

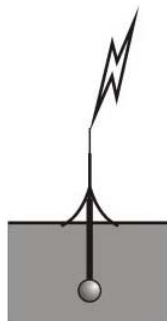
**Федеральное агентство по образованию.
Государственное образовательное учреждение
высшего и послевузовского образования**

**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Часть 2

Электрическое поле. Постоянный ток. Магнитное поле



Нижний Новгород 2005

Составители: И.А. Вдовиченко и др.
УДК 681.383; 621.384

Сборник задач по физике. 2: Электрическое поле. Постоянный ток. Магнитное поле. для студентов всех специальностей / Нижегородский государственный технический университет. Сост.: И.А. Вдовиченко, В.А. Малахов, Г.Д.Павлова, А.Б. Федотов, Г.И.Шишков. Н.Новгород, 2004. – 100с.

Ответственный редактор А.Б. Федотов

Редактор Э.Б.Абросимова

Рецензент А.И.Кононов

Подп. в печ. Формат. $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Бумага газетная. Печать офсетная.
Печ. л. 7,0. Уч.– изд. л. 4,2. Тираж 2000 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет. Типография
НГТУ. 603600, Н.Новгород, ул. Минина, 24

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
1. Электростатика.....	6
1.1. Электрическое поле в вакууме.....	6
1.2. Электрическое поле в диэлектриках.....	12
1.3. Проводники. Конденсаторы. Энергия электрического поля.....	16
1.4. Примеры решения задач.....	20
2. Постоянный ток.....	28
2.1. Плотность тока. Подвижность носителей заряда.....	28
2.2. Электродвижущая сила. Правила Кирхгофа.....	30
2.3. Работа и мощность в цепях постоянного тока.....	33
2.4. Примеры решения задач.....	38
3. Магнитостатика.....	41
3.1. Магнитное поле в вакууме.....	41
3.2. Сила Лоренца. Сила Ампера.....	45
3.3. Магнитное поле в веществе.....	49
3.4. Примеры решения задач.....	52
4. Электродинамика.....	62
4.1. Закон электромагнитной индукции.....	62
4.2. Преобразования Лоренца. Уравнения Максвелла.....	66
4.3. Цепи переменного тока.....	70
4.4. Примеры решения задач.....	72
5. Ответы.....	79

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник задач предназначен для студентов первого курса всех специальностей. Все задачи этой части распределены по четырем главам: «Электростатика», «Постоянный ток», «Магнитостатика» и «Электродинамика». В соответствии со сложившейся практикой распределения нагрузки, объем задачника рассчитан на 18 часов аудиторных занятий и соответствующее количество часов внеаудиторной работы. Поэтому подобно тому, как это было сделано в первой части, мы были вынуждены исключить некоторые темы, например, «Ток в электролитах», «Электрический разряд в газах» и ряд других.

Для обозначения векторов ускорения, момента силы и момента импульса использованы символы a , M и L соответственно. Момент инерции обозначается символом J .

В остальном мы придерживались системы обозначений, принятой в учебнике Савельева И.В. «Курс общей физики».

Номера задач повышенной сложности отмечены «звездочками» (например 1.11*). В конце каждой главы имеется раздел «Примеры решения задач». Номера задач, подробное решение которых представлено в этом разделе, отмечены буквой «П» (например 2.22*П).

Краткий список физических констант

Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$

Стандартное ускорение свободного падения $g = 9,807 \text{ м/с}^2$

Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Постоянная Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$

Атомная единица массы $1 \text{ а.е.м.} = \begin{cases} 1.6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 931,42 \text{ МэВ} \end{cases}$

Боровский радиус $r_0 = 0,52917706 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

Элементарный заряд $e = \begin{cases} 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ} \end{cases}$

Масса электрона $m_e = \begin{cases} 0,91095 \cdot 10^{-30} \text{ Кг} \\ 0,51100 \text{ МэВ} \end{cases}$

Магнетон Бора $\mu_B = 0,9274 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$

Масса протона $m_p = \begin{cases} 1,67265 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 931,28 \text{ МэВ} \end{cases}$

Электрическая постоянная $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ М/Ф} ;$
 $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м.}$

Магнитная постоянная $\mu_0 / 4\pi = 10^{-7} \text{ Гн/м} ;$
 $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$

Скорость света в вакууме $c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1.1. Электрическое поле в вакууме

Основные определения

✓ Кулоновская сила, действующая на заряд q , и энергия этого заряда в электрическом поле:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}, \quad W = q\varphi, \quad (1.1a)$$

где \mathbf{E} – напряженность, а φ – потенциал поля.

✓ Работа кулоновской силы при перемещении заряда q

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.1б)$$

где φ_1 и φ_2 – значения потенциала поля в начале и в конце траектории заряда q .

✓ Напряженность и потенциал поля точечного заряда Q на расстоянии r от него:

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.1в)$$

✓ Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов Q_i (принцип суперпозиции):

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad (1.1г)$$

✓ Напряженность и потенциал электростатического поля связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla \cdot \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \varphi(\mathbf{r}) &= C - \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \right\}, \quad (1.1д)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая граничными условиями.

✓ Электрический дипольный момент системы точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_N

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i. \quad (1.1е)$$

- ✓ Потенциал и напряженность поля диполя $\mathbf{p} = ql$ на расстоянии $r \gg l$ от него:

$$\varphi \cong \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}, \quad (1.1\text{ж})$$

где θ – угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{r} .

- ✓ Энергия диполя, сила и момент сил, действующие на диполь во внешнем электрическом поле \mathbf{E} :

$$W = -\mathbf{p}\mathbf{E}, \quad \mathbf{F} = -\nabla \cdot W = \nabla(\mathbf{p}\mathbf{E}), \quad \mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]. \quad (1.1\text{з})$$

- ✓ Поток вектора \mathbf{E} через элементарную площадку dS :

$$d\Phi_s = \mathbf{E} d\mathbf{S} = \mathbf{E}\mathbf{n} dS, \quad (1.1\text{и})$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к площадке.

- ✓ Теорема Остроградского - Гаусса:

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i, \quad (1.1\text{к})$$

где q_i ($i=1,2,\dots$) – электрические заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности S .

- ✓ Теорема Остроградского - Гаусса в дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0, \quad (1.1\text{л})$$

где $\nabla \cdot \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$, а $\rho(\mathbf{r})$ – пространственная плотность электрических зарядов.

1.1. Два заряда q_1 и q_2 находятся в точках с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Определить напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого этими зарядами в точке пространства, радиус-вектор которой равен \mathbf{r}_3 .

1.2. Четыре заряда расположены в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 1.1. Определить величину напряженности $E(O)$ и потенциала $\varphi(O)$ электрического поля в центре квадрата, если:

- а) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$; б) $q_1 = q_2 = q_3 = q, q_4 = -q$; в) $q_1 = q_2 = q, q_3 = q_4 = -q$.

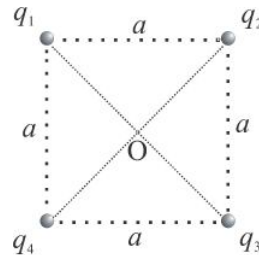


Рис.1.1

1.3. Из тонкой пластины, по которой равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ , вырезано

кольцо с внутренним радиусом R . Ширина кольца $\Delta R \ll R$. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля на оси кольца в зависимости от расстояния z до его центра.

1.4.П. Круглая тонкая пластина радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ . Найти потенциал φ и модуль E напряженности электрического поля на оси пластины как функцию расстояния z до ее центра. Исследовать полученные выражения при $z \rightarrow 0$ и $z \gg R$.

1.5. Заряд q равномерно распределен по тонкому прямому стержню длиной $2a$. Найти модуль напряженности электрического поля E как функцию расстояния r от центра стержня до точки прямой: а) перпендикулярной стержню и проходящей через его центр; б) совпадающей с осью стержня (при условии $r > a$). Исследовать полученные выражения при $r \gg a$.

1.6. Линейная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по длине тонкого полубесконечного стержня, равна λ . Определить напряженность E электрического поля в точке А, расположенной на расстоянии a от края стержня К. Отрезок АК перпендикулярен стержню (рис.1.2). Чему равен угол между вектором \vec{E} и отрезком АК?

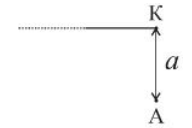


Рис. 1.2

1.7. Заряд q равномерно распределен по дуге радиусом R . Определить напряженность электрического поля в центре дуги, если она представляет собой: а) четверть окружности; б) половину окружности.

1.8*. Заряд q распределен равномерно по поверхности полусферы радиусом R . Найти потенциал φ и модуль E напряженности электрического поля в центре полусферы.

1.9. Длина тонкой равномерно заряженной нити во много раз больше радиуса закругления нити R (рис. 1.3). Для каждого из вариантов конфигурации, представленных на рис. 1.3,а,б,в,г, определить напряженность электрического поля $E(O)$ в центре закругления. Линейная плотность заряда λ известна.

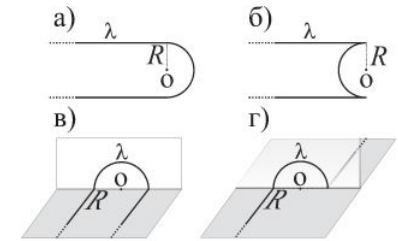


Рис. 1.3

1.10*. Тонкое кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos \alpha$, где α – азимутальный угол, а λ_0 – положительная

постоянная. Найти модуль E напряженности электрического поля в центре кольца.

1.11*. Найти напряженность электрического поля E как функцию координат x, y, z , если координатная зависимость потенциала поля имеет вид: а) $\varphi = -ar = -a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; б) $\varphi = b(x^2 + 2y^2)$;

в) $\varphi = \varphi_0 \ln(c/r)$. Здесь φ_0, a, b и c – положительные константы.

1.12*. Потенциал электрического поля зависит от координат, как $\varphi = \alpha(xy - z^2)$. Найти проекцию напряженности электрического поля в точке $M\{2, 1, -3\}$ на направление вектора $l = e_x + 3e_y$. Постоянный множитель α считать известным.

1.13*. Напряженность электрического поля $E = ae_x + be_y + ce_z$, где a, b и c – константы. Найти координатную зависимость потенциала $\varphi(x, y, z)$ этого поля, если известно, что $\varphi(0, 0, 0) = 0$. Является ли данное поле однородным?

1.14*. То же, если напряженность поля как функция координат имеет вид: а) $E = aye_x + axe_y$; б) $E = 2axy e_x + a(x^2 - y^2)e_y$; в) $E = aye_x + (ax + bz)e_y + bye_z$.

1.15. Определить модуль дипольного момента системы четырех зарядов, изображенных на рис. 1.1, если: а) $q_1 = q_2 = q, q_3 = q_4 = -q$; б) $q_1 = q_3 = q, q_2 = q_4 = -q$; в) $q_1 = 3q, q_2 = q_3 = q_4 = -q$.

1.16. Вычислить дипольный момент ионной двухвалентной молекулы, в которой эффективное расстояние между отрицательным и положительным зарядами равно половине Боровского радиуса r_0 .

1.17*. Определить модуль дипольного момента: а) тонкого прямого стержня длиной $2a$ (рис.1.4), зависимость линейной плотности заряда которого от координаты $x \in [-a, a]$ имеет вид $\lambda = tx$; б) кольца из задачи 1.10.



Рис.1.4

1.18. Молекула с дипольным моментом $p = 2,5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м расположена на расстоянии $a = 10,0$ см от точечного заряда $q = 6,0$ мкКл. Вычислить: а) силу F , действующую на молекулу; б) вращающий момент сил N ; в) энергию W молекулы в поле данного заряда. Известно, что вектор p направлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к силовым линиям поля точечного заряда.

1.19. Молекула с дипольным моментом $p = 8,0 \cdot 10^{-30}$ Кл·м на-

ходится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 10^5$ В/м, причем направления векторов p и E совпадают. Какую работу A необходимо совершить против кулоновских сил, чтобы повернуть эту молекулу на угол α , равный: а) 60° ; б) 180° ?

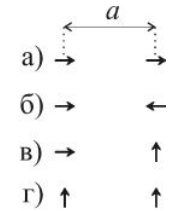


Рис.1.5

1.20. На рис. 1.5,а,б,в,г представлены четыре варианта взаимной ориентации дипольных моментов двух молекул воды. Для каждого из этих вариантов вычислить в дипольном приближении силу F кулоновского взаимодействия между молекулами, если известно, что они расположены на расстоянии $a = 10^{-7}$ м друг от друга. Дипольный момент молекулы воды $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

1.21. В центре куба находится точечный заряд q . Определить поток Φ_s вектора E : а) через полную поверхность куба; б) через одну из граней куба. Изменятся ли ответы, если заряд находится не в центре куба, но внутри него?

1.22. Определить поток Φ_s вектора $E = \alpha(xe_x + 2ye_y + 3ze_z)$ через замкнутую поверхность, ограничивающую часть пространства объемом V .

1.23. Заряд q распределен равномерно по поверхности сферы радиусом R . Определить напряженность электрического поля E и потенциал φ как функцию расстояния r от центра сферы. Потенциал бесконечно удаленной точки принять равным нулю. Построить примерные графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$.

1.24*П. Система зарядов, расположенных в вакууме, представляет собой шар радиусом R , заряженный равномерно с объемной плотностью ρ . Определить зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$ и построить примерные графики этих зависимостей. Учесть, что потенциал является непрерывной функцией координат. Потенциал бесконечно удаленной точки принять равным нулю.

1.25*. Определить зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$ в случае, когда заряд равномерно с плотностью ρ распределен по объему сферического слоя. Внутренний и внешний радиусы слоя равны a и b (см. рис.1.6).

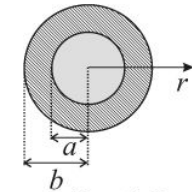


Рис.1.6

1.26*. Заряд равномерно распределен по объему бесконечно длинного цилиндрического стержня радиусом R . Найти напряженность

E и потенциал φ электрического поля как функции расстояния r от оси стержня. Потенциал оси стержня принять равным нулю.

1.27. Найти проекцию напряженности E_x и потенциал φ электрического поля, создаваемого безграничной заряженной плоскостью $x=0$ в зависимости от координаты x , перпендикулярной к этой плоскости (рис.1.7). Поверхностная плотность заряда плоскости $\sigma = \text{const}$. Потенциал заряженной плоскости принять равным нулю.

1.28*. Плотность электрического заряда зависит только от координаты x по закону $\rho = \rho_0(1 - x^2/a^2)$. Определить отличные от нуля значения x , в которых: а) $E_x = 0$; б) $\varphi = 0$. Потенциал начала координат принять равным нулю. Параметры ρ_0 и a – положительные постоянные.

1.29*. Шар радиусом R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра как $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, где ρ_0 – положительная константа. Полагая, что иных зарядов в пространстве нет, найти: а) значение $r = r_m$, при котором модуль напряженности поля принимает максимальное значение $E_{\text{макс}}$; б) величину $E_{\text{макс}}$.

1.30*. Определить объемную плотность электрического заряда в пространстве, если координатная зависимость потенциала: а) $\varphi = \varphi_0(1 - r^2/R^2)$; б) $\varphi = \varphi_0(x/a - x^3/a^3)$. Здесь r – расстояние от начала декартовых (x, y, z) координат, φ_0 , R и a – положительные постоянные.

1.31. Небольшой шарик массой m и зарядом q , подвешенный на тонкой шелковой нити длиной a , находится в горизонтальном однородном электрическом поле величиной E (рис.1.8). Определить равновесный угол отклонения нити α .

1.32. Два заряда $+q$ и $-q$ закреплены в точках с координатами $(a/2, 0, 0)$ и $(-a/2, 0, 0)$. Какую работу совершат силы поля, создаваемого этими зарядами, при удалении пробного заряда q' из начала координат на бесконечность? Как изменится ответ, если оба закрепленных заряда равны $+q$?

1.33. Найти скорость v электрона, ускоренного разностью потенциалов: а) $U = 1,0$ В; б) $U = 1,0$ кВ. В обоих случаях исходную скорость электрона считать равной нулю.

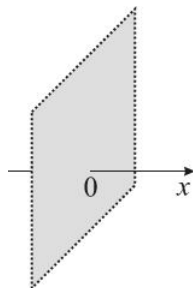


Рис.1.7

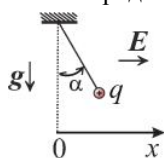


Рис.1.8

1.34. Электрон, двигавшийся со скоростью v , влетает в однородное электрическое поле E , причем вектор E параллелен вектору v . Определить время t остановки электрона. Потерей энергии на излучение пренебречь.

1.35. Определить минимальное расстояние a , на которое могут сблизиться два протона. В исходном состоянии, когда протоны далеки друг от друга, один из протонов неподвижен, а другой имеет скорость $v = 1.0 \cdot 10^6$ м/с, направленную вдоль линии, соединяющей частицы.

1.36*. Частица массой m , несущая на себе положительный заряд q , движется по направлению к центру удаленной сферы массой m и радиусом R , на поверхности которого равномерно распределен положительный заряд Q . В сфере проделаны отверстия, размеры которых позволяют частице пролететь насквозь (рис.1.9). Предполагая, что начальная скорость v частицы достаточно велика, чтобы достичь поверхности, определить время Δt пролета частицы внутри сферы. В исходном состоянии сфера неподвижна. Размеры частицы равно, как и диаметры отверстий, весьма малы по сравнению с радиусом сферы.

1.37*. Каждая из двух частиц, изображенных на рис.1.10, имеет массу m и электрический заряд $+q$. В исходном положении одна из частиц неподвижна, а другая движется со скоростью v . Определить минимальное расстояние между частицами в их последующем движении. Параметр b , называемый «прицельное расстояние», считать известным.

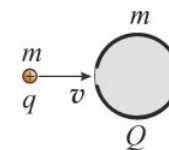


Рис.1.9

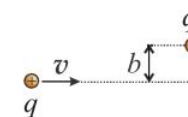


Рис.1.10

1.2. Электрическое поле в диэлектриках

Основные определения

✓ Поляризованность P и поток поляризованности через замкнутую поверхность S :

$$P = \frac{\sum p_i}{\Delta V}, \quad \text{и} \quad \oiint_S P dS = -q', \quad (1.2a)$$

где p_i – дипольные моменты молекул диэлектрика, q' – алгебраическая сумма связанных зарядов внутри поверхности.

✓ Электрическое смещение \mathbf{D} и поток смещения через замкнутую поверхность:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (1.2б)$$

где q – алгебраическая сумма сторонних зарядов внутри поверхности.

✓ Дивергенция векторов \mathbf{P} и \mathbf{D} :

$$\nabla \mathbf{P} = -\rho', \quad \nabla \mathbf{D} = \rho, \quad (1.2в)$$

где ρ' и ρ – объемная плотность связанных и сторонних зарядов соответственно.

✓ Условия на границе раздела двух диэлектриков:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (1.2г)$$

где σ' и σ – поверхностные плотности связанных и сторонних зарядов на границе раздела, орт нормали \mathbf{n} направлен из первой среды во вторую, τ – любое из касательных направлений.

✓ В случае изотропных диэлектриков:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.2д)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость, а $\varepsilon = 1 + \chi$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

✓ Напряженность поля точечного заряда q , находящегося в жидкой изотропной среде:

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \quad (1.2е)$$

1.38. В некоторой точке однородного изотропного диэлектрика проницаемостью ε известно значение модуля электрического смещения D . Написать выражения для величин напряженности электрического поля E и поляризованности P в этой точке.

1.39. Пластина толщиной a , изготовленная из однородного диэлектрика проницаемостью ε , помещена в однородное электрическое поле величиной E_0 перпендикулярно силовым линиям, как показано на рис. 1.11. Определить: а) напряженность электрического поля в диэлектрике; б) плотность связанных зарядов σ' на его левой поверхности. Изобразить качественно на графике зависимости $E(x)$, $P(x)$, $D(x)$ и $\phi(x)$. Потенциал начала координат принять равным нулю. Пластину считать неограниченной в направлениях, перпендикулярных оси Ox .

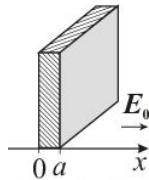


Рис.1.11

1.40. Точечный сторонний заряд q расположен в центре сферического слоя, изготовленного из однородного диэлектрика проницаемостью $\varepsilon = 2$. Внутренний радиус слоя $R_1 = 2R$, внешний $R_2 = 3R$. Построить примерные графики зависимостей $D(r)$, $E(r)$ и $P(r)$, где r – расстояние от заряда q . Определить плотность связанных зарядов σ'_1 на внутренней и σ'_2 на внешней поверхности диэлектрического слоя.

1.41*. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью ρ по шару радиусом R . Шар изготовлен из однородного изотропного диэлектрика проницаемостью ε . Определить: а) напряженность электрического поля E как функцию расстояния r от центра шара; б) объемную плотность связанных зарядов ρ' ; в) поверхностную плотность связанных зарядов σ' .

1.42*. Длинный цилиндрический стержень радиусом R , изготовленный из однородного изотропного диэлектрика проницаемостью ε , равномерно заряжен сторонними зарядами с объемной плотностью ρ . Определить: а) электрическое смещение D ; б) напряженность электрического поля E ; в) объемную плотность связанных зарядов ρ' в зависимости от расстояния r от оси стержня.

1.43.П. Вблизи плоской поверхности незаряженного однородного диэлектрика (рис.1.12) напряженность электрического поля в вакууме $E_1 = 100$ В/м. Углы α_1 и α_2 , определяющие направление силовых линий поля в вакууме и в диэлектрике, равны соответственно 30° и 60° . Найти: а) диэлектрическую проницаемость диэлектрика ε ; б) напряженность электрического поля в диэлектрике E_2 ; в) плотность связанных зарядов σ' на его поверхности. Сторонних зарядов на границе раздела нет.

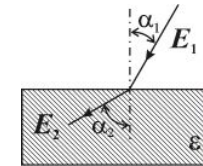


Рис.1.12

1.44*. Сторонние заряды равномерно распределены по плоской границе раздела двух однородных диэлектриков, помещенных во внешнее поле; их поверхностная плотность

$\sigma = +8,85 \cdot 10^{-8}$ Кл/м². Найти плотность связанных зарядов σ' на этой границе, если известно, что в первой среде $E_1 = 10^3$ В/м, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = 10$, а поля E_1 и E_2 ориентированы, как показано на рис. 1.13а.

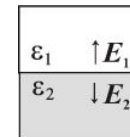


Рис.1.13а

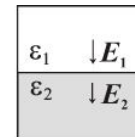


Рис.1.13б

1.45*. То же в варианте, изображенном на рис. 1.13б.

1.46*. Диэлектрическую пластину толщиной a поместили в однородное электрическое поле величиной E_0 перпендикулярно силовым линиям, как показано на рис. 1.11. Зависимость диэлектрической проницаемости материала от координаты x имеет вид $\varepsilon = 4(1 - x/a)$. Определить объемную плотность связанных зарядов ρ' в зависимости от x .

1.47*П. Напряженность электрического поля в однородном диэлектрике проницаемостью ε зависит от координат как

$$\mathbf{E} = \frac{a}{\varepsilon_0} (2x\mathbf{e}_x + 4y\mathbf{e}_y + 4z\mathbf{e}_z), \text{ где } a - \text{ постоянная величина. Найти объ-}$$

емную плотность сторонних и связанных зарядов.

1.48*. То же, если в пространстве, заполненном однородным диэлектриком проницаемостью ε , зависимость напряженности электрического поля от радиус-вектора \mathbf{r} имеет вид $\mathbf{E} = E_0 \frac{\mathbf{r}}{r}$.

1.49*. Чему будет равна поляризованность воды, если удастся выстроить ее молекулы так, чтобы все дипольные моменты оказались параллельными друг другу? Плотность воды $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $\mu = 18 \text{ г/моль}$, дипольный момент одной молекулы $p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ Кл}\cdot\text{м}$.

1.50*. В воде электрическое поле напряженностью $E = 10^5 \text{ В/м}$, создает поляризованность, эквивалентную правильной ориентации только одной из $N = 3 \cdot 10^3$ молекул. На основе этих данных вычислить диэлектрическую проницаемость воды ε . Для расчетов использовать данные, приведенные в предыдущей задаче.

1.51*П. Сегнетоэлектрический цилиндр длиной $2l$ и радиусом r ($r \ll l$) обладает однородной остаточной поляризованностью \mathbf{P} , направленной вдоль оси цилиндра (рис.1.14). Найти напряженность электрического поля в точках 1 и 2, расположенных вблизи середины торца и середины боковой поверхности цилиндра.

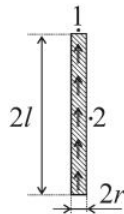


Рис.1.14

1.52*. Остаточная поляризованность \mathbf{P} круглого сегнетоэлектрического диска радиусом R и толщиной d повсюду в нем одинакова и вектор \mathbf{P} перпендикулярен оси диска. Найти напряженность \mathbf{E} электрического поля

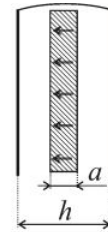


Рис.1.15

в центре диска, если $d \ll R$.

1.53*. Пластина из сегнетоэлектрика с остаточной поляризованностью \mathbf{P} помещена между металлическими обкладками, соединенными между собой проводником (рис.1.15). Вектор \mathbf{P} перпендикулярен боковым граням пластины. Определить векторы $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{D}_{1,2}$ внутри и вне сегнетоэлектрика. Толщина пластины a , расстояние между обкладками h . Краевыми эффектами пренебречь.

1.3. Проводники. Конденсаторы. Энергия электрического поля

Основные определения

✓ Напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma \mathbf{n}}{\varepsilon_0}, \quad (1.3a)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов, \mathbf{n} – орт внешней нормали.

✓ Электроемкость уединенного проводника:

$$C = q/\varphi, \quad (1.3б)$$

где q – его заряд, а φ – потенциал.

✓ Электроемкость конденсатора:

$$C = q/U, \quad (1.3в)$$

где U – разность потенциалов между его обкладками.

✓ Энергия системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i \quad (1.3г)$$

✓ Энергия заряженного конденсатора:

$$W = CU^2/2. \quad (1.3д)$$

✓ Объемная плотность энергии электрического поля:

$$w_3 = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}. \quad (1.3e)$$

✓ Электроемкость батареи из N параллельных и N последовательных конденсаторов:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (1.3ж)$$

1.54*. Металлический столб длиной $l = 10 \text{ м}$ установлен вертикально в поле тяжести Земли. Оценить разность потенциалов между концами столба.

1.55.П. Расстояние между плоской незаряженной металлической пластиной и точечным зарядом q равно a . Определить: а) силу притяжения заряда к пластине; б) энергию взаимодействия заряда и пластины; в) поверхностную плотность зарядов, индуцированных на пластине, как функцию расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на пластину. Размеры пластины весьма велики по сравнению с величиной a .

1.56*. Точечный заряд q расположен на биссектрисе прямого двугранного угла, образованного проводящими плоскостями (рис.1.16). Расстояние от заряда до вершины угла равно l . Определить: а) величину и направление кулоновской силы, действующей на заряд; б) энергию взаимодействия заряда с плоскостями.

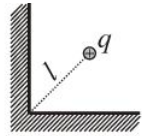


Рис.1.16

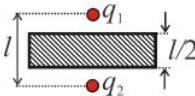


Рис.1.17

1.57. Точечные заряды q_1 и q_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Определить силы F_1 и F_2 , которые будут действовать на эти заряды после того, как посередине между ними будет расположена безграничная металлическая пластина толщиной $l/2$ (рис. 1.17).

1.58. Определить емкость уединенного сферического проводника радиусом R . Оценить емкость Земли, полагая, что ее средний радиус $\langle R_3 \rangle = 6,3 \cdot 10^6$ м.

1.59. Точечный заряд q окружили проводящей сферой радиусом $2R$. Расстояние от заряда до центра сферы равно R (рис.1.18). Определить силу, действующую на такой же заряд, помещенный на расстоянии r ($r > 2R$) от центра сферы. Каков будет ответ, если сферу заземлить?

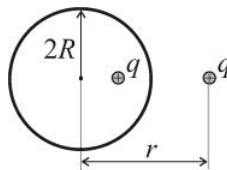


Рис.1.18

1.60. На расстоянии r от центра проводящей сферы радиусом R ($R < r$) находится точечный заряд q . Определить: а) потенциал сферы; б) заряд q' , индуцированный на сфере после ее заземления.

1.61. Точечный заряд q расположен на расстоянии R от центра проводящего сферического слоя, внутренний радиус которого равен $2R$, а внешний – $4R$. Определить потенциал в центре полости.

1.62*. Два одинаковых проводящих шара радиусом r расположены на расстоянии R друг от друга, причем $R \gg r$. Шары по очереди на некоторое время заземляют. Определить заряд, оставшийся на шаре,

который был заземлен вторым, если первоначально потенциалы шаров были равны ϕ .

1.63*. Три металлические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3$ концентрическим образом вставлены одна в другую. Заряды внутренней и внешней сферы равны соответственно Q_1 и Q_3 . Промежуточная сфера заземлена. Найти ее заряд.

1.64*. Незаряженный металлический шар радиусом r окружен концентрической сферической проводящей оболочкой радиусом R , заряженной до потенциала ϕ_0 . Чему будет равен потенциал оболочки после заземления незаряженного шара?

1.65*. Точечный заряд q находится между двумя заземленными проводящими сферами, радиусы которых равны соответственно R_1 и R_2 , на расстоянии r от их центра. Полагая, что $R_1 < r < R_2$, найти индуцированные на сферах заряды.

1.66*. То же для зарядов, индуцированных на двух заземленных параллельных пластинах, если заряд q расположен между ними на расстоянии d_1 от одной и d_2 от другой.

1.67. Исходная напряженность электрического поля воздушного конденсатора равна E_0 . После того как половину зазора между обкладками заполнили диэлектриком проницаемостью ϵ (рис.1.19), в обеих частях зазора установились новые значения напряженности (E_1, E_2) и смещения



Рис.1.19



Рис.1.20

(D_1, D_2). Найти эти величины, если при введении диэлектрика: а) оставался постоянным заряд на обкладках; б) постоянным оставалось напряжение между обкладками.

1.68. То же для варианта заполнения, изображенного на рис. 1.20.

1.69.П. Вычислить емкость плоского конденсатора, заполненного двухслойным диэлектриком. Площадь обкладок $S = 2,0$ м², толщины диэлектрических слоев $d_1 = 200$ мкм и $d_2 = 100$ мкм, значения $\epsilon_1 = 8$ и $\epsilon_2 = 4$.

1.70. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между обкладками которого равно d , был заряжен до напряжения U и отключен

от источника заряда. На сколько изменится разность потенциалов между обкладками, если между ними поместить металлическую пластину толщиной a ?

1.71. Определить емкости сферических конденсаторов, у которых радиусы внутренней и внешней обкладок равны соответственно $R_1 = R$ и $R_3 = 3R$, а радиус границы между диэлектрическим и воздушным слоями $R_2 = 2R$ (рис.1.21). Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$.

1.72. Заряд на обкладках конденсаторов из предыдущей задачи равен q . В обоих вариантах определить объемную плотность энергии электрического поля как функцию расстояния r от центра обкладок. Построить примерные графики.

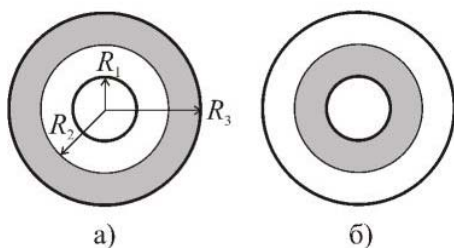


Рис.1.21

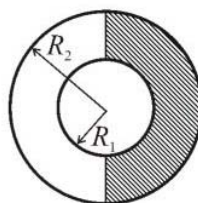


Рис.1.22

1.73*. Пространство между обкладками сферического конденсатора наполовину заполнено диэлектриком проницаемостью ε (рис. 1.22). Радиусы внутренней и внешней обкладок равны соответственно $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$. Определить величину заряда на обкладках, если напряжение между ними равно U .

1.74. Конденсатор емкостью $C_1 = 1,0$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 100,0$ В и отсоединен от источника. Затем к нему параллельно подключили незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 4,0$ мкФ. Определить: а) напряжение U , установившееся на конденсаторах; б) изменение электрической энергии системы.

1.75. Решить предыдущую задачу в предположении, что конденсатор C_2 первоначально был заряжен до напряжения $U_2 = 25,0$ В и конденсаторы были соединены одноименно заряженными обкладками.

1.76. То же в случае соединения разноименными обкладками.

1.77. Батарея конденсаторов, изображенная на рис. 1.23, при разомкнутом ключе К была заряжена до напряжения U_0 ; конденсатор C_3

разряжен. Определить напряжение, установившееся на батарее после замыкания ключа. Принять $C_1 = C_2 = C$, $C_3 = 3C$.

1.78. Батарея, состоящая из двух одинаковых воздушных конденсаторов емкостью C каждый, соединенных последовательно, заряжена до напряжения U и отключена от источника. Затем пространство между обкладками одного из конденсаторов было заполнено диэлектриком проницаемостью ε . Найти изменение электрической энергии батареи.

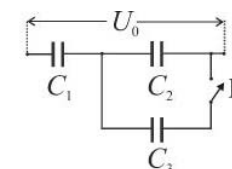


Рис.1.23

1.79*. Между обкладками плоского воздушного конденсатора находится незаряженная металлическая пластина толщиной a . Определить минимальную работу против электрических сил, необходимую для удаления этой пластины из конденсатора. Заряд конденсатора q , площадь его обкладок S , расстояние между ними d .

1.80*. Емкость плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено пластиной из твердого диэлектрика проницаемостью ε , равна C . Конденсатор заряжен до напряжения U и отключен от источника. Определить минимальную работу против электрических сил, необходимую для удаления диэлектрической пластины из конденсатора.

1.4. Примеры решения задач

Задача 1.4

Для того чтобы вычислить потенциал и напряженность поля, создаваемого данной системой зарядов, необходимо использовать принцип суперпозиции (формула 1.1г). Разобьем круглую однородно заряженную пластину радиусом R на множество тонких концентрических колец толщиной dr каждое (рис.1.24). В соответствии с решением задачи 1.3 потенциал электрического поля в произвольной точке на оси z , создаваемый любым из этих колец, в том числе, выделенным на рисунке темной штриховкой, равен

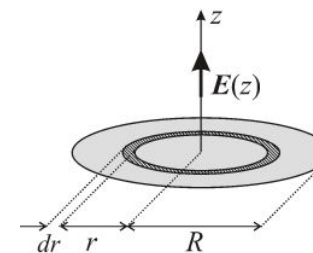


Рис.1.24

$d\varphi(z) = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$. Потенциал, создаваемый всей пластиной, можно

вычислить путем интегрирования:

$$\varphi(z) = \int_0^R d\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right). \quad (*)$$

Исходя из соображений симметрии, можно утверждать, что напряженность электрического поля, создаваемая каждым из колец в отдельности ($d\mathbf{E}$) и всей пластиной в целом, направлена вдоль оси z : $\mathbf{E}(z) = E(z)\mathbf{e}_z$. С другой стороны, как следует из соотношения (1.1д), $\mathbf{E}(z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$. Таким образом,

$$E_z = E(z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \quad (**)$$

Исследуем полученные результаты. В предельном случае больших расстояний ($z \gg R$) выражения (*) и (**) принимают вид $\varphi(z) = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z}$ и

$$E(z) = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2}, \text{ что совпадает с выражениями для поля точечного заряда}$$

$q = \sigma\pi R^2$. Именно таким зарядом представляется пластина с точки зрения наблюдателя, находящегося на большом удалении от нее.

В другом предельном случае ($0 < z \ll R$) из (*) и (**) получаются выражения для поля, создаваемого пластиной неограниченных размеров:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad \varphi(z) = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + \text{const}.$$

Задача 1.24

Заряды распределены сферически симметрично относительно начала координат. Такой же симметрией характеризуется и картина силовых линий напряженности \mathbf{E} электрического поля (рис.1.25). Это позволяет использовать для решения задачи теорему Остроградского-Гаусса (формула 1.1к).

1. Найдем напряженность поля вне заряженного шара. Для этого в качестве гауссовой поверхности выберем сферу радиусом r , принимающим произвольное значение в интервале $\infty > r > R$ (сфера 1 на рис. 1.25). Поток вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через любой элементарный участок dS этой поверхности

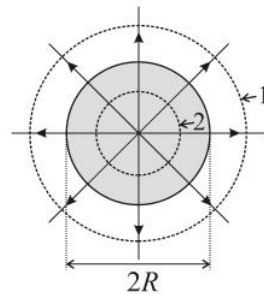


Рис.1.25

$d\Phi_3 = \mathbf{E}\mathbf{n} dS = E dS$, поскольку вектор \mathbf{E} и единичный вектор \mathbf{n} внешней нормали к поверхности всегда в силу вышеупомянутой симметрии параллельны друг другу. Поток через поверхность указанной сферы $\Phi_3 = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = 4\pi r^2 E$. (Здесь использовано то обстоятельство,

что в силу той же симметрии величина E постоянна во всех точках сферы, и на этом основании ее можно вынести за знак интеграла). С другой

стороны, в соответствии с (1.1к), $\Phi_3 = \frac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0}$. Объединяя эти

выражения, получим

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \text{ при } \infty > r > R. \quad (*)$$

2. Процедура определения зависимости $E(r)$ внутри шара отличается тем, что поток вектора \mathbf{E} через поверхность сферы 2 радиусом $r < R$ определяется не всем зарядом шара, а только той его частью, которая на-

ходится внутри этой сферы: $\Phi_3 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}$. Таким образом,

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}, \text{ откуда следует, что}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \text{ при } r < R. \quad (**)$$

3. Зависимость потенциала φ электрического поля от r , как следует из второй формулы в (1.1д), в обеих рассматриваемых частях простран-

$$\text{ства имеет вид } \varphi(r) = \begin{cases} \varphi_1(r) = C_1 - \int \mathbf{E} d\mathbf{r} = C_1 + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}, \text{ при } r > R, \\ \varphi_2(r) = C_2 - \int \mathbf{E} d\mathbf{r} = C_2 - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}, \text{ при } r < R. \end{cases}$$

Константы C_1 и C_2 определяются однозначно, если потребовать, чтобы функция $\varphi(r)$ удовлетворяла заданным граничным условиям. Во-первых, она должна стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$. Это условие выполняется только при $C_1 = 0$. Во-вторых, $\varphi(r)$ должна быть непрерывной функцией координат, следовательно на поверхности заряженного шара обе части функции (φ_1 и φ_2) должны принимать одинаковые значения:

$\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, или $\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = C_2 - \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$. Из последнего равенства следу-

ет, что $C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. Таким образом, окончательно

$$E(r) = \begin{cases} \rho r / 3\varepsilon_0, & \text{при } r \leq R, \\ \rho R^3 / 3\varepsilon_0 r^2, & \text{при } r > R, \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \rho(3R^2 - r^2) / 6\varepsilon_0, & \text{при } r \leq R, \\ \rho R^3 / 3\varepsilon_0 r, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Графическое представление этих функций см. на рис. 1.26.

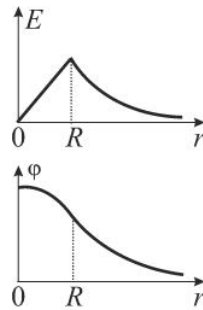


Рис.1.26

Задача 1.43

Условия (1.2г) для компонентов поля E_r и D_n вблизи границы раздела вакуум-диэлектрик при заданных углах α_1 и α_2 принимают вид:

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2 \quad \text{и} \quad E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon E_2 \cos \alpha_2. \quad (**)$$

1. Решение системы (*) относительно неизвестных ε и E_2 тривиально и подробных комментариев не требует:

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 = 3, \quad E_2 = E_1 \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = 57,7 \text{ В/м}. \quad (***)$$

2. Для того чтобы определить плотность связанных зарядов σ' , появляющихся на поверхности диэлектрика в результате его поляризации, предварительно найдем нормальные компоненты вектора поляризованности P . Проецируя первую из формул (1.2д) на нормаль к границе раздела и учитывая, что в вакууме значение параметра $\chi = 0$, получим $P_{1n} = 0$ и $P_{2n} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{2n}$. Как следует из (*), $E_{2n} = E_2 \cos \alpha_2 = E_1 \cos \alpha_1 / \varepsilon$. Поэтому $P_{2n} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_1 \cos \alpha_1 / \varepsilon = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2$.

3. Условия (1.2г) для компонентов P_n позволяют вычислить σ' :

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = -5,1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2. \quad (***)$$

Знак этих зарядов отрицательный, как и должно быть, поскольку на них заканчивается часть силовых линий напряженности поля E_1 .

Задача 1.47

Из формул (1,2д) следует, что поляризованность диэлектрика P и вектор электрического смещения D как функции координат имеют вид $P = a(\varepsilon - 1)(2x\mathbf{e}_x + 4y\mathbf{e}_y + 4z\mathbf{e}_z)$ и $D = a\varepsilon(2x\mathbf{e}_x + 4y\mathbf{e}_y + 4z\mathbf{e}_z)$. В соответствии с (1.2в) объемные плотности связанных и сторонних зарядов

могут быть найдены через дивергенции соответствующих векторов: $\rho' = -\nabla \cdot P$ и, соответственно $\rho = \nabla \cdot D$.

Напомним, что дивергенцией произвольной векторной функции координат $A(x, y, z)$ является сумма трех частных производных:

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad \text{Применив эту процедуру к векторным функциям } D \text{ и } P, \text{ получим соответственно } \rho = 10a\varepsilon \text{ и } \rho' = 10a(1 - \varepsilon) = \frac{\rho(1 - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Задача 1.51

Сторонние заряды в объеме стержня и на его поверхности отсутствуют; поэтому электрическое поле создается исключительно связанными зарядами. Выясним их расположение и величину.

1. Ввиду постоянства вектора P по всему объему цилиндрического стержня $\operatorname{div} P = \nabla \cdot P \equiv 0$. Следовательно, объемная плотность ρ' связанных зарядов повсеместно в стержне также равна нулю.

2. В соответствии с граничными условиями (1.2г) связанные заряды имеются только на торцах стержня, причем заряды положительного знака выступают на верхнем торце (их поверхностная плотность $+\sigma' = P > 0$). Аналогично, на нижнем торце $-\sigma' = -P < 0$.

3. Таким образом, электрическое поле создается электронейтральной системой зарядов $+q = P\pi r^2$ и $-q = -P\pi r^2$, находящихся на расстоянии $2l$ друг от друга. Вдали от торцов картина силовых линий напряженности E напоминает поле электрического диполя (рис.1.27,а). Подобную структуру имеют и линии вектора электрического смещения D с тем отличием, что все эти линии непрерывны (замыкаются сами на себя, рис.1.27,б). Следует иметь в виду, что внутри стержня векторы P , E и D связаны соотношением $D = P + \varepsilon_0 E$.

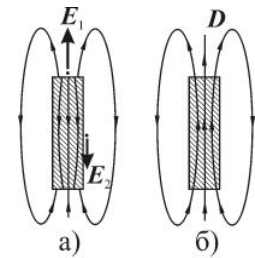


Рис.1.27

4. При расчете величины напряженности поля в точках 1 и 2 (рис.1.14) учтем, что размеры стержня удовлетворяют условию $r \ll l$. Напряженность поля в точке 1, расположенной в непосредственной близости от «положительного» торца, вычисляется как поле заряженной плос-

кости с поверхностным зарядом $+\sigma'$ и равна $E_1 = \frac{P}{2\varepsilon_0}$ (см., например,

задачу 1.4 или 1.27). Вкладом удаленного «отрицательного» торца можно пренебречь, поскольку его можно рассматривать как точечный заряд $-q = -P\pi r^2$, находящийся на удалении $2l$ от точки 1. Модуль напря-

женности поля этого заряда $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2l)^2} = \frac{P \cdot r^2}{16\varepsilon_0 l^2} \ll E_1$. В равноудален-

ной от торцов точке 2 напряженность поля можно вычислять как скалярную сумму полей точечных зарядов $+q$ и $-q$ (рис.1.27,а):

$$E_2 = 2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{P \cdot r^2}{2\varepsilon_0 l^2}. \text{ Векторы } E_1 \text{ и } E_2 \text{ антипараллельны:}$$

$$E_1 = \frac{P}{2\varepsilon_0}, E_2 = -E_1 \frac{r^2}{l^2}.$$

Задача 1.55

Рассмотрим поле заряда q и металлической пластины (рис.1.28,а) и сравним его с полем, создаваемым системой точечных зарядов q и $-q$, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга (рис.1.28б).

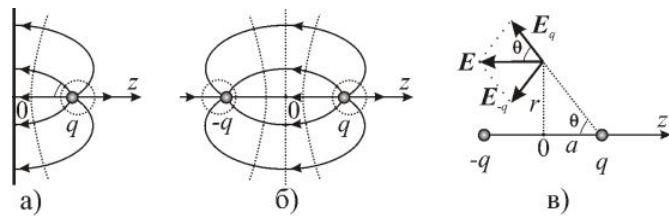


Рис.1.28

В полупространстве $z > 0$ эти поля идентичны. Объяснение этого состоит в следующем. Плоскость $z = 0$ на рис. 1.28,б является, очевидно, одной из эквипотенциальных поверхностей для данной системы зарядов. Действительно, все ее точки равноудалены от одинаковых по величине разноименных зарядов и в соответствии с принципом суперпозиции потенциал любой из них $\varphi = \varphi_{+q} + \varphi_{-q} = 0$. Поэтому, если в плоскости $z = 0$ поместить тонкую проводящую пластину с потенциалом, равным нулю, она не внесет искажений в картину эквипотенциальных поверхностей, изображенных на рисунке пунктирными линиями. Следовательно, и картина силовых линий не изменится, за одним исключением: теперь силовые ли-

нии будут замыкаться не на отрицательном заряде $-q$, а на отрицательных зарядах, индуцированных на поверхности пластины (рис.1.28,а).

Все вышеизложенное служит обоснованием так называемого метода зеркальных изображений. В этом методе (применительно к нашей задаче) вместо взаимодействия заряда q и пластины рассматривается эквивалентное взаимодействие – между зарядами q и $-q$. При этом заряд $-q$, служащий «заменой» для металлической пластины, называют изображающим зарядом.

1. В частности, сила электрического взаимодействия между зарядом q и зарядами, индуцированными на пластине, может быть вычислена как сила взаимодействия между зарядами q и $-q$:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}. \quad (*)$$

2. Аналогично энергия взаимодействия заряда и пластины равна

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}. \quad (**)$$

3. Для выполнения третьей части задания – определения плотности σ зарядов, индуцированных на поверхности пластины, достаточно использовать соотношение (1.3а), которое в проекции на ось z дает: $\sigma = -\varepsilon_0 E$. Вычисление напряженности поля E вблизи пластины как функции расстояния r от начала координат в рамках метода зеркальных изображений проиллюстрировано на рис.1.28,в. Используя принцип суперпозиции, получим $E = E_q + E_{-q}$. Отсюда следует, что

$$E = 2E_q \cos\theta = \frac{2q^2 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + r^2)}. \text{ В свою очередь, } \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Объединив эти выражения, получим окончательно

$$\sigma = -\frac{qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (***)$$

В заключение подчеркнем, что метод зеркальных изображений успешно применяется лишь в тех случаях, когда удается заменить проводящее тело такой системой изображающих зарядов, которая создавала бы поле с эквипотенциальной поверхностью, совпадающей с поверхностью изображаемого проводящего тела.

Задача 1.69

По определению (1.3в) емкость конденсатора

$$C = q/U. \quad (*)$$

Предположим, что известна величина стороннего заряда q на его обкладках. Вычисление напряжения U между обкладками конденсатора как функции этого заряда проводится в несколько этапов.

1. Начнем с определения величины электрического смещения D поля в конденсаторе, для чего используем теорему Остроградского-Гаусса для вектора D (формула 1.2б). Выберем замкнутую цилиндрическую поверхность, один из торцов которой расположен внутри, а другой – вне пространства между обкладками (рис.1.29). Будем считать, что поле вектора D вне обкладок отсутствует, а между обкладками оно однородно и направлено вдоль оси x (рис.1.29). Тогда поток вектора D через выбранную поверхность состоит лишь из потока через ее внутренний торец: $\Phi_D = D\Delta S$, где ΔS – площадь торца.

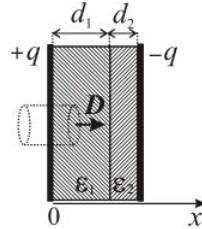


Рис.1.29

Количество стороннего заряда внутри выбранной поверхности также пропорционально площади торца: $q_{\text{внутр}} = q\Delta S/S$. В соответствии с (1.2б) справедливо равенство $\Phi_D = q_{\text{внутр}}$, из которого легко находим смещение $D = q/S$.

2. Напряженность электрического поля как функцию x найдем с помощью соотношения (1.2д):

$$E(x) = \begin{cases} E_1 = q/\epsilon_1\epsilon_0 S & \text{при } 0 < x < d_1, \\ E_2 = q/\epsilon_2\epsilon_0 S & \text{при } d_1 < x < d_1 + d_2. \end{cases} \quad (**)$$

3. Очередной этап – определение напряжения U между обкладками. Очевидно, его можно вычислить как сумму напряжений на двух однородных участках:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2. \quad (***)$$

4. Объединив выражения (*) – (***), получим

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{(d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2)}. \quad \text{Подстановка численных значений параметров дает}$$

значение $C = 35,4 \cdot 10^{-8}$ Ф.

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

2.1. Плотность тока. Подвижность носителей заряда

Основные определения

✓ Сила и плотность электрического тока:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad j = \frac{dI}{dS} n, \quad (2.1a)$$

где n – орт направления тока, dS – участок поперечного сечения проводника.

✓ В проводнике с концентрацией носителей заряда n

$$j = en v_{\text{др}}, \quad (2.1б)$$

где $v_{\text{др}}$ – дрейфовая скорость носителей заряда (средняя скорость упорядоченного движения).

✓ Закон Ома в дифференциальной форме:

$$j = \sigma E = E/\rho, \quad (2.1в)$$

где $\sigma = en\mu$ – удельная проводимость, ρ – удельное сопротивление проводника, μ – подвижность носителей заряда.

✓ Уравнение непрерывности для стационарного тока:

$$\nabla \cdot j = 0. \quad (2.1г)$$

2.1. Вычислить дрейфовую скорость электронов в проводнике с концентрацией свободных электронов $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ при плотности тока $j = 100 \text{ А/см}^2$. Сравнить эту скорость со средней квадратичной скоростью

теплового движения электронов $u_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$ при комнатной температуре.

2.2. Вычислить подвижность электронов из предыдущей задачи, если известно, что значение плотности тока $j = 100 \text{ А/см}^2$ достигается при напряженности электрического поля в проводнике $E = 5,00 \text{ мВ/м}$.

2.3. Проводимость меди составляет $\sigma = 6,2 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$, концентрация электронов проводимости $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Вычислить: а) подвижность электронов; б) их дрейфовую скорость во внешнем поле $E = 1000 \text{ В/м}$.

2.4. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с проницаемостью $\epsilon = 7,00$ и удельным сопротивлением $\rho = 10^{11}$ Ом·м. Емкость конденсатора $C = 3$ нФ. Найти силу тока утечки через конденсатор при подаче на него напряжения $U = 2$ кВ.

2.5*II. Плоский конденсатор заполнен двухслойным диэлектриком. Параметры слоев таковы: $\rho_1 = 10$ ГОм·м, $\rho_2 = 20$ ГОм·м, толщина $d_1 = 2$ мм, $d_2 = 1$ мм. Определить плотность тока утечки, если на конденсатор подано напряжение $U = 100,0$ В.

2.6*. Через $\tau = 5$ мин после отключения плоского бумажного ($\epsilon = 2,1$) конденсатора от источника заряд на обкладках вследствие утечки уменьшается вдвое. Вычислить удельное сопротивление бумажной диэлектрической прокладки.

2.7*. Катод и анод электронной лампы представляют собой коаксиальные цилиндры радиусами r_0 и R (рис.2.1). Их осевая длина $l \gg R > r_0$. Найти зависимость плотности тока от расстояния r до оси электродов, если сила анодного тока равна I .

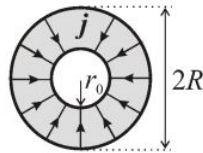


Рис.2.1

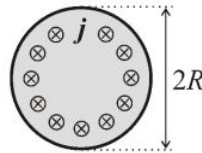


Рис.2.2

2.8*. В цилиндрическом проводе (рис.2.2) радиусом R зависимость плотности тока от расстояния r до оси провода при определенных условиях имеет вид $j = j_0 \exp\left(-\frac{R-r}{r_s}\right)$, где по-

стоянный параметр j_0 – плотность тока вблизи поверхности, а r_s – так называемая толщина скин-слоя. Найти полный ток, текущий по проводу, считая, что $r_s \ll R$.

2.9*. Скорость электронов в пучке v , концентрация электронов в пучке зависит от расстояния r до оси пучка по закону $n = n_0 \exp(-r^2/r_0^2)$, где r_0 – эффективный радиус пучка, а n_0 – концентрация электронов на его оси. Найти силу тока в пучке.

2.10*. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора (радиусы обкла-

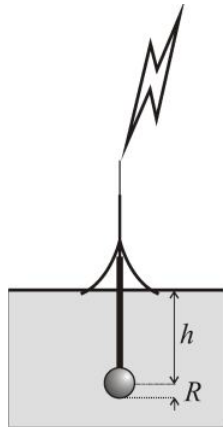


Рис.2.3

док R_1 и $R_2 > R_1$, осевая длина $l \gg R_{1,2}$) заполнено слабопроводящим изотропным материалом, проницаемость которого ϵ , а удельное сопротивление ρ . Определить ток утечки в конденсаторе при заданном напряжении U между обкладками.

2.11*. То же для сферического конденсатора, радиусы обкладок которого R_1 и $R_2 > R_1$.

2.12*. Громоотвод представляет собой проводящий стержень с металлическим шаром на конце (рис. 2.3). Радиус шара $R = 8$ см. Выполнить оценку силы тока в громоотводе при попадании в него разряда молнии напряжением $U = 2 \cdot 10^6$ В. Считать, что глубина заземления $h \gg R$. Среднее значение удельного сопротивления ρ грунта принять равным 10^4 Ом·см.

2.2. Электродвижущая сила. Правила Кирхгофа

Основные определения

✓ Электродвижущая сила (э.д.с.) равна работе сторонних сил по перемещению единичного заряда:

$$\xi = \frac{A_{\text{стор}}}{q}. \quad (2.2a)$$

✓ Закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с.:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}, \quad (2.2б)$$

где R_{12} и ξ_{12} – электрическое сопротивление и э.д.с. участка, φ_1 и φ_2 – значения потенциала на границах участка.

✓ Правила Кирхгофа:

$$\sum_{\text{в узле}} I_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\text{по контуру}} I_k R_k = \sum_{\text{по контуру}} \xi_k. \quad (2.2в)$$

✓ Сопротивление цилиндрического резистора длиной l и площадью поперечного сечения S :

$$R = \rho l / S. \quad (2.2г)$$

✓ Сопротивление цепи последовательных и параллельных резисторов:

$$R = \sum R_k \quad \text{и соответственно} \quad 1/R = \sum (1/R_k). \quad (2.2д)$$

2.13. Точечный заряд $Q = +2$ нКл закреплен в начале координат. Имеется некий механизм, способный перемещать произвольный положительный заряд q из точки с координатами r_1 (6см,0,0) в точку с координатами r_2 (2см,0,0). Чему равна э.д.с. этого механизма?

2.14. Определить разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ на зажимах источника ($\xi = 4$ В, внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом), включенного в некоторую цепь. Направления тока, идущего через источник, показаны на рис. 2.4,а,б,в ($I_1 = 0, I_2 = 2$ А, $I_3 = 10$ А).

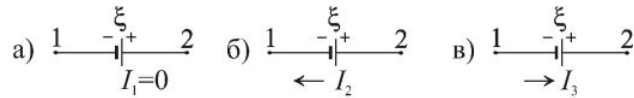


Рис.2.4

2.15. По участку цепи с сопротивлением R течет постоянный ток силой I . Может ли при этом разность потенциалов на концах участка равняться нулю?

2.16.П. Под конец зарядки аккумулятора при силе тока в цепи $I_1 = 3$ А идеальный вольтметр, подключенный к зажимам аккумулятора, показывает $U_1 = 4,25$ В (рис.2.5,а). В начале разрядки того же аккумулятора при силе тока $I_2 = 4$ А показания вольтметра $U_2 = 3,9$ В (рис.2.5,б). Определить: а) ЭДС ξ ; б) внутреннее сопротивление r аккумулятора.

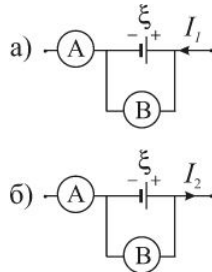


Рис.2.5

2.17. Элемент, у которого $\xi = 1,1$ В и $r = 1$ Ом, замкнут на внешнее сопротивление (нагрузку) $R = 9$ Ом. Найти: а) напряжение U на нагрузке; б) напряжение U_r на внутреннем сопротивлении; в) ток короткого замыкания $I_{кз}$ этого элемента.

2.18. Имеются два одинаковых элемента с э.д.с. $\xi = 2,0$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,3$ Ом. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить больший ток в нагрузке, если ее сопротивление: а) $R = 0,2$ Ом; б) $R = 16,0$ Ом? Найти токи в каждом из этих случаев.

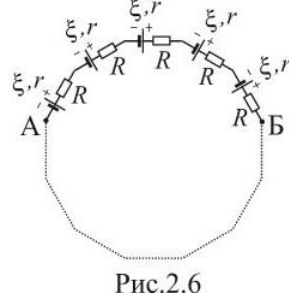


Рис.2.6

2.19. N одинаковых источников с ЭДС ξ , внутренним сопротивлением r и такое же число одинаковых сопротивлений R образуют замкнутую цепь из N звеньев (рис.2.6). Найти разность потенциалов между точками А и Б, делящими цепь на N и $N - n$ звеньев, где n — любое целое число в интервале $0 < n < N$.

2.20. К участку цепи, изображенной на рис.2.7, подходит ток $I = 1$ А. Сопротивления $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. ЭДС источника $\xi = 20$ В; его внутренним сопротивлением можно пренебречь. Найти токи I_1 и I_2 в ветвях и разность потенциалов $\Delta\varphi_{AB}$ между узлами А и Б.

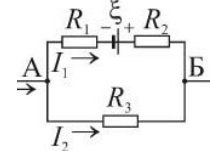


Рис.2.7

2.21. На рис. 2.8 $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом. Вольтметр показывает $U_B = 200$ В, сопротивление вольтметра $R_B = 800$ Ом. Определить ЭДС батареи, пренебрегая ее сопротивлением.

2.22. Найти разность потенциалов между точками 1 и 2 схемы (рис.2.9). Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

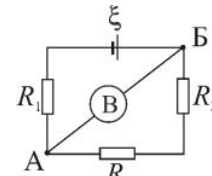


Рис.2.8

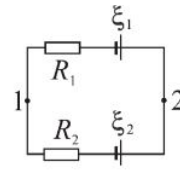


Рис.2.9

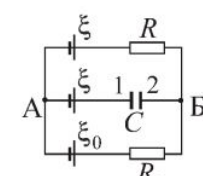


Рис.2.10

2.23*. В схеме на рис. 2.10 известны ЭДС источников, сопротивления R и R_0 , а также емкость конденсатора C . Найти: а) заряд на обкладке 1 конденсатора; б) разность потенциалов между точками А и Б.

2.24*. Два источника тока с ЭДС $\xi_1 = 2$ В и $\xi_2 = 1,5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,5$ Ом и $r_2 = 0,4$ Ом включены параллельно сопротивлению $R = 2,0$ Ом (рис.2.11). Определить силу тока через это сопротивление.

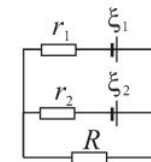


Рис.2.11

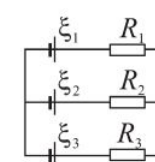


Рис.2.12

2.25*. Три источника с ЭДС $\xi_1 = 1,5$ В, $\xi_2 = 2$ В, $\xi_3 = 2,5$ В и три резистора с сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом соединены, как показано на рис. 2.12. Определить: а) силу тока в резисторе R_1 ; б) разность потенциа-

лов между точками А и Б. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

2.26*. В цепи (рис. 2.13) известно сопротивление R_1 , а также ЭДС ξ источника. Показания вольтметра, подключаемого к резисторам по очереди, равны соответственно U_1 и U_2 . Определить: а) сопротивление вольтметра R_B ; б) сопротивление R_2 . Сопротивление источника $r = 0$.

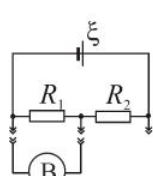


Рис.2.13

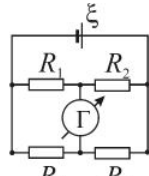


Рис.2.14

2.27*. В мосте Уитстона (рис.2.14) номиналы резисторов подобраны так, чтобы ток через гальванометр был равен нулю. Определить R_4 , если значения R_1 , R_2 и R_3 известны.

2.28.П. Гальванометр с ценой деления I_0 (в амперах) и внутренним сопротивлением r употребляется как вольтметр с добавочным сопротивлением R . Какова будет цена деления?

2.29. Имеется прибор с ценой деления 10 мкА. Шкала прибора разбита на 100 делений; его внутреннее сопротивление $r_0 = 100$ Ом. Как из этого прибора сделать: а) вольтметр для измерения напряжений до 100В; б) амперметр для измерения тока до 1А?

2.30*. Определить систематическую погрешность измерения сопротивления R в схеме (рис.2.15), возникающую из-за неидеальности вольтметра ($R_B = 5 \cdot 10^3$ Ом). Вычисления выполнить для значений измеряемого сопротивления: а) $R = 1000$ Ом; б) $R = 10$ Ом.

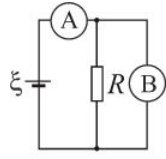


Рис.2.15

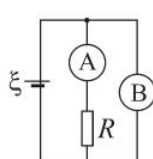


Рис.2.16

2.31*. То же для схемы, изображенной на рис. 2.16, в которой погрешность возникает из-за неидеальности амперметра ($R_A = 2$ Ом). Вычисления выполнить для тех же значений измеряемого сопротивления.

2.3. Работа и мощность в цепях постоянного тока

Основные определения

✓ Мощность тока и тепловая мощность (закон Джоуля-Ленца):

$$P = IU \text{ и } P = I^2 R. \quad (2.3a)$$

✓ Объемная плотность тепловой мощности (удельная мощность тока):

$$w = \rho j^2 = \sigma E^2. \quad (2.3б)$$

✓ Коэффициент полезного действия (к.п.д.) цепи

$$\eta = \frac{P_{\text{полезная}}}{P_{\text{затраченная}}} \cdot 100\%. \quad (2.3в)$$

2.32. Лампа накаливания мощностью (по номиналу) 60 Вт предназначена для работы в сети напряжением 220 В. Найти мощность, потребляемую этой лампой, если она включена в сеть напряжением 127 В. Считать, что сопротивление лампы не зависит от приложенного к ней напряжения.

2.33. Решить предыдущую задачу при условии, что $R_1 = 0,9R_2$, где R_1 и R_2 – рабочее сопротивление лампы при напряжении 127 В и 220 В соответственно.

2.34. Лампа накаливания и сопротивление $r = 10$ Ом, соединенные последовательно, подключены к источнику тока; при этом напряжение на лампе $U = 40$ В. Найти силу тока в цепи, если она (цепь) потребляет мощность $P = 120$ Вт.

2.35. Сопротивление нагревательной обмотки электрочайника $R = 16$ Ом. Определить время τ закипания в нем $m = 600$ г воды, имеющей начальную температуру $t_1 = 10^\circ \text{C}$, если на нагревание воды идет $\eta = 60\%$ выделяемой тепловой мощности. Напряжение в сети $U = 120$ В. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/кг·К.

2.36. Чайник имеет две секции нагревательной проволоки. Время доведения до кипения определенного количества воды после включения первой или второй секции равно $t_1 = 10$ мин или $t_2 = 20$ мин. Найти время закипания того же количества воды от той же начальной температуры после одновременного включения обеих секций а) последовательно; б) параллельно. К.п.д. чайника во всех случаях одинаков.

2.37*. Для накала нити электронной лампы требуется напряжение $U_1 = 3,80$ В при силе тока $I_1 = 0,65$ А. Диаметр нити уменьшился на 10% вследствие испарения. Найти: а) напряжение U_2 ; б) силу тока I_2 , необходимые для того, чтобы поддерживать прежнюю температуру накала. Считать, что скорость теплоотдачи с единицы поверхности нити зависит только от ее температуры.

2.38*. Сколько тепла выделится в спирали с сопротивлением $R = 75 \text{ Ом}$ при прохождении через нее количества электричества $q = 100 \text{ Кл}$, если ток в спирали: а) равномерно убывал до нуля в течение $\Delta t = 50 \text{ с}$; б) монотонно убывал до нуля так, что через каждые $\Delta t = 2,0 \text{ с}$ он уменьшался вдвое?

2.39. В задаче 2.14 найти работу, совершенную источником за время $t = 600 \text{ с}$.

2.40*П. В цепи (рис.2.17) известны ЭДС источника ξ и его внутреннее сопротивление r . С помощью движка реостата сопротивление нагрузки можно изменять от нуля до некоторого максимального значения R_M , практически эквивалентного разрыву цепи. Определить в зависимости от силы тока I : а) мощность P источника; б) мощность P_R , выделяемую на нагрузке; в) мощность P_r тепловых потерь на внутреннем сопротивлении источника; г) к.п.д. η цепи. Построить графики. Сопротивлением амперметра и проводов пренебречь.

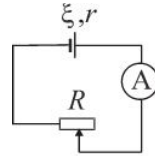


Рис.2.17

2.41. Получить выражение для к.п.д. η цепи, изображенной на рис.2.17, если известны: а) внутреннее сопротивление r источника и сопротивление R нагрузки; б) ЭДС ξ источника и напряжение U на нагрузке.

2.42. Найти: а) внутреннее сопротивление r источника; б) его ЭДС ξ , если известно, что, независимо от положения ключа К (рис.2.18), мощность P_R , выделяемая во внешней цепи, равна 12 Вт . Сопротивления резисторов равны $R_1 = 2,0 \text{ Ом}$ и $R_2 = 18,0 \text{ Ом}$.

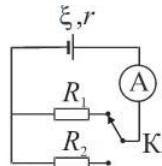


Рис.2.18

2.43. Электромотор постоянного тока подключили к напряжению U . Сопротивление обмотки якоря равно R . Определить: а) значение тока I_M через обмотку, при котором полезная мощность мотора будет максимальной; б) соответствующее значение P_M этой мощности; в) к.п.д. η мотора, работающего в режиме максимальной мощности.

2.44. ЭДС батареи $\xi = 20 \text{ В}$. При сопротивлении внешней цепи $R = 2,0 \text{ Ом}$ сила тока $I = 4 \text{ А}$. При каком внешнем сопротивлении R_x к.п.д. источника будет $\eta = 99\%$?

2.45. ЭДС батареи $\xi = 12,0 \text{ В}$, сила тока короткого замыкания $I_{кз} = 5,0 \text{ А}$. Какую максимальную мощность может дать батарея во внешнюю цепь?

2.46. Определить: а) ЭДС ξ ; б) внутреннее сопротивление r источника, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4,00 \text{ А}$ развивается мощность $P_1 = 10,00 \text{ Вт}$, а при силе тока $I_2 = 2,00 \text{ А}$ – мощность $P_2 = 8,00 \text{ Вт}$.

2.47*. Для нормальной работы некоторого устройства необходимо потребление электрического тока мощностью $P = 100 \text{ Вт}$. Каково минимальное значение силы тока, обеспечивающее это условие, если используется источник постоянного напряжения $U = 120 \text{ В}$, а сопротивление подводящих проводов $R = 20 \text{ Ом}$?

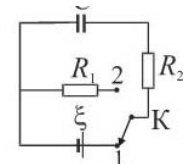


Рис.2.19

2.48*. Конденсатор емкостью $C = 5,00 \text{ мкФ}$ подключили к источнику постоянной ЭДС $\xi = 200 \text{ В}$ (рис.2.19). Затем ключ К был переведен в положение 2. Найти количество тепла, выделившееся на сопротивлении $R_1 = 500 \text{ Ом}$, если $R_2 = 330 \text{ Ом}$.

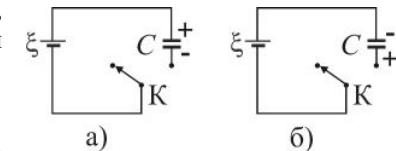


Рис.2.20

2.49*П. Источник ЭДС ξ при помощи ключа К замыкают на конденсатор емкостью C , который был предварительно заряжен до напряжения $U = 3\xi$. При этом положительная клемма источника соединяется с положительно заряженной обкладкой конденсатора (рис.2.20,а). Определить: а) работу $A_{\text{стоп}}$, совершенную в процессе перезарядки конденсатора; б) приращение ΔW электрической энергии, запасенной в конденсаторе; в) количество тепла Q , выделившееся в окружающую среду. Каков будет ответ, если клеммы источника соединить с противоположными по знаку заряда обкладками конденсатора (рис.2.20,б)? Потерями энергии на излучение пренебречь.

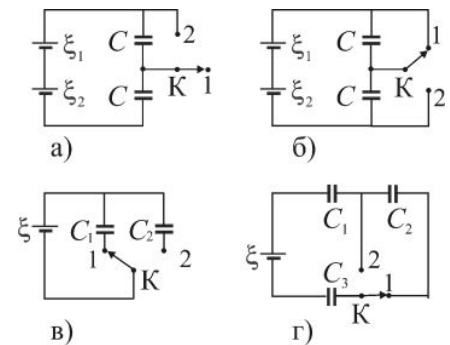


Рис.2.21

2.4. Примеры решения задач

Задача 2.5

Под током утечки в задаче понимается ток между обкладками заряженного конденсатора, возникающий из-за того, что проводимость $\sigma = 1/\rho$ диэлектрических слоев отлична от нуля.

Прежде чем приступить непосредственно к решению задачи, обоснуем следующее утверждение: если между обкладками конденсатора поддерживается постоянное напряжение, вектор плотности тока является непрерывной функцией координат. Применительно к плоскому конденсатору, изображенному на рис.2.24, это значит, что

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}, \quad (*)$$

где \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 значения плотности тока в соответствующих слоях диэлектрика. Действительно, в случае неравенства этих векторов на границе раздела слоев накапливался бы электрический заряд; в результате напряжение и ток между обкладками не могли бы оставаться постоянными, что противоречит условию задачи. По сути, соотношение (*) является частным случаем закона сохранения заряда (формула 2.1г).

1. С учетом вышесказанного, а также закона Ома в дифференциальной форме (2.1в), значения напряженности электрического поля в слоях удельным сопротивлением ρ_1 и ρ_2 равны соответственно

$$E_1 = j\rho_1 \text{ и } E_2 = j\rho_2. \quad (**)$$

2. С другой стороны, подобно тому, как это было показано в примере к задаче 1.69, напряжение между обкладками равно сумме напряжений в слоях: $U = E_1d_1 + E_2d_2$. С учетом формул (**) после элементарных преобразований получаем

$$j = \frac{U}{d_1\rho_1 + d_2\rho_2} = 2,5 \text{ мкА.}$$

Задача 2.16

Из закона Ома для участка цепи, содержащего э.д.с. (2.2б), следует, что показания вольтметра

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \xi - Ir. \quad (*)$$

При этом следует помнить, что выражения (2.2б) и (*) справедливы в случае положительного направления тока (при котором источник ЭДС совершает положительную работу, как на рис. 2.5,б). Что касается процесса зарядки аккумулятора (рис.2.5,а), работу над ним совершает внешний

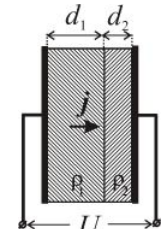


Рис.2.24

2.50*. Какое количество тепла Q выделится в электрических цепях при переводе ключа К из положения 1 в положение 2 (рис.2.21,а-г)? Величины э.д.с. и значения емкостей, изображенных на рисунке, считать известными. Потерями энергии на излучение пренебречь.

2.51*. Решить задачу 1.80 в предположении, что в процессе удаления пластины конденсатор остается подключенным к источнику постоянного напряжения U .

2.52. Найти количество теплоты, выделившееся в единицу времени в единице объема медного провода при плотности тока $j = 300 \text{ кА/м}^2$. Удельная проводимость меди $\sigma_{\text{меди}} = 6,2 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$.

2.53*. В задаче 2.10 получить выражение для зависимости удельной мощности тока w от r , где r – расстояние от оси цилиндрического конденсатора.

2.54*. Аналогичную зависимость $w(r)$ получить для сферического конденсатора (задача 2.11). Здесь r – расстояние от центра сферических обкладок.

2.55*. Диск, толщина которого h пренебрежимо мала по сравнению с его радиусом a , выполнен из однородного материала с проводимостью σ (рис.2.22). Имеются два контакта: один круглый, радиусом b , – в центре диска, другой кольцеобразно охватывает диск по его периметру. Найти объемную плотность выделившейся тепловой энергии $\frac{dQ}{dV}$ как функцию

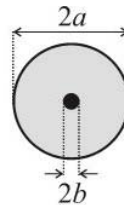


Рис.2.22

расстояния r от центра диска, если к контактам приложен кратковременный прямоугольный импульс тока длительностью τ и величиной I . Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, ответить на вопрос: какая часть диска (центральная или периферийная) нагревается сильнее?

2.56*. Металлический шарик радиусом a находится на расстоянии l ($l \gg a$) от безграничной идеально проводящей плоскости $z = 0$. Все полупространство $z > 0$ заполнено однородной слабопроводящей средой с удельным сопротивлением ρ . Написать выражения для плотности тока \mathbf{j} и удельной мощности тока

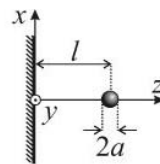


Рис.2.23

w в зависимости от радиус-вектора \mathbf{r} , если разность потенциалов между шариком и плоскостью равна U . Начало координат расположено в ближайшей к шарiku точке проводящей плоскости (рис.2.23).

источник с большей электродвижущей силой, чем ЭДС аккумулятора. При этом ток через аккумулятор течет в отрицательном направлении, а показания вольтметра

$$U = \xi + Ir. \quad (**)$$

Будучи применены к условиям задачи, выражения (*) и (**) дают систему уравнений для определения неизвестных величин ξ и r :

$$\begin{aligned} U_1 &= \xi + I_1 r; \\ U_2 &= \xi - I_2 r. \end{aligned} \quad (***)$$

Решение системы уравнений (***) имеет вид:

$$\text{а) } \xi = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2} = 4,1 \text{ В; б) } r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2} = 0,05 \text{ Ом.}$$

Задача 2.28

Будем рассматривать гальванометр с добавочным сопротивлением R как единый прибор (рис.2.25). Пусть в цепи гальванометра течет ток I_0 . При этом показания гальванометра равны цене одного деления его шкалы. В то же время напряжение между клеммами 1 и 2 равно $U_{12} = I_0(r + R)$. Очевидно, это напряжение имеет смысл цены деления шкалы вновь созданного прибора.

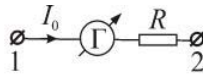


Рис.2.25

Задача 2.40

Применительно к цепи, изображенной на рис.2.17, второе правило Кирхгофа (2.2в) дает $I(R + r) = \xi$. В зависимости от положения движка реостата сопротивление нагрузки R может принимать любое значение в интервале $0 \leq R < \infty$. Максимальное значение силы тока I в цепи достигается при крайней левой позиции движка реостата и называется током короткого замыкания $I_{кз}$. Из условия задачи следует, что $I_{кз} = \xi/r$. В крайней правой позиции движка $I = \xi/(R_m + r) \approx 0$. Здесь учтено, что данная позиция движка эквивалентна разрыву цепи. Таким образом, диапазон возможных значений силы тока определяется системой неравенств $0 < I \leq \xi/r$.

1. По определению мощностью источника называют работу сторонних сил за единицу времени: $P = dA_{\text{стор}}/dt$.

В соответствии с (2.2а) получаем:

$$P = d\xi q/dt = \xi dq/dt = \xi I. \quad (*)$$

График этой зависимости изображен на рис. 2.26,а. Источник развивает максимальную мощность при коротком замыкании ($P_M = \xi I_{кз} = \xi^2/r$).

2. Мощность P , вырабатываемая источником ЭДС, и тепловые мощности P_R и P_r , выделяющиеся на сопротивлении нагрузки и внутреннем сопротивлении источника, связаны соотношением $P = P_R + P_r$. Зависимость мощности тепловых потерь P_r от силы тока дается непосредственно выражением (2.3а): $P_r = I^2 r$. Для того чтобы получить выражение для полезной мощности $P_R = I^2 R$ как функции силы тока I и заданных параметров источника ξ и r , воспользуемся полученными выше выражениями (в частности, формулой *)

$P_R = P - P_r = I\xi - I^2 r = I(\xi - Ir)$. Итак,

$$\begin{aligned} P_R &= I(\xi - Ir); \\ P_r &= I^2 r. \end{aligned} \quad (**)$$

Графики зависимостей $P_R(I)$ и $P_r(I)$ см. на рис. 2.26б и 2.26в соответственно. Анализ формул (**) показывает, что максимальное значение полезной мощности $P_{RM} = \xi^2/4r$ достигается при положении движка, которое соответствует значению сопротивления нагрузки $R = r$. При этом мощность тепловых потерь P_r также равна $\xi^2/4r$. В обоих крайних положениях, соответствующих короткому замыканию и разрыву цепи, полезная мощность $P_R = 0$.

3. Коэффициент полезного действия (к.п.д.) цепи определяется как отношение мощности, выделяемой на нагрузке, к мощности источника ЭДС. Воспользовавшись формулами (*) и (**), получим

$$\eta = P_R/P = 1 - Ir/\xi. \quad (***)$$

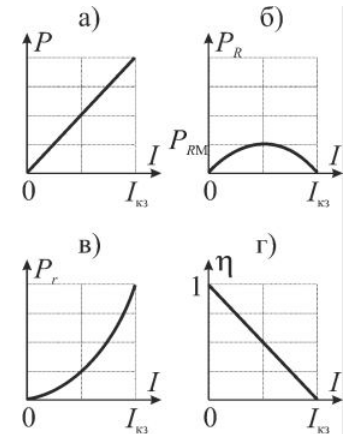


Рис.2.26

* Это равенство отражает происходящий в цепи процесс превращения энергии, запасенной в источнике э.д.с., в тепловую форму.

При $R = r$, когда на нагрузке выделяется максимальная мощность, к.п.д. цепи $\eta = 0,5$ (рис.2.26,г).

Задача 2.49

1. Для вычисления работы сторонних сил необходимо предварительно определить количество заряда, протекающего между клеммами источника э.д.с. после замыкания ключа К. Введем обозначения: q_1 и q_2 – величина заряда на обкладках конденсатора до и после замыкания ключа. Соответствующие значения напряжения между обкладками:

$$U_1 = 3\xi \text{ и } U_2 = \xi.$$

Поэтому $q_1 = CU_1 = 3C\xi$, а $q_2 = CU_2 = C\xi$. Искомый заряд, перенесенный между клеммами источника, $\Delta q = q_2 - q_1 = -2C\xi$. Знак этого заряда в условиях данной задачи оказался отрицательным. Так получается потому, что заряд перемещается от положительной клеммы к отрицательной, то есть против направления действия сторонних сил. Таким образом, работа источника отрицательна (см. определение 2.2а):

$$A_{\text{стоп}} = \xi \Delta q = -2C\xi^2. \quad (*)$$

2. Аналогично, используя определение (1.3д), вычислим изменение энергии конденсатора после его перезарядки:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{CU_2^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = -4C\xi^2. \quad (**)$$

3. Учитывая, что потерями энергии на излучение предлагается пренебречь, уравнение энергетического баланса можно записать в виде $A_{\text{стоп}} = \Delta W + Q$, где Q – джоулевское тепло, рассеянное в проводах цепи и на внутреннем сопротивлении источника (см. предыдущий пример). С учетом формул (*) и (**) окончательно получим

$$Q = A_{\text{стоп}} - \Delta W = 2C\xi^2.$$

3. МАГНИТОСТАТИКА

3.1. Магнитное поле в вакууме

Основные определения

✓ Магнитное поле точечного заряда, движущегося со скоростью v ($v \ll c$):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (3.1a)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда.

✓ Закон Био - Савара:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}\mathbf{r}]}{r^3} dV \text{ или } d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3}. \quad (3.1б)$$

✓ Поток Φ_M вектора \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность S :

$$\Phi_M = \oiint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \equiv 0. \quad (3.1в)$$

✓ Циркуляция вектора \mathbf{B} , как функция алгебраической суммы токов I , пронизывающей контур циркуляции:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (3.1г)$$

✓ Магнитный момент плоского контура с током I :

$$\mathbf{p}_M = IS\mathbf{n}, \quad (3.1д)$$

где \mathbf{n} – правовинтовая нормаль к площади S контура.

3.1. В круговом витке радиусом $R = 100$ мм, изготовленном из тонкого провода, циркулирует ток $I = 1,0$ А. Найти магнитную индукцию: а) в центре витка; б) на оси витка в точке, отстоящей от центра на расстоянии $x = 100$ мм.

3.2П. Найти магнитную индукцию B , создаваемую прямым бесконечно длинным проводником, по которому течет ток I на расстоянии r_0 от проводника.

3.3. Определить величину магнитной индукции B , создаваемую током I , текущим по прямому тонкому проводу (рис.3.1) в точках 1 и 2. Расстояния a и b от этих точек до провода, а также углы θ_1 и θ_2 считать известными.

3.4. По двум длинным параллельным проводам, находящимся на расстоянии $a = 5,0$ см друг от друга, протекают токи $I_1 = I_2 = 10$ А. Определить индукцию B магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии

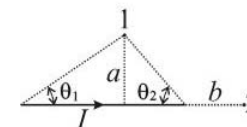


Рис.3.1

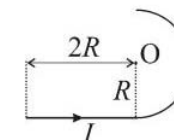


Рис.3.2

$b = 3,0$ см от каждого провода. Задачу решить для случаев, когда токи текут: а) в одном направлении; б) навстречу друг другу.

3.5. Найти индукцию B магнитного поля в центре прямоугольного контура, если известны его диагональ d , угол между диагоналями φ и сила тока в контуре I .

3.6. Найти индукцию B магнитного поля в центре контура, представляющего собой равносторонний треугольник со стороной a . Сила тока в контуре I .

3.7. Сила тока в проводнике, состоящем из прямого участка длиной $2R$ и полуокружности радиусом R (рис.3.2), равна I . Определить магнитную индукцию B , создаваемую в точке O , являющейся центром полуокружности.

3.8. Круговой виток радиусом $R = 15,0$ см расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. При этом нормаль n к плоскости витка направлена точно на провод (рис.3.3). Сила тока в проводе $I_1 = 1,0$ А, сила тока в витке $I_2 = 5,0$ А. Расстояние от точки O (центра витка) до провода $d = 20,0$ см. Определить магнитную индукцию в центре витка.

3.9. Провод с током I изогнут, как показано на рис. 3.4,а-г. Определить в каждом случае магнитную индукцию B в центре закруглений (точка O). Параметры, изображенные на рисунках, считать известными.

3.10. Полусфера радиусом R ориентирована относительно однородного магнитного поля B так, что магнитный поток Φ_M через нее принимает максимальное значение. Чему он равен?

3.11*П. По длинному проводнику цилиндрической формы течет однородный ток плотностью j . Радиус сечения проводника равен R . Найти индукцию магнитного поля B как функцию расстояния r от оси проводника.

3.12*. То же, если плотность тока $j = ar^n$, где a и n – положительные постоянные.

3.13*. Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределенного: а) по плоско-

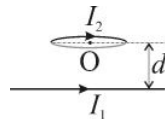


Рис.3.3

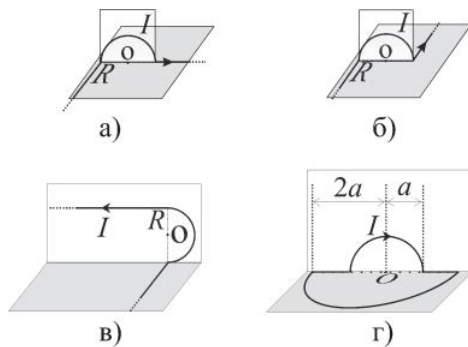


Рис.3.4

сти с линейной плотностью* $j_{\text{л}}$; б) по двум параллельным плоскостям с линейными плотностями $j_{\text{л}}$ и $-j_{\text{л}}$.

3.14*. Однородный ток плотностью j течет внутри неограниченной пластины толщиной $2d$ параллельно ее поверхности. Найти индукцию магнитного поля как функцию расстояния x от средней плоскости пластины.

3.15*. Найти плотность тока как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B = br^\alpha$, где b и α – положительные постоянные.

3.16*. Соленоид представляет собой катушку длиной l и радиусом сечения $R \ll l$ (рис.3.5). На катушку вплотную намотано N витков из тонкого провода, по которым течет ток I . Найти индукцию магнитного поля в точках 1 и 2.

3.17*. На тороид, размеры которого указаны на рис.3.6, вплотную намотано N витков из тонкого провода. Сила тока в витках равна I . Найти индукцию B в плоскости симметрии тороида как функцию расстояния r от его центра.

3.18*. Определить магнитный момент p_M : а) соленоида (задача 3.16); б) контура, изображенного на рис.3.4г; в) тороида (задача 3.17, при условии $\frac{2\pi b}{N} < a - b \ll b$).

3.19*. Тонкое кольцо массой $m = 10,0$ г и радиусом $R = 8,0$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\lambda = 10$ нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой $\nu = 15$ с⁻¹ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определить: а) магнитный момент p_M кругового тока, создаваемого кольцом; б) отношение магнитного момента к моменту импульса L кольца.

3.20*. Сфера радиусом R , несущая на себе равномерно распределенный по ее поверхности заряд q , вращается вокруг сво-

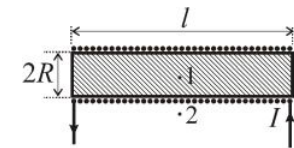


Рис.3.5

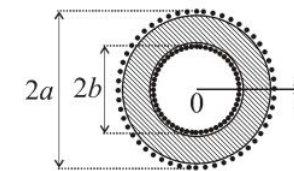


Рис.3.6

* Линейная плотность тока определяется, как сила тока, отнесенная к единице длины поперечного сечения проводника.

ей оси симметрии с угловой скоростью ω . Найти магнитный момент p_m этой сферы.

3.21*. То же для шара, заряд которого q равномерно распределен по его объему.

3.2. Сила Лоренца. Сила Ампера*

Основные определения

✓ Сила Лоренца и сила Ампера:

$$F_{\text{Л}} = q[vB], \text{ и } dF_A = I[dlB]. \quad (3.2a)$$

✓ Энергия контура с магнитным моментом p_m в магнитном поле

B :

$$W = -p_m B. \quad (3.2б)$$

✓ Сила и момент силы, действующие на контур:

$$F = \nabla (p_m B) \text{ и } M = [p_m B]. \quad (3.2в)$$

3.22. Две заряженные частицы движутся в одном направлении с одинаковой скоростью v . Найти максимальное значение отношения $F_{\text{Л}}/F_{\text{К}}$ сил магнитного и кулоновского взаимодействия между частицами.

3.23. Электрон описывает в магнитном поле окружность радиусом $R = 4,0$ мм. Скорость электрона $v = 3,5 \cdot 10^6$ м/сек. Найти индукцию магнитного поля.

3.24. Определить частоту ν вращения электрона по круговой орбите в магнитном поле, индукция B которого равна $0,2$ Тл.

3.25. Электрон вращается в однородном магнитном поле B по круговой орбите радиусом R . Определить кинетическую энергию T электрона.

3.26П. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в вакууме в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Определить радиус окружности, описываемой электроном.

3.27. Протон влетает со скоростью $v = 10^3$ м/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60^\circ$ к линиям индукции. Определить ради-

ус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться протон, если модуль вектора индукции магнитного поля равен $B = 10^{-3}$ Тл.

3.28*. Электрон движется в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0,2$ мТл по винтовой линии. Определить скорость v электрона, если радиус винтовой линии $R = 3,0$ см, а шаг $h = 9,0$ см.

3.29*. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0,5$ кВ, движется параллельно прямолинейному длинному проводнику на расстоянии $r = 1,0$ см от него. Определить силу, действующую на электрон, если ток в проводнике $I = 10$ А.

3.30*. Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны скоростям ионов. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом $R_1 = 5,0$ см, второй ион – по окружности радиусом $R_2 = 2,5$ см. Найти отношение m_1/m_2 масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

3.31*. В установке для масс-спектрометрического анализа пучок двукратно ионизированных атомов, ускоренных разностью потенциалов $U = 1,00$ кВ, попадает в однородное магнитное поле $B = 0,02$ Тл, ориентированное перпендикулярно по отношению к скорости ионов в пучке. Определить химический состав пучка, если его радиус кривизны в магнитном поле оказался равным $R = 0,32$ м.

3.32*. В установке для разделения изотопов ^{235}U и ^{238}U пучок S однократно ионизированных ионов урана с энергией $W = 5,0$ кэВ попадает в однородное магнитное поле, ориентированное перпендикулярно по отношению к скорости ионов в пучке. В поле пучки разделяются и, совершив полуоборот, попадают в приемники (рис.3.7). Для эффективного разделения пучков расстояние между ними на выходе должно быть не меньше $l = 5$ мм. Найти: а) индукцию B магнитного поля, удовлетворяющую этому условию; б) время t , необходимое для полного разделения $m = 1,0$ кг природного урана при силе ионного тока в пучке $I = 5,0$ мА.

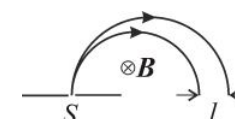


Рис.3.7

3.33*. В некоторой области пространства имеются однородные электрическое и магнитное поля, причем векторы E и B сонаправлены (рис.3.8). Заряженная частица в таком поле движется по винтовой линии с переменным шагом. Получить выражение для шага винтовой линии в зависимости от номера n витка, если известны заряд q (положительный) частицы, ее масса m , начальная

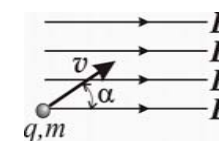


Рис.3.8

* Во всех задачах этого раздела скорость заряженных частиц мала по сравнению со скоростью света в вакууме ($v \ll c$).

скорость v и угол α (острый) между начальной скоростью и силовыми линиями полей.

3.34*. В некоторой области пространства однородные электрическое и магнитное поля \mathbf{E} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны (рис.3.9). Частица с положительным зарядом q и массой m начинает движение из начала координат без начальной скорости. Определить траекторию частицы. Каков будет ответ, если обладает начальная скорость частицы

$$v_0 = \frac{E}{B} \mathbf{e}_z ?$$

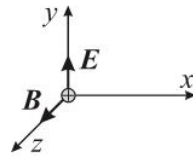


Рис.3.9

3.35*. Простейший магнитогидродинамический (МГД) генератор представляет собой плоский конденсатор, между обкладками которого прокачивают жидкость с удельной проводимостью σ (рис.3.10). Конденсатор находится в магнитном поле \mathbf{B} , направленном перпендикулярно как скорости v потока жидкости, так и обкладкам конденсатора. Найти: а) ЭДС генератора; б) мощность P_R , выделяемую на сопротивлении R . Площадь S пластин конденсатора и расстояние d между ними известны.

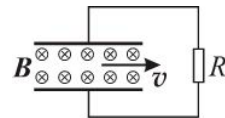


Рис.3.10

3.36. Через сечение $S = ab$ металлической пластинки толщиной $a = 0,1$ мм пропускают ток $I = 5,0$ А. Пластика помещена в магнитное поле $B = 0,5$ Тл, перпендикулярное ребру b и направлению тока. Вычислить возникающую при этом поперечную разность потенциалов, если концентрация n электронов проводимости в металле равна 10^{29} м^{-3} .

3.37. Пластика полупроводника толщиной $a = 0,2$ мм помещена в магнитное поле $B = 1$ Тл, направленное вдоль стороны a . Удельное сопротивление полупроводника $\rho = 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Перпендикулярно полю вдоль пластинки пропускается ток $I = 0,1$ А; при этом возникает поперечная разность потенциалов $U = 3,25$ мВ. Определить подвижность μ носителей тока в полупроводнике.

3.38. По двум прямым параллельным проводам длиной l каждый, находящимся на расстоянии d друг от друга, текут одинаковые токи I . Пренебрегая краевыми эффектами, определить силу F взаимодействия токов.

3.39. Плоский квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле индукцией $B = 1,0$ Тл. Определить работу A , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей

через середину его противоположных сторон, на угол: а) $\varphi_1 = 90^\circ$; б) $\varphi_2 = 3^\circ$.

3.40. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 25 \text{ см}^2$. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60° . Определить вращающий момент сил, действующий на рамку, если сила тока в нем $I = 1,0$ А.

3.41. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл находится прямоугольная рамка длиной $a = 8,0$ см и шириной $b = 5,0$ см, содержащая $N = 100$ витков тонкой проволоки. Ток в рамке $I = 1,0$ А, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определить: а) магнитный момент рамки; б) вращающий момент сил, действующий на рамку.

3.42. По трем прямым параллельным проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 100$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F , действующую на отрезок длиной $l = 1,0$ м каждого провода.

3.43. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом $R = 10$ см, текут одинаковые токи $I = 10$ А. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между этими плоскостями равно 1 мм (рис.3.11,а).

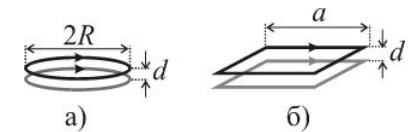


Рис.3.11

3.44. По двум плоским одинаковым квадратным контурам со стороной $a = 20$ см текут токи $I = 10$ А в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответственными сторонами контуров равно 2 мм (рис.3.11,б).

3.45*. Определить энергию и силу взаимодействия двух атомов, обладающих одинаковыми по величине магнитными моментами p_m и находящимися на большом по сравнению с размерами атомов расстоянии r друг от друга (рис.3.12,а,б,в).

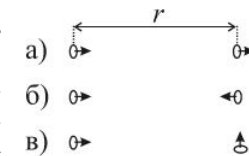


Рис.3.12

3.46*П. Провод, изогнутый в виде полуокружности радиусом R , находится в однородном магнитном поле, линии индукции \mathbf{B} которого перпендикулярны плоскости провода. Найти силу Ампера, действующую на провод, если сила тока в нем равна I .

3.47*. Часть прямоугольного контура с током I расположена в полупространстве с индукцией магнитного поля \mathbf{B}_1 , другая часть – в поле \mathbf{B}_2 ($\mathbf{B}_2 \perp \mathbf{B}_1$). Диагональ контура совпадает с границей раздела полупространств (рис.3.13). Найти: а) силу Ампера, действующую на контур; б) энергию контура в магнитном поле. Длины сторон контура a и b известны.

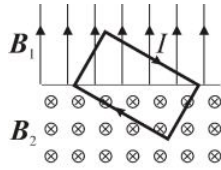


Рис.3.13

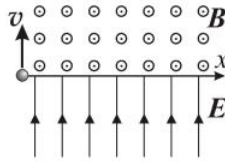


Рис.3.14

3.48*. Половина пространства заполнена однородным магнитным полем \mathbf{B} , другая половина – однородным электрическим полем \mathbf{E} , как показано на рис.3.14. Одна из декартовых осей координат (Ox) проходит вдоль границы раздела обоих полупространств. Положительно заряженная частица, величина заряда которой q и масса m известны, расположена на этой границе. В момент времени $t=0$ ей сообщили скорость \mathbf{v} , перпендикулярную границе раздела полупространств. Определить траекторию частицы в последующем движении и максимальную глубину L ее проникновения в область электрического поля. Потерями энергии на излучение пренебречь.

3.3. Магнитное поле в веществе

Основные определения

✓ Намагниченность \mathbf{J} и циркуляция намагниченности в веществе (магнетике):

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_{mi}}{\Delta V} \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{J} d\mathbf{l} = I', \quad (3.3a)$$

где \mathbf{p}_{mi} – магнитные моменты молекул магнетика, I' – алгебраическая сумма молекулярных токов, пронизывающих контур интегрирования.

✓ Напряженность магнитного поля и его циркуляция:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I, \quad (3.3b)$$

где I – алгебраическая сумма макроскопических токов, пронизывающих контур интегрирования.

✓ В изотропном магнетике:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (3.3b)$$

где χ – магнитная восприимчивость, μ – магнитная проницаемость магнетика.

✓ Условия на границе раздела двух магнетиков:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2\tau} = H_{1\tau}, \quad J_{2\tau} - J_{1\tau} = j'_l, \quad (3.3г)$$

где $j'_l = I'/l$ – линейная плотность молекулярных токов на границе, l – поперечная ширина границы раздела.

✓ Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w_m = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (3.3д)$$

3.49. Внутри длинного воздушного соленоида, в витках которого течет постоянный ток, известна индукция \mathbf{B} . Как изменится эта величина, а также напряженность \mathbf{H} магнитного поля, если соленоид заполнить ферромагнитным сердечником с магнитной проницаемостью μ ?

3.50. В условиях предыдущей задачи найти приращение ΔW энергии магнитного поля во всем объеме V соленоида. Краевыми эффектами пренебречь.

3.51. Найти максимально достижимую намагниченность (намагниченность насыщения J_s) ферромагнетика, если концентрация атомов железа в нем $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Магнитный момент атомов железа считать равным одному магнетону Бора (μ_B).

3.52. В магнетике проницаемостью μ имеется цилиндрическая полость, осевая длина которой во много раз превышает ее радиус (рис.3.15,а). Индукция магнитного поля в точке 1 вблизи середины полости равна \mathbf{B}_1 . Определить величины \mathbf{B}_2 и \mathbf{H}_2 в точке 2, расположенной внутри полости вблизи ее середины.

3.53. То же в а) случае, когда осевая длина полости мала по сравнению с радиусом ее сечения (рис.3.15,б).

3.54. В однородное магнитное поле поместили пластину из однородного парамагнетика с магнитной проницаемостью μ . Пластина ориентирована перпендикулярно линиям \mathbf{B} . Определить: а) напряженность \mathbf{H} магнитного поля в парамагнетике; б) намагниченность \mathbf{J} парамагнетика.

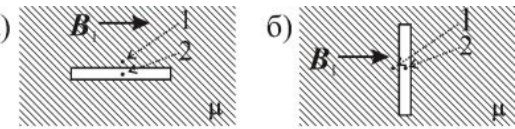


Рис.3.15

3.55.П. Изотропный ферромагнетик однородно намагнитили, поместив его во внешнее поле. В результате величина индукции магнитного поля B_1 в вакууме вблизи плоской границы раздела с ферромагнетиком стала равна $0,02$ Тл. Кроме того, известно, что угол α_1 между вектором B_1 и нормалью к границе раздела равен 30° (рис.3.16,а). При этих условиях магнитная проницаемость ферромагнетика $\mu = 10$. Найти: а) угол α_2 между вектором индукции B_2 в ферромагнетике и нормалью к границе раздела; б) линейную плотность j'_l молекулярных токов на этой границе.

3.56. Значения напряженности магнитного поля по обе стороны границы раздела двух ферромагнетиков с проницаемостями $\mu_1 = 10$ и $\mu_2 = 20$ равны соответственно $H_1 = 50,0$ А/м и $H_2 = 29,1$ А/м (рис.3.16,б). Найти значения углов α_1 и α_2 между линиями напряженности H и нормалью к границе раздела ферромагнетиков.

3.57*П. Цилиндрический стержень, изготовленный из изотропного парамагнетика, служит сердечником для длинного соленоида с линейной плотностью витков n . Магнитная проницаемость вещества стержня μ , сила тока в витках соленоида I . Вблизи середины стержня определить величины: а) напряженности магнитного поля H ; б) индукции B ; в) намагниченности J ; г) линейной плотности молекулярных токов j'_l .

3.58*. Часть бесконечно длинного соленоида заполнена однородным изотропным парамагнетиком. Длина заполненного участка

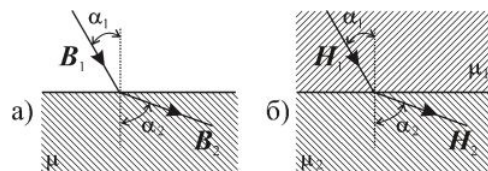


Рис.3.16

равна $2l$. Известно, что в витках соленоида течет постоянный ток. Изобразить: а) примерные графики зависимости величин магнитной индукции $B(x)$, напряженности $H(x)$ и намагниченности $J(x)$ на оси соленоида внутри и вне заполненного участка, где x – расстояние от его центра; б) примерную картину векторных полей B , H , и J .

3.59*П. Длина средней линии ферритового сердечника тороида $l = 20$ см, длина воздушного зазора $\Delta l = 0,2$ см. Число витков тороида $N = 200$, а сила тока в них $I = 0,5$ А. Известно, что при этих условиях магнитная проницаемость феррита $\mu = 200$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти индукцию магнитного поля в тороиде на его средней линии.

3.60*. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца $d = 20$ см. Ширина зазора $b = 2,0$ мм, а индукция магнитного поля в зазоре $B = 0,04$ Тл. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти напряженность H магнитного поля внутри магнита.

3.61*. На постоянный магнит, имеющий форму цилиндра длины $l = 15$ см, намотано равномерно $N = 300$ витков тонкого провода. При пропускании по нему тока $I = 3,0$ А поле вне магнита исчезло. Найти коэрцитивную силу H_c материала магнита.

3.62*. На рис.3.17 изображена предельная петля гистерезиса ферромагнетика, из которого изготовлен цилиндрический сердечник для соленоида. Каковы потери энергии за один цикл перемагничивания этого сердечника? Длина сердечника $l = 10$ см, радиус поперечного сечения $R = 4,0$ мм.

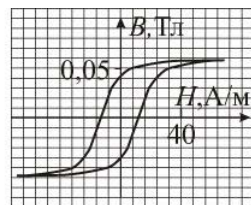


Рис.3.17

3.4.Примеры решения задач

Задача 3.2

Обозначим произвольную точку пространства из числа находящихся на расстоянии r_0 от проводника буквой N . Выделим векторный элемент тока Idl , как показано на рис. 3.18. Этот элемент в соответствии с законом Био-Савара (3.16) создает в точке N магнитное поле, индукция которого

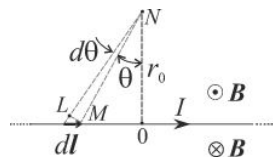


Рис.3.18

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3},$$

где \mathbf{r} – вектор, проведенный из точки M в точку N ;

его длина однозначно определяется положением выбранного элемента тока (значением угловой координаты θ на рис. 3.18):

$$r = MN = r_0 / \cos\theta. \quad (*)$$

Полагая, что свойства векторного произведения читателю известны, отметим без комментариев, что независимо от положения элемента тока вектор $d\mathbf{B}$ в точке N направлен «на нас»; его величина с учетом формулы (*):

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin(\angle OMN) r dl}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \cos\theta dl}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \cos^3\theta}{4\pi r_0^2} dl. \quad (**)$$

Очевидно, суммарный вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$ также направлен «на нас». Отметим, что это утверждение справедливо для всех точек пространства, принадлежащих верхней полуплоскости на рис.3.18.

Для вычисления величины B достаточно проинтегрировать выражение (***) по всей длине проводника. Эта процедура окажется наименее трудоемкой, если мы предварительно выразим элемент длины проводника dl через соответствующее приращение $d\theta$ (рис.3.18). Проведем бесконечно малый отрезок ML перпендикулярно к отрезку $MN = r$. Длина $ML = dl \cdot \sin(\angle OMN) = dl \cdot \cos\theta$. С другой стороны, рассматривая узкий треугольник NML , имеем $ML = r d\theta$. Таким образом, $dl \cdot \cos\theta = r d\theta$, откуда, с учетом (*), следует $dl = r_0 d\theta / \cos^2\theta$. После этой подстановки

выражение (***) принимает вид $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \cos\theta}{4\pi r_0} d\theta$. Проинтегрировав это

выражение по всему интервалу возможных значений θ (поскольку проводник считается бесконечно длинным, этот интервал определяется неравенствами $-\pi/2 < \theta < \pi/2$), получим окончательно

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

Итак, величина вектора магнитной индукции \mathbf{B} в точке N однозначно определяется расстоянием от этой точки до проводника. В то же время направление \mathbf{B} определяется направлением вектора, соединяющего точки O и N . В частности, во всех точках нижней полуплоскости рис.3.18 вектор \mathbf{B} направлен от нас. Вообще, вектор \mathbf{B} направлен по касательной к окружности радиусом r_0 с центром в точке O .

Задача 3.11

Мы считаем, что целесообразно предварить решению задачи пояснение к теореме о циркуляции (формула 3.1г). Рассмотрим контур, изображенный пунктиром на рис. 3.19,а. Выделим векторный элемент длины $d\mathbf{l}$ этого контура. Циркуляцией вектора \mathbf{B} по контуру называется замкнутый интеграл от скалярного произведения $\mathbf{B} d\mathbf{l} = B \cos\alpha dl = B_l dl$, где α – угол между вектором \mathbf{B} и элементарным вектором $d\mathbf{l}$, а B_l – проекция \mathbf{B} на касательное к контуру направление $d\mathbf{l}$.

Кружок на символе интегрирования « \oint » означает, что интегрирование ведется вдоль всего замкнутого контура. При этом направление $d\mathbf{l}$ каждого из элементов контура должно соответствовать направлению того элемента, который выделен на рисунке. В данном случае выбор направления $d\mathbf{l}$ соответствует обходу контура по часовой стрелке. Можно доказать (предоставляем Вам сделать это самостоятельно), что результат интегрирования не зависит от выбора точки контура, с которой начинается интегрирование.

Теорема утверждает, что результат интегрирования зависит только от алгебраической суммы токов, пересекающих площадь, ограниченную выбранным контуром. При этом току присваивается положительный знак, если его направление и направление обхода контура связано правилом правого винта (буравчика). В противном случае ток считается отрицательным. В нашем примере положительный знак имеют токи, отмеченные символом « \otimes ». Это токи I_1 , I_3 и I_4 .

В силу всего вышесказанного циркуляция магнитной индукции по контуру, изображенному на рис.3.19,а, равна

$\oint B dl = \oint B_1 dl = \mu_0(I_1 - I_2 + I_3)$. Ток I_4 не дает вклада в алгебраическую сумму поскольку протекает «мимо» контура.

Приступим к решению задачи. На рис. 3.19,б представлено перпендикулярное сечение цилиндрического проводника с током. Плотность тока \mathbf{j} в проводнике распределена симметрично относительно его оси симметрии и направлена «от нас». На основании соображений симметрии мы можем утверждать, что все точки пространства, находящиеся на одинаковом расстоянии r от этой оси, физически эквивалентны. В частности, величина магнитной индукции поля, создаваемого током проводника, зависит только от этого расстояния: $B = B(r)$. Кроме того, соображения симметрии

и закон Био-Савара (3.1б) доказывают нам, что вектор \mathbf{B} в любой точке перпендикулярен как плотности тока \mathbf{j} , так и вектору \mathbf{r} (рис.3.19,б). Все эти рассуждения можно резюмировать следующим образом: симметрия токов такова, что силовые линии индукции \mathbf{B} представляют собой систему окружностей, коаксиальных с проводником. (Ср. с задачей 3.2П).

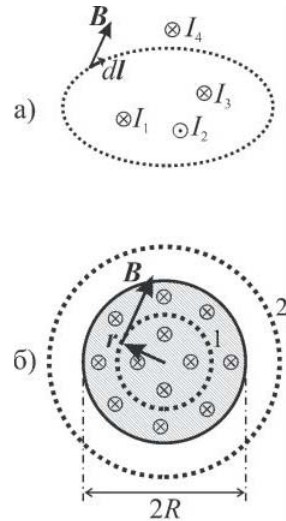


Рис.3.19

1. Рассмотрим часть пространства ($0 < r \leq R$), заключенную внутри проводника. Для определения зависимости $B(r)$ с помощью теоремы о циркуляции (3.1г) выберем в качестве контура интегрирования окружность «1» радиусом r , изображенную пунктиром на рис.3.19,б. Вектор \mathbf{B} в любой точке этого контура направлен по касательной к нему. Поэтому скалярное произведение $\mathbf{B} d\mathbf{l} = B_1 dl = B dl$. Таким образом, циркуляция \mathbf{B} равна $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r$. Здесь использовано то обстоятельство, что величина B является константой во всех точках контура; поэтому она может быть вынесена за знак интегрирования. Кроме того, учтено, что сумма всех элементарных длин в контуре $\oint dl$ является попросту длиной этого контура, равной $2\pi r$.

Перейдем к вычислению суммарной силы тока I , протекающего через площадь $S = \pi r^2$, ограниченную выбранным контуром. Вообще, в соответствии с определением плотности тока для этого необходимо вычислить интеграл по указанной площади: $I = \iint_S j_n dS$. В нашем случае,

поскольку $j_n = j = \text{const}$, вычисления упрощаются: $I = jS = j\pi r^2$.

Итак, выражение 3.1г, примененное к рассматриваемому контуру, принимает вид $B \cdot 2\pi r = \mu_0 j\pi r^2$, откуда после сокращений получим

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2}. \quad (*)$$

Формула (*) справедлива для произвольного значения r в интервале $0 < r \leq R$.

2. В области $r > R$ все рассуждения о симметрии токов и значений вектора магнитной индукции \mathbf{B} остаются в силе. Поэтому циркуляция вектора \mathbf{B} вдоль окружности «2» радиусом $r > R$ по-прежнему равна $B \cdot 2\pi r$. Процедура же вычисления суммарной силы тока нуждается в корректировке. Плотность тока, пронизывающего окружность «2», не равна нулю только в заштрихованной части рис.3.19,б. Поэтому теперь в качестве площади интегрирования необходимо ограничиться именно этой частью, иными словами, площадью поперечного сечения проводника: $I = j\pi R^2$. Таким образом, применение теоремы о циркуляции приводит к соотношению $B \cdot 2\pi r = \mu_0 j\pi R^2$, откуда, в свою очередь, следует, что вне проводника зависимость $B(r)$ имеет вид $B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$.

3. Итак, окончательный ответ: $B = \begin{cases} \mu_0 jr/2, \text{ при } r \leq R; \\ \mu_0 jR^2/2r, \text{ при } r > R. \end{cases}$

Задача 3.26

Схема эксперимента изображена на рис.3.20. Электроны, генерированные на катоде 1, ускоряются в электрическом поле на участке 1–2. В точке 2 они приобретают кинетическую энергию $\frac{m_e v^2}{2} = eU$; следовательно, скорость электронов достигает значения

$$v \cong \sqrt{2eU/m_e}. \quad (*)$$

С этой скоростью электроны движутся по инерции на участке 2–3 и попадают в однородное магнитное поле, индукция B которого направлена перпендикулярно скорости электронов v . В магнитном поле на каждый из этих электронов действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = q[vB] = -e[vB]$; она (по определению векторного произведения) перпендикулярна скорости. Поэтому сила Лоренца в отличие от силы Кулона не совершает работы над электроном.* Из этого следует, что: А) кинетическая энергия и вместе с ней величина скорости электрона остаются постоянными; Б) ускорение электрона (по II-му закону Ньютона)

$$a = F_{\text{Л}}/m_e \quad (**)$$

перпендикулярно его скорости (центростремительное ускорение).

Итак, скорость электронов v меняется только по направлению. Чтобы определить радиус кривизны траектории, спроецируем векторное равенство (**) на ось x , параллельную ускорению: $a = v^2/R = evB/m_e$. Отсюда с учетом формулы (*) получаем выражение для радиуса кривизны траектории в виде:

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}. \quad (***)$$

При выводе было учтено, что угол между векторами v и B в условиях задачи равен 90° . Поэтому величина силы Лоренца

$$F_{\text{Л}} = evB \sin 90^\circ = evB.$$

* Разумеется, это свойство силы Лоренца универсально и относится к любой заряженной частице в магнитных полях любой конфигурации.

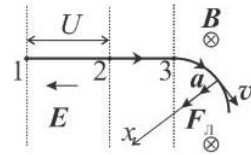


Рис.3.20

Поскольку поле B по условию однородно, радиус кривизны траектории электронов R – постоянная величина. Таким образом, траектория электронов представляет собой окружность, а формула (***) может служить ответом для рассматриваемой задачи. Подстановка численных значений параметров дает $R = 1,1$ см.

Задача 3.46

1. Выделим произвольный векторный элемент длины проводника $d\mathbf{l}$, совпадающий по направлению с током (рис.3.21,а). На этот элемент действует сила Ампера $d\mathbf{F}_A = I[d\mathbf{l}B]$. Величина этой силы $dF_A = IB \sin 90^\circ dl = IBdl$; ее проекции на оси координат равны соответственно $dF_{Ax} = IB \sin \varphi dl$ и $dF_{Ay} = IB \cos \varphi dl$, где φ – угол между вектором $d\mathbf{F}_A$ и осью Oy (рис.3.20,а). Проинтегрируем эти выражения по всей длине провода, то есть в интервале значений $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. При этом учтем, что величина $dl = R d\varphi$. Получим

$$F_{Ax} = IRB \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = IBR (\cos(-\pi/2) - \cos(\pi/2)) = 0, \quad (*)$$

$$F_{Ay} = IRB \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = IBR (\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) = 2IRB. \quad (**)$$

Как и следовало ожидать из соображения симметрии, суммарная сила Ампера направлена вдоль оси Oy .

2. Целесообразно рассмотреть еще один способ решения этой задачи. Этот способ особенно удобен в случае, когда проводник расположен в **однородном** магнитном поле.

Вместо проводника, изображенного на рис.3.21,а, рассмотрим замкнутый проводящий контур с током I , содержащий полуокружность радиусом R , как часть. Другая часть представляет собой отрезок длиной $2R$ (рис.3.21,б). В соответствии с формулой (3.2в) действующая на контур сила Ампера выражается через градиент энергии контура:

$$\mathbf{F}_A = -\nabla \cdot W = \nabla \cdot (\mathbf{p}_M \mathbf{B}), \text{ где } \mathbf{p}_M \text{ – магнитный момент контура.}$$

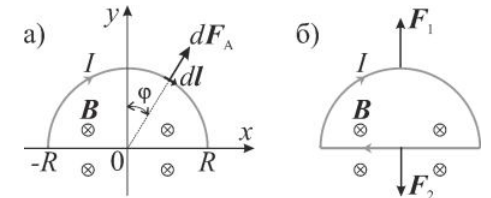


Рис.3.21

Суть предлагаемого метода состоит в том, что в однородном поле энергия контура не зависит от его положения в пространстве. Поэтому градиент энергии и суммарная сила Ампера обращаются в ноль. С другой стороны, эту силу можно представить как векторную сумму двух составляющих: F_1 и F_2 , действующих соответственно на криволинейный и прямой участки контура (рис.3.21,б). Таким образом, мы доказали, что в однородном поле $F_1 + F_2 = 0$, следовательно, эти силы равны по величине. Поскольку величина F_2 , очевидно, равна $2IRB$, для искомой силы F_1 мы вновь получаем выражение (**).

Итак, на проводящую полуокружность с током I , изображенную на рис.3.21,а, действует сила Ампера $F_A = 2IRBe_y$, где e_y – орт (единичный вектор) оси Oy .

Задача 3.55

1. Граничные условия (3.3г) для нормальных проекций вектора магнитной индукции B и касательных проекций вектора напряженности магнитного поля $H = B/\mu\mu_0$ в рассматриваемой ситуации (рис.3.22) принимают вид

$$\begin{aligned} B_1 \cos \alpha_1 &= B_2 \cos \alpha_2; \\ B_1 \sin \alpha_1 &= B_2 \sin \alpha_2 / \mu. \end{aligned} \quad (*)$$

Поделив почленно второе из этих уравнений на первое, получим закон преломления силовых линий магнитного поля в виде $\operatorname{tg} \alpha_2 = \mu \operatorname{tg} \alpha_1$, откуда следует, что $\alpha_2 = \arctg(10 \operatorname{tg} 30^\circ) = 80,2^\circ$.

2. Линейную плотность молекулярных токов на границе раздела можно вычислить непосредственно, используя граничное условие (3.3г) для касательных проекций вектора намагниченности: $j'_l = J_{2\tau} - J_{1\tau}$. Намагниченность вакуума $J_1 = 0$ по определению. Намагниченность ферромагнетика $J_2 = \chi H_2 = \frac{(\mu - 1)B_2}{\mu\mu_0}$. (Здесь применены формулы

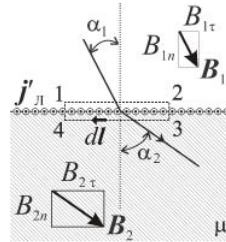


Рис.3.22

(3.3в) на том основании, что ферромагнетик, описанный в условии задачи, изотропен по своим свойствам.) Итак, $J_{1\tau} = 0$, следовательно

$$j'_l = J_{2\tau} = \frac{(\mu - 1)B_{2\tau}}{\mu\mu_0} = \frac{(\mu - 1)B_2 \sin \alpha_2}{\mu\mu_0} \stackrel{\text{с учетом (*)}}{=} \frac{(\mu - 1)B_1 \sin \alpha_1}{\mu_0}. \quad (**)$$

Подстановка численных значений дает $j'_l = 7,2 \cdot 10^4$ А/м.

3. Недостаток приведенного решения состоит в том, что оно оставляет открытым вопрос о направлении молекулярных токов. В этой связи рассмотрим еще один путь решения, основанный на применении теоремы о циркуляции вектора намагниченности (3.3а). При этом подходе информацию о направлении тока дает его знак: направление положительного тока и направление обхода контура связаны правилом правого винта (см. анализ задачи 3.11.П.) В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник 1–2–3–4–1 с направлением обхода по часовой стрелке (рис.3.22). Введем обозначения: l – длина каждой из сторон (1–2) и (3–4), а Δl соответственно длина сторон (2–3) и (4–1). Напомним, что линейная плотность тока определяется как сила тока, приходящаяся на единицу поперечной длины на границе раздела двух сред. Следовательно, выбранный контур пересекает молекулярный ток силой $I' = lj'_l$.

В силу вышесказанного, теорема (3.3а) принимает вид

$$\int_1^2 J dl + \int_2^3 J dl + \int_3^4 J dl + \int_4^1 J dl = lj'_l. \quad (***)$$

Устремим длину боковых сторон контура Δl к нулю так, чтобы при этом сторона (1–2) оставалась в вакууме, а сторона (3–4) – в магнетике. Тогда вкладом в циркуляцию второго и четвертого интегралов в (***) можно пренебречь, в то время как первый интеграл равен нулю по определению (во всех точках участка (1–2) намагниченность $J = J_1 = 0$). Следовательно, циркуляция определяется только интегралом по участку (3–4) контура интегрирования. Здесь, как мы убедились ранее,

$$J = J_2 = \frac{(\mu - 1)B_2}{\mu\mu_0}, \text{ поэтому } \int_3^4 J dl = \frac{(\mu - 1)}{\mu\mu_0} \int_3^4 B_2 dl.$$

Поскольку интеграл от скалярного произведения $B_2 dl$

(см. рис.3.22) равен $\int_3^4 B_2 dl = B_2 \cos(90^\circ + \alpha_2) \int_3^4 dl = -B_2 l \sin \alpha_2$, выражение (***) в совокупности с (*) дает окончательный ответ в виде

$$j'_l = -\frac{(\mu - 1)B_1 \sin \alpha_1}{\mu_0}.$$

Знак «минус» в ответе при выбранном направлении обхода контура указывает на то, что молекулярные токи на границе раздела «вакуум – ферромагнетик» в ракурсе рис.3.22 направлены «на нас».

Задача 3.57

Осевой разрез соленоида с сердечником изображен на рис.3.23,а. Здесь же изображена примерная картина поля вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Обратим внимание на то, что линии \mathbf{B} непрерывны и замыкаются сами на себя. Нетрудно представить себе, как будет изменяться картина этого поля, если при неизменном поперечном сечении соленоида неограниченно увеличивать его длину. Очевидно, повсюду внутри соленоида вдали от его торцов линии \mathbf{B} (а также $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu\mu_0$ и $\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$) можно будет считать прямыми, параллельными оси соленоида. При этом магнитное поле вне соленоида будет стремиться к нулю.

Руководствуясь свойствами данного поля, выберем в качестве контура интегрирования прямоугольник 1–2–3–4–1 с направлением обхода против часовой стрелки (рис.3.23,б). Длину параллельной полю стороны (1–2) обозначим, как и в предыдущем примере, символом l . Тогда количество охватываемых контуром витков соленоида $N = nl$, а суммарная сила пронизывающих контур макроскопических токов равна $IN = Inl$. В соответствии с (3.3а) циркуляция вектора \mathbf{H} определяется именно макроскопическими токами:

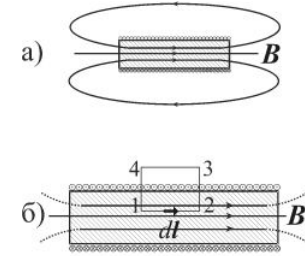


Рис.3.23

На участке (1–2–3–4–1) циркуляция вектора \mathbf{H} определяется именно макроскопическими токами: $\oint_{1-2-3-4-1} \mathbf{H} d\mathbf{l} = Inl$. На участке (3–4) магнитное поле отсутствует; вклад участков (2–3) и (4–1) в циркуляцию также равен нулю*. Таким образом, ненулевой вклад в циркуляцию дает только участок (1–2), где вектор \mathbf{H} параллелен $d\mathbf{l}$: $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_1^2 H dl = Hl = Inl$. Из этого следует, что напряженность поля

$$\mathbf{H} = In; \quad (*)$$

величины магнитной индукции и намагниченности равны соответственно

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 IN \quad \text{и} \quad \mathbf{J} = (\mu - 1)In. \quad (**)$$

Поскольку заполняющий соленоид парамагнетик намагничен, по его цилиндрической поверхности текут круговые молекулярные токи. Для определения линейной плотности j'_l этих токов воспользуемся, как и в примере 3.55.П, теоремой о циркуляции намагниченности. Применительно к контуру (1–2–3–4–1) замкнутый интеграл $\oint \mathbf{J} d\mathbf{l}$ в соответ-

ствии с (3.3а) равен lj'_l . С другой стороны, поскольку $\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$, с учетом (*) или (**) имеем: $\oint \mathbf{J} d\mathbf{l} = (\mu - 1)\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = (\mu - 1)Inl$.

На этом основании запишем равенство $lj'_l = (\mu - 1)Inl$, откуда

$$j'_l = (\mu - 1)In. \quad (***)$$

Из формул (*, **, ***) в частности, следует, что поле в соленоиде вдали от его торцов однородно. Для вычисления поля в воздушном соленоиде достаточно подставить значение магнитной проницаемости $\mu = 1$.

Задача 3.59

Тороидальный соленоид с зазором показан на рис.3.24 в разрезе. Магнитное поле такого соленоида сосредоточено внутри него. Силовые линии вектора магнитной индукции \mathbf{B} непрерывны – они изображены на рисунке сплошными линиями со стрелками. Если пренебречь искажениями поля вблизи зазора, эти линии представляют собой систему концентрических окружностей. Центр этих окружностей совпадает с центром средней линии тороида, изображенной на рис.3.24 пунктиром. Выберем эту линию с направлением обхода по часовой стрелке в качестве контура циркуляции вектора напряженности \mathbf{H} . Повсюду на средней линии $\mathbf{H} d\mathbf{l} = Hdl$.

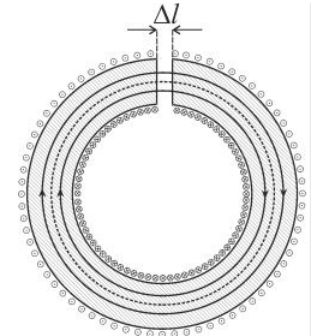


Рис.3.24

Поэтому $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint Hdl = H_1(l - \Delta l) + H_2\Delta l$. Здесь H_1 и H_2 – величины напряженности поля в феррите и воздушном зазоре соответственно, l – общая длина средней линии, а Δl – ширина воздушного зазора (см. рис.3.24). С другой стороны, в соответствии с теоремой о циркуляции (3.3а) $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = NI$, где NI – суммарная сила макроскопического тока через площадь, ограниченную контуром. На рис.3.24 каждый из этих токов отмечен символом « \otimes ». Итак, величины H_1 и H_2 связаны соотношением

$$H_1(l - \Delta l) + H_2\Delta l = NI. \quad (*)$$

Остается учесть, что $B_1 = B_2 = B$, следовательно

$$H_1 = B/\mu\mu_0 \quad \text{и} \quad H_2 = B/\mu_0. \quad (**)$$

Совместное решение системы уравнений (*) и (**) относительно величины магнитной индукции B имеет вид

* На этих участках, там, где $H \neq 0$, вектор $\mathbf{H} \perp d\mathbf{l}$, поэтому $\mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$.

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l + (\mu - 1)\Delta l},$$

а подстановка численных значений параметров дает $B = 4,2 \cdot 10^{-2}$ Тл.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

4.1. Закон электромагнитной индукции

Основные определения

✓ Поток вектора \mathbf{B} через элементарную площадку dS :

$$d\Phi_m = \mathbf{B} d\mathbf{S} = Bn dS, \quad (4.1a)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к площадке.

✓ Потокосцепление в катушке:

$$\Psi = N\Phi_m, \quad (4.1б)$$

где N – число витков, Φ_m – магнитный поток через каждый виток.

✓ Закон Фарадея:

$$\xi_{\text{инд}} = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (4.1в)$$

✓ Коэффициенты само- и взаимной индукции:

$$L = \Psi/I \text{ и } L_{21} = \Psi_2/I_1. \quad (4.1г)$$

✓ Коэффициент самоиндукции (индуктивность) соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S, \quad (4.1д)$$

где l – длина соленоида, S – площадь его поперечного сечения,

$n = N/l$ – линейная плотность витков.

✓ Энергия контура с током и энергия взаимодействия двух контуров:

$$W = LI^2/2 \text{ и } W_{12} = L_{12}I_1I_2. \quad (4.1е)$$

4.1. Указать направление индукционного тока в контуре (рис.4.1), если он помещен в магнитное поле, индукция B монотонно возрастает.

4.2. В контуре в течение некоторого отрезка времени поддерживается постоянная ЭДС индукции, равная ξ_0 . Определить зависимость от времени магнитного потока $\Phi_m(t)$ через этот контур.

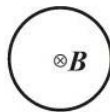


Рис.4.1

4.3. Круглый контур радиусом r , имеющий N витков, помещен в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям. Величина магнитной индукции поля за время τ изменилась на ΔB . Определить средний модуль ЭДС индукции, возникающей в контуре.

4.4. При быстром повороте круглой рамки, состоящей из N витков, на угол $\alpha = 90^\circ$ через нее проходит заряд q . Найти сопротивление R рамки, если известен ее радиус r . Первоначально линии магнитной индукции B перпендикулярны плоскости рамки.

4.5.П. Квадратный проводящий виток со стороной a поместили в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости витка. Затем витку придали форму окружности; при этой деформации длина провода осталась неизменной. Какой заряд протечет через поперечное сечение провода, если сопротивление R витка известно?

4.6. В магнитном поле с индукцией $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x$, где $B_x = 0,05$ Тл, движется проводящий стержень длиной $l = 20,0$ см. Стержень ориентирован параллельно оси Oy , а направление его скорости $v = 1,50$ м/с совпадает с направлением оси Oz . Найти разность потенциалов между концами стержня.

4.7. То же, если стержень вращается в плоскости (y, z) с угловой скоростью $\omega = 20,0$ рад/с: а) вокруг одного из своих концов; б) вокруг своего центра симметрии.

4.8. В однородном магнитном поле ($B = 200$ мТл) равномерно с частотой $\nu = 600$ мин⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную э.д.с., индуцируемую в рамке.

4.9. Ток, протекающий по обмотке катушки, зависит от времени по закону $I = 4 - 2\alpha t$, где α – постоянная величина. Определить ЭДС самоиндукции, возникающую в катушке, если индуктивность катушки L .

4.10. Через катушку, индуктивность L которой равна $0,2$ Гн, протекает ток, изменяющийся по закону $I = I_0 \cos \omega t$, где $I_0 = 2,0$ А, а $\omega = 3,0$ рад/с. Определить закон изменения ЭДС самоиндукции.

4.11. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет $N_1 = 750$ витков и индуктивность $L_1 = 25$ мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2 = 36$ мГн, обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкого провода с таким расчетом, что

длина катушки осталась прежней. Определить число N_2 витков катушки после перемотки.

4.12. Индуктивность L соленоида длиной $l = 1$ м, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна $1,6$ мГн. Площадь S сечения соленоида равна 20 см². Определить число n витков на каждом сантиметре длины соленоида.

4.13. Длинный соленоид индуктивностью $L = 4,0$ мГн содержит $N = 600$ витков. Площадь поперечного сечения соленоида $S = 20$ см². Определить магнитную индукцию поля внутри соленоида, если сила тока I , протекающего по его обмотке, равна 6 А.

4.14*. Две параллельные, расположенные на одной высоте идеально проводящие шины замкнуты резистором R (рис.4.2, вид сверху). Расстояние между шинами l , вектор индукции \mathbf{B} магнитного поля направлен вертикально вниз. Идеально проводящая перемычка массой m может скользить по шинам без трения. В момент времени $t = 0$ ей сообщили начальную скорость v_0 . Определить: а) направление индукцион-

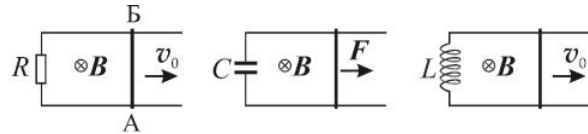


Рис.4.2

Рис.4.3

Рис.4.4

го тока в перемычке; б) путь s , пройденный перемычкой до остановки; в) количество тепла Q , выделившееся на резисторе. Самоиндукцией пренебречь.

4.15*. В системе, описанной в предыдущей задаче, резистор заменили конденсатором C и приложили к перемычке постоянную силу F , направленную параллельно шинам (рис.4.3). Найти ускорение a перемычки.

4.16*. Определить: а) амплитуду x_0 колебаний той же перемычки как функцию ее начальной скорости v_0 ; б) амплитуду I_0 колебаний силы тока в перемычке, если шины замкнуты на катушку индуктивностью L (рис.4.4).

4.17. По соседству расположены два витка проволоки. По первому течет ток $I = 10,0$ А. В цепь второго включен баллистический гальванометр. Полное сопротивление второй цепи $R = 5,00$ Ом. Чему равна взаимная индуктивность L_{12} витков, если при выключении тока через гальванометр проходит заряд $q = 10,0$ нКл?

4.18*. На бесконечный соленоид с n витками на единицу длины и площадью поперечного сечения S намотана катушка из N витков. Найти взаимную индуктивность L_{12} катушки и соленоида. Проницаемость среды, заполняющей соленоид, равна μ .

4.19*П. Два круговых витка расположены так, что их центры совпадают, а нормали образуют угол α . Считая, что радиусы витков удовлетворяют соотношению $R_2 \ll R_1$, найти взаимную индуктивность витков.

4.20*. Определить энергию взаимодействия витков из предыдущей задачи, если сила тока в каждом из них равна I .

4.21*. Найти взаимную индуктивность L_{12} двух витков, центры которых лежат на оси x на расстоянии $l \gg R_1(R_2)$, где $R_{1,2}$ – радиусы витков. Векторы нормалей к плоскости витков направлены вдоль оси x .

4.22*. Квадратная рамка со стороной l , содержащая N витков и подключенная к сопротивлению R , находится на расстоянии a от прямого провода с током I . Первоначально рамка и провод лежат в одной плоскости (рис.4.5). Найти: а) потокосцепление Ψ , пронизывающее витки рамки; б) заряд, протекающий в цепи рамки в результате ее поворота на угол $\pi/2$ вокруг горизонтальной оси, параллельной току.

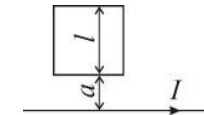


Рис.4.5

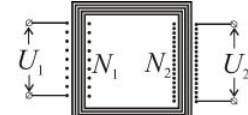


Рис.4.6

4.23*. Определить индуктивность L двухпроводной линии на участке длиной $l = 1,0$ км. Радиус R провода равен $1,0$ мм, расстояние d между осевыми линиями равно $0,4$ м. Учесть только внутренний магнитный поток, т. е. поток, пронизывающий площадь, ограниченную проводами.

4.24. Первичная обмотка трансформатора с железным сердечником (рис.4.6) содержит $N_1 = 600$ витков; количество витков во вторичной обмотке $N_2 = 1200$. Первичная обмотка включена в сеть с напряжением $U_1 = U_{10} \cos \omega t$, амплитуда которого $U_{10} = 100$ В. Считая, что обмотки выполнены из идеального проводника, найти амплитуду U_{20} напряжения на разомкнутой вторичной обмотке.



Рис.4.7

4.25*. По первичной обмотке трансформатора течет ток пилообразной формы (рис.4.7). Построить качественно график зависимости напряжения $U(t)$ в разомкнутой вторичной обмотке трансформатора.

4.26*. Тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом R внесли в область однородного магнитного поля с индукцией \mathbf{B} , перпендикулярной плоскости витка. Считая индуктивность L кольца известной, определить: а) ток I , который возникнет в кольце после внесения его в поле; б) среднее значение магнитной индукции $\langle B \rangle$ на поверхности круга, ограниченного кольцом.

4.27*. В узлах простого кубического каркаса, выполненного из немагнитного материала, закреплены тонкие сверхпроводящие кольца с индуктивностью L (рис.4.8). Все кольца ориентированы параллельно друг другу. Определить магнитную восприимчивость χ этого искусственного вещества. Радиусы колец $r \ll a$, где a – расстояние между соседними узлами.

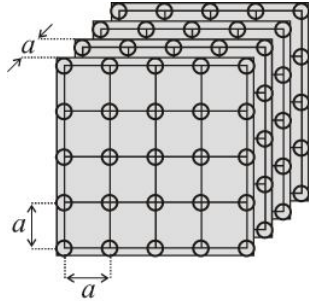


Рис.4.8

4.2. Преобразования Лоренца. Уравнения Максвелла

Основные определения

✓ Здесь и далее K' -система отсчета движется со скоростью $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$ относительно K -системы, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y параллельны.

✓ Преобразования координат и времени:

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad t' = \gamma(t - Vx/c^2), \quad (4.2a)$$

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad t = \gamma(t' + Vx'/c^2) \quad (4.2б)$$

Здесь и далее $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

✓ Интервал между событиями (t_1, \mathbf{r}_1) и (t_2, \mathbf{r}_2) :

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{r}^2, \quad (4.2в)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

✓ Релятивистские импульс и энергия частицы с массой покоя m и скоростью \mathbf{V} :

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V}\gamma \quad \text{и} \quad W = mc^2\gamma \quad (4.2г)$$

✓ Преобразования компонентов электрического и магнитного полей:

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x, \\ E'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + [\mathbf{V}\mathbf{B}]), \quad B'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp + [\mathbf{V}\mathbf{E}]/c^2). \quad (4.д)$$

✓ Ротор векторной функции координат $\mathbf{f}(x, y, z)$:

$$[\nabla \cdot \mathbf{f}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}. \quad (4.2е)$$

✓ Плотность тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4.2ж)$$

✓ Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [\nabla \cdot \mathbf{E}] = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad [\nabla \cdot \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (4.2з)$$

✓ Скорость света в вакууме:

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (4.2и)$$

✓ Объемная плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока электромагнитной энергии (вектор Умова - Пойнтинга):

$$w = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (4.2к)$$

4.28*П. В K' -системе отсчета измерена собственная длина l_0 стержня, ориентированного параллельно ее скорости \mathbf{V} . Используя преобразования (4.2а), определить длину l этого стержня в K -системе.

4.29*. По часам, установленным в K' -системе отсчета, зарегистрировано событие длительностью Δt_0 (собственное время). Чему равна длительность Δt этого события в K -системе?

4.30*. С помощью формул преобразования координат (4.2а) получить формулы преобразования скорости \mathbf{v} .

4.31*. Вычислить интервал между: а) началом и окончанием урока длительностью $\Delta t = 45$ мин; б) стартом и финишем велопробега (время пробега $\Delta t = 45$ мин, расстояние между стартом и финишем по прямой $\Delta r = 40$ км; отправкой и приемом радиосигнала.

4.32*. Сравнить выражения $s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ и $s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$ для интервала в K - и K' -системах.

4.33*. При помощи формул 4.2б вычислить соотношение $W^2/c^2 - P^2$.

4.34. Найти скорость, при которой величина импульса частицы с массой покоя m равна $2mv$.

4.35. При какой скорости кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя?

4.36. Найти зависимость импульса P частицы с массой покоя m от ее кинетической энергии T .

4.37. В K -системе некоторое событие произошло в точке с координатами $(1,00; 1,00; 1,00)$ м в момент $t = 1,00$ с. Определить координаты и время этого события в K' -системе, движущейся со скоростью $V = 0,800c$.

4.38. Два события произошли одновременно (в момент $t = 0$). Разность координат этих событий $\Delta x = 300$ км. Чему равна разность времен $\Delta t'$ событий в K' -системе, скорость которой $V = 0,800c$?

4.39*. Используя результаты решения задачи 4.30, найти относительную скорость двух частиц, движущихся навстречу друг другу с одинаковой скоростью $v = c/2$.

4.40*. Космонавт в состоянии невесомости плавает со скоростью $v' = 5,0$ км/час внутри ракеты перпендикулярно направлению ее движения, чему равна эта составляющая v скорости для наблюдателя, находящегося на Земле, если скорость ракеты $V = 1,8 \cdot 10^8$ м/с?

4.41П*. Определить зависимость напряженности вихревого электрического поля в вакууме от времени, если напряженность магнитного поля от времени не зависит и имеет вид: а) $\mathbf{H} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$; б) $\mathbf{H} = aye_x + bxe_y$? Величины a и b – считать постоянными, причем $a \neq b$.

4.42*. Используя уравнения Максвелла (4.2б), вывести закон сохранения заряда: $\nabla \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$.

4.43*. Напряженность вихревого электрического поля в вакууме имеет вид: а) $\mathbf{E} = bye_x$; б) $\mathbf{E} = a(ye_x + 2ze_y)$;

в) $\mathbf{E} = a(ze_x - ze_y + xe_z)$, где a и b – постоянные величины. Во всех случаях определить зависимость индукции \mathbf{B} магнитного поля от времени.

4.44*. В однородной непроводящей среде с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ создано вихревое магнитное поле с индукцией $\mathbf{B} = \frac{x}{x_0} B_0 \mathbf{e}_z$. Найти: а) ток смещения;

б) вихревую составляющую напряженности \mathbf{E} электрического поля.

4.45*. В предыдущей задаче определить направление потока электромагнитной энергии. Чему равен вектор Умова-Пойнтинга?

4.46*. В длинном воздушном соленоиде с радиусом поперечного сечения $R = 1,0$ см и плотностью витков $n = 10$ вит./см, течет ток. Сила этого тока возрастает с постоянной скоростью: $dI/dt = 100$ А/с. Какова форма линий напряженности вихревого электрического поля \mathbf{E} ? Найти величину E как функцию расстояния r от оси соленоида.

4.47*. Как изменится напряженность E и смещение D в условиях предыдущей задачи, если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с проницаемостью $\epsilon = 2$?

4.48*. Плоский конденсатор, представляющий собой две круглые пластины радиусом a (рис.4.9), заряжают постоянным током I . Найти напряженность магнитного поля \mathbf{H} , возникающего в зазоре между пластинами, в зависимости от расстояния r от оси конденсатора. Толщиной подводящих проводов и краевыми эффектами пренебречь.

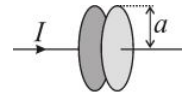


Рис.4.9

4.49*. В предыдущей задаче определить величину плотности потока электромагнитной энергии на боковой (цилиндрической) поверхности конденсатора, а также направление потока энергии через эту поверхность. Краевыми эффектами по-прежнему пренебречь.

4.50*. Точечный заряд q движется с постоянной нерелятивистской скоростью v . Найти плотность тока смещения $\mathbf{j}_{см}$ в точке, находящейся на расстоянии r от заряда на прямой: а) совпадающей с траекторией заряда; б) перпендикулярной к траектории и проходящей через заряд.

4.51*. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, найти напряженность магнитного поля в точке A , расположенной на расстоянии r от заряда и на расстоянии a ($a \ll r$) от его траектории (рис.4.10).

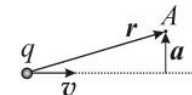


Рис.4.10

4.52*. В инерциальной K -системе имеется только однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ ($B = 0,04$ Тл). Найти: а) вектор \mathbf{E}' ;

б) вектор \mathbf{B}' в инерциальной K' -системе, скорость которой $V = 0,60 \cdot c$. Вектор $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$.

4.53*. В инерциальной K -системе имеется только однородное электрическое поле с напряженностью $E = 8 \text{ кВ/м}$. Найти модуль и направление: а) вектора E' ; б) вектора B' в инерциальной K' -системе, скорость которой $V = 0,60 \cdot c$. Вектор V направлен под углом $\alpha = 45^\circ$ к вектору E .

4.54*. С помощью формул (4.2в) выразить соотношения: а) $E'B'$ и б) $E'^2 - c^2 B'^2$ через величины E и B , характеризующие электрическое и магнитное поле в K -системе.

4.3. Цепи переменного тока

Основные определения

✓ Условие квазистационарности синусоидального тока:

$$l \ll cT, \quad (4.3a)$$

где l – линейный размер цепи, c – скорость света в вакууме, T – период колебаний тока.

✓ Емкостное и индуктивное сопротивления:

$$R_C = 1/\omega C \quad \text{и} \quad R_L = \omega L \quad . \quad (4.3б)$$

✓ Импеданс цепи:

$$Z = U_0 / I_0, \quad (4.3в)$$

где U_0 и I_0 – амплитудные значения напряжения и силы тока.

✓ Эффективный (действующий) ток и эффективное (действующее) напряжение:

$$I_{\text{эф}} = I_0 / \sqrt{2} \quad \text{и} \quad U_{\text{эф}} = U_0 / \sqrt{2}. \quad (4.3г)$$

✓ Мощность в цепи переменного тока:

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi, \quad (4.3д)$$

где φ – сдвиг фаз между током и напряжением.

4.55. Является ли ток частотой $\nu = 1 \text{ МГц}$ квазистационарным, если длина l цепи равна: а) 3м; б) 300м?

4.56П. В участке цепи (рис.4.11) течет квазистационарный синусоидальный ток с постоянной амплитудой. Эффективное напряжение на резисторе оказалось равным $U_R = 6 \text{ В}$, а на конденсаторе $U_C = 8 \text{ В}$. Чему равно эффективное напряжение U_{RC} на всем участке?

4.57. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением $R = 800 \text{ Ом}$, индуктивностью $L = 1,27 \text{ Гн}$ и емкостью $C = 1,59 \text{ мкФ}$. На зажимы цепи подано эффектив-

ное напряжение $U = 127 \text{ В}$ частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. Найти: а) $I_{\text{эф}}$; б) сдвиг фаз φ между током и напряжением; в) мощность P , выделяющуюся в цепи.

4.58*. В цепи, изображенной на рис.4.12, известны значения параметров C и R . Найти: а) зависимость импеданса Z ; б) сдвига фаз φ между током и напряжением от круговой частоты ω напряжения, поданного на цепь. Построить примерные графики функций $Z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

4.59*. Построить векторные диаграммы токов и напряжений в цепях, изображенных на рис. 4.13,а,б,в.

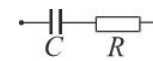


Рис.4.11

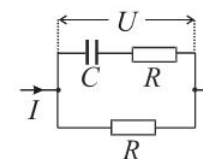


Рис.4.12

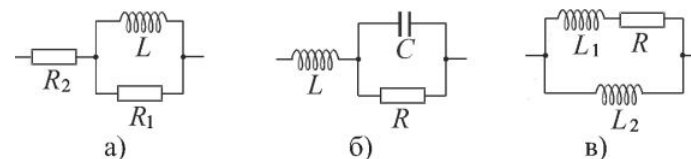


Рис.4.13

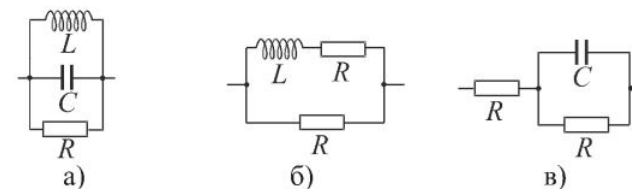


Рис.4.14

4.60*. Для каждой из цепей, изображенных на рис. 4.14,а,б,в, найти зависимости $Z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Значения параметров, указанные на рисунках, считать известными.

4.61*. На вход фазовращателя (клеммы АБ на рис.4.15) подано синусоидальное напряжение частотой $\nu = 400 \text{ Гц}$. Найти сдвиг фаз φ между этим напряжением и напряжением на выходе фазовращателя (клеммы ВГ). Сопротивление каждого резистора $R = 20,0 \text{ кОм}$, емкость каждого конденсатора $C = 48,0 \text{ нФ}$.

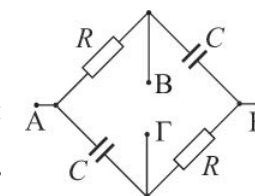


Рис.4.15

4.62. Электродвигатель переменного тока, потребляющий мощность $P=1\text{ кВт}$, работает от сети с действующим напряжением $U=220\text{ В}$; частота тока в сети $\nu=50\text{ Гц}$. Найти тепловую мощность P_R , выделяемую на активном сопротивлении обмотки, если фазовый параметр двигателя $\cos\varphi=0,88$. Емкостным сопротивлением обмотки пренебречь.

4.63*П. На вход четырехполосника (клеммы АБ на рис.4.16) подается постоянное напряжение U_0 . После замыкания ключа найти: а) напряжение U на выходе четырехполосника (клеммы ВГ); б) ток I зарядки конденсатора в зависимости от времени t . Сопротивление резистора R , емкость конденсатора C . До замыкания ключа конденсатор был полностью разряжен.

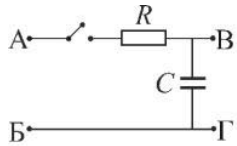


Рис.4.16

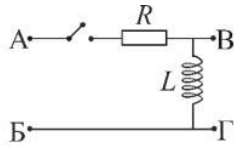


Рис.4.17

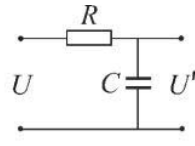


Рис.4.18

4.64*. То же, если в схеме конденсатор заменили катушкой с индуктивностью L (рис.4.17).

4.65*. На вход сглаживающего фильтра (рис.4.18) подают напряжение $U=U_0(1+\cos\omega t)$. Найти: а) выходное напряжение $U'(t)$; б) значение величины RC , при котором амплитуда переменной составляющей будет в $\eta=7,0$ раз меньше постоянной составляющей. Рабочая круговая частота $\omega=314\text{ рад/с}$.

4.4. Примеры решения задач

Задача 4.5

1. Из выражения (4.1а) следует, что магнитный поток через площадь S заданной поверхности $\Phi_M = \int_S B_n dS$. В частности, когда поверхность плоская, а магнитное поле \mathbf{B} однородное, получаем $\Phi_M = B_n S = BS \cos\alpha$, где α – угол между единичным вектором нормали к поверхности \mathbf{n} и вектором \mathbf{B} .

2. Если катушка состоит всего лишь из одного витка, ее потокосцепление с магнитным полем $\Psi = \Phi_M$, а электродвижущая сила (ЭДС индукции) в ней $\xi_{\text{инд}} = -d\Phi_M/dt$ (ср. с 4.1б и 4.1в). Правило Ленца гласит:

ток индукции препятствует вызвавшему его изменению магнитного потока. Именно на это правило указывает знак «-» в законе индукции (4.1в).

3. После этих предварительных замечаний приступим к анализу задачи. По условию направление вектора магнитной индукции \mathbf{B} совпадает с направлением \mathbf{n} нормали к витку (см. рис.4.19,а,б). Поэтому магнитный поток через площадь витка $\Phi_M = BS$. Искажение формы витка сопровождается изменением его площади и, как следствие, магнитного потока через нее. Благодаря этому, в витке развиваются ЭДС индукции $\xi_{\text{инд}} = -B dS/dt$ и индукционный ток $I = \xi/R = -B dS/R dt$. (Здесь R –

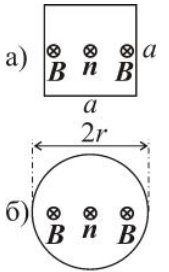


Рис.4.19

электрическое сопротивление витка). С другой стороны, сила тока по определению равна скорости перемещения электрического заряда q через поперечное сечение провода: $I = dq/dt$. Сравнивая два выражения для силы тока в витке, приходим к выводу, что количество перемещенного заряда dq пропорционально изменению dS площади витка: $dq = -\frac{BdS}{R}$.

После интегрирования этого дифференциального равенства получаем $q = -B\Delta S/R$, (*)

где $\Delta S = S_2 - S_1$, S_1 и S_2 – площадь витка до и после завершения процесса деформации.

4. Очевидно, $S_1 = a^2$, $S_2 = \pi r^2$, где r – радиус окружности, периметр которой равновелик (по условию задачи) с периметром квадрата: $2\pi r = 4a$. Тогда $r = 2a/\pi$, $S_2 = 4a^2/\pi$ и, наконец, $\Delta S = a^2(4/\pi - 1)$. Отметим, что изменение площади витка в процессе его деформации $\Delta S > 0$. После подстановки полученного для ΔS выражения в (*) находим величину перемещенного заряда:

$$q = \frac{a^2 B}{R} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right). \quad (**)$$

5. В заключение покажем, как с помощью правила Ленца получить ответ на вопрос о направлении индукционного тока. Магнитный поток через площадь витка увеличивается вместе с увеличением площади: $\Delta\Phi_M = B\Delta S > 0$. Индукционный ток, препятствуя этому, порождает магнитное поле $\mathbf{B}_{\text{инд}}$, которое дает отрицательный вклад в изменение магнитного потока, то есть направлено против нормали \mathbf{n} . Очевидно (см. закон Био-Савара 3.1б и рис.4.19), это условие выполняется, если индукционный ток течет против часовой стрелки.

Задача 4.19

Взаимное расположение витков 1 и 2 изображено на рис. 4.20. Радиусы витков R_1 и R_2 по условию считаются известными.

Предположим, что в витке 1 циркулирует ток силой I_1 . Тогда в центре витка (см. задачу 3.1) генерируется магнитное поле, индукция которого:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \mathbf{n}_1, \quad (*)$$

где \mathbf{n}_1 – единичный вектор нормали к витку 1 (на рисунке не изображен).

Условие малости второго витка на практике позволяет считать, что он помещен в однородное поле с индукцией $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$. Поэтому магнитный поток через площадь круга, ограниченного витком 2, равен

$$\Phi_{m2} = S_2 \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 \cos \alpha}{2R_1} I_1. \quad (**)$$

По определению (4.1г) коэффициент взаимной индукции $L_{21} = \Psi_2 / I_1$. В условиях задачи $\Psi_2 = \Phi_{m2}$, следовательно

$$L_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 \cos \alpha}{2R_1}.$$

Задача 4.28

Системой отсчета называют систему декартовых координат (x, y, z) и часов, показывающих время t . Эта система координат и часы привязаны к какому-либо телу (телу отсчета) и, естественно, неподвижны относительно него. Предположим для определенности, что неподвижная система отсчета (x, y, z, t) связана с Землей. Ниже мы будем называть ее K – системой. Систему отсчета (x', y', z', t') , связанную с космическим кораблем и движущуюся со скоростью V параллельно оси x , назовем K' – системой (рис.4.21).

С точки зрения космонавта линейка MN неподвижна; ее длина $l_0 = x'_2 - x'_1$ называется собственной

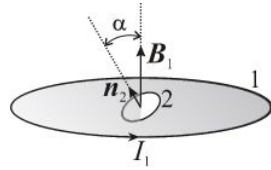


Рис.4.20

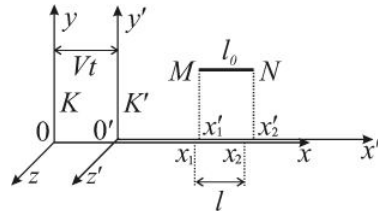


Рис.4.21

длиной. С точки зрения Земного наблюдателя длина той же линейки $l = x_2 - x_1$. Для того чтобы вычислить эту длину, принципиально важно* измерить обе координаты x_1 и x_2 в один и тот же момент времени: $t_1 = t_2 = t$. Поэтому удобно воспользоваться преобразованиями Лоренца для координат концов M и N линейки в форме (4.2б):

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (*)$$

Действительно, поскольку времена t_1 и t_2 совпадают, из (*) получаем

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (**)$$

откуда следует, что длина линейки MN в K – системе меньше ее собственной длины l_0 :

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (***)$$

Итак, с точки зрения Земного наблюдателя корабельная линейка короче ее неподвижного дубликата, оставшегося на Земле. Стоит подчеркнуть, что с точки зрения космонавта ситуация диаметрально противоположна. Ведь система отсчета, связанная с кораблем, для него неподвижна и является K – системой; при этом K' – система, связанная с Землей, движется относительно корабля со скоростью $-V$. Повторяя рассуждения, он с помощью формулы (***) обнаружил бы, что длина Земного дубликата короче корабельного экземпляра линейки в $1/\gamma = \sqrt{1 - V^2/c^2}$ раз. Иными словами, в специальной теории относительности «чужая» линейка всегда короче «собственной», несмотря на то, что они сошли с одного конвейера.

Задача 4.41

1. В вакууме по определению отсутствуют электрические заряды и токи. Поэтому уравнения Максвелла (4.2з) принимают вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & [\nabla \cdot \mathbf{E}] &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & [\nabla \cdot \mathbf{H}] &= \partial \mathbf{D} / \partial t, \end{aligned} \quad (*)$$

* Проблема технической осуществимости такого измерения принципиальной важности не имеет.

где $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, а $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Кроме того, будем иметь в виду, что в условиях задачи $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$ (магнитное поле не зависит от времени).

2. В целях наглядности приведем выражение (4.2e) для ротора векторной функции координат $\mathbf{f}(x, y, z)$ в развернутом виде:

$$[\nabla \mathbf{f}] = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (**)$$

3. Пусть напряженность магнитного поля в некоторой области пространства как функция координат имеет вид $\mathbf{H} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$. Легко убедиться, что это безвихревое поле. Действительно, его ротор, как следует из (**), равен нулю. Этот результат с учетом уравнений (*) позволяет сделать определенные выводы о свойствах электрического поля \mathbf{E} в рассматриваемой области пространства. Во первых, это поле не зависит от времени, поскольку частная производная $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv 0$. Во вторых,

координатная зависимость $\mathbf{E}(x, y, z)$ должна удовлетворять условиям: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $[\nabla \cdot \mathbf{E}] = 0$.

4. В противоположность случаю, рассмотренному выше в п.3, ротор векторной функции $\mathbf{H} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$ не равен нулю:

$$[\nabla \cdot \mathbf{H}] = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = (b - a)\mathbf{e}_z.$$

Интегрирование последнего равенства по времени дает окончательный результат в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{(b - a)t}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_z + \mathbf{E}(x, y, z), \quad (***)$$

где $\mathbf{E}(x, y, z)$ – произвольное векторное поле, удовлетворяющее условиям $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $[\nabla \cdot \mathbf{E}] = 0$.

Задача 4.56

1. По условию задачи в цепи, изображенной на рис.4.1, течет квазистационарный синусоидальный ток $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, где I_0 – амплитуда, ω – круговая частота, а φ_0 – начальная фаза. Сместим начало отсчета времени t так, чтобы начальная фаза колебаний тока оказалась равной нулю. Тогда без ограничения общности зависимость тока от времени

можно отображать формулой $I = I_0 \sin \omega t$. В свою очередь, напряжение на резисторе:

$$U_R = IR = U_{R0} \sin \omega t, \quad (*)$$

где $U_{R0} = I_0 R$ – амплитуда этого напряжения.

Соотношение между силой тока и напряжением U_C на конденсаторе установим, исходя из определения этих величин: $I = dq/dt$ и $U_C = q/C$. Объединение этих формул дает $I = CdU_C/dt$ или $U_C = \frac{1}{C} \int Idt = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t$ *. Воспользовавшись известной формулой приведения $\sin(\alpha - \pi/2) = -\cos \alpha$, получим

$$U_C = U_{C0} \sin(\omega t - \pi/2), \quad (**)$$

где $U_{C0} = I_0/\omega C$ – амплитуда напряжения на конденсаторе. Таким образом, колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе от аналогичных колебаний на резисторе; причем величина отставания $\Delta\varphi = \pi/2$.

В этой связи задача вычисления амплитуды и фазы суммарного напряжения $U = U_R + U_C$ становится нетривиальной. Вообще, разработано несколько алгоритмов решения подобных задач. Здесь мы ограничимся рассмотрением одного из них, получившего название «метод векторных диаграмм».

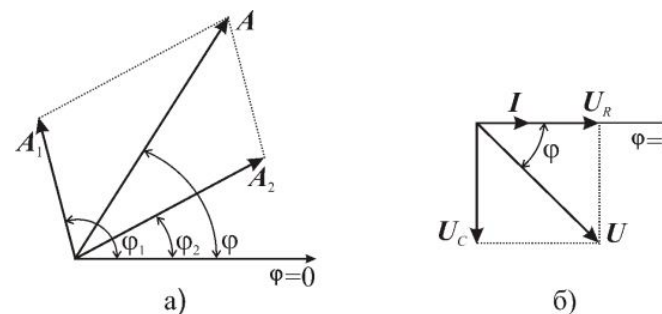


Рис.4.22

2. Предположим, необходимо сложить два однотипных по физической природе колебания $A_1 = A_{10} \sin(\omega t + \varphi_1)$ и $A_2 = A_{20} \sin(\omega t + \varphi_2)$ с известными амплитудами и фазами. Каждое из них изображается вектором

* Здесь константа интегрирования равна нулю, что имеет простой физический смысл: отсутствие постоянного смещения на конденсаторе.

(A_1 и A_2) на так называемой фазовой диаграмме (рис.4.22,а). При этом длина изображающего вектора пропорциональна амплитуде соответствующего колебания. При этом углы $\varphi_{1,2}$ между направлениями $A_{1,2}$ и направлением $\varphi = 0$ на диаграмме определяет начальные фазы соответствующих колебаний в радианах. Метод заключается в том, что длина и направление суммарного вектора $A = A_1 + A_2$ определяют амплитуду A_0 и фазу φ суммарного колебания.

3. Иллюстрацией метода может служить рис.4.22,б, где приведен результат сложения векторов U_R и U_C , изображающих колебания напряжений на резисторе и конденсаторе цепи, исследуемой в задаче. В частности, используя теорему Пифагора, определим амплитуду суммарного напряжения: $U_0 = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{C0}^2}$. Эффективные напряжения пропорциональны их амплитудным значениям (например, $U_{RC} = U_0/\sqrt{2}$ и т.д.) Поэтому $U_{RC} = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = 10$ В. Попутно покажем процедуру определения импеданса и сдвига фаз между колебаниями тока и напряжения в цепи. Учитывая определение (4.3в) и рис.4.22,б, имеем:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{\sqrt{R^2 I_0^2 + I_0^2 / \omega^2 C^2}}{I_0} = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2} \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = U_{C0} / U_{R0} = 1 / R \omega C .$$

Задача 4.63

Начнем отсчет времени с момента замыкания ключа. Пусть в некоторый момент времени $t > 0$ после замыкания ключа величина заряда на обкладках конденсатора C достигла значения q . В этот момент напряжение на конденсаторе и резисторе R соответственно равны $U_C = q/C$ и $U_R = IR = R dq/dt$ *. Очевидно, сумма этих напряжений $U_C + U_R = U_0$. Таким образом, заряд q как функция времени удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dq/dt + q/RC = U_0/R . \quad (*)$$

* Здесь и далее предполагается, что ток зарядки конденсатора можно считать квазистационарным. Обоснование справедливости этого допущения мы, краткости ради, опускаем.

Как известно, общее решение такого уравнения имеет вид $q(t) = q_{\text{одн}} + q_{\text{частн}}$, где $q_{\text{одн}} = A \exp(-t/RC)$ – общее решение однородного уравнения $dq/dt + q/RC = 0$, а $q_{\text{частн}} = CU_0$ – частное решение неоднородного уравнения (*). Итак, любая функция вида

$$q(t) = A \exp(-t/RC) + CU_0 \quad (**)$$

может служить решением уравнения (*) при произвольном значении параметра A . Из всего множества этих решений следует выбрать единственное, удовлетворяющее начальному условию – конденсатор в момент времени $t = 0$ не заряжен. Иными словами, $q(t = 0) = 0$ или, с учетом (**):

$$A + CU_0 = 0 .$$

Таким образом, искомое значение параметра $A = -CU_0$, следовательно, зависимость заряда конденсатора от времени имеет вид $q(t) = CU_0 \{1 - \exp(-t/RC)\}$. Теперь нетрудно найти напряжение на конденсаторе $U_C(t) = q(t)/C$ и ток в резисторе (ток зарядки) $I(t) = dq/dt$:

$$U_C(t) = U_0 \{1 - \exp(-t/RC)\};$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp(-t/RC).$$

5. ОТВЕТЫ

1. Электростатика

$$1.1. \quad E(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \right\},$$

$$\varphi(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right\}.$$

$$1.2. \quad \text{а) } E(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a}; \quad \text{б) } E(0) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2},$$

$$\varphi(0) = \frac{q\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 a}; \quad \text{в) } E(0) = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \varphi(0) = 0.$$

$$1.3. \quad \varphi(z) = \frac{\sigma R \Delta R}{2\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{1/2}}, \quad E(z) = \frac{\sigma R \Delta R z}{2\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

$$1.4. \quad \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right), \quad E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right).$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}, \quad \text{где } q = \sigma\pi R^2 - \text{заряд пластины};$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \frac{\sigma(R - z)}{2\varepsilon_0}.$$

$$1.5. \quad \text{а) } E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}}; \quad \text{б) } E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 - a^2)}.$$

$$\text{В обоих случаях } \lim_{r \rightarrow \infty} E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$1.6. \quad E = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}. \quad \text{Вектор } \mathbf{E} \text{ в точке А направлен под углом}$$

45° к отрезку АК.

$$1.7. \quad \text{а) } E = \frac{q\sqrt{2}}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}; \quad \text{б) } E = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

$$1.8. \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \quad E = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

$$1.9. \quad \text{а) } E(O) = 0; \quad \text{б) } E(O) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}; \quad \text{в) } E(O) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0 R};$$

$$\text{г) } E(O) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

$$1.10. \quad E = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}.$$

$$1.11. \quad \text{а) } \mathbf{E} = -\nabla \cdot \varphi = \frac{a\mathbf{r}}{r}; \quad \text{б) } \mathbf{E} = -2b(x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y); \quad \text{в) } \mathbf{E} = \frac{\varphi_0 \mathbf{r}}{r^2}.$$

$$1.12. \quad E_l = \mathbf{E}l/l = -7\alpha/\sqrt{10}.$$

$$1.13. \quad \varphi = -(ax + by + cz) = -\mathbf{E}\mathbf{r}. \quad \text{Поле однородное.}$$

$$1.14. \quad \text{а) } \varphi = -axy; \quad \text{б) } \varphi = ay(y^2/3 - x^2); \quad \text{в) } \varphi = -y(ax + bz).$$

$$1.15. \quad \text{а) } p = 2qa; \quad \text{б) } p = 0; \quad \text{в) } p = 2\sqrt{2}qa.$$

1.16. $p \cong 8,5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. У к а з а н и е : положительный заряд данной молекулы $q = 2e$.

$$1.17. \quad \text{а) } p = \tau a^3/3; \quad \text{б) } p = \pi\lambda_0 R^2.$$

$$1.18. \quad \text{а) } F = \frac{pq\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = 2,3 \cdot 10^{-22} \text{ Н (притяжение);}$$

$$\text{б) } N = \frac{pq}{8\pi\varepsilon_0 a^2} = 6,8 \cdot 10^{-24} \text{ Н·м; в) } W = -\frac{pq\sqrt{3}}{8\pi\varepsilon_0 a^2} = 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ Дж.}$$

$$1.19. \quad \text{а) } A = \frac{pE}{2} = 4,0 \cdot 10^{-25} \text{ Дж; б) } A = 2pE = 16,0 \cdot 10^{-25} \text{ Дж.}$$

$$1.20. \quad \text{а) } F = \frac{6p^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4} = 2,1 \cdot 10^{-20} \text{ Н (притяжение);}$$

$$\text{б) } F = \frac{6p^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4} = 2,1 \cdot 10^{-20} \text{ Н (отталкивание); в) } F = 0;$$

$$\text{г) } F = \frac{3p^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4} = 1,0 \cdot 10^{-20} \text{ Н (отталкивание).}$$

1.21. а) $\Phi_3 = q/\varepsilon_0$; б) $\Phi_3 = q/6\varepsilon_0$. Первый ответ не изменится.

$$1.22. \quad \Phi_3 = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{6\alpha V}{\varepsilon_0}.$$

$$1.23. \quad E = \begin{cases} 0, & \text{при } r \leq R; \\ q/4\pi\varepsilon_0 r^2, & \text{при } r > R; \end{cases} = \begin{cases} q/4\pi\varepsilon_0 R, & \text{при } r \leq R; \\ q/4\pi\varepsilon_0 r, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

См. рис. О.1.

$$1.24. \quad E = \begin{cases} \rho r / 3\epsilon_0, & \text{при } r \leq R; \\ \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \rho(3R^2 - r^2) / 6\epsilon_0, & \text{при } r \leq R; \\ \rho R^3 / 3\epsilon_0 r, & \text{при } r > R. \end{cases} \quad \text{См. рис. О.2.}$$

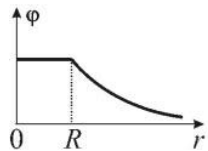
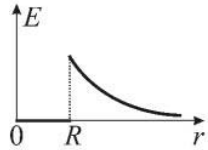


Рис.О.1

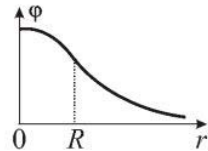
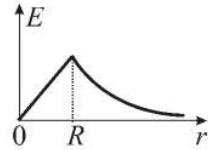


Рис.О.2

$$1.25. \quad E = \begin{cases} 0, & r \leq a; \\ \rho / 3\epsilon_0 (r - a^3/r^2), & a < r \leq b; \\ \rho(b^3 - a^3) / 3\epsilon_0 r^2, & r > b. \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \rho(b^2 - a^2) / 2\epsilon_0, & r \leq a; \\ \rho / 6\epsilon_0 (3b^2 - r^2 - 2a^3/r), & a < r \leq b; \\ \rho(b^3 - a^3) / 3\epsilon_0 r, & r > b. \end{cases}$$

$$1.26. \quad E = \begin{cases} \rho r / 2\epsilon_0, & \text{при } r \leq R; \\ \rho R^2 / 2\epsilon_0 r, & \text{при } r > R; \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} -\rho r^2 / 4\epsilon_0, & \text{при } r \leq R; \\ \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(1 - 2 \ln \frac{r}{R} \right), & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$1.27. \quad E_x = \begin{cases} \sigma / 2\epsilon_0, & \text{при } x > 0; \\ -\sigma / 2\epsilon_0, & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} -\sigma x / 2\epsilon_0, & \text{при } x > 0; \\ \sigma x / 2\epsilon_0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$$1.28. \quad \text{а) } x = \pm a\sqrt{3}; \quad \text{б) } x = \pm 2a\sqrt{3}.$$

$$1.29. \quad \text{а) } r_M = 2R/3; \quad \text{б) } E_{\text{макс}} = \rho_0 R / 9\epsilon_0.$$

$$1.30. \quad \text{а) } \rho = 6\epsilon_0 \varphi_0 / R^2; \quad \text{б) } \rho(x) = 6\epsilon_0 \varphi_0 x / a^3.$$

$$1.31. \quad \alpha = \arctg \left(\frac{qE}{mg} \right).$$

$$1.32. \quad A = 0. \quad \text{В случае одноименных зарядов } A = \frac{qq'}{\pi\epsilon_0 a}.$$

$$1.33. \quad \text{а) } v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 5,9 \cdot 10^5 \text{ м/с.}; \quad \text{б) } v = 1,9 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

$$1.34. \quad t = \frac{vm_e}{eE}.$$

$$1.35. \quad a = 5,5 \cdot 10^{-13} \text{ м.}$$

$$1.36. \quad \Delta t = \frac{2R}{\sqrt{v^2 - \frac{Qq}{\pi\epsilon_0 Rm}}}; \quad v_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{Qq}{\pi\epsilon_0 Rm}} - \text{минимальная}$$

стартовая скорость заряда q , позволяющая достичь поверхности сферы.

У к а з а н и е : электрическое поле внутри сферы отсутствует – см. реше-
ние задачи 1.23.

$$1.37. \quad a = c + \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \text{где } c = \frac{1}{v^2} \left(\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m} \right). \quad \text{У к а з а н и е : пе-}$$

рейти в систему отсчета, связанную с центром масс частиц. Далее исполь-
зовать законы сохранения энергии и момента импульса.

$$1.38. \quad E = D / \epsilon\epsilon_0; \quad P = (\epsilon - 1)D / \epsilon.$$

$$1.39. \quad \text{а) } E = E_0 / \epsilon; \quad \text{б) } \sigma' = \epsilon_0(1 - \epsilon)E_0 / \epsilon. \quad \text{См. рис. О.3.}$$

1.40. $\sigma'_1 = \frac{(1-\varepsilon)q}{16\pi\varepsilon R^2} < 0$; $\sigma'_2 = \frac{(\varepsilon-1)q}{36\pi\varepsilon R^2} > 0$. См. рис.О.4.

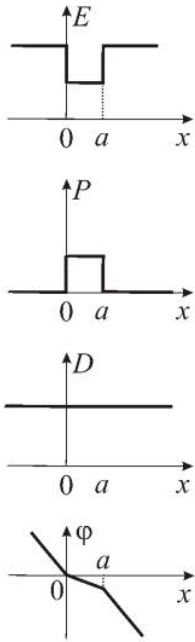


Рис.О.3

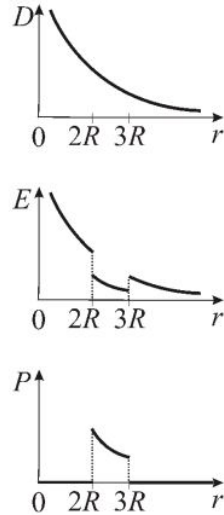


Рис.О.4

1.41. а) $E = \begin{cases} \rho r / 3\varepsilon\varepsilon_0, & \text{при } r \leq R; \\ \rho R^3 / 3\varepsilon_0 r^2, & \text{при } r > R; \end{cases}$ б) $\rho' = \frac{\rho(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$;

в) $\sigma' = \frac{\rho R(1-\varepsilon)}{3\varepsilon}$.

1.42. а) $D = \begin{cases} \rho r / 2, & \text{при } r \leq R; \\ \rho R^2 / 2r, & \text{при } r > R; \end{cases}$ б) $E = \begin{cases} \rho r / 2\varepsilon\varepsilon_0, & \text{при } r \leq R; \\ \rho R^2 / 2\varepsilon_0 r, & \text{при } r > R; \end{cases}$

в) $\rho' = \frac{\rho(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

1.43. а) $\varepsilon = \text{tg}\alpha_2 / \text{tg}\alpha_1 = 3$; б) $E_2 = 57,7 \text{ В/м}$;

в) $\sigma' = -5,1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2$.

1.44. $\sigma' = -7,52 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2$.

1.45. $\sigma' = -8,41 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2$.

1.46. $\rho' = \frac{\varepsilon_0 E_0 a}{(4a-x)^2}$.

1.47. $\rho = 10\varepsilon a$; $\rho' = 10(1-\varepsilon)a$.

1.48. $\rho = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0 / r$; $\rho = 2(1-\varepsilon)\varepsilon_0 E_0 / r$.

1.49. $P = pN_A \rho_B / \mu = 0,2 \text{ Кл/м}^2$.

1.50. $\varepsilon = 81$.

1.51. $E_1 = P / 2\varepsilon_0$; $E_2 = -E_1 r^2 / l^2$.

1.52. $E = -P d / 4\varepsilon_0 R$.

1.53. В сегнетоэлектрике $E_1 = -P \frac{(h-a)}{\varepsilon_0 h}$, в зазоре

$E_2 = P \frac{a}{\varepsilon_0 h}$, $D_1 = D_2 = P \frac{a}{h}$.

1.54. $\Delta\phi = m_e g h / e = 5,8 \cdot 10^{-10} \text{ В}$. У к а з а н и е: Для оценки

полагать, что на каждый электрон проводимости действуют две силы – гравитационная и кулоновская.

1.55. а) $F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$; б) $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$; в) $\sigma = \frac{qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}$.

1.56. а) $F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2} (2\sqrt{2} - 1)$. Сила направлена в ближайшую

точку вершины двугранного угла.

б) $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l} (1 - 2\sqrt{2}) < 0$. У к а з а н и е: Рассмотреть эквивалентную

систему зарядов, изображенную на рис. О.5.

1.57. $F_{1,2} = \frac{q_{1,2}^2}{\pi\varepsilon_0 l^2}$.

1.58. $C = 4\pi\varepsilon_0 R$; $C_3 \cong 4\pi\varepsilon_0 \langle R_3 \rangle \cong 700 \text{ мкФ}$.

1.59. $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Если сфера зазем-

лена, то $F = 0$.

1.60. а) $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; б) $q' = -q \frac{R}{r}$.

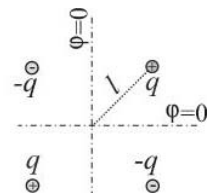


Рис.О.5

$$1.61. \quad \varphi = \frac{3q}{16\pi\epsilon_0 R}.$$

$$1.62. \quad q'' = -q' \frac{r}{R} = \frac{4\pi\epsilon_0 r^3 \varphi}{R^2}. \text{ См. задачу 1.60.}$$

$$1.63. \quad Q_2 = -\frac{(Q_1 R_3 + Q_3 R_2)}{R_3}.$$

$$1.64. \quad \varphi = \varphi_0 (1 - r/R).$$

$$1.65. \quad q_1 = -q \frac{R_1(R_2 - r)}{r(R_2 - R_1)}; \quad q_2 = -q \frac{R_2(r - R_1)}{r(R_2 - R_1)}.$$

$$1.66. \quad q_1 = -q \frac{d_2}{d_1 + d_2}; \quad q_2 = -q \frac{d_1}{d_1 + d_2}.$$

$$1.67. \quad \text{а) } E_1 = E_0, \quad E_2 = E_0/\epsilon, \quad D_1 = D_2 = \epsilon_0 E_0;$$

$$\text{б) } E_1 = \frac{2\epsilon E_0}{1 + \epsilon}, \quad E_2 = E_1/\epsilon, \quad D_1 = D_2 = \frac{2\epsilon\epsilon_0 E_0}{1 + \epsilon}.$$

$$1.68. \quad \text{а) } E_1 = E_2 = \frac{2E_0}{1 + \epsilon}, \quad D_1 = \frac{2\epsilon_0 E_0}{1 + \epsilon}, \quad D_2 = \epsilon D_1;$$

$$\text{б) } E_1 = E_2 = E_0, \quad D_1 = \epsilon_0 E_0, \quad D_2 = \epsilon D_1.$$

$$1.69. \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{(d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2)} = 35,4 \cdot 10^{-8} \text{ Ф.}$$

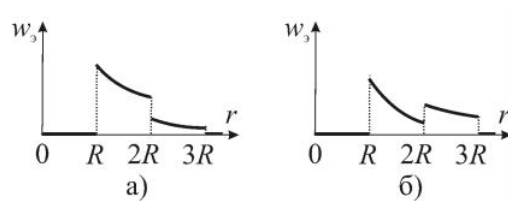


Рис.О.6

$$1.70. \quad \Delta U = Ua/(d - a).$$

$$1.71. \quad \text{а) } C = \frac{48\pi\epsilon_0 R}{7}; \quad \text{б) } C = \frac{48\pi\epsilon_0 R}{5}.$$

$$1.72. \quad \text{а) } w_3 = \begin{cases} q^2/32\pi\epsilon_0 r^4, & \text{при } R < r \leq 2R; \\ q^2/64\pi\epsilon_0 r^4, & \text{при } 2R < r < 3R; \end{cases}$$

$$\text{б) } w_3 = \begin{cases} q^2/64\pi\epsilon_0 r^4, & \text{при } R < r \leq 2R; \\ q^2/32\pi\epsilon_0 r^4, & \text{при } 2R < r < 3R. \end{cases} \text{ См. рис. О.6.}$$

$$1.73. \quad q = 4\pi\epsilon_0 (1 + \epsilon)RU.$$

$$1.74. \quad \text{а) } U = U_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 20,0 \text{ В;}$$

$$\text{б) } \Delta W = -\frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} = -4,0 \text{ мДж.}$$

$$1.75. \quad \text{а) } U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 40,0 \text{ В;}$$

$$\text{б) } \Delta W \approx -2,3 \text{ мДж.}$$

$$1.76. \quad \text{а) } U = 0 \text{ В; б) } \Delta W \approx -6,3 \text{ мДж.}$$

$$1.77. \quad U = 5U_0/8.$$

$$1.78. \quad \Delta W = \frac{CU^2(1 - \epsilon)}{8\epsilon} < 0.$$

$$1.79. \quad A = W_2 - W_1 = q^2 a / 2\epsilon_0 S.$$

$$1.80. \quad A = \frac{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)CU^2}{2\epsilon}. \text{ У к а з а н и е: При записи уравне-}$$

ния энергетического баланса учесть энергию поляризации диэлектрической пластины.

2. Постоянный ток

$$2.1. \quad v_{\text{др}} = j/ne = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} \approx 5 \cdot 10^{-10} u_{\text{кв}}.$$

$$2.2. \quad \mu = v_{\text{др}}/E = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с.}$$

$$2.3. \quad \text{а) } \mu = \sigma/ne = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с; б) } v_{\text{др}} = \mu E = 3,9 \text{ м/с.}$$

$$2.4. \quad I = \frac{CU}{\rho\epsilon\epsilon_0} = 0,97 \text{ мкА.}$$

$$2.5. \quad j = \frac{U}{d_1 \rho_1 + d_2 \rho_2} = 2,5 \text{ мкА. Указание: Из условия не-}$$

прерывности (формула 2.1г) следует, что $j_1 = j_2$

$$2.6. \quad \rho = \frac{\tau}{\varepsilon \varepsilon_0 \ln 2} = 2,3 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м.}$$

$$2.7. \quad j = \frac{I}{2\pi r l}, \quad (r_0 < r < R).$$

$$2.8. \quad I \cong 2\pi j_0 R r_s.$$

$$2.9. \quad I = e v n_0 \pi r_0^2.$$

$$2.10. \quad I = \frac{2\pi l U}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$$

$$2.11. \quad I = \frac{4\pi R_1 R_2 U}{\rho(R_2 - R_1)}.$$

$$2.12. \quad I = \frac{4\pi R U}{\rho} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ А.}$$

$$2.13. \quad \xi = \frac{Q(r_2 - r_1)}{4\pi \varepsilon_0 r_1 r_2} = 600 \text{ В.}$$

$$2.14. \quad \text{а) } \varphi_2 - \varphi_1 = \xi = 4 \text{ В; б) } \varphi_2 - \varphi_1 = \xi + I_2 r = 5 \text{ В;}$$

$$\text{в) } \varphi_2 - \varphi_1 = \xi - I_3 r = -1 \text{ В.}$$

2.15. Может, если на участке действует ЭДС, равная IR .

$$2.16. \quad \text{а) } \xi = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2} = 4,1 \text{ В; б) } r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2} = 0,05 \text{ Ом.}$$

$$2.17. \quad \text{а) } U = 1,0 \text{ В; б) } U_r = 0,1 \text{ В; в) } I_{\text{кз}} = \frac{\xi}{r} = 1,1 \text{ А.}$$

$$2.18. \quad \text{а) } I_{\text{посл}} = 5,0 \text{ А} < I_{\text{паралл}} = 5,7 \text{ А;}$$

$$\text{б) } I_{\text{посл}} = 0,2 \text{ А} > I_{\text{паралл}} = 0,1 \text{ А.}$$

$$2.19. \quad \Delta\varphi_{\text{АБ}} \equiv 0.$$

$$2.20. \quad I_1 = 1 \text{ А, } I_2 = 0, \quad \Delta\varphi_{\text{АБ}} = 0.$$

$$2.21. \quad \xi = 325 \text{ В.}$$

$$2.22. \quad \Delta\varphi_{21} = \frac{\xi_1 R_2 + \xi_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

$$2.23. \quad \text{а) } q_1 = \frac{(\xi - \xi_0)R}{R + R_0}; \text{ б) } \Delta\varphi_{\text{БА}} = \frac{\xi R_0 + \xi_0 R}{R + R_0}.$$

$$2.24. \quad I = 0,75 \text{ А.}$$

$$2.25. \quad \text{а) } I_1 = 0,06 \text{ А; б) } \Delta\varphi_{\text{АБ}} = 0,9 \text{ В.}$$

$$2.26. \quad \text{а) } R_b = \frac{R_1 U_2}{\xi - U_1 - U_2}; \text{ б) } R_2 = R_1 \frac{U_2}{U_1}.$$

$$2.27. \quad R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

$$2.28. \quad \text{Цена деления} = I_0(R + r).$$

2.29. а) Подключить последовательно к прибору сопротивление $R = 99,9 \text{ кОм}$ (рис.О.7,а); б) подключить параллельно к прибору сопротивление $r = 0,100 \text{ Ом}$ (рис.О.7,б).

$$2.30. \quad \varepsilon_R = \frac{R}{R + R_b} 100\%.$$

$$\text{а) } \varepsilon_R = 16,7\%; \text{ б) } \varepsilon_R = 0,2\%.$$

$$2.31. \quad \varepsilon_R = \frac{R_A}{R} 100\%. \text{ а) } \varepsilon_R = 0,2\%;$$

$$\text{б) } \varepsilon_R = 20\%.$$

$$2.32. \quad P = 20,0 \text{ Вт.}$$

$$2.33. \quad P = 22,2 \text{ Вт.}$$

$$2.34. \quad I = 2,0 \text{ А}$$

$$2.35. \quad \tau = \frac{cmR\Delta t}{\eta U^2} = 7,0 \text{ мин.}$$

$$2.36. \quad \text{а) } t = t_1 + t_2 = 30 \text{ мин; б) } t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 6,7 \text{ мин.}$$

$$2.37. \quad \text{а) } U_2 = U_1 \sqrt{d_1/d_2} = 4,0 \text{ В; б) } I_2 = I_1 (d_2/d_1)^{3/2} = 0,55 \text{ А.}$$

$$2.38. \quad \text{а) } Q = 4q^2 R/3\Delta t = 20 \text{ кДж;}$$

$$\text{б) } Q = q^2 R \ln 2/2\Delta t = 0,13 \text{ МДж.}$$

$$2.39. \quad \text{а) } A = 0; \text{ б) } A = -1,2 \text{ кДж; в) } A = 6 \text{ кДж.}$$

$$2.40. \quad \text{В интервале всех значений силы тока } (0 \leq I \leq I_{\text{кз}} = \xi/r):$$

$$\text{а) } P = I\xi, \text{ б) } P_r = I\xi - I^2 r; \text{ в) } P_r = I^2 r; \text{ г) } \eta = 1 - Ir/\xi. \text{ См. рис. О.8.}$$

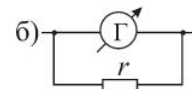


Рис.О.7

2.41. а) $\eta = R/R + r$; б) $\eta = U/\xi$.

2.42. а) $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6,0 \text{ Ом}$;

б) $\xi = (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})\sqrt{P} = 19,6 \text{ В}$.

2.43. а) $I_M = U/2R$; б) $P_M = U^2/4R$ в) $\eta = 50\%$.

2.44. $R = 99r = 297 \text{ Ом}$.

2.45. $P_M = 15,0 \text{ Вт}$.

2.46. а) $\xi = 5,5 \text{ В}$; б) $r = 0,75 \text{ Ом}$.

2.47. $I_{\text{мин}} = \frac{U - \sqrt{U^2 - 4RP}}{2R} = 1,0 \text{ А}$.

2.48. $I = \frac{C\xi^2 R_1}{2(R_1 + R_2)} = 60 \text{ мДж}$.

2.49.

а) $Q = A_{\text{стоп}} - \Delta W = 2C\xi^2$;

б) $Q = 8C\xi^2$.

2.50. а) $Q = \frac{C(\xi_1 + \xi_2)^2}{2}$;

б) $Q = C(\xi_1 + \xi_2)^2$; в) $Q = \frac{C\xi^2}{2}$;

г) $Q = \frac{C\xi^2}{36}$.

2.51. $A = \frac{C(\varepsilon - 1)U^2}{2}$.

2.52. $w = 1,5 \text{ кВт/м}^3$.

2.53. $w = \frac{U^2}{\rho r^2 \ln^2(R_2/R_1)}$.

2.54. $w = \frac{R_1^2 R_2^2 U^2}{\rho r^4 (R_2 - R_1)^2}$.

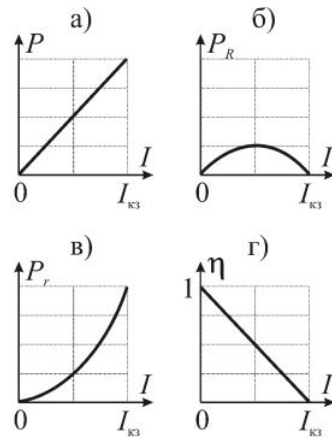


Рис.О.8

2.55. $\frac{dQ}{dV} = w\tau = \frac{I^2 \tau}{4\pi^2 \sigma h^2 r^2}$. Обозначим приращение температуры периферийной области диска как ΔT_1 , а приращение температуры

центральной области диска ΔT_2 . Тогда $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \cong \left(\frac{b}{a}\right)^2 < 1$.

2.56. В полупространстве $z \geq 0$, используя метод зеркальных

изображений, получаем $w = \rho j^2$, где $\mathbf{j} = \frac{aU}{2\rho} \left\{ \frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} - \frac{\mathbf{r}+\mathbf{a}}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^3} \right\}$.

3. Магнитостатика

3.1. а) $B = \frac{\mu_0 I}{2R} = 6,3 \text{ мкТл}$; б) $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = 2,2 \text{ мкТл}$.

3.2. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$.

3.3. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$.

3.4. а) $B = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$; б) $B = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$.

3.5. $B = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin\varphi}$.

3.6. $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$.

3.7. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\pi + 2/\sqrt{5})$.

3.8. $B = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{(I_1/\pi d)^2 + (I_2/R)^2} = 21,0 \text{ мкТл}$.

3.9. а) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{\pi^2 + 1}$; б) $B = \frac{\mu_0 I}{4R}$;

в) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{(\pi + 1)^2 + 1}$; г) $B = \frac{\mu_0 I}{8a} \sqrt{5}$.

3.10. $\Phi_M = B\pi R^2$.

$$3.11. \quad B = \begin{cases} \mu_0 jr/2, & \text{при } r \leq R; \\ \mu_0 jR^2/2r, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$3.12. \quad B = \begin{cases} \mu_0 ar^{n+1}/n+2, & \text{при } r \leq R; \\ \mu_0 aR^{n+2}/(n+2)r, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$3.13. \quad \text{а) } B = \frac{\mu_0 j_{\perp}}{2}; \quad \text{б) Между плоскостями } B = \mu_0 j_{\perp}, \text{ в осталь-$$

ной части пространства $B = 0$. У к а з а н и е : В качестве контура для вычисления циркуляции вектора магнитной индукции \mathbf{B} выбрать прямоугольник, перпендикулярный плоскости с током. Две стороны этого прямоугольника, расположенные по обе стороны от плоскости, должны быть параллельны силовым линиям магнитной индукции.

$$3.14. \quad B = \begin{cases} \mu_0 jx, & \text{при } |x| \leq d; \\ \mu_0 jd, & \text{при } |x| > d. \end{cases}$$

$$3.15. \quad j = \frac{b(1+\alpha)r^{\alpha-1}}{\mu_0}.$$

$$3.16. \quad B_1 = \frac{\mu_0 IN}{l}, \quad B_2 \cong 0. \text{ У к а з а н и е : См. анализ задачи}$$

3.57.П.

$$3.17. \quad \text{Внутри тороида } B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}, \text{ в остальной части плоскости}$$

$B = 0$.

$$3.18. \quad \text{а) } p_M = \pi R^2 NI; \quad \text{б) } p_M = \frac{2\pi I b^3}{N(a-b)}; \quad \text{в) } p_M = \frac{\pi I a^2 \sqrt{17}}{2}.$$

У к а з а н и е : смысл первого неравенства в условии задачи состоит в том, что толщина тороида превышает толщину витков. Второе неравенство позволяет рассматривать данный тороид как круговой контур радиусом b .

$$3.19. \quad \text{а) } p_M = \lambda v 2\pi^2 R^3 = 1,5 \text{ нА/м;}$$

б) $p_M/L = \lambda \pi R/m = q/2m = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Здесь $q = 2\pi R\lambda$ – заряд кольца.

$$3.20. \quad p_M = qR^2 \omega/3.$$

$$3.21. \quad p_M = qR^2 \omega/5.$$

$$3.22. \quad F_{\perp}/F_{\parallel} = v^2/c^2. \text{ У к а з а н и е : использовать соотношение}$$

$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, справедливое для скорости c света в вакууме.

$$3.23. \quad B = \frac{m_e v}{eR} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ Тл.}$$

$$3.24. \quad v = \frac{eB}{2\pi m_e} = 5,6 \text{ ГГц.}$$

$$3.25. \quad T = \frac{e^2 R^2 B^2}{2m_e}.$$

$$3.26. \quad R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} = 1,1 \text{ см.}$$

$$3.27. \quad R = \frac{m_p v \sin \alpha}{eB} = 0,9 \text{ см, } h = \frac{2\pi m_p v \cos \alpha}{eB} = 2,0 \text{ см.}$$

$$3.28. \quad v = \frac{eB}{m_e} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$3.29. \quad F = 4,2 \cdot 10^{-16} \text{ Н.}$$

$$3.30. \quad m_1/m_2 = (R_1/R_2)^2 = 4.$$

$$3.31. \quad \text{Масса ионов в пучке } m = \frac{B^2 R^2 e}{U} = 6,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cong 4m_p.$$

Пучок состоит из ионов гелия (He).

$$3.32. \quad \text{а) } B \leq \frac{(m_2 - m_1)}{el} \sqrt{\frac{2W}{m_2}} = 0,013 \text{ Тл; б) } t \approx 2,5 \text{ года.}$$

$$3.33. \quad h_n = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB} + \frac{2\pi^2 m E}{qB^2} (2n-1).$$

3.34. Уравнения движения частицы имеют вид

$$x = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t), \quad y = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t),$$

где $\omega = \frac{qB}{m}$. Траектория – циклоида

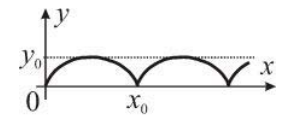


Рис.О.9

(см.рис.О.9, где $x_0 = \pi y_0 = 2E/\omega B$).

$$3.35. \quad \text{а) } \xi = vBd; \text{ б) } P_R = R \left(\frac{vBd\sigma S}{d + R\sigma S} \right)^2.$$

$$3.36. \quad U = \frac{IB}{ena} = 1,6 \text{ мкВ.}$$

$$3.37. \quad \mu = \frac{Ua}{IB\rho} = 0,65 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с.}$$

$$3.38. \quad F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

$$3.39. \quad A = \Delta p_m \mathbf{B} = Ia^2 B(1 - \cos\varphi). \text{ а) } A_1 = Ia^2 B = 1,0 \text{ Дж};$$

$$\text{б) } A_2 = \frac{Ia^2 B\varphi^2}{2} = 1,4 \text{ мДж.}$$

$$3.40. \quad M = ISB\sin 60^\circ = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$3.41. \quad \text{а) } p_M = NIab = 0,4 \text{ А}\cdot\text{м}^2; \text{ б) } M = IBNab = 40,0 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$3.42. \quad F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = 20,0 \text{ мН,}$$

$$F_3 = F_2 \sqrt{3} = 34,6 \text{ мН.}$$

$$3.43. \quad F = \frac{\mu_0 I^2 R}{d} = 12,6 \text{ мН.}$$

$$3.44. \quad F = \frac{2\mu_0 I^2 a}{\pi d} = 8,0 \text{ мН.}$$

$$3.45. \quad \text{а) } W = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_M^2}{r^3}, \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6p_M^2}{r^4} \text{ (контуры притягиваются);}$$

$$\text{б) } W = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_M^2}{r^3}, \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6p_M^2}{r^4} \text{ (контуры отталкиваются); в) } W = F = 0.$$

$$3.46. \quad \mathbf{F}_A = 2IRBe_y.$$

$$3.47. \quad F_A = I\sqrt{(a^2 + b^2)(B_1^2 + B_2^2)}.$$

3.48. Траектория частицы изображена на рис.О.10, где величина

$$L = \frac{mv^2}{2qE}.$$

3.49. Индукция магнитного поля увеличится в μ раз, напряженность $H = B/\mu_0$ не изменится.

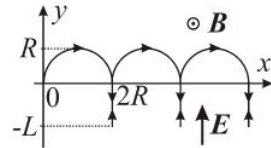


Рис.О.10

$$3.50. \quad \Delta W = \frac{B^2 V (\mu - 1)}{2\mu_0}.$$

$$3.51. \quad J_s \cong n\mu_B = 2,3 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

$$3.52. \quad B_2 = B_1/\mu. \quad H_2 = H_1 = B_1/\mu\mu_0.$$

$$3.53. \quad B_2 = B_1. \quad H_2 = B_1/\mu_0.$$

$$3.54. \quad \text{а) } H = B/\mu\mu_0; \text{ б) } J = \frac{B(\mu - 1)}{\mu\mu_0}.$$

$$3.55. \quad \text{а) } \alpha_2 = \text{arctg}(\mu\text{tg}\alpha_1) = 80,2^\circ;$$

$$\text{б) } j'_n = \frac{B_1(\mu - 1)\sin\alpha_1}{\mu_0} = 7,2 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

$$3.56. \quad \alpha_1 = 20,0^\circ, \quad \alpha_2 = 36,0^\circ.$$

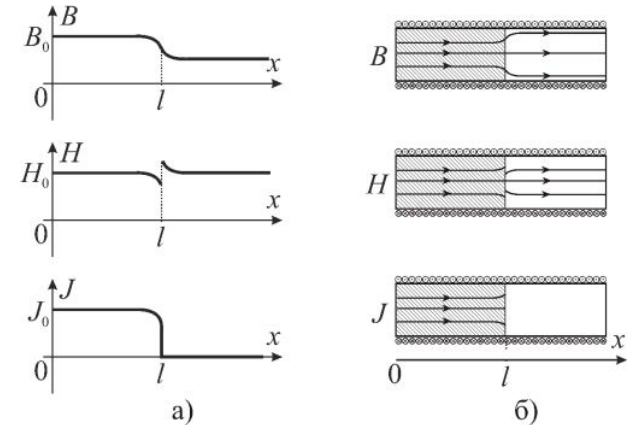


Рис.О.11

$$3.57. \quad \text{а) } H = In; \text{ б) } B = \mu\mu_0 In; \text{ в) } J = (\mu - 1)In;$$

$$\text{г) } j'_n = (\mu - 1)In = J.$$

3.58. См. рис. О.11а,б, на которых отображены поля в области, содержащей правую половину сердечника и прилегающую часть незаполненного соленоида. Обозначения на рисунке: $B_0 = \mu\mu_0 In$, $H_0 = In$, $J_0 = (\mu - 1)In$. У к а з а н и е: учесть, что линии \mathbf{B} непрерывны, а векторы \mathbf{H} и \mathbf{J} связаны с вектором \mathbf{B} соотношениями 3.3в.

$$3.59. \quad B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l + (\mu - 1)\Delta l} = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ Тл.}$$

$$3.60. \quad H \approx \frac{bB}{\mu_0 \pi d} = 101 \text{ А/м.}$$

$$3.61. \quad H_c = NI/l = 6 \text{ кА/м.}$$

$$3.62. \quad \Delta W \approx -1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Указание: площадь замкнутой фигуры вычисляется по правилу $S = S_0(n_1 + 0,5n_2)$, где S_0 – площадь одной масштабной клетки, n_1 и n_2 – количества клеток, которые целиком и частично расположены внутри фигуры.

4. Электродинамика

4.1. Индукционный ток течет против часовой стрелки.

4.2. $\Phi_M = -\xi_0 t + \Phi_0$, где Φ_0 – произвольная постоянная.

$$4.3. \quad \langle |\xi| \rangle = N \frac{\Delta B \pi r^2}{\tau}.$$

$$4.4. \quad R = NB \pi r^2 / q.$$

$$4.5. \quad q = \frac{Ba^2}{R} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

$$4.6. \quad \Delta \varphi = Blv = 15 \text{ мВ.}$$

$$4.7. \quad \text{а) } \Delta \varphi = \frac{Bl^2 \omega}{2} = 20 \text{ мВ; б) } \Delta \varphi = 0.$$

$$4.8. \quad \xi_M = 2\pi \nu BSN = 151 \text{ В.}$$

$$4.9. \quad \xi = 2\alpha L.$$

$$4.10. \quad \xi = 1,2 \cdot \cos 3t \text{ (вольт).}$$

$$4.11. \quad N_2 = 900.$$

$$4.12. \quad n = 8 \text{ вит/см.}$$

$$4.13. \quad B = LI/NS = 20 \text{ мТл.}$$

4.14. а) Ток в перемычке течет от А к Б; б) $s = v_0 mR/l^2 B^2$;

в) $Q = mv_0^2/2.$

$$4.15. \quad a = \frac{F}{m + B^2 l^2 C}.$$

$$4.16. \quad \text{а) } x_0 = \frac{v_0 \sqrt{mL}}{BL}, \text{ б) } I_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{L}}.$$

$$4.17. \quad L_{12} = qR/I = 5,0 \text{ нГн.}$$

$$4.18. \quad L_{12} = \mu \mu_0 nNS.$$

$$4.19. \quad L_{12} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 \cos \alpha}{2R_1}.$$

$$4.20. \quad W_{12} = I^2 L_{12} = \frac{\mu_0 I^2 \pi R_2^2 \cos \alpha}{2R_1}.$$

$$4.21. \quad L_{12} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2l^3}.$$

$$4.22. \quad \text{а) } \Psi = \frac{\mu_0 IN}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}; \text{ б) } q = \frac{\mu_0 IN}{2\pi R} \ln \frac{a+l}{a}.$$

$$4.23. \quad L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} = 2,4 \text{ мГн.}$$

$$4.24. \quad U_{20} = U_{10} \frac{N_2}{N_1} = 200 \text{ В.}$$

4.25. См. рис. О.12.

4.26. а) $I = \pi R^2 B/L$; б) $\langle B \rangle = 0.$

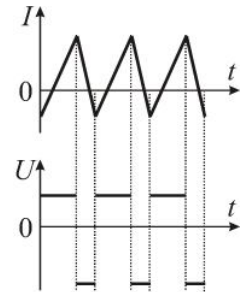


Рис.О.12

Указание: в сверхпроводящем контуре алгебраическая сумма всех ЭДС тождественно равна нулю.

$$4.27. \quad \chi = -\frac{\pi^2 r^4 \mu_0}{La^3} < 0. \text{ Данное «вещество» является диамагнетиком.}$$

4.28. $l = l_0/\gamma$ – лоренцевское сокращение отрезков.

4.29. $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ – лоренцевское замедление хода часов. Указание: с точки зрения наблюдателя в K' – системе события t'_1 и t'_2 произошли в одном и том же месте ($x'_1 = x'_2$).

$$4.30. \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}.$$

$$4.31. \quad \text{а) } s^2 = c^2 \Delta t^2 = 6,6 \cdot 10^{23} \text{ м}^2; \\ \text{б) } s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \cong 6,6 \cdot 10^{23} \text{ м}^2; \text{ в) } s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = 0.$$

$$4.32. \quad c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2.$$

Таким образом, интервал является релятивистским инвариантом.

4.33. $W^2/c^2 - \mathbf{P}^2 = W'^2/c^2 - \mathbf{P}'^2 = m^2 c^2$ – релятивистский инвариант.

$$4.34. \quad v = c \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4.35. \quad v = c \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Указание: кинетическая энергия релятивистской частицы } T = W - W_{\text{покоя}}, \text{ где } W_{\text{покоя}} = mc^2.$$

$$4.36. \quad P = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}.$$

$$4.37. \quad x' = -4,0 \cdot 10^8 \text{ м}, \quad y' = z' = 1,00 \text{ м}. \quad t' = \gamma t = 1,67 \text{ с}.$$

$$4.38. \quad \Delta t' = -\gamma V \Delta x / c^2 = -1,33 \text{ мс}.$$

$$4.39. \quad v_{\text{отн}} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = 0,8 \cdot c.$$

$$4.40. \quad v = v'/\gamma = 4,0 \text{ км/час}.$$

$$4.41. \quad \text{а) } \mathbf{E} \equiv 0; \quad \text{б) } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (b - a) \mathbf{e}_z + \mathbf{E}_0(x, y, z), \quad \text{где}$$

$\mathbf{E}_0(x, y, z)$ – невихревая составляющая.

4.42. Указание: подействовать оператором дивергенции на последнее из уравнений 4.2е и учесть операторное тождество $\nabla \cdot [\nabla \cdot \mathbf{H}] \equiv 0$.

$$4.43. \quad \text{а) } \mathbf{B} = b t \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_0(x, y, z);$$

б) $\mathbf{B} = a t (\mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_x) + \mathbf{B}_0(x, y, z)$; в) $\mathbf{B} = -a t \mathbf{e}_x + \mathbf{B}_0(x, y, z)$. Здесь $\mathbf{B}_0(x, y, z)$ – невихревая составляющая (произвольная не зависящая от времени функция координат, удовлетворяющая условию $[\nabla \cdot \mathbf{B}_0] = 0$).

$$4.44. \quad \text{а) } \mathbf{j}_{\text{см}} = -\frac{B_0}{\mu_0 x_0} \mathbf{e}_y; \quad \text{б) } \mathbf{E} = -\frac{B_0 t}{\mu_0 \epsilon_0 x_0} \mathbf{e}_y.$$

$$4.45. \quad \mathbf{S} = -\frac{B_0^2 c^2 x t}{\mu_0 x_0^2} \mathbf{e}_x. \quad \text{Поток энергии направлен против оси } x;$$

он монотонно нарастает с течением времени.

4.46. Силовые линии можно изобразить в виде системы концентрических окружностей с центром на оси соленоида.

$$E = \begin{cases} \frac{\mu_0 r n}{2} \frac{dI}{dt}, & \text{при } r \leq R; \\ \frac{\mu_0 R^2 n}{2r} \frac{dI}{dt}, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$4.47. \quad E_2 = E, \quad D_2 = 2D = 2\epsilon_0 E.$$

$$4.48. \quad \text{Внутри конденсатора } H = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

$$4.49. \quad S = \frac{I^2 r t}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4}. \quad \text{Поток энергии}$$

через боковую поверхность направлен к оси симметрии конденсатора.

$$4.50. \quad \text{а) } \mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{2q v}{4\pi r^3}; \quad \text{б) } \mathbf{j}_{\text{см}} = -\frac{q v}{4\pi r^3}.$$

$$4.51. \quad H = \frac{q[v a]}{4\pi r^3}.$$

$$4.52. \quad \text{а) } \mathbf{E}' = \gamma[\mathbf{V}\mathbf{B}], \quad E' = 9 \cdot 10^6 \text{ В/м}; \quad \text{б) } \mathbf{B}' = \gamma \mathbf{B}, \quad B' = 0,05 \text{ Тл}.$$

$$4.53. \quad \text{а) } E' = 9 \text{ кВ/м}, \quad \text{tg} \alpha' = \gamma \text{tg} \alpha, \quad \alpha' \approx 51^\circ; \quad \text{б) } \mathbf{B}' = \frac{\gamma[\mathbf{V}\mathbf{E}]}{c^2},$$

$B' = 14 \text{ мкТл}$.

4.54. а) $\mathbf{E}'\mathbf{B}' = \mathbf{E}\mathbf{B}$; б) $E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2$. Оба выражения являются релятивистскими инвариантами.

4.55. а) да; б) нет.

$$4.56. \quad U_{RC} = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = 10 \text{ В}.$$

4.57. а) $I_{\text{эф}} = 71 \text{ мА}$; б) $\varphi = -63^\circ$ (ток опережает напряжение);
в) $P = 4,0 \text{ Вт}$.

$$4.58. \quad \text{а) } Z = R \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + 4\delta}}; \quad \text{б) } \cos \varphi = \frac{1 + 2\delta}{\sqrt{(1 + \delta)(1 + 4\delta)}}, \quad \text{где}$$

$\delta = (R\omega C)^2$ (см. рис.О.13).

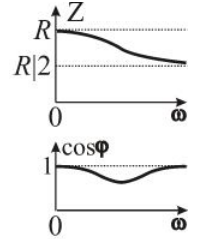


Рис.О.13

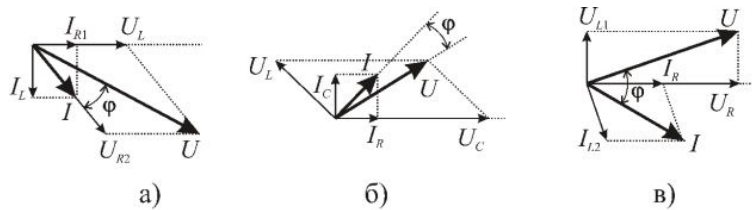


Рис.О.14

4.59. Один из возможных вариантов построения векторных диаграмм для каждой схемы представлен на рис. О.14,а,б,в.

4.60. а) $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2(\omega C - 1/\omega L)^2}}$, $\varphi = \arctg \frac{1 - \omega^2 LC}{R\omega L}$,

б) $Z = R\sqrt{\frac{1 + \delta}{4 + \delta}}$, $\cos\varphi = \frac{2 + \delta}{\sqrt{(1 + \delta)(4 + \delta)}}$, где $\delta = (\omega L/R)^2$;

в) $Z = R\sqrt{\frac{4 + \delta}{1 + \delta}}$, $\cos\varphi = \frac{2 + \delta}{\sqrt{(1 + \delta)(4 + \delta)}}$, где $\delta = (R\omega C)^2$.

4.61. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\pi\nu RC}{(2\pi\nu RC)^2 - 1}$, $\varphi = \pi/4$. Напряжение на выходе

опережает напряжение на входе. У к а з а н и е : см. векторную диаграмму (рис.О.15), на которой входное и выходное напряжения отмечены жирными стрелками.

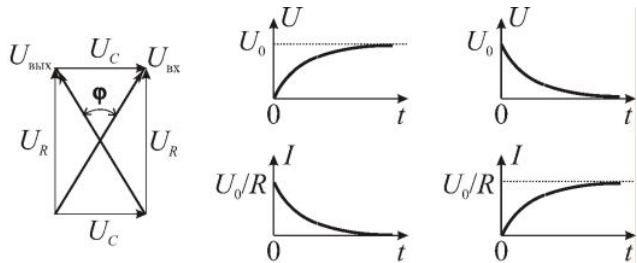


Рис.О.15

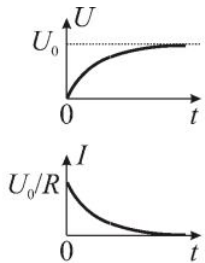


Рис.О.16

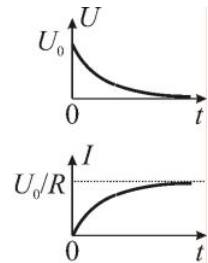


Рис.О.17

4.62. $P_R = UI - U_L I = P(1 - \cos\varphi) = 120$ Вт.

4.63. а) $U = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$; б) $I = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. См. рис.О.16.

4.64. а) $U = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$; б) $I = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. См. рис.О.17.

4.65. а) $U' = U_0 + U_m \cos(\omega t - \alpha)$, где $U_m = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}$,

$\alpha = \arctg(R\omega C)$; б) $RC = 22$ мс.