_1\right) \approx -11$ мДж.

2.80. $h = 2R/3$. Если $V_0 = \sqrt{\dfrac{Rg}{3}}$, то $h = 7R/9$.

2.81. $V_{\text{макс}} = g(1-\mu)\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$.

2.82. В течение последнего 11-го полуколебания груз не проходит через положение равновесия; остаточная деформация пружины $x_{11} \approx -0{,}27$ см.

2.83. $V = \sqrt{\dfrac{kx_1^2}{m} + 2\mu g x_1} = 2$ м/с. Здесь $x_1 = 0{,}1$ м – максимальная деформация пружины (после первого полуколебания).

2.84. $V = \sqrt{2gh\ln\left(\dfrac{l}{h}\right)}$.

2.85. а) $\mu = \dfrac{\eta}{1-\eta} = \dfrac{1}{3}$; б) $A = -0{,}5mgl\eta(1-\eta) = -9{,}8$ мДж;
в) $V = \sqrt{gl(1-\eta)} = 2{,}7$ м/с.

2.86. а) $P_x = mV_x = m(B + 2Ct)$; б) $\Delta P_x = 2mC\Delta t = -16$ кг·м/с.

2.87. $\left|\Delta\vec{P}\right| = 2mV\cos\alpha$; $\Delta P = 0$; $\Delta P_x = 2mV\cos\alpha$; $\Delta P_y = 0$.

2.88. а) $\left|\Delta\vec{P}\right| = \dfrac{2\sqrt{2}\pi mR}{\tau}$; б) $\left|\Delta\vec{P}\right| = \dfrac{4\pi mR}{\tau}$.

2.89. $\vec{r}_C = \dfrac{\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2}{3}$.

2.90. а) $V_C = 4$ м/с; б) $V_C = 5/3$ м/с; в) $V_C = 0$.

2.91. В проекции на первоначальное направление: $V_1 = \dfrac{(m_1+m_2)V - m_2V_2}{m_1} = -100$ м/с. Скорость меньшего осколка направлена против первоначального направления.

2.92. $V_1 = \dfrac{\sqrt{(m_1+m_2)^2V^2 + (m_2V_2)^2}}{m_1} = 140{,}7$ м/с.

2.93. $\left|\Delta\vec{V}\right| = 19{,}0$ м/с.

2.94. $V_2 = 3{,}0$ м/с.

2.95. Аэростат начнет перемещаться вниз со скоростью $u = V\dfrac{m}{M+m} = 0{,}10V$.

2.96. Проекция скорости саней после взаимодействия с шаром на направление $\vec{V}_1$: $V_x = \dfrac{MV_1 - mV_2}{M+m} = -0{,}85$ м/с. Направление движения тележки изменится на противоположное.

2.97. Изменение импульса системы тел равно импульсу внешних сил: $\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{F}_{\text{внешн}}\Delta t$, где $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ – импульс системы до и после взаимодействия. Этим изменением можно пренебречь, если средняя проекция импульса внешних сил на направление движения: $F_{\text{внешн}}\Delta t << P_1 \cong P_2$. В условиях задачи $P_1 = \left|MV_1 - mV_2\right| = 11$ кгм/с,
$F_{\text{внешн}} = F_{\text{трения}} \cong \mu Mg = 50$ Н. В случае «а» проекция импульса внешних сил не превышает $\mu Mg\Delta t = 0{,}5$ кгм/с, что составляет менее 5% от P_1 и, таким образом, применение закона сохранения импульса оправдано. В случае «б» изменение импульса системы в процессе торможения шара в 10 раз больше, чем в случае «а».

2.98. а) $U = V\dfrac{M-m}{M+m}$; б) $U = V\dfrac{M}{M+2m}$.

2.99. $U = \dfrac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2 + m_3}$.

2.100. Плот перемещается в противоположном направлении на расстояние $L = l\dfrac{M}{M+m}$.

2.101. $U \cong \dfrac{MV}{2m\cos\alpha} = 3000$ км/ч.

2.102. а) $V_{\text{снаряда}} = V_0\sqrt{\dfrac{M}{M + m\cos^2\alpha}} = 179{,}1$ м/с;

б) $V_{\text{пушки}} = V_0\sqrt{\dfrac{m^2\cos^2\alpha}{M\left(M + m\cos^2\alpha\right)}} = 2{,}5$ м/с.

2.103. $\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{M+m}{M}\operatorname{tg}\alpha\right)$. Указание: перейти в систему отсчета, связанную с платформой.

2.104. $S = \dfrac{m^2 V^2}{2\mu g M^2}$.

2.105. $L = 4l$. Указание: учесть, что времена полета осколков одинаковы.

2.106. $\left|\Delta\vec{P}\right| = \dfrac{2\Delta T}{V_2 - V_1}$.

2.107. $Q = \dfrac{mV^2}{4} = 3$ Дж.

2.108. $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$.

2.109. а) $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{2}{13}$; б) $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{4m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} = \dfrac{48}{169}$.

2.110. $\dfrac{m_1}{m_2} = 1 + 2\cos\theta = 2$.

2.111. Частица продолжит движение в прежнем направлении со скоростью $U \approx \dfrac{0{,}01}{2}V = 0{,}05$ м/с.

2.112. $a = \left(\dfrac{m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2}}{m_1 + m_2}\right)^2 = 2{,}0$ м/с^2.

2.113. $\left|\dfrac{\Delta T}{T}\right| = \left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha - \dfrac{m}{M\cos^2\alpha}\right) = 40$ %.

2.114. $V = \sqrt{2\mu g\left(S_2\dfrac{m_2^2}{m_1^2} - S_1\right)} = 5{,}0$ м/с.

2.115. $h = 2l\dfrac{m_1^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\sin^2\alpha/2$.

2.116. $V = \dfrac{4m_1\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}\sin\alpha/2$.

2.117. $h = \dfrac{V^2}{2g}\left(\dfrac{m}{M+m}\right)^2 \approx 7{,}9$ см.

2.118. а) $V = \dfrac{M+m}{m}\sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)} \approx 164$ м/с;

б) $Q/T = M/\left(M+m\right) = 99\%$.

2.119. а) $V = \sqrt{gl\dfrac{\left(M+m\right)\left(2M+m\right)}{m^2}}$; б) $V = \dfrac{\left(M+m\right)}{m}\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$.

2.120. а) $V_C = \dfrac{x\sqrt{m_2 k}}{m_1 + m_2}$; б) $x_{\text{М}} = x\sqrt{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}}$.

2.121. а) $x_{\text{М}} = V\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{k\left(m_1 + m_2\right)}}$; б) Скорость бруска m_1 периодически изменяется от нуля до максимального значения $V_{\text{М}} = V\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}$.

2.122. $A_{\text{тр}} = -\dfrac{MmV_0^2}{2\left(M+m\right)} = -3$ Дж.

2.123. $h = \dfrac{MV^2\left(M - m\right)}{2m^2 g}$.

2.124. $h = \dfrac{MV_0^{\,2}}{2(M+m)g}$.

2.125. $P_{\text{М}} = m\sqrt{2g\left(h - l + \dfrac{mg}{2k}\right)}$. Указание: импульс шарика достигает максимального значения в момент, когда сумма всех сил, действующих на него, равна нулю.

2.126. $V_n = V_0 + u\left(\dfrac{m}{M} + \dfrac{m}{M-m} + \cdots + \dfrac{m}{M-(n-1)\cdot m}\right)$.

2.127. $\vec{V} = -\vec{u}\ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right)$.

2.128. $m = m_0 \exp\left(-\dfrac{at}{u}\right)$.

2.129. $V = u\ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right) - gt$.

3. Динамика твердого тела

3.1. $L = bmV$. Вектор $\vec{L}$ направлен параллельно оси z.

3.2. а) $\vec{L} = 0{,}5\vec{e}_z$, Дж·с; б) $\vec{L} = 0$; в) $\vec{L} = 0{,}5\vec{e}_x$, Дж·с.

3.3. Как в случае а), так и в случае б) $\Delta\vec{L} = -2mVr\vec{e}_z$.

3.4. $\vec{M} = 0$.

3.5. $\vec{M} = 0$.

3.6. а) $M_z = 0$; б) $M_z = aF_2\sin\alpha$.

3.7. $L = M_{\text{Л}}V_{\text{Л}}r_{\text{Л}} = M_{\text{Л}}\sqrt{M_{\text{З}}Gr_{\text{Л}}} = 2{,}88\cdot10^{34}$, Дж·с.

3.8. $V_1 = \sqrt{\dfrac{2GM_{\text{З}}}{(2R_{\text{З}} + h_1 + h_2)}\dfrac{(R_{\text{З}} + h_2)}{(R_{\text{З}} + h_1)}}$; $V_2 = V_1\dfrac{R_{\text{З}} + h_1}{R_{\text{З}} + h_2}$.

3.9. $V_1 = h_2\sqrt{\dfrac{2g}{h_2 - h_1}}$; $V_2 = h_1\sqrt{\dfrac{2g}{h_2 - h_1}}$.

3.10. $F(r) = m\omega_0^2\dfrac{r_0^4}{r^3}$.

3.11. а) $J = \dfrac{9ml^2}{4} = 3{,}6\cdot10^{-3}$ кг·м^2;

б) $J = \dfrac{3ml^2}{2} = 2{,}4\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

3.12. а) $J = ml^2 = 4\cdot10^{-4}$ кг·м^2; б) $J = \dfrac{ml^2}{2} = 2\cdot10^{-4}$ кг·м^2.

3.13. а) $J = \dfrac{ml^2}{12} = 7{,}5\cdot10^{-4}$ кг·м^2;

б) $J = \dfrac{ml^2}{12}\cdot\sin^2\alpha \approx 1{,}9\cdot10^{-4}$ кг·м^2; в) $J = \dfrac{ml^2}{9} = 1\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

3.14. $J = \dfrac{a^2\tau}{2}\left(b + \dfrac{a}{3}\right) = 1{,}44\cdot10^{-4}$ кг·м^2.

3.15. а) $J = \dfrac{ml^2}{6}$; б) $J = \dfrac{ml^2}{3}$;

в) $J = \dfrac{ml^2}{6}$.

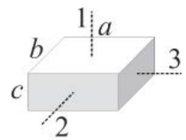


Рис.О.7

3.16. а) $J = \dfrac{ml^2}{12}$; б) $J = \dfrac{ml^2}{6}$.

3.17. $J_1 = m\dfrac{a^2 + b^2}{12}$; $J_2 = m\dfrac{a^2 + c^2}{12}$;

$J_3 = m\dfrac{c^2 + b^2}{12}$ (положение соответствующих главных осей показано на рис. О.7).

3.18. а) $J = \dfrac{mR^2}{2}$; б) $J = 2mR^2$.

3.19. а) $J = \dfrac{mR^2}{2}$; б) $J = \dfrac{3}{10}mR^2$.

3.20. $J = \dfrac{m(R^2 + r^2)}{2}$.

3.21. а) $M = \dfrac{2\pi nJ}{t} = 62{,}8$ Н·м; б) $N = \dfrac{nt}{2} = 120$.

3.22. а) $M = \dfrac{A}{2\pi N} = 0{,}1$ Н·м; б) $J = \dfrac{A}{2\pi^2 n^2} = 15{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг·м².

3.23. а) $\beta = \dfrac{2\pi(n_0 - n_1)}{t} = 0{,}21$ рад/с²; б) $M = J\beta = 0{,}31$ Н·м;

в) $A = 2\pi^2 J\left(n_1^2 - n_0^2\right) = -355$ Дж.

3.24. $\dfrac{M_1}{M_2} = 1{,}2$.

3.25. $m = \dfrac{2\left(FR - M_{\text{тр}}\right)}{R^2\beta} = 24$ кг.

3.26. $\dfrac{\beta_2}{\beta_1} = \dfrac{J + mR^2}{J} > 1$.

3.27. $J = \dfrac{mR^2(g-a)}{a} = 6{,}25$ кг·м².

3.28. а) t =1,11 с; б) T = 0,81 Дж; в) L = 0,90 Дж·с.

3.29. а) $a = g\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2} = 2{,}8$ м/с²;

б) $F_1 = 12{,}6$ Н, $F_2 = 14$ Н.

3.30. $F = 2m\omega^2 b$.

3.31. $M = \dfrac{m\omega^2 l^2}{4}\sin 2\alpha$. Максимальное значение этой величины достигается при $\alpha = 45^\circ$. Указание: вектор момента импульса данной системы грузов не остается постоянным; он вращается с угловой скоростью ω и описывает в своем пространстве конус с углом при вершине $\pi - 2\alpha$ (рис.О.8).

3.32. $\beta = \dfrac{FR_1 - mgR_2}{J + mR_2^2}$.

3.33. $\Delta x = \dfrac{at^2}{2} = gt^2\dfrac{m_2 - \mu m_1}{2(m_1 + m_2 + m/2)}$.

Необходимое условие начала движения:

$m_2 > \mu m_1$.

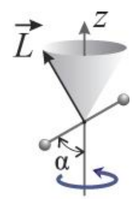


Рис.О.8

3.34. а) $a = g\dfrac{m_2 - \mu m_1\cos\alpha - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2 + m/2} = 0{,}43$ м/с²;

б) $F_1 = 9{,}26$ Н; $F_2 = 9{,}37$ Н.

3.35. $V = \sqrt{3gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$.

3.36. $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{5l\cos\alpha}}$. Описанное в условии задачи движение стержня возможно, если значение $\omega > \sqrt{\dfrac{6g}{5l}}$, в противном случае $\alpha = 0$.

3.37. $M_Z = J\beta = -240$ Н·м.

3.38. а) $L_Z = 38{,}2$ Дж·с; б) $N = 9{,}1$.

3.39. а) $V = \dfrac{M}{m}\sqrt{\dfrac{gl(1-\cos\alpha)}{3}}$; б) $\Delta P = \dfrac{M}{2}\sqrt{\dfrac{gl(1-\cos\alpha)}{3}}$; механическая система «пуля – стержень» не является замкнутой – в устройстве подвеса стержня возникает сила реакции; в) $x = \dfrac{2l}{3}$.

3.40. $\Delta\varphi = -2\pi\dfrac{2m_1}{2m_1 + m_2}$.

3.41. а) $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$; б) $A = -\dfrac{J_1 J_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(J_1 + J_2)}$.

3.42. а) $t = \dfrac{\omega_0 R\left(1+\mu^2\right)}{2g\mu(1+\mu)}$; б) $N = \dfrac{\omega_0^2 R\left(1+\mu^2\right)}{8\pi g\mu(1+\mu)}$.

3.43. $l = \dfrac{2bF_2}{ma} = 1$ м.

3.44. а) $F = \dfrac{2\mu mg}{1+\mu} = 13$ Н; б) $a = g\dfrac{\mu\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\mu}1{,}2$ м/с².

3.45. $\omega = \sqrt{\dfrac{8Fl}{3mR^2}}$. Указание: цилиндр катится по поверхности стола с проскальзыванием.

3.46. а) $a_x = \dfrac{F(\cos\alpha - r/R)}{m(\gamma+1)}$; б) $F_{\text{тр}\,x} = -\dfrac{F(\cos\alpha + r/R)}{\gamma+1}$. Если $\cos\alpha < r/R$, диск катится против оси x.

3.47. $a = g\dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + 6m_3} = 1$ м/с^2.

3.48. а) $a_2 = g\dfrac{m_2}{m_2 + 3/8\cdot m_1}$; б) $F_{\text{тр}} = \dfrac{m_1 a_2}{8}$, направление силы трения совпадает с направлением движения цилиндра.

3.49. а) $a = 2g/3$; б) $a = g/2$.

3.50. $a = g\dfrac{m_0 + 2m}{4m + m_0 + J/r^2}$.

3.51. $a = 4g/5$.

3.52. а) $a = g\dfrac{2r^2}{2r^2 + R^2}$; б) натяжение каждой нити

$F = \dfrac{mgR^2}{2(2r^2 + R^2)}$.

3.53. а) $a = g\dfrac{2\sin\alpha}{3} \approx 3{,}3$ м/с^2; б) $F_{\text{тр}} = \dfrac{mg\sin\alpha}{3} = 0{,}49$ Н.

3.54. а) $a = g\dfrac{5\sin\alpha}{7}$; б) $a = g\dfrac{\sin\alpha}{2}$.

3.55. а) $\Delta x = \dfrac{\pi l}{3} = 0{,}94$ м; б) $T = \dfrac{2(F\Delta t)^2}{m} = 3{,}6$ Дж.

3.56. $V_C = \sqrt{\dfrac{gh}{2}}$.

3.57. $V' = \dfrac{R\omega + V}{2}$. Колесо после скольжения катится в обратную сторону в случае, если ему была сообщена угловая скорость $\omega < -V/R$.

3.58. $\varphi = \operatorname{arctg}(2V^2/gR)$.

3.59. Ось волчка отклонится в направлении оси x на угол $\varphi = \dfrac{2mVl}{L} \approx 0{,}04$ рад.

3.60. а) $\Omega = \dfrac{mgl\sin\theta}{J\omega} = 0{,}7$ рад/с; б) горизонтальная составляющая силы реакции направлена в сторону, противоположную наклону волчка. Она равна $F_{\text{гор}} = m\Omega^2 l\sin\theta \approx 12$ мН.

3.61. $\omega = \dfrac{gl}{\pi n R^2} = 250{,}0$ рад/с.

3.62. В подшипниках возникает пара сил, направленных перпендикулярно плоскости (x,y). Величина каждой из этих сил: $F = \dfrac{2mR^2\omega\Omega}{5l} = 300$ Н.

.

4. Молекулярная физика и теплота

4.1. $\langle r\rangle \approx n^{-1/3}$.

4.2. а) $\langle r\rangle \approx \left(\dfrac{P}{k_Б T}\right)^{-1/3} = 33\,\mathring{A} = 33\cdot10^{-10}$ м;

б) $\langle r\rangle \approx \left(\dfrac{M_{H_2O}}{\rho N_А}\right)^{-1/3} = 3{,}1\,\mathring{A}$. Указание: здесь под «нормальными условиями» следует понимать, что давление и температура газа принимают следующие значения: $P = 10^5$ Па и $T = 273$ К.

4.3. $a = 2{,}8\,\mathring{A}$.

4.4. $\nu = PR^2\sqrt{\dfrac{8\pi}{k_Б T m_0}}$.

4.5. $r_{\text{мин}} = \left(\dfrac{A}{3k_Б T}\right)^{1/12}$. Этот параметр называют эффективным диаметром d молекулы. Анализ ответа показывает, что по мере роста температуры газа, величина d уменьшается.

4.6. $u_{\text{отн}} = \langle u\rangle\sqrt{2}$. Указание: усреднить квадрат относительной скорости любых двух молекул $\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$.

4.7. а) $\tau = \dfrac{\sqrt{k_Б T m_0}}{4\sqrt{\pi} d^2 P}$; б) $\lambda = \tau\langle u\rangle = \dfrac{k_Б T}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$.

4.8. а) $\tau \approx 1{,}4\cdot 10^{-10}$ с; б) $\lambda = \tau\cdot\langle u\rangle \approx 6{,}1\cdot 10^{-8}$ м.

4.9. а) $u_{кв} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}} = 475$ м/с,

$\langle \varepsilon_{пост}\rangle = \dfrac{3k_Б T}{2} = 6{,}0\cdot 10^{-21}$ Дж;

б) $u_{кв} = 3\sqrt{\dfrac{2k_Б T}{\pi\rho d^3}} = 0{,}15$ м/с, $\langle \varepsilon_{пост}\rangle = \dfrac{3k_Б T}{2} = 6{,}0\cdot 10^{-21}$ Дж.

4.10. $\omega_{кв} = \sqrt{\langle \omega^2\rangle} = \sqrt{\dfrac{2k_Б T}{J}} = 6{,}3\cdot 10^{12}$ рад/с.

4.11. а) $\langle u_x\rangle = 0$; б) $\Delta w = 1/2$.

4.12. $\Delta w = \dfrac{\Delta\Omega}{4\pi}$.

4.13. См. рис. О.9. Величина $\Delta w = \int\limits_{u_{X1}}^{u_{X2}} f_1(u_x)\cdot du_x$ численно равна площади заштрихованной фигуры.

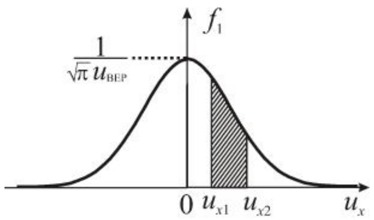


Рис.О.9

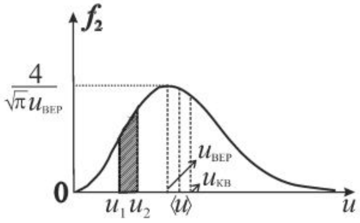


Рис.О.10

4.14. См. рис. О.10. Величина $\Delta w = \int\limits_{u_1}^{u_2} f_2(u)\cdot du$ численно равна площади заштрихованной фигуры. Функция $f_2(u)$ нормирована на единицу: $\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)du = 1$.

4.15. 1,66%.

4.16. $\Delta w = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_1^{\infty} \xi^2 \exp\left(-\xi^2\right)d\xi$.

4.17. $u_{вер} = 500{,}0$ м/с.

4.18. $\Delta w =$: а) $3{,}32\cdot 10^{-4}$; б) $1{,}76\cdot 10^{-4}$; в) $2{,}14\cdot 10^{-4}$; г) $0{,}66\cdot 10^{-4}$.

4.19. а) $P = 0{,}56\cdot 10^5$ Па; б) $P = 0{,}31\cdot 10^5$ Па; в) $P = 1{,}26\cdot 10^5$ Па.

4.20. $m = \dfrac{k_Б T \ln\eta}{gh} = 5{,}0\cdot 10^{-20}$ г.

4.21. $N = \dfrac{3RT\ln\eta}{4\pi r^3 g\Delta h(\rho_1 - \rho_2)} = 6{,}1\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

4.22. а) $dN = n_0 \exp\left(-ar^2/k_Б T\right)4\pi r^2 dr$; б) $r = \sqrt{k_Б T/a}$;

в) $\dfrac{dN}{N} = \left(\dfrac{a}{\pi k_Б T}\right)^{3/2} \exp\left(-ar^2/kT\right)4\pi r^2 dr$; г) увеличится в $\eta^{3/2}$ раза.

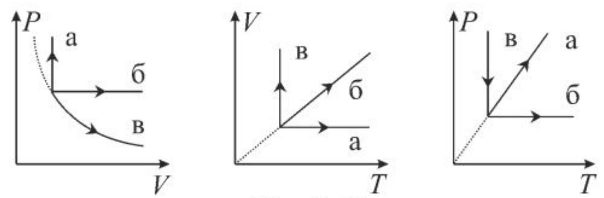


Рис.О.11

4.23. См. рис. О.11.

4.24. См. рис. О.12. Участок, на котором температура растет, отмечен стрелкой.

4.25. а) $T_{макс} = \dfrac{2P_0}{3\nu R}\sqrt{\dfrac{P_0}{3\alpha}}$;

б) $T_{макс} = \dfrac{P_0}{\nu R\beta}\exp(-1)$.

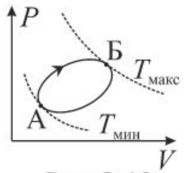


Рис.О.12

4.26. $P_{мин} = 2R\sqrt{\alpha T_0}$.

4.27. $\rho = \dfrac{PM}{RT} = 1{,}29$ кг/м^3.

4.28. $P_2 = \left(\dfrac{P_1}{T_1} - \dfrac{\Delta mR}{VM}\right)T_2 = 16{,}3$ кПа.

4.29. $\Delta m = \dfrac{\rho V \Delta P}{P_0} = 30$ г.

4.30. а) $P = \dfrac{RT}{V}\left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) = 0{,}2$ МПа;

б) $M = \dfrac{M_1\nu_1 + M_2\nu_2 + M_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 36{,}7$ г/моль.

4.31. $\rho = \dfrac{(m_1 + m_2)P}{RT(m_1/M_1 + m_2/M_2)} = 0{,}50$ кг/м^3.

4.32. $m = 6{,}3$ г.

4.33. $m = \dfrac{MP_0 Sl \ln(T_2/T_1)}{R(T_2 - T_1)}$.

4.34. $\Delta T = \dfrac{l(mg + P_0 \Delta S)}{R} = 0{,}9$ К. Поршни переместятся вверх.

4.35. $N = \dfrac{\ln(P_0/P)}{\ln(1 + \Delta V/V)}$.

4.36. $P(t) = P_0 \exp(-CT/V)$.

4.37. $\tau = 127$ с.

4.38. $P_{\text{ид}} = \dfrac{\rho RT}{M} = 280$ атм, $P_{\text{ВдВ}} = \dfrac{\rho RT}{M - \rho b} - \dfrac{a\rho^2}{M^2} = 80$ атм.

4.39. $a = \dfrac{27R^2T_{\text{кр}}^2}{64P_{\text{кр}}}$, $b = \dfrac{RT_{\text{кр}}}{8P_{\text{кр}}}$.

4.40. $P = \dfrac{3RT}{3M - \rho V_{M\,\text{кр}}} - 3P_{\text{кр}}\left(\dfrac{\rho V_{M\,\text{кр}}}{M}\right)^2 \approx 98$ атм.

4.41. а) $A_{12} = 2P_0V_0$; б) $A_{13} = \dfrac{5}{2}P_0V_0$; в) $A_{14} = 0$;

г) $A_{15} = -2P_0V_0$.

4.42. а) $\Delta U_{12} = 5P_0V_0$, $Q_{12} = 7P_0V_0$;

б) $\Delta U_{13} = \dfrac{25}{2}P_0V_0$, $Q_{13} = 15P_0V_0$; в) $\Delta U_{14} = 5P_0V_0$, $Q_{12} = 5P_0V_0$;

г) $\Delta U_{15} = -5P_0V_0$, $Q_{12} = -7P_0V_0$.

4.43. а) $Q = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$; б) $Q = -\dfrac{\pi}{4}(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$.

4.44. а) 208 кДж; б) 83,1 кДж.

4.45. а) $T_2 = 4T_1 = 1{,}16$ кК; б) $Q = \dfrac{im}{2M}R(T_2 - T_1) = 18{,}1$ кДж.

4.46. а) $A = \dfrac{2}{7}Q = 1{,}43$ кДж; б) $V_2 = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{m}{M}RT_1 + A\right) = 26{,}0$ л.

4.47. а) $\Delta U = Q - R\Delta T = 1{,}00$ кДж; б) $\gamma = \dfrac{Q}{Q - R\Delta T} = 1{,}6$.

4.48. $\Delta U = \left(\dfrac{m_1}{M_1}i_1 + \dfrac{m_2}{M_2}i_2\right)\dfrac{R\Delta T}{2} = 1{,}66$ кДж.

4.49. $A = Q = \dfrac{m}{M}RT\ln(V_2/V_1) = 6{,}9$ кДж.

4.50. Молярная масса газа $M = \dfrac{mRT}{A}\ln(P_2/P_1) = 4$ г/моль. Данный газ можно идентифицировать либо как гелий He , либо как тяжелый водород D_2 .

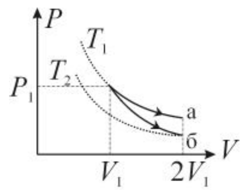


Рис.О.13

4.51. $A_1/A_2 = \dfrac{2\ln(V_2/V_1)}{i\left[1 - (V_1/V_2)^{2/i}\right]} = 1{,}15$.

См. рис.О.13.

4.52. $A = \dfrac{i}{2}\dfrac{m}{M}R\Delta T = 14{,}8$ кДж.

4.53. а) $T_2 = T_1\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1/\gamma} = 1{,}85\cdot 10^3$ К;

б) $\dfrac{mRT_1}{M(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1/\gamma}\right] = -1{,}56$ МДж; в) $V_2/V_1 = 16$.

4.54. а) $A = 2\left(\sqrt{2}-1\right)P_1V_1$, $\Delta U = \frac{5}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)P_1V_1$,

$Q = \frac{9}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)P_1V_1$; б) $A = \frac{P_1V_1}{2}$, $\Delta U = -\frac{5}{4}P_1V_1$, $Q = -\frac{1}{4}P_1V_1$.

4.55. а) $i = 3$; б) $i = 7$; в) $i = 13$; г) $i = 12$; д) $i = 24$. Указание: число типов, (мод) колебаний молекулы $i_{\text{кол}} = 3N - (i_{\text{п}} + i_{\text{вр}})$, где N - число атомов в молекуле.

4.56. а) $C_{VM} = \frac{3R}{2}$, $C_{PM} = \frac{5R}{2}$; б) $C_{VM} = \frac{5R}{2}$, $C_{PM} = \frac{7R}{2}$;

в) $C_{VM} = \frac{7R}{2}$, $C_{PM} = \frac{9R}{2}$;

г) $C_{VM} = 3R$, $C_{PM} = 4R$; д) $C_{VM} = 6R$, $C_{PM} = 7R$.

4.57. $N = 4$.

4.58. $c_V = \left(\frac{m_1}{M_1}i_1 + \frac{m_2}{M_2}i_2\right)\frac{R}{2(m_1+m_2)} = 0{,}42$ Дж/г·К,

$c_P = c_V + \frac{R}{m_1+m_2} = 0{,}65$ Дж/г·К.

4.59. $C_{VM} = 3R$.

4.60. $C_M(n) = C_{VM} + \frac{R}{1-n}$.

4.61. $n = -9$.

4.62. $C_M = -C_{VM} < 0$. Вообще, теплоемкость политропического процесса отрицательна, если значения показателя политропы находятся в пределах $1 < n < 1 + \frac{R}{C_{VM}}$. Политропы с этими значениями n расположены между изотермой и адиабатой (рис. О.14).

4.63. а) $A = 2RT\ln\left(\frac{V_2-2b}{V_1-2b}\right) - 4a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$;

б) $\Delta U = 2a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$;

в) $Q = 2RT\ln\left(\frac{V_2-2b}{V_1-2b}\right) - 2a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$.

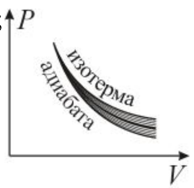


Рис.О.14

4.64. $T\left(V_M - b\right)^{R/C_{VM}} = \text{const}$ или

$\left(P + a/V_M^2\right)\left(V - b\right)^{R/C_{VM}+1} = \text{const}$.

4.65. $C_{PM} - C_{VM} \approx R\left(1 + 2a/RTV_M\right)$. Указание: пренебречь слагаемыми, содержащими постоянные Ван-дер-Вальса a и b во второй и более высоких степенях.

4.66. а) $C_{PM} - C_{VM} = 1{,}21R$; б) $C_{PM} - C_{VM} = 1{,}66R$.

4.67. См. рис.О.15.

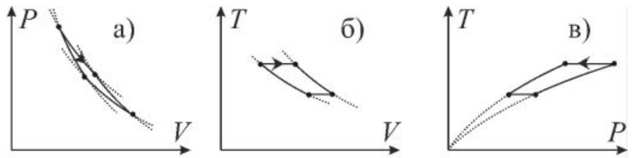


Рис.О.15

4.68. а) $Q_1 = A\frac{T_1}{T_1 - T_2}$; б) $Q_2 = A\frac{T_2}{T_1 - T_2}$.

4.69. $\eta = \frac{2A}{iRT_1} = 0{,}24$.

4.70. $\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{1}{\eta} - 1 = 3$.

4.71. а) $\eta_1 = 8\%$; б) $\eta_2 = 75\% > \eta_1$.

4.72. $\Delta S = 2{,}00$ Дж/К.

4.73. $S_2 = S_1 + R\ln 2 = 210{,}6$ Дж/моль·К.

4.74. а) $\Delta S = 8{,}6$ Дж/моль·К; б) $\Delta S = 14{,}4$ Дж/моль·К.

4.75. $\Delta S = \frac{A + \Delta U}{T} = 0{,}25$ Дж/К.

4.76. $S = C\ln\left(T/T_0\right) + \text{const}$.

См. рис. О.16, на котором $\text{const} = S_0$.

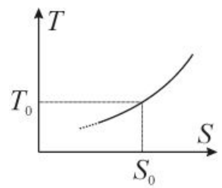


Рис.О.16

4.77. $\eta = 1 - \frac{2T_3}{T_1 + T_2}$. Указание: изобразить цикл на диаграмме (T, S).

4.78. а) $Q_2 = \dfrac{m}{M} RT_2 \left(\ln n + \dfrac{1}{\gamma - 1} \ln \dfrac{T_2}{T_1} \right) = 21{,}6$ кДж;

б) $A = Q_2 \dfrac{T_1 - T_2}{T_2} = 2{,}40$ кДж.

4.79. $\eta_1 = 1 - \dfrac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \dfrac{T_2}{T_1} = 0{,}39$; $\eta_2 = 0{,}60 > \eta_1$.

4.80. $\eta = 1 - \dfrac{\tau - 1}{\tau \ln \tau}$.

4.81. а) $\eta = 1 - \gamma \dfrac{\tau - 1}{\tau^{\gamma} - 1}$;

б) $\eta = 1 - \dfrac{\tau^{\gamma} - 1}{\gamma(\tau - 1)\tau^{\gamma - 1}}$.

4.82. $C = \alpha T$.

4.83. а) $C = -\dfrac{\alpha}{T}$;

б) $Q = \alpha \ln(T_1 / T_2)$.

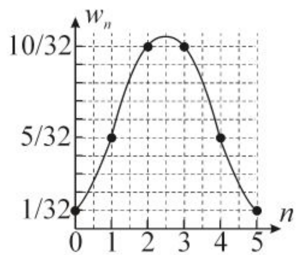


Рис.О.17

4.84. $V_{\text{макс}} = \dfrac{\gamma P_0}{\alpha(\gamma + 1)}$.

4.85. $\Delta S = m \left(c \ln \dfrac{T_2}{T_1} + \dfrac{\lambda}{T_2} \right) = 261$ Дж/К.

4.86. $\Delta S = m \left(c \ln \dfrac{T_2}{T_1} - \dfrac{r}{T_1} \right) = -7{,}0$ Дж/К.

4.87. а) $2^N = 32$ варианта; б) $\Omega_n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$;

в) $w_n = \dfrac{\Omega_n}{2^N} = 2^{-N} \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$. См. рис. О.17.

4.88. $\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ (это следует из предположения об отсутствии взаимодействия между подсистемами);
$S = k_Б \ln \Omega = k_Б (\ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 + \ln \Omega_3) = S_1 + S_2 + S_3$, где $S_{1,\dots,3}$ – энтропии подсистем. Таким образом, энтропия – аддитивная величина постольку, поскольку статистический вес мультипликативен.

4.89. $\Omega_2 = \Omega_1^{\,\eta}$.

4.90. $\Delta S_{12} = k_Б \ln 2 = 9{,}6 \cdot 10^{-24}$ Дж/К.

4.91. а) $\Omega_1 = \exp(S_M / k_Б) = 10^{4{,}1 \cdot 10^{24}}$; б) $\Omega_2 = \Omega_1^2 = 10^{8{,}2 \cdot 10^{24}}$.

4.92. В $10^{3{,}42 \cdot 10^{24}}$ раз.

4.93. а) $\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} = 2^N$; б) $\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} = 2^{3N/2}$; в) $\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N/8}$.

4.94. $\Delta S = \dfrac{m}{M} \ln 2 = 28{,}8$ Дж/К. Процесс необратимый.

4.95. $\Delta S = \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2} \right) R \ln 2$.

4.96. $\Delta S = \nu_1 R \ln(1 + \tau) + \nu_2 \ln\left(\dfrac{1 + \tau}{\tau} \right) = 5{,}1$ Дж/К.

4.97. $\Delta S = C_{VM} \ln \left[\dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} \right]$. При любых значениях температур $T_1 \neq T_2$ $\Delta S > 0$. Процесс необратимый.